Séminaire BOURBAKI Mars 2005
57e année, 2004-2005, n$^{\text{o}}$ 944, p. 229 à 246

PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES DANS LES NOMBRES PREMIERS [d'après B. Green et T. Tao]

par **Bernard HOST**

1. INTRODUCTION

1.1. Le résultat

Le but de cet exposé est de présenter un travail récent et spectaculaire de B. Green et T. Tao où ils montrent :

Théorème 1.1 ([6]). — *L'ensemble des nombres premiers contient des progressions arithmétiques de toutes longueurs.*

En fait Green et Tao montrent un résultat plus fort : la conclusion du théorème reste valable si on remplace l'ensemble des nombres premiers par un sous-ensemble de densité relative positive. De plus, la méthode employée permet de déterminer explicitement pour tout k un entier N (très grand) tel que l'ensemble des nombres premiers plus petits que N contienne une progression arithmétique de longueur $k+1$.

Le théorème 1.1 répond à une question fort ancienne bien que difficile à dater exactement. Très peu de résultats partiels étaient connus jusqu'ici ; citons celui de van der Corput [12] qui a montré en 1939 l'existence d'une infinité de progressions de longueur 3 dans les nombres premiers.

En 1923, Hardy et Littlewood [7] ont proposé une conjecture très générale sur la répartition de certaines configurations dans les nombres premiers, qui entraînerait une version quantitative précise du théorème 1.1 si elle s'avérait exacte. Ce même théorème suivrait aussi d'une résolution positive donnée à une conjecture proposée par Erdös et Turán [1] en 1936 :

Conjecture. — *Tout sous-ensemble E de $\mathbb{N}^*$ vérifiant $\sum_{n\in E} 1/n = +\infty$ contient des progressions arithmétiques de toutes longueurs.*

Cette conjecture reste totalement ouverte et les méthodes de Green et Tao ne permettent pas de s'en approcher. Dans une direction voisine, Szemerédi a montré en 1975 l'existence de progressions sous l'hypothèse plus forte de la densité positive. Rappelons que la densité d'un ensemble d'entiers $E \subset \mathbb{N}$ est :

$$d^*(E) = \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \operatorname{Card}(E \cap [0, N-1]).$$

Le théorème de Szemerédi s'énonce :

Théorème de Szemerédi ([9]). — *Tout ensemble d'entiers de densité positive contient des progressions arithmétiques de toutes longueurs.*

Il peut aussi s'exprimer en termes d'ensembles finis d'entiers :

Version finie du théorème de Szemerédi. — *Pour tout entier $k \geqslant 2$ et tout réel $\delta > 0$ il existe un entier $N = N(k,\delta)$ tel que tout sous-ensemble E de $[0, N[$ ayant au moins δN éléments contienne une progression arithmétique de longueur $k+1$.*

Ce théorème ne peut évidemment pas être utilisé directement puisque les nombres premiers ont une densité nulle. Cependant il tient une place centrale dans la démonstration.

1.2. La méthode

Le travail de Green et Tao comporte deux parties très différentes.

La première partie, qui est la plus longue, contient la démonstration d'une extension de la version finie du théorème de Szemerédi (théorème 2.2).

Dans ce dernier théorème, la quantité $|E|/N \geqslant \delta$ peut être vue comme la moyenne sur $[0, N[$ de la fonction indicatrice de E. L'idée naturelle est de remplacer cette fonction indicatrice par une fonction nulle en dehors de l'ensemble des nombres premiers, mais alors cette fonction ne peut pas être choisie majorée par 1 sinon sa moyenne deviendrait arbitrairement petite pour N grand. Green et Tao montrent un théorème de Szemerédi modifié (théorème 2.2) qui s'applique à une fonction majorée par un « poids pseudo-aléatoire », c'est-à-dire par une fonction de moyenne 1 dont les corrélations sont voisines de celles qu'on obtiendrait en tirant au hasard et indépendamment les valeurs aux points $0, 1, \ldots, N-1$ (section 2.2). Cette utilisation d'une majoration fait penser à la méthode du crible.

La démonstration de ce « théorème de Green-Tao Szemerédi » est écrite dans le langage des probabilités. Comme tous les espaces de probabilité sont finis et munis de la mesure uniforme, on pourrait dire qu'elle utilise seulement des arguments de dénombrement. Cette façon de voir serait formellement correcte mais trop réductrice. En fait la démarche de Green et Tao s'inspire directement de la théorie ergodique, et plus précisément de la démonstration ergodique du théorème de Szemerédi donnée par Furstenberg ([2], voir aussi [3]). Dans les deux cas, le cœur de la preuve est un résultat de décomposition (proposition 3.4) consistant à écrire une fonction comme la somme de son espérance conditionnelle sur une σ-algèbre bien choisie et d'un reste. L'espérance conditionnelle est « lissée » et dans le cas considéré par Green et Tao elle est même uniformément bornée, ce qui permet d'utiliser le théorème de Szemerédi classique. Le reste se comporte comme une oscillation aléatoire et sa contribution dans les calculs est négligeable. Les ergodiciens reconnaîtront la façon dont les « facteurs » interviennent dans de nombreux problèmes. Pour les autres, nous ajoutons que l'article n'utilise aucun résultat provenant de la théorie ergodique et que sa lecture ne demande aucune connaissance dans ce domaine.

Cette inspiration ergodique dans une démonstration combinatoire est encore plus apparente dans la nouvelle démonstration que T. Tao vient de donner du théorème de Szemerédi [10]. Nous ne pensons pas que cette démarche soit artificielle. Jusqu'à présent les relations entre ces domaines se résumaient pratiquement au principe de correspondance de Furstenberg qui permet de montrer, à partir de théorèmes ergodiques, des résultats combinatoires dont beaucoup n'ont aujourd'hui pas d'autre preuve. Il apparaît depuis peu des ressemblances de plus en plus prononcées quoiqu'encore mal comprises entre les objets et les méthodes des deux théories. Nous reviendrons dans ces notes sur ce point qui mérite sans doute d'être approfondi.

Une fois démontré le théorème de Szemerédi modifié, il reste à construire un poids pseudo-aléatoire adapté au problème posé. Il s'agit donc ici de théorie des nombres. Dans cette partie de l'article [6] les auteurs utilisent une fonction de von Mangoldt tronquée et font appel à des outils sophistiqués provenant des travaux de Goldston et Yıldırım [4] mais, dans une note non publiée [11], T. Tao explique comment l'argument peut être modifié pour n'utiliser que les propriétés les plus élémentaires des nombres premiers et de la fonction ζ. C'est cette approche que nous suivons ici en nous inspirant de notes manuscrites de J.-C. Yoccoz.

Dans cet exposé, qui ne contient aucune démonstration complète, on se propose de présenter de façon assez détaillée l'organisation de la preuve et de donner une idée des méthodes employées à chaque étape. Le lecteur pressé pourra se limiter à la section 2 qui contient la formulation précise des définitions et résultats correspondant aux deux grandes parties auxquelles on vient de faire allusion, encore que la définition des normes de Gowers (sous-sections 3.1 et 3.2) ait son intérêt propre. Le résultat de décomposition (proposition 3.4) est énoncé dans la sous-section 3.4 et montré dans la section 4. La deuxième partie de la preuve, c'est-à-dire la construction du poids pseudo-aléatoire, est contenue dans la section 5.

1.3. Conventions et notations

Quand f est une fonction définie sur un ensemble fini A, l'*espérance* de f sur A, notée $\mathbb{E}(f(x) \mid x \in A)$ ou $\mathbb{E}(f \mid A)$, est la moyenne arithmétique de f sur A ; la même est utilisée pour les fonctions de plusieurs variables.

Dans toute la suite, $k \geqslant 2$ est un entier que nous considérons comme une constante. L'objectif est de montrer l'existence d'une progression arithmétique de longueur $k+1$

dans les nombres premiers. La progression est cherchée dans l'intervalle $[0, N[$, où N est un (grand) entier qu'il est souvent nécessaire de supposer premier. On identifie $[0, N[$ au groupe $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Il est crucial dans la preuve de contrôler la manière dont toutes les estimations dépendent de N et nous adoptons les conventions suivantes. Dans chaque énoncé, N est supposé fixé mais toutes les constantes sont indépendantes de N. Nous notons $o(1)$ une quantité tendant vers 0 quand N tend vers l'infini, uniformément par rapport à tous les paramètres sauf éventuellement ceux notés en indice. La notation $O(1)$ est employée avec une signification similaire.

2. POIDS PSEUDO-ALÉATOIRES ET THÉORÈME DE GREEN-TAO SZEMERÉDI

Green et Tao généralisent une formulation classique du théorème de Szemerédi, qui est celle sous laquelle Gowers [5] l'a redémontré récemment.

Théorème 2.1. — *Pour tout réel $\delta > 0$ il existe une constante $c(\delta) > 0$ telle que, pour toute fonction $f\colon \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ avec*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \text{ pour tout } x \text{ et } \mathbb{E}\big(f \mid \mathbb{Z}_N\big) \geqslant \delta$$

on ait

$$\mathbb{E}\big(f(x)f(x+t)\cdots f(x+kt) \mid x, t \in \mathbb{Z}_N\big) \geqslant c(\delta). \tag{1}$$

La version finie du théorème de Szemerédi se déduit de ce théorème en prenant pour f la fonction indicatrice d'un sous-ensemble de $[0, N[$. Green et Tao s'affranchissent de la condition $f \leqslant 1$ en la remplaçant par l'hypothèse que f est majorée par un *poids pseudo-aléatoire* ; cette notion sera définie plus loin.

2.1. Les deux ingrédients de la preuve du théorème 1.1

Nous appelons « théorème de Green-Tao Szemerédi » l'extension suivante du théorème de Szemerédi :

Théorème 2.2. — *Soit $\nu\colon \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$ un poids pseudo-aléatoire (voir la sous-section 2.2). Pour tout réel $\delta > 0$ il existe une constante $c'(\delta) > 0$ satisfaisant la propriété suivante. Pour toute fonction $f\colon \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ telle que*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \nu(x) \text{ pour tout } x \text{ et } \mathbb{E}\big(f \mid \mathbb{Z}_N\big) \geqslant \delta$$

on a

$$\mathbb{E}\big(f(x)f(x+t)\cdots f(x+kt) \mid x, t \in \mathbb{Z}_N\big) \geqslant c'(\delta) - o(1). \tag{2}$$

La démonstration de ce théorème, qui occupe une part importante de l'article de Green et Tao, est résumée dans les sections 3 et 4. Pour l'appliquer aux nombres premiers, il faut une fonction f et un poids ν convenables dont l'existence est donnée par le théorème suivant.

THÉORÈME 2.3. — *Il existe une constante positive δ, un poids pseudo-aléatoire $\nu\colon \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$ et une fonction $f\colon \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ avec*

$$\begin{gathered} f \text{ est nulle en dehors de l'ensemble des nombres premiers ;} \\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \nu(x) \text{ pour tout } x \text{ ;} \\ \mathbb{E}(f \mid \mathbb{Z}_N) \geqslant \delta; \\ \|f\|_{L^\infty} = O(1)\, \log N. \end{gathered}$$

La construction de f et ν est faite dans la section 5. Nous montrons maintenant comment le théorème 1.1 découle des théorèmes 2.2 et 2.3.

Démonstration. — Soient δ, f et ν comme dans le théorème 2.3. Il existe un intervalle $J \subset [0, N[$, de longueur plus petite que $N/2$ et tel que $\mathbb{E}(\mathbf{1}_J f \mid \mathbb{Z}_N) \geqslant \delta/3$. Nous utilisons le théorème 2.2 avec la fonction f remplacée par $\mathbf{1}_J f$ et le réel δ remplacé par $\delta/3$.

La contribution dans l'espérance (2) des termes où $t = 0$ est majorée par $N^{-1}\|f\|_{L^\infty}^{k+1} = o(1)$, et est donc inférieure à $c'(\delta)$ si N est assez grand. Il existe donc dans ce cas $x, t \in \mathbb{Z}_N$ avec $t \neq 0$ tels que $f(x)f(x+t)\dots f(x+kt) \neq 0$. Rappelons que dans cette expression $x, x+t, \dots, x+kt$ sont considérés comme des éléments de $\mathbb{Z}_N$ et que donc l'addition est modulo N. Si nous considérons x et t comme des entiers appartenant à l'intervalle $[0, N[$ nous obtenons que f est non nulle aux points $x, x+t \bmod N, \dots, x+kt \bmod N$. Comme elle est nulle en dehors de l'intervalle J de longueur $< N/2$, tous ces entiers appartiennent à cet intervalle et on en déduit facilement qu'ils forment une progression arithmétique non triviale de longueur $k+1$. Enfin, f est nulle en dehors de l'ensemble des nombres premiers et on a bien une progression formée de nombres premiers. □

2.2. Définition des poids pseudo-aléatoires

Dans les théorèmes précédents nous avons considéré un *poids pseudo-aléatoire* comme une fonction définie sur $\mathbb{Z}_N$. Il s'agit plus précisément de la donnée, pour chaque nombre premier N, d'une fonction $\nu = \nu_N\colon \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$, de sorte que soient satisfaites deux conditions asymptotiques appelées *condition sur les formes linéaires* et *condition sur les corrélations.*

La condition sur les formes linéaires. — Ici m_0, t et L sont des constantes entières (ne dépendant que de k) que nous n'explicitons pas.

Soient $m \leqslant m_0$ un entier et $\psi_1, \dots, \psi_m$ des applications de $\mathbb{Z}_N^t$ dans $\mathbb{Z}_N$ de la forme

$$\psi_i(\boldsymbol{x}) = b_i + \sum_{j=1}^{t} L_{i,j} x_j \tag{3}$$

où $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_t)$ et

– pour tout i, b_i est un entier ;

– pour tous i, j, $L_{i,j}$ est un entier avec $|L_{i,j}| \leqslant L$;

– aucun des vecteurs $(L_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant t} \in \mathbb{Z}^t$ n'est nul et ces vecteurs sont deux à deux non colinéaires

alors la condition sur les formes linéaires stipule que

$$\mathbb{E}\big(\nu(\psi_1(\boldsymbol{x})) \cdots \nu(\psi_m(\boldsymbol{x})) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_N^t\big) = 1 + o(1). \tag{4}$$

D'après nos conventions, la quantité $o(1)$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini indépendamment du choix des fonctions ψ_i et en particulier du choix des b_i, qui ne sont pas supposés bornés. Remarquons que la condition des formes linéaires entraîne que la même majoration reste valable s'il y a moins de t variables. En particulier,

$$\mathbb{E}(\nu \mid \mathbb{Z}_N) = 1 + o(1).$$

La condition des corrélations. — Ici encore, q_0 est une constante entière que nous n'explicitons pas.

La condition sur les corrélations stipule qu'il existe une fonction $\tau \colon \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$ avec

$$\text{pour tout } p \geqslant 1,\ \mathbb{E}(\tau^p(x) \mid x \in \mathbb{Z}_N) = O_p(1)$$

telle que, pour tout $q \leqslant q_0$ et tous $h_1, \dots, h_q \in \mathbb{Z}_N$, distincts ou confondus, on ait

$$\mathbb{E}\big(\nu(x+h_1)\nu(x+h_2)\cdots\nu(x+h_q) \mid x \in \mathbb{Z}_N\big) \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant q} \tau(h_i - h_j). \tag{5}$$

Nous remarquons que, si ν est un poids pseudo-aléatoire, alors $(1+\nu)/2$ en est également un. On peut donc sans perte de généralité se restreindre au cas où $\nu(x) > 0$ pour tout x.

3. LES NORMES DE GOWERS

3.1. La définition

Il y a quelques années Gowers a proposé une nouvelle preuve du théorème de Szemerédi [5] à base d'analyse harmonique et de combinatoire. Dans sa démonstration il a introduit une suite de normes sur l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_N)$ des fonctions sur $\mathbb{Z}_N$ à valeurs réelles et les a utilisées pour contrôler les espérances qui apparaissent dans le théorème 2.1.

Green et Tao les utilisent également pour contrôler les espérances du théorème 2.2. Nous donnons ici leur définition.

Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_N)$ on définit par récurrence les quantités $\|f\|_{U^d}$, $d \geqslant 1$, par

$$\|f\|_{U^1} = \Big|\mathbb{E}(f \mid \mathbb{Z}_N)\Big|;$$

$$\|f\|_{U^{d+1}} = \Big(\mathbb{E}\big(\|f \cdot f_t\|_{U^d}^{2^d} \mid t \in \mathbb{Z}_N\big)\Big)^{1/2^{d+1}} \quad \text{pour } d \geqslant 1$$

où f_t est la fonction $x \mapsto f(x+t)$.

Ces quantités peuvent être aussi données par une formule close.

Pour $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_d) \in \{0,1\}^d$ et $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{Z}_N^d$ notons

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{t} = \omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \cdots + \omega_d t_d.$$

On a alors

$$\|f\|_{U^d} = \Big(\mathbb{E}\big(\prod_{\boldsymbol{\omega} \in \{0,1\}^d} f(x + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{t} \,\big|\, x \in \mathbb{Z}_N,\ \boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}_N^d\big)\Big)^{1/2^d}. \tag{6}$$

On vérifie alors facilement que $\|f\|_{U^2}$ est la norme ℓ^4 de la transformée de Fourier de f et que $\|f\|_{U^{d+1}} \geqslant \|f\|_{U^d}$ pour tout $d \geqslant 1$. De plus on obtient :

Proposition 3.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz-Gowers). — *Si $f_{\boldsymbol{\omega}}$, $\boldsymbol{\omega} \in \{0,1\}^d$, sont 2^d fonctions réelles sur $\mathbb{Z}_N$ on a*

$$\Big|\mathbb{E}\Big(\prod_{\boldsymbol{\omega} \in \{0,1\}^d} f_{\boldsymbol{\omega}}(x + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{t} \,\big|\, x \in \mathbb{Z}_N,\ \boldsymbol{t} \in (\mathbb{Z}_N)^d\Big)\Big| \leqslant \prod_{\boldsymbol{\omega} \in \{0,1\}^d} \|f_\omega\|_{U^d}. \tag{7}$$

On en déduit :

Proposition 3.2. — *Pour $d \geqslant 2$ l'application $f \mapsto \|f\|_{U^d}$ est une norme sur $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_N)$.*

On peut facilement étendre ces définitions au cas des fonctions à valeurs complexes.

3.2. Commentaires

Pour $d > 2$ la norme $\|\cdot\|_{U^d}$ est assez difficile à interpréter car elle ne peut apparemment pas être exprimée au moyen des normes classiques. La définition n'est pas simplifiée par l'usage de la transformée de Fourier ; par exemple, la norme $\|\cdot\|_{U^3}$ d'une fonction est la même que celle de sa transformée de Fourier (à une normalisation près).

Cette difficulté provient sans doute du fait que ces normes ont un aspect non commutatif. En effet, il est clairement possible de définir des normes similaires sur l'espace $\mathcal{C}_K(G)$ des fonctions continues à support compact sur un groupe abélien localement compact G. Mais il est sans doute moins évident que la définition de la norme $\|\cdot\|_{U^d}$ s'étend au cas où G est localement compact nilpotent d'ordre $d-1$, et qu'elle peut même être définie sur $\mathcal{C}_K(G/\Gamma)$ lorsque Γ est un sous-groupe fermé d'un groupe G de ce type.

D'une manière indépendante, des semi-normes $\|\!|\cdot|\!\|_d$, $d \geqslant 1$, ont récemment été introduites [8] en théorie ergodique dans l'étude de questions relatives au théorème de Szemerédi où elles servent également à contrôler des espérances ressemblant à celles du théorème 2.1. La définition de ces semi-normes, nettement plus compliquée, ne sera pas donnée ici mais elle est formellement assez similaire à celle des normes de Gowers. Ces semi-normes ont une interprétation simple : elles sont liées à l'existence de quotients du système munis d'une structure d'espace homogène d'un groupe de Lie nilpotent.

Si on admet que les ressemblances de plus en plus nombreuses qui apparaissent entre les deux théories ne sont pas fortuites, il est alors possible de conjecturer que les normes de Gowers s'interprètent au moyen d'une sorte de transformée de Fourier nilpotente, même lorsque le groupe est abélien.

3.3. Normes de Gowers et progressions arithmétiques

La proposition suivante généralise un résultat analogue de Gowers établi sous l'hypothèse plus forte que toutes les fonctions sont bornées par 1. Sa démonstration consiste en une suite ingénieuse d'applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, de changements de variables et de la condition sur les formes linéaires.

Proposition 3.3. — *Soient ν un poids pseudo-aléatoire et $f_0, f_1, \ldots, f_k$ des fonctions sur $\mathbb{Z}_N$ vérifiant*

$$|f_j(x)| \leqslant 1 + \nu(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{Z}_N \text{ et tout } j \text{ avec } 0 \leqslant j \leqslant k.$$

Alors

$$\Big|\mathbb{E}\Big(\prod_{j=0}^{k} f_j(x+jt) \,\Big|\, x, t \in \mathbb{Z}_N\Big)\Big| \leqslant 2^{k+1} \inf_{0\leqslant j\leqslant k} \|f_j\|_{U^k} + o(1).$$

L'utilisation que font Green et Tao de cette proposition est très différente de la manière dont Gowers utilise le résultat analogue pour les fonctions bornées.

Ce dernier procède par dichotomie.

Soient f une fonction sur $\mathbb{Z}_N$ et $c = \mathbb{E}(f \mid \mathbb{Z}_N)$. Si $\|f - c\|_{U^k}$ est petit, alors l'espérance (1) est peu différente de l'espérance obtenue en remplaçant f par c et elle est donc grande. Si au contraire cette norme est grande, alors Gowers montre que la restriction de f à un sous-ensemble pas trop petit de $\mathbb{Z}_N$ présente des régularités qui sont ensuite exploitées.

Green et Tao utilisent une décomposition, où les normes de Gowers jouent un rôle très proche de celui joué par les semi-normes $\|\!|\cdot|\!\|_d$ dans [8]. Lorsque f est une fonction majorée par un poids pseudo-aléatoire, elle peut s'écrire (essentiellement) comme la somme d'une fonction ayant une petite norme et d'une fonction bornée qui est son espérance conditionnelle sur une σ-algèbre (proposition 3.4). La proposition 3.3 permet alors de borner la contribution provenant de la fonction de petite norme. En théorie ergodique on écrit chaque fonction comme somme de son espérance conditionnelle sur une σ-algèbre adaptée et d'une fonction de semi-norme nulle. On utilise ensuite le fait que cette σ-algèbre a une interprétation « géométrique » assez simple.

3.4. σ-algèbres sur $\mathbb{Z}_N$ et un résultat de décomposition

$\mathbb{Z}_N$ étant fini, toute σ-algèbre $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{Z}_N$ est définie par une partition de cet ensemble : les éléments de $\mathcal{B}$ sont les réunions d'atomes de cette partition et les fonctions $\mathcal{B}$-mesurables sont les fonctions constantes sur chaque atome. Quand f est une fonction sur $\mathbb{Z}_N$, son espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{B}$ est la fonction $\mathcal{B}$-mesurable définie par

$$\text{si } A \text{ est l'atome de } \mathcal{B} \text{ contenant } x,\ \mathbb{E}(f \mid \mathcal{B})(x) = \mathbb{E}\big(f \mid A\big) = \frac{\mathbb{E}(\mathbf{1}_A f \mid \mathbb{Z}_N)}{\mathbb{E}(\mathbf{1}_A \mid \mathbb{Z}_N)}.$$

La proposition suivante est la clé de la démonstration du théorème 2.2.

PROPOSITION 3.4. — *Soit ν un poids pseudo-aléatoire. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $N_0(\varepsilon)$ tel que pour tout $N > N_0(\varepsilon)$ on ait la propriété suivante.*

Soit f une fonction sur $\mathbb{Z}_N$ avec $0 \leqslant f(x) \leqslant \nu(x)$ pour tout x. Alors il existe une σ-algèbre $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{Z}_N$, un sous-ensemble Ω de $\mathbb{Z}_N$ appartenant à $\mathcal{B}$ avec

$$\mathbb{E}(\nu\, \mathbf{1}_\Omega \mid \mathbb{Z}_N) = o_\varepsilon(1); \tag{8}$$

$$\|(1-\mathbf{1}_\Omega)\, \mathbb{E}(\nu - 1 \mid \mathcal{B})\|_{L^\infty} = o_\varepsilon(1) \tag{9}$$

$$\|(1-\mathbf{1}_\Omega)\, (f - \mathbb{E}(f \mid \mathcal{B}))\|_{U^k} \leqslant \varepsilon. \tag{10}$$

On donne dans la section 4 un résumé de la preuve de cette proposition. Admettant ce résultat pour le moment, nous indiquons comment on peut en déduire le théorème 2.2.

3.5. Démonstration du théorème 2.2 à partir des propositions 3.1 et 3.4

Soient ν, f et δ comme dans le théorème. Soient $\varepsilon > 0$ un paramètre suffisamment petit et $\mathcal{B}$, Ω comme dans la proposition 3.4. Nous supposons que N est suffisamment grand. Posons

$$g = (1-\mathbf{1}_\Omega)\, \mathbb{E}(f \mid \mathcal{B}) \text{ et } h = (1-\mathbf{1}_\Omega)\, \big(f - \mathbb{E}(f \mid \mathcal{B})\big).$$

Comme $f \leqslant \nu$ nous avons

$$\mathbb{E}(g \mid \mathbb{Z}_N) \geqslant \mathbb{E}(f \mid \mathbb{Z}_N) - \mathbb{E}\big(\mathbf{1}_\Omega\, \mathbb{E}(\nu \mid \mathcal{B}) \mid \mathbb{Z}_N\big) = \mathbb{E}(f \mid \mathbb{Z}_N) - \mathbb{E}(\mathbf{1}_\Omega\, \nu \mid \mathbb{Z}_N) \geqslant \delta - o_\varepsilon(1) \tag{11}$$

car $\Omega \in \mathcal{B}$ et d'après (8). De plus

$$0 \leqslant g \leqslant (1-\mathbf{1}_\Omega)\, \mathbb{E}(\nu \mid \mathcal{B}) \leqslant 1 + o_\varepsilon(1) \tag{12}$$

d'après (9). Ainsi, $|h| \leqslant f + g \leqslant 1 + \nu + o_\varepsilon(1)$ et par ailleurs $\|h\|_{U^k} \leqslant \varepsilon$ d'après (10).

Comme $0 \leqslant g+h \leqslant f$, l'espérance (2) apparaissant dans le théorème est minorée par la même espérance avec f remplacée par $g+h$. Cette dernière expression s'écrit comme somme de 2^{k+1} espérances de la forme

$$\mathbb{E}\big(f_0(x)f_1(x+t)\cdots f_k(x+kt) \mid x,t\in\mathbb{Z}_N\big) \tag{13}$$

où chacune des fonctions f_i, $0\leqslant i\leqslant k$, est égale à g ou à h. Ainsi, $|f_i|\leqslant 1+\nu+o_\varepsilon(1)$ pour tout i.

Le terme principal est celui où toutes les fonctions f_i sont égales à g ; en effet la majoration (12) permet d'utiliser le théorème de Szemerédi (théorème 2.1) et la minoration (11) entraîne donc que ce terme est minoré par $c\big(\delta-o_\varepsilon(1)\big)$. Tous les autres termes ont une valeur absolue majorée par $2^{k+1}\varepsilon+o_\varepsilon(1)$ d'après la proposition 3.3.

En choisissant ε assez petit nous obtenons donc la minoration annoncée de l'espérance (2), avec $c'(\delta)=c(\delta)$. □

Remarque. — Le résultat obtenu est plus fort que ce qui est réellement nécessaire, à savoir $c'(\delta)>0$. Il serait sans doute possible de modifier la démonstration en affaiblissant les conditions imposées à ν tout en conservant la propriété annoncée.

4. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.4

Cette section est la plus technique de ces notes et les lecteurs qui ne seraient pas intéressés par les détails sont invités à passer directement à la suivante.

4.1. Les fonctions duales

Soit f une fonction réelle sur $\mathbb{Z}_N$. Pour $x\in\mathbb{Z}_N$ définissons

$$\mathcal{D}f(x)=\mathbb{E}\Big(\prod_{\substack{\boldsymbol{\omega}\in\{0,1\}^k\\ \boldsymbol{\omega}\neq\mathbf{0}}} f(x+\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{t})\,\Big|\,\boldsymbol{t}\in\mathbb{Z}_N^k\Big)$$

où $\mathbf{0}$ représente l'élément $(0,0,\dots,0)$ de $\{0,1\}^k$. $\mathcal{D}f$ est appelée la *fonction duale* (d'ordre k) de f.

Écrivons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire sur $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_N)$ donné par $\langle f,g\rangle=\mathbb{E}(fg\mid\mathbb{Z}_N)$. La définition des normes et l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Gowers entraînent immédiatement :

LEMME 4.1. — *Pour toute fonction $f\in\mathcal{C}(\mathbb{Z}_N)$,*

$$\|f\|_{U^k}=\langle f,\mathcal{D}f\rangle=\sup\big\{\big|\langle f,\mathcal{D}g\rangle\big|\ ;\ g\in\mathcal{C}(\mathbb{Z}_N),\ \|g\|_{U^k}\leqslant 1\big\}.$$

Ainsi, la boule unité pour la norme duale de $\|\cdot\|_{U^k}$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{\mathcal{D}f \; ; \; \|f\|_{U^k} \leqslant 1\}$. Cette norme duale n'est malheureusement pas une norme d'algèbre (la norme d'un produit n'est pas majorée par le produit des normes), ce qui simplifierait beaucoup la démonstration. Dans sa preuve du théorème de Szemerédi [10], Tao construit une norme d'algèbre qui est majorée par la norme duale. Cette construction est formellement très proche de la construction de la « tour d'extensions isométriques » de Furstenberg.

Pour comprendre le rôle joué par les fonctions duales, imaginons la situation où nous avons une fonction f telle que $\|f\|_{U^k}$ soit « grande » et que $\|\mathcal{D}f\|_{L^2}$ ne soit pas « trop grande ». Supposons aussi que nous savons construire une σ-algèbre $\mathcal{B}$ par rapport à laquelle $\mathcal{D}f$ est mesurable au moins approximativement. Alors, comme le produit scalaire de f et $\mathcal{D}f$ est grand, l'espérance $\mathbb{E}(f \mid \mathcal{B})$ aura une norme L^2 assez grande. Cette méthode est utilisée de manière itérative dans les sous-sections suivantes pour construire la σ-algèbre de la proposition 3.4.

4.2. Poids pseudo-aléatoires et fonctions duales

Dans toute la suite de cette section, ν désigne un poids pseudo-aléatoire et nous étudions les propriétés des fonctions duales des fonctions majorées par ν ou par $1+\nu$.

Rappelons que la condition sur les formes linéaires entraîne que $\mathbb{E}(\nu \mid \mathbb{Z}_N) = 1 + o(1)$. On a plus précisément

$$\|\nu - 1\|_{U^k} = o(1). \tag{14}$$

Nous obtenons de même :

Lemme 4.2. — *Si f est une fonction sur $\mathbb{Z}_N$ vérifiant $|f| \leqslant 1+\nu$ alors $\|\mathcal{D}f\|_{L^\infty} \leqslant 2^{2^k-1} + o(1)$.*

Nous notons désormais I un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ tel que $\mathcal{D}f(x) \in I$ pour tout x et toute fonction f avec $|f| \leqslant 1+\nu$.

Proposition 4.3. — *Soient $m \geqslant 1$ un entier et $f_1, \dots, f_m$ des fonctions sur $\mathbb{Z}_N$ vérifiant $|f_i| \leqslant 1+\nu$ pour tout i, et soit Φ une fonction continue sur le cube I^m. Alors la fonction ψ sur $\mathbb{Z}_N$ définie par*

$$\psi(x) = \Phi\big(\mathcal{D}f_1(x), \dots, \mathcal{D}f_m(x)\big)$$

satisfait la relation

$$\langle \nu - 1, \psi \rangle = o_{m,\Phi}(1).$$

De plus, cette estimation est uniforme en Φ si l'on impose à cette fonction de rester dans un compact au sens de la convergence uniforme.

Pour montrer cette proposition on se ramène facilement au cas où $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_1 x_2 \cdots x_m$ et on utilise la condition des corrélations. C'est le seul endroit de la preuve où cette condition est utilisée.

4.3. Construction d'une σ-algèbre

Nous introduisons ici une construction qui sera utilisée de manière répétée dans la section suivante pour montrer la proposition 3.4. Ici $\varepsilon > 0$ est un paramètre et $\sigma \in]0, 1/2[$ est un paramètre accessoire qui devra être choisi soigneusement en fonction de ε. On se donne une fonction continue $\psi\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, à support dans $[0,1]$ et égale à 1 sur $[\sigma, 1-\sigma]$. Nous supposons toujours que N est suffisamment grand.

Soit f une fonction sur $\mathbb{Z}_N$ avec $|f| \leqslant 1+\nu$ et notons $F = \mathcal{D}f$.

Soient $\alpha \in]0,1]$ et $\mathcal{B}$ la σ-algèbre dont les atomes sont les ensembles A de la forme

$$A = \{x \in \mathbb{Z}_N \ ; \ \varepsilon^{2^{k+1}}(n+\alpha) \leqslant F(x) < \varepsilon^{2^{k+1}}(n+1+\alpha)\} \tag{15}$$

où n est un entier tel que cet ensemble ne soit pas vide. Le paramètre α est introduit pour éviter les effets de bord : il pourrait en effet arriver que les valeurs de la fonction F s'accumulent près des points $n\varepsilon^{2^{k+1}}$ mais, pour un choix convenable de α, l'ensemble

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{x \in \mathbb{Z}_N \ ; \ \varepsilon^{2^{k+1}}(n+\alpha-\sigma) \leqslant F(x) \leqslant \varepsilon^{2^{k+1}}(n+\alpha+\sigma)\}$$

vérifie

$$\mathbb{E}\big(\mathbf{1}_E\,(1+\nu) \mid \mathbb{Z}_N\big) = \sigma\, O(1). \tag{16}$$

Par construction, on a clairement,

$$\big\|F - \mathbb{E}(F \mid \mathcal{B})\big\|_{L^\infty} \leqslant \varepsilon^{2^{k+1}}. \tag{17}$$

Comme F est bornée (lemme 4.2), le nombre d'atomes de $\mathcal{B}$ est un $O_\varepsilon(1)$.

Appelons un atome A de $\mathcal{B}$ *mauvais* si $\mathbb{E}\big((1+\nu)\mathbf{1}_A \mid \mathbb{Z}_N\big) < \sigma^{1/2}$ et notons Ω la réunion des mauvais atomes. Alors $\Omega \in \mathcal{B}$ et

$$\mathbb{E}\big((1+\nu)\mathbf{1}_\Omega \mid \mathbb{Z}_N\big) = \sigma^{1/2}\, O_\varepsilon(1). \tag{18}$$

Soient maintenant A un *bon* atome, n l'entier correspondant dans la définition (15) et $J = [\varepsilon^{2^{k+1}}(n+\alpha, \varepsilon^{2^{k+1}}(n+1+\alpha)[$. Posons $\Phi_A(x) = \psi\big(\varepsilon^{-2^{k+1}}(x-n-\alpha)\big)$. La proposition 4.3 permet de majorer $\Phi_A \circ F$ et la propriété (16) permet de contrôler le terme d'erreur $\mathbf{1}_A - \Phi_A \circ F = (\mathbf{1}_J - \Phi_A)\circ F$. Nous obtenons

$$\mathbb{E}\big((\nu(x)-1)\mathbf{1}_A(x) \mid x \in A\big) = \sigma^{1/2}\, O_\varepsilon(1) + o_{\varepsilon,\sigma}(1).$$

On en déduit que

$$\big\|(1-\mathbf{1}_\Omega)\,\mathbb{E}(\nu - 1 \mid \mathcal{B})\big\|_{L^\infty} = 0_\varepsilon(1). \tag{19}$$

Supposons maintenant qu'au lieu d'une fonction f nous avons une famille finie $(f_1, \ldots, f_m)$ de fonctions vérifiant toutes $|f_i| \leqslant 1+\nu$. Alors par la même méthode nous pouvons construire une σ-algèbre $\mathcal{B}$ et un ensemble $\Omega \in \mathcal{B}$ vérifiant les propriétés (18) et (19) et tels que l'approximation uniforme (17) soit valable pour chacune des fonctions $F_i = \mathcal{D}f_i$, tous les termes $o(1)$ et $O(1)$ dépendant aussi du nombre m de fonctions.

4.4. Une récurrence

Soit maintenant f une fonction avec $0 \leqslant f \leqslant \nu$. Nous allons utiliser la construction précédente de façon répétée, construisant de proche en proche une suite (f_j) de fonctions, une suite $(\mathcal{B}_j)$ de σ-algèbres et une suite (Ω_j) d'ensembles appartenant à $\mathcal{B}_j$.

Posons $f_1 = f$ et soient $\mathcal{B}_1$ la σ-algèbre grossière $\{\varnothing, \mathbb{Z}_N\}$ et $\Omega_1 = \varnothing$.

Supposons que les constructions ont été faites jusqu'au rang j. Nous posons

$$f_{j+1} = (1 - \mathbf{1}_{\Omega_j}) \big(f - \mathbb{E}(f \mid \mathcal{B}_j)\big)$$

et distinguons deux cas.

– Si $\|f_{j+1}\|_{U^k} \leqslant \varepsilon$ nous arrêtons l'algorithme ;

– sinon nous employons la méthode précédente avec la famille de fonctions $(f_1, \ldots, f_{j+1})$ pour définir la σ-algèbre $\mathcal{B}_{j+1}$ et l'ensemble Ω_{j+1} et nous itérons l'algorithme, ce qui est possible car $|f_{j+1}| \leqslant 1 + \nu$, à multiplication près par un terme de la forme $1 + \sigma^{1/2} O_\varepsilon(1)$.

Montrons que cet algorithme s'arrête après un nombre borné d'étapes. S'il ne s'arrête pas à l'étape j alors $\|f_{j+1}\|_{U^k}^{2^k} = \mathbb{E}(f_{j+1} \mathcal{D} f_{j+1}) \geqslant \varepsilon^{2^k}$. Imaginons pour simplifier que le petit ensemble Ω_j est vide. Nous aurions alors $f_{j+1} = f - \mathbb{E}(f \mid \mathcal{B}_j)$ et comme par construction $\mathcal{D} f_{j+1}$ est uniformément proche de $\mathbb{E}(\mathcal{D} f_{j+1} \mid \mathcal{B}_{j+1})$, cette inégalité nous permettrait de minorer

$$\mathbb{E}\Big(\big(f - \mathbb{E}(f \mid \mathcal{B}_j)\big)\, \mathbb{E}(\mathcal{D} f_{j+1} \mid \mathcal{B}_{j+1})\Big) = \mathbb{E}\Big(\big(\mathbb{E}(f \mid \mathcal{B}_{j+1}) - \mathbb{E}(f \mid \mathcal{B}_j)\big)\, \mathbb{E}(\mathcal{D} f_{j+1} \mid \mathcal{B}_{j+1})\Big)$$

et donc aussi $\|\mathbb{E}(f \mid \mathcal{B}_{j+1}) - \mathbb{E}(f \mid \mathcal{B}_j)\|_{L^2}$ en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Les calculs précis permettent en fait de borner inférieurement la quantité positive

$$\|(1 - \mathbf{1}_{\Omega_{j+1}})\, \mathbb{E}(f \mid \mathcal{B}_{j+1})\|_{L^2}^2 - \|(1 - \mathbf{1}_{\Omega_j})\, \mathbb{E}(f \mid \mathcal{B}_j)\|_{L^2}^2.$$

Comme $\|(1 - \mathbf{1}_{\Omega_j})\, \mathbb{E}(f \mid \mathcal{B}_j)\|_{L^2}$ est majoré par $\|f\|_{L^2}$, cela prouve que l'algorithme s'arrête en temps borné.

La dernière σ-algèbre et le dernier ensemble Ω construits vérifient alors les propriétés de la proposition 3.4. □

5. UN POIDS PSEUDO-ALÉATOIRE

Il nous reste à construire une fonction f nulle en dehors des nombres premiers et un poids pseudo-aléatoire ν vérifiant les hypothèses du théorème 2.2.

Dans cette section nous notons P l'ensemble des nombres premiers et la lettre p désigne toujours un nombre premier. Rappelons la définition de deux fonctions classiques.

– ϕ est la fonction indicatrice d'Euler : pour tout entier $x > 0$, $\phi(x)$ est le nombre d'entiers compris entre 1 et x et premiers avec x.

– μ est la fonction de Möbius :

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0\,; \\ (-1)^\ell & \text{si } x \text{ est le produit de } \ell \text{ nombres premiers distincts}\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5.1. La fonction f et le poids ν

Nous nous donnons une fois pour toutes

– une fonction $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support dans $[-1, 1]$, avec $\chi(0) > 0$ et $\int_0^\infty (\chi'(x))^2\, dx = 1$;
– $w = w(N)$ une fonction entière tendant vers l'infini très lentement, par exemple de l'ordre de $\log\log N$.

De plus nous notons

– $W = W(N)$ le produit des nombres premiers $\leqslant w(N)$;
– $R = N^\alpha$ où α est une constante positive suffisamment petite.

Soit b un entier qui sera défini plus bas ; définissons la fonction f sur $[0, N[$ par

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{\phi(W)}{W} \log(Wn + b) & \text{si } Wn + b \geqslant R \text{ et } Wn + b \text{ est premier} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{20}$$

Rappelons l'estimation élémentaire de Tchébytchev pour le nombre $\pi(x)$ de nombres premiers inférieurs où égaux à x :

$$c_1 \frac{x}{\log x} \leqslant \pi(x) \leqslant c_2 \frac{x}{\log x}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes positives. On en déduit (sans utiliser le théorème de Dirichlet) qu'on peut choisir $b \in [1, W[$, premier avec W et tel que pour N assez grand on ait $\mathbb{E}(f(n) \mid n \in [0, N[) \geqslant \delta$, où $\delta > 0$ est une constante.

Pour tout n entier nous posons

$$\lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\, \chi\Big(\frac{\log d}{\log R}\Big) \tag{21}$$

et nous définissons

$$\nu(n) = \frac{\phi(W)}{W} \log R \cdot \lambda^2(Wn + b). \tag{22}$$

On vérifie facilement que pour tout $n \in [0, N[$ on a $0 \leqslant f(n) \leqslant c\nu(n)$ pour une certaine constante positive c. Ainsi la fonction f vérifie (à une normalisation près) les propriétés annoncées dans le théorème 2.3.

Il reste à montrer que ν est un poids pseudo-aléatoire, c'est-à-dire que cette fonction vérifie la condition sur les formes linéaires et la condition sur les corrélations. Nous ne

donnons pas ici la preuve de ces propriétés et nous contentons de montrer comment obtenir l'estimation
$$\mathbb{E}(\nu \mid \mathbb{Z}_N) = 1 + o(1).$$
La méthode qui suit n'est sans doute pas la plus simple possible mais elle contient les principaux ingrédients utilisés dans la démonstration complète et éclaire le rôle joué par le paramètre R et par la fonction χ. Intuitivement, le rôle du paramètre w est d'éliminer les perturbations produites par les petits nombres premiers. Soit en effet $p \in P$. Les nombres premiers se répartissent dans $p-1$ classes de congruence modulo p, ce qui cause une irrégularité d'ordre $1/p$, non négligeable si p est trop petit devant N.

5.2. Une réécriture

$\mathbb{E}(\nu \mid \mathbb{Z}_N)$ est le produit par $C = W^{-1}\phi(W)\log R$ de

$$\sum_{d,d'} \mu(d)\mu(d')\,\chi\Big(\frac{\log d}{\log R}\Big)\,\chi\Big(\frac{\log d'}{\log R}\Big)\,\mathbb{E}(\mathbf{1}_{d,d'}(x) \mid x \in \mathbb{Z}_N) \tag{23}$$

où d, d' sont des entiers positifs et
$$\mathbf{1}_{d,d'}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \textsc{ppcm}(d,d') \text{ divise } Wx+b\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Nous évaluons $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{d,d'} \mid \mathbb{Z}_N)$. À cause des facteurs $\mu(d)$ et $\mu(d')$ nous pouvons nous restreindre au cas où d et d' sont sans carré et écrire
$$d = \prod_p p^{\omega_p};\ d' = \prod_p p^{\omega'_p}$$
où $\boldsymbol{\omega} = (\omega_p\ ;\ p \in P)$ et $\boldsymbol{\omega}' = (\omega'_p\ ;\ p \in P)$ sont des suites à valeurs dans $\{0,1\}$. Définissons $E_p(\eta)$ pour $p \in P$ et $\eta \in \{0,1\}$ par

$$E_p(0) = 1;\ E_p(1) = 0 \text{ si } p \leqslant w \text{ et } E_p(1) = \frac{1}{p} \text{ si } p > w. \tag{24}$$

Nous avons

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{d,d'} \mid \mathbb{Z}_N) = \prod_p E_p(\max(\omega_p, \omega'_p)) + N^{-1}\,O(1). \tag{25}$$

En effet, s'il existe un premier p avec $p \leqslant w$ et $\max(\omega_p, \omega'_p) = 1$ alors $\mathbf{1}_{d,d'}(x) = 0$ pour tout x puisque p divise W et est premier avec b. Dans le cas contraire la proportion des $x \in \mathbb{Z}_N$ tels que $\textsc{ppcm}(d,d')$ divise $Wx+b$ est $1/\textsc{ppcm}(d,d')$ à un $N^{-1}\,O(1)$ près.

Nous comprenons maintenant le rôle de la troncature effectuée par la fonction χ dans la définition de ν : pour tous les d considérés, les entiers $1, \dots, N-1$ se répartissent suffisamment uniformément dans les classes de congruence modulo d. En effet, la somme (23) contient au maximum R^2 termes non nuls et la somme des erreurs

$N^{-1}\,O(1)$ est donc de la forme $R^2N^{-1}O(1)$; le produit par C de cette expression est un $o(1)$ puisque R est une petite puissance de N.

Ainsi, en reportant l'estimation (25) dans (23) et en remplaçant la fonction de Möbius par sa définition, nous obtenons

$$(26)\quad \mathbb{E}(\nu \mid \mathbb{Z}_N)$$
$$= o(1) + C\sum_{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}'} \chi\Big(\frac{\sum_p \omega_p \log p}{\log R}\Big)\,\chi\Big(\frac{\sum_p \omega'_p \log p}{\log R}\Big)\,\prod_p (-1)^{\omega_p+\omega'_p} E_p(\max(\omega_p,\omega'_p)).$$

5.3. Transformée de Fourier

Dans l'article [6], Green et Tao utilisent une troncature brutale de la somme (21) définissant la fonction λ, comme dans les travaux de Goldston et Yıldırım. L'emploi de la fonction lisse χ permet de se servir de la transformée de Fourier. Nous écrivons

$$(27)\qquad \chi(x) = \int \tau(t) e^{-x(1+it)}\,dt$$

où τ est une fonction à décroissance rapide. La somme dans la formule (26) se met alors aisément sous la forme

$$(28)\qquad \iint \tau(t)\tau(t')\,\prod_p Z_p(t,t')\,dt\,dt'$$

où, en notant

$$z = \frac{1+it}{\log R} \text{ et } z' = \frac{1+it'}{\log R}$$

nous avons

$$Z_p(t,t') = \sum_{\eta,\eta'\in\{0,1\}} (-1)^{\eta+\eta'}\,E_p(\max(\eta,\eta'))\,p^{-\eta z-\eta' z'}.$$

En remplaçant les E_p par leurs valeurs (24) nous obtenons

$$Z_p(t,t') = \begin{cases} 1 & \text{si } p \leqslant w\,;\\ 1-p^{-1-z}-p^{-1-z'}+p^{-1-z-z'} & \text{si } p > w.\end{cases}$$

Il vient alors

$$\prod_p Z_p(t,t') = \prod_{p>w}\big(1-p^{-1-z}-p^{-1-z'}+p^{-1-z-z'}\big)$$
$$= (1+o(1))\prod_{p>w}\frac{(1-p^{-1-z})(1-p^{-1-z'})}{1-p^{-1-z-z'}}$$

car w tend vers l'infini avec N et donc

$$(29)\quad \prod_p Z_p(t,t') = (1+o(1))\frac{\zeta(1+z+z')}{\zeta(1+z)\zeta(1+z')}\Big(\prod_{p\leqslant w}\frac{(1-p^{-1-z})(1-p^{-1-z'})}{1-p^{-1-z-z'}}\Big)^{-1}.$$

Nous écrivons l'intégrale (28) comme somme de l'intégrale pour t, t' appartenant à l'intervalle $J = [-(\log R)^{1/2}, (\log R)^{1/2}]$ et d'un reste qui est de la forme $C^{-1}o(1)$ à cause de la décroissance rapide de la fonction τ.

Soient maintenant t et t' appartenant à J. Comme W est très petit devant $(\log R)^{1/2}$ nous avons

$$\prod_{p\leqslant w} \frac{(1-p^{-1-z})(1-p^{-1-z'})}{1-p^{-1-z-z'}} = (1+o(1)) \prod_{p\leqslant w}(1-p^{-1}) = (1+o(1))\,\frac{\phi(W)}{W}.$$

D'autre part, l'estimation élémentaire

$$\zeta(1+s) \sim \frac{1}{s} \text{ quand } s \longrightarrow 0 \text{ avec } \operatorname{Re}(s) > 0$$

nous donne

$$\frac{\zeta(1+z+z')}{\zeta(1+z)\zeta(1+z')} = (1+o(1))\,\frac{zz'}{z+z'} = (1+o(1))\,\frac{1}{\log R}\,\frac{(1+it)(1+it')}{2+it+it'}.$$

En reportant ces valeurs dans (29) nous obtenons

$$\iint_{J\times J} \prod_p Z_p(t,t') = C^{-1}\,(1+o(1)) \iint_{J\times J} \tau(t)\tau(t')\,\frac{(1+it)(1+it')}{2+it+it'}\,dt\,dt'.$$

Comme τ est à décroissance rapide, l'intégrale de la deuxième fonction en dehors de $J \times J$ est de un $C^{-1}\,o(1)$ et nous obtenons

$$\iint \prod_p Z_p(t,t') = C^{-1}\,(1+o(1)) \iint \tau(t)\tau(t')\frac{(1+it)(1+it')}{2+it+it'}\,dt\,dt'.$$

Cette dernière intégrale s'écrit

$$\int_0^{+\infty} ds \iint \tau(t)\tau(t')(1+it)(1+it')e^{-s(2+it+it')}\,dt\,dt' = \int_0^{+\infty} (\chi'(s))^2\,ds = 1$$

et on a donc bien $\mathbb{E}(\nu \mid \mathbb{Z}_N) = 1 + o(1)$. □

RÉFÉRENCES

[1] P. Erdös & T. Turán – « On some sequences of integers », *J. London Math. Soc.* **11** (1936), p. 261–264.

[2] H. Furstenberg – « Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions », *J. Analyse Math.* **31** (1977), p. 204–256.

[3] H. Furstenberg, Y. Katznelson & D. Ornstein – « The ergodic theoretical proof of Szemerédi's theorem », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **7** (1982), p. 527–552.

[4] D. Goldston & C.Y. Yildirim – « Small Gaps Between Primes I », prépublication ; arXiv : `math.NT/0504336`.

[5] T. Gowers – « A new proof of Szemerédi's theorem », *Geom. Funct. Anal.* **11** (2001), p. 465–588.

[6] B. Green & T. Tao – « The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions », *Ann. of Math. (2)* (2004), à paraître ; arXiv : `math.NT/0404188`.

[7] G.H. Hardy & J.E. Littlewood – « Some problems of "partition numerorum" III : on the expression of a number as a sum of primes », *Acta Arith.* **44** (1923), p. 1–70.

[8] B. Host & B. Kra – « Nonconventional ergodic averages and nilmanifolds », *Ann. of Math. (2)* **161** (2005), p. 397–488.

[9] E. Szemerédi – « On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression », *Acta Arith.* **27** (1975), p. 199–245.

[10] T. Tao – « A quantitative ergodic proof of Szemerédi's theorem », *Electron. J. Combin.*, à paraître ; arXiv : `math.CO/0405251`.

[11] ———, « A remark on Goldston-Yıldırım correlation estimates », prépublication disponible à : `http://www.math.ucla.edu/~tao/preprints`.

[12] J.G. van der Corput – « Über Summen von Primzahlen und Primzahlquadraten », *Math. Ann.* **116** (1939), p. 1–50.

Bernard HOST

Université Marne-La-Vallée
UMR 8050 du CNRS
UFR de Mathématiques
Cité Descartes
5, boulevard Descartes
Champs-sur-Marne
F–77454 Marne-la-Vallée Cedex 2
E-mail : `Bernard.Host@univ-mlv.fr`