Séminaire BOURBAKI Novembre 2004
57^{e} année, 2004-2005, n^{o} 942, p. 165 à 197

CORRESPONDANCES DE HECKE, ACTION DE GALOIS ET LA CONJECTURE D'ANDRÉ–OORT
[d'après Edixhoven et Yafaev]

par **Rutger NOOT**

1. INTRODUCTION

Il y a une analogie très forte entre les conjectures de Manin–Mumford et d'André–Oort, dont la première est en effet un théorème dû à Raynaud. Dans les deux cas, on considère une certaine classe de variétés algébriques : les variétés abéliennes dans la première et les variétés de Shimura dans la deuxième conjecture. Dans chaque cas, on définit ensuite la notion de sous-variété (irréductible) *spéciale*. Dans le cas de variétés abéliennes, on parlera de *sous-variétés de torsion*, dans le cas des variétés de Shimura de *sous-variétés de type Hodge*. Une sous-variété spéciale de dimension nulle est un *point spécial*. Les définitions, dans le cas des variétés de Shimura, peuvent être consultées dans les paragraphes 2.1 et 2.2, l'analogie avec la conjecture de Manin–Mumford sera expliquée en détail dans 3.1. Les deux conjectures s'énoncent alors de la manière suivante.

Conjecture 1.1 (*cf.* Conjecture 2.3). — *Soient S une variété de l'espèce considérée et $\Sigma \subset S$ un ensemble de points spéciaux. Alors les composantes irréductibles de l'adhérence de Zariski de Σ sont des sous-variétés spéciales de S.*

On reviendra plus tard, dans les paragraphes 3.1 et 5.1, sur l'analogie entre ces deux conjectures. La suite de cette introduction sera consacrée au cas le plus simple où la conjecture d'André–Oort n'est pas triviale. Cet exemple sera développé, dans le langage plus savant des variétés de Shimura, dans le paragraphe 5.2.

Soit $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ le *demi-plan de Poincaré*. Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ opère sur $\mathbb{H}$ par les transformations de Moebius. Cette action est transitive et induit une action fidèle de groupe quotient $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$. On obtient une action de $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$ et on peut montrer que le quotient $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ est une variété analytique. C'est le

L'auteur a bénéficié du soutien du programme MRTN de l'Union Européenne, dans le cadre du réseau *Arithmetic Algebraic Geometry* (contrat MRTN-CT2003-504917).

premier exemple d'une variété de Shimura. La fonction modulaire $j\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ (dont on peut trouver la définition dans [36, Chap. VII] par exemple) est Γ-invariante et elle induit un isomorphisme $\Gamma\backslash\mathbb{H} \cong \mathbb{C}$. Un élément z du quotient $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ est dit *spécial* si c'est la classe d'un élément $\tau \in \mathbb{H}$ qui est algébrique sur $\mathbb{Q}$ de degré 2, donc nécessairement quadratique imaginaire. On note que cette condition ne dépend pas du représentant τ choisi. De même, un point $z \in \mathbb{C}$ est *spécial* si c'est l'image d'un élément spécial de $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ sous l'isomorphisme ci-dessus. Dans ce cas, on dit aussi que z est un invariant modulaire *singulier*. Les points spéciaux de $\mathbb{C}$ sont donc les nombres $j(\tau)$ avec $\tau \in \mathbb{H}$ quadratique imaginaire. On peut montrer, et cela traduit un principe général dans la théorie de variétés de Shimura, que tout point spécial de $\mathbb{C}$ est un nombre algébrique.

La théorie présentée ci-dessus possède une interprétation naturelle en termes de courbes elliptiques. Pour tout $\tau \in \mathbb{H}$, le quotient $E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ est une courbe elliptique complexe et toute courbe elliptique sur $\mathbb{C}$ est isomorphe à une courbe de cette forme. Deux courbes E_τ et $E_{\tau'}$ sont isomorphes si et seulement si $j(\tau) = j(\tau')$, de sorte que l'invariant modulaire $j(\tau)$ définit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de courbes elliptiques complexes et $\mathbb{C}$. En plus, pour $F \subset \mathbb{C}$ algébriquement clos, une courbe elliptique peut être définie sur F si et seulement si son invariant modulaire appartient à F. Une courbe elliptique est de *type CM* si son anneau d'endomorphismes $\mathrm{End}(E_\tau)$ n'est pas réduit à $\mathbb{Z}$. Pour la courbe E_τ (avec $\tau \in \mathbb{H}$) cela est le cas si et seulement si τ est quadratique imaginaire et $\mathrm{End}(E_\tau)$ est alors un ordre dans le corps $\mathbb{Q}(\tau)$. Les points spéciaux de $\mathbb{C}$ sont donc les points correspondant aux courbes elliptiques de type CM. Comme une courbe de type CM peut être définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, cela implique que les points spéciaux de $\mathbb{C}$ sont algébriques.

La conjecture d'André–Oort étant triviale pour la variété de Shimura que l'on vient d'introduire, on va considérer dans la suite le produit de cette variété avec elle-même, c'est-à-dire qu'on regarde $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ comme quotient de $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ sous l'action de $\Gamma \times \Gamma$. Les points spéciaux sont alors les $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ avec z et z' spéciaux. La seule sous-variété de $\mathbb{C}^2$ de dimension 2 est $\mathbb{C}^2$ et celle-ci est de type Hodge.

On distingue deux types de courbes (irréductibles) dans $\mathbb{C}^2$ de type Hodge. La courbe $\{z\}\times\mathbb{C}$ resp. $\mathbb{C}\times\{z'\}$ est de type Hodge si et seulement si z, resp. z', est spécial. Pour tout entier N, il existe une courbe de type Hodge $\widetilde{Y}_0(N) \subset \mathbb{C}^2$ du deuxième type : $\widetilde{Y}_0(N)$ est l'image de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{C}$ sous l'application $\tau \mapsto (j(N\tau), j(\tau))$. Pour montrer que cette image est bien une courbe algébrique on utilise le fait que l'application $\tau \mapsto (j(N\tau), j(\tau))$ se factorise par le quotient de $\mathbb{H}$ pour un sous-groupe arithmétique de Γ. Le fait que cette définition *ad hoc* coïncide avec la définition donnée dans 2.2 est (mal) justifié dans le paragraphe 5.2 (alinéa suivant le théorème 5.3) et aussi (beaucoup mieux) dans Edixhoven [18, § 2]. Notons aussi que $\widetilde{Y}_0(N)$ est seulement birationnellement équivalente à la courbe modulaire $Y_0(N)$.

Maintenant qu'on sait ce que veut dire la conjecture d'André–Oort pour $\mathbb{C}^2$, passons aux résultats connus dans ce cas. Pour la variété de Shimura $\mathbb{C}^2$, la conjecture 1.1

a été prouvée par André [4] sous une condition supplémentaire sur l'ensemble Σ et indépendamment par Edixhoven [16] sous l'hypothèse de Riemann généralisée. André [5] a ensuite réussi à enlever la condition sur Σ, donnant une démonstration inconditionnelle dans ce cas. La démonstration d'Edixhoven est reprise dans [18], qui donne aussi une variante (corollaire du théorème 7.1) où l'hypothèse de Riemann a été remplacée par une condition sur Σ. Dans le paragraphe 5.2 on reviendra sur les idées de la démonstration d'André. Quant à la démonstration d'Edixhoven, celle-ci a été généralisée par Edixhoven et Yafaev et s'applique maintenant, toujours sous des conditions supplémentaires, à beaucoup d'autres variétés de Shimura. Elle fait l'objet de la section 7.

On termine l'introduction en donnant les idées principales de cette méthode, appliquée au cas de $\mathbb{C}^2$. Il est suffisant de montrer que toute courbe algébrique irréductible $Z \subset \mathbb{C}^2$ contenant un ensemble infini Σ de points spéciaux est de type Hodge. Soit Z une telle courbe. Comme les points spéciaux sont algébriques, la courbe Z est définie sur un corps de nombres F, c'est-à-dire que c'est une courbe $Z \subset \mathbb{A}^2_F$. Si une des deux projections de Z est réduite à un point, alors ce point est spécial et l'énoncé est trivialement vérifié. On peut donc se borner au cas contraire où il faut montrer que $Z = \widetilde{Y}_0(N)$ pour un certain entier N. Supposons que cela ne soit pas le cas et essayons d'en déduire une contradiction.

Pour tout entier m, la courbe $\widetilde{Y}_0(m) \subset \mathbb{C}^2$ est une correspondance $T_m \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, agissant sur les sous-ensembles $X \subset \mathbb{C}$ par $T_m X = \pi_2(\pi_1^{-1}(X))$, où les $\pi_i \colon \widetilde{Y}_0(m) \to \mathbb{C}$ sont les restrictions des projections $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$. Le produit $T_{m,m} = T_m \times T_m \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ est alors aussi une correspondance. Il suffit de trouver un nombre premier p tel que $T_{p,p}Z = Z$. En effet, si $T_{p,p}Z = Z$, alors la $T_{p,p}$-orbite de tout élément de Z est contenue dans Z. Comme toutes les $T_{p,p}$-orbites sont denses dans $\mathbb{C}^2$, cela implique que $Z = \mathbb{C}^2$, contredisant le fait que Z est une courbe. La conjecture est alors prouvée pour $\mathbb{C}^2$.

Il reste à trouver le nombre premier p avec cette propriété miraculeuse. L'argument se déroule en trois étapes.

1. On montre que si l'intersection $Z \cap T_{p,p}Z$ est finie, alors son ordre est majoré par $c(p+1)^2$ (pour une constante $c > 0$).

2. Le fait que $Z \neq \widetilde{Y}_0(N)$ pour tout N implique, via un théorème d'André sur le groupe de monodromie algébrique, que $T_{p,p}Z$ est irréductible pour $p > M$, avec M assez grand. On utilise ici un cas particulier du théorème 7.5.

3. On se sert d'une description explicite de l'action du groupe de Galois absolu Γ_F de F sur les points spéciaux pour montrer qu'il existe un $z \in \Sigma$ et un nombre premier $p > M$ tels que $T_{p,p}z$ contient un conjugué galoisien de z et tels que l'ordre de la Γ_F-orbite de z est supérieur à $c(p+1)^2$.

La dernière étape nécessite une version effective du théorème de Chebotarev qui n'a été prouvé que sous l'hypothèse de Riemann généralisée, ce qui explique que le résultat dépend de GRH. Alternativement, une condition assez forte sur les points spéciaux dans Σ implique aussi l'existence de z et p, voir le théorème 7.1 et sa démonstration. Il faut aussi souligner que $T_{p,p}\widetilde{Y}_0(N)$ n'est irréductible pour aucun nombre premier p et entier $N > 0$, donc l'hypothèse que Z ne soit pas une courbe modulaire est essentielle dans la deuxième étape.

Comme Z et $T_{p,p}Z$ sont définis sur F, la dernière étape implique que $Z \cap T_{p,p}Z$ contient toute l'orbite $\Gamma_F \cdot z$. En combinant la minoration de l'ordre de cette orbite avec la majoration de l'intersection établie dans la première étape on déduit que $Z \cap T_{p,p}Z$ est infini. Comme Z et $T_{p,p}Z$ sont irréductibles on conclut que $Z = T_{p,p}Z$.

Remerciements. — Je remercie tous ceux qui m'ont aidé dans la préparation de cet exposé et en particulier Bas Edixhoven pour sa relecture rapide et minutieuse du manuscrit.

2. LA CONJECTURE

2.1. Variétés de Shimura

Une variété de Shimura connexe est un quotient d'un domaine hermitien symétrique par l'action d'un groupe arithmétique. Une variété de Shimura générale est une réunion disjointe de variétés de Shimura connexes. Même si la conjecture d'André–Oort peut s'énoncer dans toute sa généralité pour les variétés de Shimura connexes, on utilisera le langage adélique de Deligne [14] et [15] parce que c'est le cadre naturel pour introduire les opérateurs de Hecke et les lois de réciprocité. Pour les détails du résumé succinct suivant, le lecteur est renvoyé aux deux articles de Deligne. Les notations introduites resteront en vigueur dans tout ce texte.

Notons $\mathbb{C}^\times = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$ le tore sur $\mathbb{R}$ obtenu par restriction de scalaires. Ce tore est caractérisé par la propriété que $\mathbb{C}^\times(A) = (\mathbb{C} \otimes A)^\times$ pour toute $\mathbb{R}$-algèbre A. Une *donnée de Shimura* est un couple (G, X), où G est un groupe linéaire algébrique réductif sur $\mathbb{Q}$ et $X \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-\mathrm{grp}}(\mathbb{C}^\times, G_\mathbb{R})$ une $G(\mathbb{R})$-classe de conjugaison telle que les conditions habituelles [15, 2.1.1.{1,2,3}] soient vérifiées. Pour la suite, on fixe une donnée de Shimura (G, X). Les composantes connexes de X sont alors des (produits de) domaines hermitiens symétriques, en particulier X possède une structure complexe naturelle. Il est clair que les composantes de X sont toutes isomorphes entre elles et on en fixe une, notée X^+.

Soit $\mathbb{A}$ (resp. $\mathbb{A}_f$) l'anneau des adèles (finis) de $\mathbb{Q}$, de sorte que $\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_f$ et $\mathbb{A}_f = \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$ où $\widehat{\mathbb{Z}}$ est le complété profini de $\mathbb{Z}$. Pour tout sous-groupe compact ouvert $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ on considère le quotient

$$\mathrm{Sh}_K(G, X)_\mathbb{C}(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash (X \times G(\mathbb{A}_f)/K),$$

où $G(\mathbb{Q})$ opère sur X par conjugaison (c'est-à-dire par composition avec des automorphismes intérieurs) et sur $G(\mathbb{A}_f)/K$ par translation à gauche. Chaque composante connexe de $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ est isomorphe à un quotient de X^+ par l'action d'un groupe arithmétique. Plus précisément, soient $G(\mathbb{R})^+$ la composante connexe de $G(\mathbb{R})$ pour la topologie euclidienne et $G(\mathbb{Q})^+ = G(\mathbb{Q}) \cap G(\mathbb{R})^+$, alors $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ est une réunion disjointe finie de quotients $\Gamma_g \backslash X^+$ avec $g \in G(\mathbb{A}_f)$ et $\Gamma_g = gKg^{-1} \cap G(\mathbb{Q})^+$. Ce quotient $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ est un espace analytique et il résulte d'un théorème de Baily et Borel que c'est la variété des points complexes d'une variété algébrique complexe quasi projective $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$. Cette variété est lisse pour K, et donc les Γ_g, assez petits. Cela est le cas en particulier si les Γ_g sont sans torsion.

Les variétés de Shimura $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ forment un système projectif indexé par les sous-groupes compacts ouverts $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ et leur limite projective est un $\mathbb{C}$-schéma $\mathrm{Sh}(G,X)_{\mathbb{C}}$ avec une action continue du groupe $G(\mathbb{A}_f)$. L'action de $g \in G(\mathbb{A}_f)$ sera notée

$$\mathrm{Sh}(G,X)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\cdot\, g} \mathrm{Sh}(G,X)_{\mathbb{C}}. \tag{1}$$

Par construction de $\mathrm{Sh}(G,X)_{\mathbb{C}}$, la variété $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ est le quotient de $\mathrm{Sh}(G,X)_{\mathbb{C}}$ par l'action de K. Dans 6.2 on reviendra plus amplement sur cette action de $G(\mathbb{A}_f)$.

2.2. Sous-variétés de type Hodge et points spéciaux

On définit de façon évidente la notion de morphisme $f\colon (H,Y) \to (G,X)$ de données de Shimura. Un tel morphisme induit un morphisme de schémas

$$\mathrm{Sh}(f)\colon \mathrm{Sh}(H,Y)_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{Sh}(G,X)_{\mathbb{C}}. \tag{2}$$

Une sous-variété irréductible fermée $Z \subset \mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ est appelée une *sous-variété de type Hodge* s'il existe un morphisme $f\colon (H,Y) \to (G,X)$ de données de Shimura et un élément $g \in G(\mathbb{A}_f)$ tels que Z soit une composante irréductible de l'image d'un morphisme composé

$$\mathrm{Sh}(H,Y)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\mathrm{Sh}(f)} \mathrm{Sh}(G,X)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\cdot\, g} \mathrm{Sh}(G,X)_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}. \tag{3}$$

Il n'est pas difficile de montrer (voir 6.2 pour plus de détails) que l'image d'une telle application est une sous-variété fermée, pas nécessairement irréductible, de $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$. Chaque composante irréductible de l'image de $\mathrm{Sh}(H,Y)_{\mathbb{C}}$ est l'image d'une composante connexe de $\mathrm{Sh}(H,Y)_{\mathbb{C}}$.

Dans le cas particulier où H est un tore, la variété $\mathrm{Sh}(H,Y)_{\mathbb{C}}$ est de dimension nulle, donc les sous-variétés de type Hodge obtenues à partir de la construction précédente appliquée à (H,Y) sont des points. Les points obtenus de cette manière sont les *points spéciaux* de $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$. Les conditions imposées à une donnée de Shimura (H,Y) impliquent que les points spéciaux d'une variété de Shimura sont exactement les sous-variétés de type Hodge de dimension nulle. Une caractérisation équivalente des points spéciaux est obtenue en utilisant la notion de groupe de Mumford–Tate.

Définition 2.1. — *Pour $h \in X$, son* groupe de Mumford–Tate $\mathrm{MT}(h)$ *est le plus petit sous-groupe algébrique $H \subset G$ (défini sur $\mathbb{Q}$) tel que $h\colon \mathbb{C}^\times \to G_\mathbb{R}$ se factorise par $H_\mathbb{R}$.*

Pour un point $s \in \mathrm{Sh}_K(G,X)_\mathbb{C}(\mathbb{C})$, on choisit un représentant $(h,a) \in X \times G(\mathbb{A}_f)$ et on définit le groupe de Mumford–Tate $\mathrm{MT}(s)$ *de s comme étant* $\mathrm{MT}(h)$.

Soient les notations comme dans la définition. Si $(h',a') \in X \times G(\mathbb{A}_f)$ est un autre représentant de s, alors $\mathrm{MT}(h')$ est conjugué à $\mathrm{MT}(h)$ par un élément de $G(\mathbb{Q})$ donc $\mathrm{MT}(s)$ est défini à isomorphisme près (comme groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$) et à conjugaison près comme sous-groupe de G. Tout groupe de Mumford–Tate est réductif donc un groupe de Mumford–Tate est commutatif si et seulement si c'est un tore.

Lemme 2.2. — *Un point $s \in \mathrm{Sh}_K(G,X)_\mathbb{C}(\mathbb{C})$ est spécial si et seulement si* $\mathrm{MT}(s)$ *est un tore.*

On peut maintenant formuler la conjecture d'André–Oort.

Conjecture 2.3 (André–Oort). — *Fixons une donnée de Shimura (G,X) et un sous-groupe compact ouvert $K \subset G(\mathbb{A}_f)$. Soit $\Sigma \subset \mathrm{Sh}_K(G,X)_\mathbb{C}(\mathbb{C})$ un ensemble de points spéciaux. Alors chaque composante irréductible de l'adhérence de Zariski de Σ dans $\mathrm{Sh}_K(G,X)_\mathbb{C}$ est une sous-variété de type Hodge.*

On obtient un énoncé équivalent en considérant des variétés de Shimura connexes.

2.3. Densité de l'ensemble des points spéciaux

Notons tout de suite que la réciproque de la conjecture est vraie et qu'on a même un énoncé bien plus fort. Soit $\mathrm{Sh}_K(G,X)_\mathbb{C}$ une variété de Shimura. Il suit de [14, § 5] qu'il existe $h \in X$ tel que $\mathrm{MT}(h)$ soit un tore et que, pour un tel h, l'ensemble des points spéciaux de la forme $\overline{(h,a)}$ avec $a \in G(\mathbb{A}_f)$ soit dense dans $\mathrm{Sh}_K(G,X)_\mathbb{C}(\mathbb{C})$ pour la topologie *euclidienne*. Ce fait joue un rôle important dans l'approche de la conjecture qui fait l'objet de cet exposé. On en déduit aussi, trivialement, que l'ensemble de tous les points spéciaux d'une variété de type Hodge est dense pour la topologie euclidienne.

3. HISTORIQUE

3.1. Analogie avec le théorème de Raynaud

La conjecture implique que si Z est une courbe irréductible fermée dans une variété de Shimura contenant un nombre infini de points spéciaux, alors Z est une sous-variété de type Hodge. Ce cas particulier figure dans [2, X.4.5] en tant que « Problem 3 ». Dans ce livre, André souligne l'analogie avec le théorème de Raynaud [34]. Ce théorème affirme qu'une courbe fermée dans une variété abélienne complexe A contenant un nombre infini de points de torsion de $A(\mathbb{C})$ est une translatée d'une courbe elliptique $E \subset A$ par un point de torsion de $A(\mathbb{C})$.

Raynaud [35] a généralisé ce théorème à des sous-variétés quelconques de A contenant un sous-ensemble Zariski-dense de points de torsion, prouvant qu'une telle sous-variété est une *sous-variété de torsion*, c'est-à-dire un translaté d'une sous-variété abélienne par un point de torsion. Il a ainsi résolu la conjecture de Manin–Mumford. Dans l'introduction, on a souligné l'analogie entre la conjecture 2.3 et le théorème de Raynaud via le dictionnaire traduisant « variété de Shimura » en « variété abélienne », « point spécial » en « point de torsion » et « sous-variété de type Hodge » en « sous-variété de torsion ». Dans 5.1 on verra comment cette comparaison peut être poussée plus loin.

Hindry [20] et [21] montre des variantes quantitatives du théorème de Raynaud, pour des variétés abéliennes et des groupes algébriques commutatifs définis sur un corps de nombres F. Sa stratégie repose sur le fait que l'image de l'action du groupe de Galois absolu Γ_F sur l'ensemble des points de torsion contient beaucoup d'homothéties et sur un argument d'intersection. Ainsi, la stratégie de Hindry présente une analogie remarquable avec l'approche de la conjecture d'André–Oort par Edixhoven et Yafaev.

La conjecture de Manin–Mumford a été généralisée par Bogomolov qui considère une variété abélienne A sur un corps de nombres et demande si toute sous-variété $X \subset A$ munie d'un ensemble Zariski-dense de points de $X(\overline{\mathbb{Q}})$ de hauteurs « assez petites » est de torsion. La conjecture de Bogomolov a été démontrée par Szpiro, Ullmo et Zhang, par des méthodes d'équidistribution, voir [1] pour un compte rendu des méthodes. Des travaux récents de Clozel et Ullmo mettent en œuvre des idées analogues dans le contexte des variétés de Shimura. On reviendra là-dessus dans le paragraphe 5.3.

3.2. Espaces de modules de variétés abéliennes

Dans de nombreux cas, une variété de Shimura peut être interprétée comme un espace de modules de variétés abéliennes polarisées de dimension donnée, munies d'une structure de niveau et éventuellement de certaines structures supplémentaires. Du point de vue de la conjecture 2.3, il est suffisant de considérer le cas où on n'impose pas de structure supplémentaire, voir 6.3.

Soient $g \geqslant 1$ un entier, V un $\mathbb{Z}$-module libre de rang $2g$ muni d'une forme symplectique parfaite $\psi = \langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\mathrm{GSp}_{2g} = \mathrm{GSp}(V_{\mathbb{Q}}, \psi)$ le groupe des similitudes de la forme induite sur $V_{\mathbb{Q}} = V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Soit $h\colon \mathbb{C}^\times \to \mathrm{GSp}_{2g/\mathbb{R}}$ un morphisme définissant sur $V_{\mathbb{R}}$ une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel tel que $\langle x, h(i)x \rangle > 0$ pour tout $0 \neq x \in V_{\mathbb{R}}$ et soit X_g la $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})$-classe de conjugaison de h. Pour $n \geqslant 1$, on définit $K_n \subset \mathrm{GSp}_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}}) \subset \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{A}_f)$ comme le noyau de la projection $\mathrm{GSp}_{2g}(\widehat{\mathbb{Z}}) \to \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. La variété de Shimura $\mathrm{Sh}_{K_n}(\mathrm{GSp}_{2g}, X_g)_{\mathbb{C}}$ s'identifie alors à l'espace de modules $\mathscr{A}_{g,n/\mathbb{C}}$ des variétés abéliennes complexes principalement polarisées de g, munies d'une structure de niveau n, *cf.* [14]. En ce qui concerne la structure de niveau, il faut l'interpréter comme une structure de niveau symplectique « de Jacobi » comme définie dans [27, 1.4].

Comme il est expliqué dans [26, § 2], les sous-variétés de $\mathscr{A}_{g,n/\mathbb{C}}$ de type Hodge sont les sous-variétés irréductibles fermées maximales où certaines classes dans la cohomologie du schéma abélien universel sont des classes de Hodge. Les sous-variétés maximales où la variété abélienne correspondante admet des endomorphismes supplémentaires en sont des cas particuliers.

Les points spéciaux de $\mathscr{A}_{g,n/\mathbb{C}}$ sont les points correspondant aux variétés abéliennes de type CM. Rappelons qu'une variété abélienne simple $A/\mathbb{C}$ est *de type CM* si $\dim \operatorname{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 2 \dim A$ et qu'en général, une variété abélienne est *de type CM* si elle est isogène à un produit de variétés abéliennes simples de type CM. On peut définir le groupe de Mumford–Tate d'une variété abélienne $A/\mathbb{C}$ (à isomorphisme près) comme le groupe de Mumford–Tate du point de $\mathscr{A}_{g,n/\mathbb{C}}$ correspondant à A, voir la définition 2.1. On peut montrer qu'une variété abélienne est de type CM si et seulement si son groupe de Mumford–Tate est un tore.

Dans le cas particulier d'une variété de modules, la conjecture 2.3 affirme que toute sous-variété irréductible fermée $Z \subset \mathscr{A}_{g,n/\mathbb{C}}$ telle que $Z(\mathbb{C})$ contienne un ensemble Zariski-dense de points correspondant à des variétés abéliennes de type CM est une sous-variété de type Hodge. Cette version de la conjecture est émise par Oort dans [31] et [32], voir aussi la thèse de Moonen [25] et les deux publications [26] et [27] issues de cette thèse. Le contenu des deux derniers articles, lié à la conjecture d'André–Oort, fait l'objet de 5.1.

3.3. Généralisations

Dans [4, 3.2] et [6], André évoque la question suivante, qui généralise simultanément la conjecture 2.3 et le théorème de Raynaud cité en 3.1. On considère un groupe algébrique linéaire connexe G sur $\mathbb{Q}$, un sous-groupe maximal compact $K_\infty \subset G(\mathbb{R})$ contenant un $\mathbb{R}$-tore maximal et un sous-groupe de congruence $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$. On *suppose* cette fois-ci que le quotient $X = G(\mathbb{R})/K_\infty$ possède une structure complexe $G(\mathbb{R})^+$-invariante et que $S(\mathbb{C}) = \Gamma\backslash X$ est l'ensemble de points d'une variété algébrique complexe S.

Une variété spéciale $Z \subset S$ est une sous-variété fermée telle que $Z(\mathbb{C})$ soit l'image de $gH(\mathbb{R}) \subset G(\mathbb{R})$ dans $S(\mathbb{C})$, pour $g \in G(\mathbb{Q})$ et $H \subset G$ un sous-groupe algébrique tel que $H(\mathbb{R}) \cap K_\infty$ soit un sous-groupe compact maximal de $H(\mathbb{R})$. Un point spécial est encore une sous-variété spéciale de dimension nulle.

L'énoncé de la conjecture d'André–Oort se généralise par la question suivante.

Question 3.1 (André). — *Une sous-variété fermée $Z \subset S$ est-elle spéciale si et seulement si $Z(\mathbb{C})$ contient un sous-ensemble Zariski-dense de points spéciaux ?*

Cette question généralise la conjecture aux variétés de Shimura mixtes et elle généralise aussi l'énoncé du théorème de Raynaud. En effet, si n est assez grand, la variété de modules $\mathscr{A}_{g,n/\mathbb{C}}$ porte un schéma abélien universel $\mathscr{X}_g \to \mathscr{A}_{g,n/\mathbb{C}}$. L'espace total $\mathscr{X}_g$ peut être obtenu par la construction esquissée ci-dessus. Dans cet exemple, les points spéciaux de $\mathscr{X}_g(\mathbb{C})$ sont les points de torsion dans les fibres de $\mathscr{X}_g$ au-dessus des points spéciaux de $\mathscr{A}_{g,n/\mathbb{C}}$. Les sous-variétés spéciales irréductibles sont les familles $Z \to \overline{Z}$ avec $\overline{Z} \subset \mathscr{A}_{g,n/\mathbb{C}}$ une sous-variété irréductible de type Hodge et Z l'adhérence dans $\mathscr{X}_g$ d'une sous-variété de torsion de la fibre générique de $\mathscr{X}_g \times \overline{Z}$. Dans [4], André traite le cas particulier d'un pinceau de courbes elliptiques, voir aussi [6].

Pink [33] propose une variante généralisant à la fois la conjecture 2.3 aux variétés de Shimura mixtes, avec l'hypothèse supplémentaire que tous les points spéciaux appartiennent à une seule orbite de Hecke généralisée, et impliquant la conjecture de Mordell–Lang. Très récemment, Pink a proposé une autre question qui implique la conjecture de Mordell–Lang et la conjecture d'André–Oort pour les variétés de Shimura mixtes, en toute généralité.

Une variante de la conjecture 2.3 pour le produit de deux courbes modulaires de Drinfeld a été prouvée par Breuer [7]. La méthode de Breuer est basée sur celle d'Edixhoven et Yafaev. Dans le cas des courbes modulaires de Drinfeld, cette méthode donne un résultat inconditionnel parce que l'hypothèse de Riemann généralisée est vraie pour les corps de fonctions sur un corps fini.

4. QUELQUES APPLICATIONS

4.1. Jacobiennes de type CM

Les deux auteurs André [2] et Oort [31], [32] de la conjecture évoquent la relation entre leur variante de la conjecture et une conjecture de Coleman [12] concernant les jacobiennes de type CM. Il s'agit du problème suivant.

CONJECTURE 4.1 (Coleman). — *Soit $g \geqslant 4$ un entier. Il n'existe alors, à isomorphisme près, qu'un nombre fini de courbes projectives et lisses $C/\mathbb{C}$ de genre g telles que* $\mathrm{Jac}(C)$ *soit de type CM.*

En associant à une courbe sa variété jacobienne, on définit un morphisme de l'espace de modules des courbes algébriques de genre g vers $\mathscr{A}_{g,1/\mathbb{C}}$. Soient $\mathscr{T}_{g/\mathbb{C}}$ l'image de ce morphisme et $\overline{\mathscr{T}}_{g/\mathbb{C}}$ l'adhérence de Zariski de $\mathscr{T}_{g/\mathbb{C}}$. En admettant la conjecture d'André–Oort, la conjecture de Coleman est équivalente à ce que $\overline{\mathscr{T}}_{g/\mathbb{C}}$ ne contient aucune sous-variété de type Hodge de dimension strictement positive qui rencontre $\mathscr{T}_{g/\mathbb{C}}$. Or, les exemples donnés dans [23] montrent que pour $g = 4, 6$ la variété $\overline{\mathscr{T}}_{g/\mathbb{C}}$ contient bien de telles sous-variétés. Cela est aussi valable pour $g = 7$ car Oort a remarqué que les méthodes de [23] s'appliquent aussi à la famille de courbes lisses définie par $y^9 = x(x-1)(x-\lambda)$. Il s'ensuit que la conjecture de Coleman est fausse pour $g = 4, 6$ et 7. La conjecture de Coleman et la question suivante restent toutefois ouvertes et intéressantes pour $g \geqslant 8$.

Question 4.2 (Oort [31], [32]). — *Quelles sont les variétés de type Hodge de dimension strictement positive qui sont contenues dans* $\overline{\mathscr{T}}_{g/\mathbb{C}}$ *et qui rencontrent* $\mathscr{T}_{g/\mathbb{C}}$ *?*

Pour répondre à la question, il faut comparer les dimensions des espaces de déformations de courbes munies d'une collection de classes de Hodge aux dimensions des espaces de déformations de variétés abéliennes avec les classes de Hodge correspondantes. Ce problème pourrait être un peu plus accessible que la conjecture de Coleman. Pour prouver la conjecture de Coleman par cette méthode, on aurait bien entendu besoin de la conjecture d'André–Oort.

4.2. Transcendance et valeurs spéciales de fonctions hypergéométriques

Pour $a, b, c \in \mathbb{Q}$ avec $-c \notin \mathbb{N}$, Wolfart [38] considère la fonction hypergéométrique multivaluée sur $\mathbb{P}^1 \backslash \{0, 1, \infty\}$ définie pour $|z| < 1$ par

$$F(a, b, c; z) = 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)} z^2 + \cdots .$$

La fonction $F(a, b, c; z)$ est solution de l'équation différentielle hypergéométrique. Wolfart s'intéresse alors au théorème suivant.

Théorème 4.3. — *Soient* $E_{a,b,c} = \{\xi \in \overline{\mathbb{Q}} \backslash \{0, 1\} \mid \exists\, F(a, b, c; \xi) \in \overline{\mathbb{Q}}\}$ *et* Δ *le groupe de monodromie de l'équation différentielle hypergéométrique* (*ce groupe est muni d'une représentation fidèle naturelle*)*. Alors*

- $E_{a,b,c} = \overline{\mathbb{Q}} \backslash \{0, 1\}$ *si et seulement si* Δ *est fini,*
- $E_{a,b,c} \subsetneqq \overline{\mathbb{Q}} \backslash \{0, 1\}$ *est infini si et seulement si* Δ *est un groupe arithmétique et*
- $E_{a,b,c}$ *est fini dans tous les autres cas.*

La démonstration de Wolfart comportait une lacune, découverte par Gubler, qui a été comblée par Cohen et Wüstholz [11] en utilisant le cas particulier de la conjecture 2.3 prouvé par Edixhoven et Yafaev ([19] et le théorème 7.1 ci-après).

Indiquons brièvement comment on se ramène à la conjecture d'André–Oort. Si Δ est fini, alors $F(a, b, c; z)$ est algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. On supposera dans la suite que Δ est infini. La stratégie est d'exprimer $F(a, b, c; z)$ comme le quotient d'une période d'une courbe algébrique $C_{a,b,c,z}$ et une période d'une courbe algébrique $D_{a,b,c}$. La courbe $D_{a,b,c}$ est une courbe de Fermat qui ne dépend pas de z et la période associée vient d'une variété abélienne de type CM.

La période de $C_{a,b,c,z}$ est associée à une partie convenable A_z de sa jacobienne, dont la dimension g est indépendante de z. L'application qui envoie $z \in \mathbb{C} \backslash \{0, 1\}$ vers A_z définit un morphisme $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathscr{A}_{g/\mathbb{C}}$. Soit $Z_{a,b,c} \subset \mathscr{A}_{g/\mathbb{C}}$ l'image de cette application. D'une part, on montre que $Z_{a,b,c}$ est une sous-variété de type Hodge si et seulement si Δ est un groupe arithmétique.

D'autre part, on déduit d'un théorème profond de Wüstholz que z et $F(a,b,c;z)$ sont algébriques si et seulement si A_z et la jacobienne de $D_{a,b,c}$ ont un facteur simple en commun. Dans ce cas, A_z est de type CM, avec une algèbre d'endomorphismes qui ne dépend pas de z. Si Z est de type Hodge, alors A_z est de ce type pour un nombre infini de z. Réciproquement, si $E_{a,b,c}$ est infini, alors $Z(\mathbb{C})$ contient un nombre infini de points spéciaux et la conjecture 2.3 affirme que cela est le cas (si et) seulement si Z est de type Hodge. Comme les fibres de type CM ont la même algèbre d'endomorphismes, le théorème 7.1 fait déjà l'affaire et la preuve du théorème est achevée.

4.3. Une conjecture de Mazur

Vatsal et Cornut ont obtenu des résultats importants liés à une conjecture de Mazur concernant les sous-groupes d'une courbe elliptique E engendrés par les images des points de Heegner, via une paramétrisation modulaire de E. Dans [13], Cornut montre qu'une partie de son résultat peut être déduit assez facilement du cas particulier de la conjecture d'André–Oort prouvé par Moonen (théorème 5.2).

5. AUTRES APPROCHES

5.1. Les variétés de type Hodge sont formellement linéaires

On considère à nouveau l'espace de modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g. Il existe un tel espace de modules (grossier) sur $\mathbb{Z}$; on le note $\mathscr{A}_{g,1} = \mathscr{A}_{g,1/\mathbb{Z}}$. Pour tout corps algébriquement clos k, l'ensemble $\mathscr{A}_{g,1}(k)$ est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme des variétés abéliennes principalement polarisées sur k. En particulier, l'espace de modules $\mathscr{A}_{g,1/\mathbb{C}}$ sur $\mathbb{C}$ considéré en 3.2 s'identifie à la fibre complexe $\mathscr{A}_{g,1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$.

Dans le reste de ce paragraphe, on fixe un entier n suffisamment grand pour que l'espace de modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g munies d'une structure de niveau n soit un espace de modules fin. On note $\mathscr{A}_{g,n}$ cet espace de modules sur $\mathbb{Z}[1/n]$. En fixant un nombre premier p ne divisant pas n, le corps $k = \overline{\mathbb{F}}_p$ et un point $x \in \mathscr{A}_{g,n}(k)$, on forme le complété formel $\widehat{\mathscr{A}_{g,n}}$ de $\mathscr{A}_{g,n/W(k)}$ en x, où $W(k)$ désigne l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k. Pour tout anneau local complet R avec corps résiduel k, l'ensemble $\widehat{\mathscr{A}_{g,n}}(R)$ s'identifie à l'ensemble des points de $\mathscr{A}_{g,n}(R)$ dont la réduction modulo l'idéal maximal $\mathfrak{m}_R$ de R est égale à x.

Supposons que le point x correspond à une variété abélienne *ordinaire* A/k, ce qui veut dire que le groupe de p-torsion de $A(k)$ est de dimension maximale, isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^g$. La théorie de Serre–Tate montre que, dans ce cas, $\widehat{\mathscr{A}_{g,n}}$ est un groupe formel, isomorphe à $\widehat{\mathbb{G}}_m^d$, avec $d = \dim_{\mathbb{Z}} \mathscr{A}_{g,n} = g(g+1)/2$. Ici $\widehat{\mathbb{G}}_m$ est le complété du groupe multiplicatif en l'élément neutre, de sorte que, pour tout R comme ci-dessus, on a

$\widehat{\mathbb{G}}_m(R) = (1+\mathfrak{m}_R)^\times$. Les points de $\widehat{\mathscr{A}_{g,n}}(R)$ correspondant aux variétés abéliennes de type CM sont exactement les points de torsion pour cette structure de groupe formel.

Si $Z \subset \mathscr{A}_{g,n/\mathbb{C}}$ est une sous-variété, on note $\overline{Z}$ son adhérence dans $\mathscr{A}_{g,n}$ et si $x \in \overline{Z}(k)$, alors le complété de $\overline{Z}_{W(k)}$ en x est un sous-schéma formel $\widehat{Z} \subset \widehat{\mathscr{A}_{g,n}}$.

THÉORÈME 5.1 ([29] et Moonen [27]). — *Soient Z, $\overline{Z}$ et $\widehat{Z}$ comme ci-dessus ; supposons que $x \in \overline{Z}(k)$ correspond à une variété abélienne ordinaire. Alors $Z \subset \mathscr{A}_{g,n/\mathbb{C}}$ est de type Hodge si et seulement si toute composante de $\widehat{Z} \subset \widehat{\mathscr{A}_{g,n}} \cong \widehat{\mathbb{G}}_m^d$ est le translaté d'un sous-tore par un point de torsion.*

Tout cela renforce encore l'analogie avec le théorème de Raynaud donné par le dictionnaire du 3.1. L'analogue du théorème de Raynaud pour les tores formels est vrai et, en utilisant Moonen [27, 3.7] et la proposition 6.7, cela implique le résultat suivant.

THÉORÈME 5.2 (Moonen). — *Soit $\Sigma \subset \mathscr{A}_{g,1}(\overline{\mathbb{Q}})$ un ensemble de points spéciaux. Soit p un nombre premier tel que pour tout $s \in \Sigma$ il existe une place p-adique de $\overline{\mathbb{Q}}$ où la variété abélienne correspondant à s a bonne réduction ordinaire. Pour $s \in \Sigma$ donné, soit s_0 le point de $\mathscr{A}_{g,1}$ correspondant à cette réduction et supposons que chaque $s \in \Sigma$ est l'élément neutre du complété de $\mathscr{A}_{g,1}$ en s_0. Alors les composantes irréductibles de l'adhérence de Zariski de Σ sont de type Hodge.*

Pour $s \in \Sigma$, soit End_s l'anneau des endomorphismes de la variété abélienne correspondante. Les conditions du théorème sont alors vérifiées si $\mathrm{End}_s \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p \cong \oplus_i \mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{F}_p)$ pour tout $s \in \Sigma$.

5.2. Le cas de $\mathbb{C}^2$

On fixe $H = \mathrm{GL}_2$, on prend pour Y la $G(\mathbb{R})$-classe de conjugaison d'un morphisme déduit de l'action naturelle de $\mathbb{C}^\times$ sur $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ et on définit $L \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ comme le stabilisateur d'un réseau $\widehat{\mathbb{Z}}^2 \subset \mathbb{A}_f^2$. La variété de Shimura $\mathrm{Sh}_L(H,Y)_{\mathbb{C}}$ s'identifie alors à l'espace de modules des courbes elliptiques, donc $\mathrm{Sh}_L(H,Y)_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$. Comme dans l'introduction, on s'intéresse à la conjecture 2.3 pour la variété de Shimura

$$\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sh}_L(H,Y)_{\mathbb{C}} \times \mathrm{Sh}_L(H,Y)_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}},$$

où $G = H \times H$, $X = Y \times Y$ et $K = L \times L$. Elle est interprétée comme espace de modules de produits $E \times E'$ avec E et E' des courbes elliptiques complexes. Pour toute courbe elliptique $E/\mathbb{C}$, on note $j(E)$ son invariant modulaire et pour $j \in \mathbb{A}^1(\mathbb{C})$, on notera E_j une courbe elliptique complexe d'invariant modulaire j. Rappelons de l'introduction et du paragraphe 3.2 que j est spécial si et seulement si E_j est de type CM.

La courbe modulaire $Y_0(N)$ est l'espace de modules de triplets (E, E', ι) où E et E' sont des courbes elliptiques complexes et $\iota\colon E \to E'$ est une isogénie dont le noyau est cyclique d'ordre N. L'application $(E, E', \iota) \mapsto (j(E), j(E'))$ définit un morphisme

$Y_0(N) \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ dont l'image est une sous-variété de type Hodge. Cette image est la courbe $\widetilde{Y}_0(N)$ définie dans l'introduction. Avec les notations du paragraphe 2.2, c'est l'image de l'application (3) associée à l'inclusion diagonale $f\colon (H,Y) \to (G,X)$ et $g = \left(\left(\begin{smallmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

THÉORÈME 5.3 (André [5]). — *Soit $Z \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ une courbe algébrique irréductible, qui ne soit ni une droite horizontale ni une droite verticale. Alors Z est l'image d'une courbe modulaire $Y_0(N)$ si et seulement si Z contient une infinité de points (j, j') tels que j et j' soient spéciaux.*

Comme on a vu dans l'introduction, ceci prouve la conjecture 2.3 pour la variété de Shimura $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$. Cela implique aussi le fait que les sous-variétés de type Hodge de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ différentes des droites horizontales et verticales sont les courbes modulaires, plongées dans $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ comme ci-dessus. Notons qu'il n'est pas nécessaire de recourir à la conjecture d'André–Oort pour prouver ce fait, voir Edixhoven [18]. Des variantes du théorème 5.3 prouvées avec la méthode d'Edixhoven et Yafaev se trouvent dans Edixhoven [16] et [18].

Dans sa démonstration, André utilise une toute autre méthode, tellement élégante qu'il serait dommage de ne pas en donner un résumé. Soit Z comme dans l'énoncé et soit Σ un ensemble infini de points spéciaux dans Z. D'après le lemme 6.1, Z est alors définie sur un corps de nombres. En la remplaçant par la réunion de ses conjugués sous l'action du groupe de Galois $\Gamma_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\overline{\mathbb{Q}})$, on se ramène au cas où Z est définie et irréductible sur $\mathbb{Q}$ (mais pas absolument irréductible). André montre ensuite que l'on peut extraire de Σ une suite $((j_n, j'_n))$ telle que E_{j_n} et $E_{j'_n}$ admettent le même corps de multiplications complexes F_n et que la « distance » entre $\mathscr{O}_n = \mathrm{End}(E_{j_n})$ et $\mathrm{End}(E_{j'_n}) \subset F_n$ soit bornée. Comme Z est définie sur $\mathbb{Q}$, on peut remplacer chaque $((j_n, j'_n))$ par un conjugué sous l'action du groupe de Galois. On se ramène ainsi au cas où $E_{j_n} = \mathbb{C}/\mathscr{O}_n$. On montre ensuite qu'en passant encore à une suite extraite, on peut supposer que $(j_n, j'_n) \to (\infty, \infty)$ et que tous les points (j_n, j'_n) appartiennent à la même branche de Z passant par (∞, ∞). Les arguments précis utilisés ici sont loin d'être triviaux, le raisonnement repose entre autres sur un résultat de Masser en théorie de transcendance. C'est cette partie de la démonstration qui manquait dans le travail antérieur d'André [4].

On montre maintenant assez facilement que, après avoir remplacé la suite par une suite extraite, on peut choisir les périodes τ_n de E_{j_n} et τ'_n de $E_{j'_n}$ sous la forme

$$\tau_n = \frac{c_n + f_n\sqrt{d_n}}{2}, \quad \tau'_n = \frac{b_n + f f_n\sqrt{d_n}}{2a_n}$$

avec f, a_n, b_n, f_n entiers $a_n \geqslant |b_n|$ et $c_n = 0$ ou 1. Comme les points (j_n, j'_n) appartiennent à la même branche d'une courbe algébrique, on obtient via le développement de Puiseux une comparaison des ordres de croissance $\log|j_n| \approx \rho \log|j'_n|$. Le développement de Fourier de l'invariant modulaire en fonction de la période τ donne des estimations $\log|j_n| \approx \pi f_n\sqrt{|d_n|}$ et $\log|j'_n| \approx (f/a_n)\pi f_n\sqrt{|d_n|}$. En combinant les deux estimations on montre d'abord que (a_n) est stationnaire et on se ramène ensuite trivialement au cas où les suites (b_n) et (c_n) le sont aussi. Cela implique que pour $n \gg 0$, on a $\tau'_n = (k + l\tau_n)/m$ pour certains entiers k, l, m et on en déduit que Z contient l'image de $Y_0(lm)$. Cette méthode se généralise sans trop de difficulté au cas d'une courbe $Z \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$.

5.3. Méthodes d'équidistribution

Dans une série de publications qui a commencée avec [9], Clozel et Ullmo proposent une approche de la conjecture d'André–Oort basée sur des méthodes ergodiques dans l'esprit de Ratner et Margulis. Ce travail se rapproche des résultats liés aux conjectures de Manin–Mumford et (surtout) de Bogomolov signalés dans le paragraphe 3.1. Ullmo [37] en donne un résumé qui souligne cette analogie.

Un problème important est que les résultats de Clozel et Ullmo sont pour l'instant valables pour les orbites de points spéciaux sous les correspondances de Hecke provenant du groupe de Mumford–Tate du point spécial en question. Pour avoir une application naturelle à la conjecture 2.3, on aurait besoin des énoncés analogues pour les orbites sous l'action du groupe de Galois.

Dans la suite, on se restreint à deux résultats de Clozel et Ullmo. On considère d'abord, à nouveau, les sous-variétés de type Hodge de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ et on conserve les notations de la section précédente. On note $d\mu$ la *mesure de Poincaré* sur $\mathbb{C} = \mathbb{A}^1(\mathbb{C})$. C'est la mesure déduite de la mesure hyperbolique H-invariante sur Y. Pour une courbe irréductible fermée $Z \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ qui n'est ni une droite horizontale, ni une droite verticale, on note $Z_*\mu$ la mesure sur $\mathbb{C}$ image directe de $d\mu$ par la correspondance définie par Z, concrètement

$$\int_{\mathbb{C}} f dZ_*\mu = \frac{1}{d_1}\int_{\mathbb{C}} \sum_{\substack{y \text{ tel que} \\ \pi_1(y)=x}} f(\pi_2(y))d\mu,$$

où $\pi_i \colon Z \to \mathbb{C}$ est la i-ième projection et d_1 est le degré de π_1.

Théorème 5.4 (Clozel–Ullmo [8]). — *On a $Z_*\mu = \mu$ si et seulement si Z est l'image d'une courbe $Y_0(N)$.*

Supposons maintenant que $Z \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ est une courbe contenant une suite dense (s_n) de points spéciaux. Comme dans la démonstration du théorème 5.3, on peut supposer que Z soit définie sur $\mathbb{Q}$. Dans [8, 2.4], Clozel et Ullmo proposent la piste suivante pour tenter de montrer que Z vérifie la condition du théorème 5.4 et de résoudre ainsi la conjecture 2.3 pour Z. Dans la suite on désigne, pour tout sous-ensemble fini E de Z, par $\Delta_E = \frac{1}{|E|}\sum_{s\in E}\delta_s$ la mesure de Dirac normalisée associée. Chaque s_n correspond à un produit de deux courbes elliptiques et, comme dans la démonstration du théorème 5.3, on se ramène au cas où ces deux courbes ont multiplication complexe par le même corps F_n. En utilisant des résultats de Duke et de Clozel–Ullmo, on peut montrer que, en passant à une suite extraite, la suite de mesures $(\Delta_{\Gamma_{F_n}\cdot s_n})$ converge faiblement vers une mesure $d\nu$ telle que $(\pi_1)_* d\nu = d\mu$ et $(\pi_2)_* d\nu = d\mu$. Pour en déduire la conjecture d'André–Oort pour $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, via le théorème 5.4, on devrait montrer que ce fait implique que Z préserve la mesure $d\mu$. Ce problème est encore ouvert.

La conjecture d'André–Oort a la conséquence suivante pour les sous-variétés d'une variété de Shimura. Soient $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ une variété de Shimura et $Y \subset \mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ une sous-variété. Soit Σ l'ensemble des points spéciaux de $Y(\mathbb{C})$. La conjecture 2.3 implique alors que l'adhérence de Σ est une réunion finie $\cup_{i=1}^r S_i$ de sous-variétés de type Hodge $S_i \subset Y$, maximales par construction. Si $S' \subset Y$ est une sous-variété de type Hodge, alors la densité des points spéciaux de $S'(\mathbb{C})$ résultant du paragraphe 2.3 implique que S' est contenue dans une des S_i. Réciproquement, si dans toute sous-variété $Y \subset \mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ il existe une réunion finie $\cup_{i=1}^r S_i$ de sous-variétés de type Hodge qui contient toute sous-variété de type Hodge $S' \subset Y$, alors la conjecture 2.3 est vraie pour Y. À noter que cette condition inclut le cas où S' ou certaines S_i sont de dimension nulle, c'est-à-dire des points spéciaux.

En utilisant des méthodes ergodiques, Clozel et Ullmo montrent la variante suivante de cette propriété conjecturale. Dans ce théorème, où G est supposé adjoint, une *sous-variété fortement spéciale* $S \subset \mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ est une sous-variété de type Hodge qui est l'image d'une application composée (3) de 2.2 pour un groupe semi-simple H qui n'est pas contenu dans un $\mathbb{Q}$-sous-groupe parabolique propre de G. En particulier, un point spécial n'est pas une sous-variété fortement spéciale.

THÉORÈME 5.5 (Clozel–Ullmo [10]). — *Soit $Y \subset \mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ comme avant ; supposons de plus que G est un groupe adjoint. Il existe alors un ensemble fini $\{S_1,\dots,S_n\}$ de sous-variétés fortement spéciales de dimensions strictement positives tel que toute sous-variété fortement spéciale $S' \subset Y$ (avec $\dim S' > 0$) soit contenue dans une des S_i.*

Le rapport d'Ullmo [37] donne une excellente introduction au sujet de cette section, même si la publication [10] a évolué depuis la parution du rapport en question. Pour terminer ce paragraphe, il est signalé que les questions d'équidistribution sont également étudiées dans Zhang [42] et Jiang, Li et Zhang [22].

6. COMPLÉMENTS SUR LES VARIÉTÉS DE SHIMURA

6.1. Modèles canoniques et lois de réciprocité

On associe à la donnée de Shimura (G,X) son *corps dual* [(1)], un corps de nombres $E = E(G,X) \subset \mathbb{C}$, voir [15, 2.2] pour la définition. D'après des travaux de Shimura,

[(1)] *Reflex field* en anglais.

Deligne, Borovoi et Milne, la variété de Shimura $\mathrm{Sh}(G,X)_{\mathbb{C}}$ admet un *modèle canonique* $\mathrm{Sh}(G,X)$ sur E, voir [28, § 2] pour un compte rendu des arguments. Ce modèle canonique est un E-schéma tel que $\mathrm{Sh}(G,X)_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sh}(G,X) \otimes_E \mathbb{C}$ et tel que l'action de $G(\mathbb{A}_f)$ sur $\mathrm{Sh}(G,X)_{\mathbb{C}}$, définie par les applications (1) dans 2.1, se descende en une action sur $\mathrm{Sh}(G,X)$. Tout cela implique que, pour tout sous-groupe compact ouvert $K \subset G(\mathbb{A}_f)$, la variété $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ admet également un modèle (canonique) sur E et que chaque composante connexe de cette variété admet un modèle sur un corps de nombres. Par abus de langage, on parlera également de modèle canonique s'agissant d'une variété obtenue par extension de scalaires à partir d'un modèle canonique et d'une composante connexe d'une telle variété.

Le modèle canonique doit vérifier les conditions de [15, 2.2.5] exigeant que les points spéciaux soient algébriques et décrivant l'action du groupe de Galois sur ces points. De ces conditions on déduit sans peine que les morphismes de variétés de Shimura $\mathrm{Sh}(f)$ définis par le diagramme (2) dans 2.2 sont définis sur le composé $E(H,Y)E(G,X) \subset \mathbb{C}$ des corps duaux des données de Shimura en jeu. La même chose est vraie pour la suite des applications (3), donc pour toute sous-variété de type Hodge $S_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ il existe une extension finie $F \supset E(G,X)$ contenue dans $\mathbb{C}$ telle que $S_{\mathbb{C}}$ provienne, par extension de scalaires, d'une sous-variété $S \subset \mathrm{Sh}_K(G,X)_F$.

Comme les points spéciaux sont algébriques, on a également le lemme suivant.

Lemme 6.1. — *Soient (G,X) une donnée de Shimura, $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe compact ouvert et $Z_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ une sous-variété irréductible et fermée contenant un ensemble Zariski-dense de points spéciaux. Alors il existe un corps de nombres F avec $E(G,X) \subset F \subset \mathbb{C}$ tel que $Z_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ provienne par extension de scalaires d'une sous-variété $Z \subset \mathrm{Sh}_K(G,X)_F$.*

Remarque 6.2. — Considérons à nouveau le groupe de similitudes symplectiques GSp_{2g}, la donnée de Shimura (GSp_{2g}, X_g) et les sous-groupes $K_n \subset \mathrm{GSp}(\widehat{\mathbb{Z}})$ introduits dans 3.2. On a vu que la variété de Shimura $\mathrm{Sh}_{K_n}(\mathrm{GSp}_{2g}, X_g)_{\mathbb{C}}$ peut être identifiée à l'espace de modules $\mathscr{A}_{g,n/\mathbb{C}}$ de variétés abéliennes complexes munies d'une structure de niveau n. Comme le problème de modules admet une solution (grossière) sur $\mathbb{Q}$, on obtient un modèle $\mathscr{A}_{g,n/\mathbb{Q}}$ de $\mathscr{A}_{g,n/\mathbb{C}} = \mathrm{Sh}_{K_n}(\mathrm{GSp}_{2g}, X_g)_{\mathbb{C}}$. La théorie de la multiplication complexe des variétés abéliennes permet de montrer qu'il s'agit du modèle canonique. Bien entendu, la définition d'un modèle canonique est conçue pour que cela soit le cas.

Dans la suite on se servira de la description de l'action du groupe de Galois sur l'ensemble des points spéciaux d'une variété de Shimura. Celle-ci est déduite de la *loi de réciprocité* décrivant l'action du groupe de Galois sur la variété de Shimura associée à un tore. Pour décrire cette loi, soient T un $\mathbb{Q}$-tore et $h\colon \mathbb{C}^{\times} \to T_{\mathbb{R}}$ un morphisme tels que $(T,\{h\})$ constitue une donnée de Shimura. Le modèle canonique $\mathrm{Sh}(T,\{h\})$

est un $E = E(T, \{h\})$-schéma profini et sa donnée est donc équivalente à celle de l'ensemble $\mathrm{Sh}(T, \{h\})(\overline{E})$ muni de l'action continue de $\Gamma_E = \mathrm{Aut}_E(\overline{E})$.

L'inclusion $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ induit un morphisme de groupes $\mathbb{C}^\times(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}^\times(\mathbb{C})$ et les caractères z et $\overline{z}$: $\mathbb{C}^\times_{\mathbb{C}} \to \mathbb{G}_{m/\mathbb{C}}$ sont définis par la condition que les composés

$$\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}^\times(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times(\mathbb{C}) \xrightarrow{z, \overline{z}} \mathbb{G}_m(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$$

soient respectivement l'identité et la conjugaison complexe [(2)]. On définit le cocaractère $r\colon \mathbb{G}_{m/\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^\times_{\mathbb{C}}$ comme le dual du caractère z. On pose

$$\mu_{\mathbb{C}} = h \circ r\colon \mathbb{G}_{m/\mathbb{C}} \longrightarrow T_{\mathbb{C}} \tag{4}$$

et on définit le corps de nombres $E = E(T, \{h\}) \subset \mathbb{C}$ comme le corps de définition de $\mu_{\mathbb{C}}$. Le cocaractère $\mu_{\mathbb{C}}$ provient par extension de scalaires d'un morphisme $\mu\colon \mathbb{G}_{m/E} \to T_E$. Le morphisme $r(T, h)$ est défini par

$$r(T, h)\colon E^\times = \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m/E} \xrightarrow{\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mu} \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}T_E \xrightarrow{N_{E/\mathbb{Q}}} T, \tag{5}$$

où $\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}$ est la restriction de scalaires. Cette définition suit [24] où il est signalé que la définition donnée par Deligne [14] et [15] comporte une erreur de signe [(3)].

La théorie des corps de classes fournit une identification $\Gamma_E^{\mathrm{ab}} = \pi_0\left(E^\times(\mathbb{Q})\backslash E^\times(\mathbb{A})\right)$, qu'on normalise de sorte qu'une uniformisante en une place v corresponde au frobenius géométrique en v. L'action de $\sigma \in \Gamma_E^{\mathrm{ab}}$ sur

$$\mathrm{Sh}(T, \{h\})(\overline{E}) = \lim_{K \subset T(\mathbb{A}_f)} \mathrm{Sh}_K(T, \{h\})(\overline{E}) = \lim T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}_f)/K = \overline{T(\mathbb{Q})}\backslash T(\mathbb{A}_f)$$

est la translation par la projection de $r(T, h)(\sigma)$.

Lemme 6.3. — *L'image de $r(T, h)\colon E^\times \to T$ est le groupe de Mumford–Tate de h.*

Démonstration. — L'image T' de $r(T, h)$ est le tore engendré par les conjugués de $\mu_{\mathbb{C}}$ sous l'action de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, donc T' est le plus petit $\mathbb{Q}$-sous-groupe de T tel que $\mu_{\mathbb{C}}$ se factorise par T'. Il s'ensuit que c'est aussi le plus petit sous-groupe de T tel que h se factorise par T', c'est-à-dire le groupe de Mumford–Tate de h. □

(2) La confusion occasionnée ici par le fait que $\mathbb{C}^\times$ désigne à la fois un groupe algébrique réel et le groupe multiplicatif du corps $\mathbb{C}$ ne semble pas insurmontable.

(3) Noter également qu'entre [14] et [15] se produisent plusieurs changements de conventions affectant cette question, voir [24].

6.2. Correspondances de Hecke

Fixons une donnée de Shimura (G, X) et des sous-groupes $K_1, K_2 \subset G(\mathbb{A}_f)$ compacts ouverts. Le groupe $G(\mathbb{A}_f)$ opère sur $\mathrm{Sh}(G, X)$, donc pour tout $g \in G(\mathbb{A}_f)$ on a un diagramme, défini sur $E(G, X)$,

$$\mathrm{Sh}_{K_1}(G, X) \xleftarrow{\pi_{K_1}} \mathrm{Sh}(G, X) \xrightarrow{\cdot g} \mathrm{Sh}(G, X) \xrightarrow{\pi_{K_2}} \mathrm{Sh}_{K_2}(G, X).$$

Comme π_{K_1} et $\pi_{K_2} \circ \cdot g$ se factorisent par $\mathrm{Sh}_{K_g}(G, X)$ pour le sous-groupe compact ouvert $K_g = K_1 \cap gK_2g^{-1}$, l'image T_g de $\mathrm{Sh}(G, X)$ dans $\mathrm{Sh}_{K_1}(G, X) \times \mathrm{Sh}_{K_2}(G, X)$ est une correspondance (telle que les projections de T_g sur les deux facteurs soient finies). On la note $T_g \colon \mathrm{Sh}_{K_1}(G, X) \to \mathrm{Sh}_{K_2}(G, X)$ et on observe que T_g ne dépend que de la classe de g dans $K_1 \backslash G(\mathbb{A}_f)/K_2$.

Pour toute extension $F \supset E$ et toute sous-variété fermée $Z \subset \mathrm{Sh}_{K_1}(G, X)_F$ on écrira $T_g Z = (\pi_{K_2} \circ \cdot g)(\pi_1^{-1} Z)$; c'est une sous-variété fermée de $\mathrm{Sh}_{K_2}(G, X)_F$ (mais pas nécessairement irréductible, même si Z l'est). Cette notation sera utilisée en particulier pour des ensembles de points fermés. Pour $x \in \mathrm{Sh}_{K_1}(G, X)(\mathbb{C})$ on choisit $h \in X$ tel que x est la classe d'un élément $(h, a) \in X \times G(\mathbb{A}_f)$ et alors

$$T_g x = \{\overline{(h, ag)} \in \mathrm{Sh}_{K_2}(G, X)(\mathbb{C}) \mid a \in G(\mathbb{A}_f) \text{ tel que } \overline{(h, a)} = x \in \mathrm{Sh}_{K_1}(G, X)(\mathbb{C})\}.$$

Edixhoven montre le théorème suivant.

Théorème 6.4 (Edixhoven [17], Theorem 7.2). — *Avec les notations introduites ci-dessus, supposons que $Z_i \subset \mathrm{Sh}_{K_i}(G, X)_{\mathbb{C}}$ (pour $i = 1, 2$) soient des sous-variétés fermées dont une (au moins) est de dimension $\leqslant 1$. Il existe alors un entier c tel que pour tout $g \in G(\mathbb{A}_f)$ pour lequel $T_g Z_1 \cap Z_2$ est fini on ait*

$$|T_g Z_1 \cap Z_2| \leqslant c \deg \left(\mathrm{Sh}_{K_g}(G, X)_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{Sh}_{K_1}(G, X)_{\mathbb{C}}\right).$$

La démonstration se trouve dans la section 7 de [17], qui peut être lue indépendamment du reste de l'article cité. On se ramène à un calcul dans $\mathrm{Sh}_{K_g}(G, X)_{\mathbb{C}}$ en prenant les images réciproques de $T_g Z_1$ et de Z_2. L'idée est d'utiliser ensuite les compactifications de Baily–Borel des variétés de Shimura et les fibrés en droites amples construites par Baily et Borel. On se ramène ainsi au calcul des degrés des Z_i par rapport aux fibrés en question.

Corollaire 6.5. — *Soient $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ compact ouvert et $Z \subset \mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}}$ une courbe fermée. Alors il existe un entier c tel que pour tout $g \in G(\mathbb{A}_f)$ pour lequel $T_g Z \cap Z$ est fini on ait*

$$|T_g Z \cap Z| \leqslant c|K \cap gKg^{-1}|.$$

De manière analogue à la construction donnée ci-dessus, on définit les correspondances de Hecke sur les variétés de Shimura connexes. Avec les notations précédentes, fixons une composante X^+ de X comme dans 2.1 et posons $\Gamma_i = K_i \cap G(\mathbb{Q})^+$; soit

$S_i \cong \Gamma_i \backslash X^+$ l'image de X^+ dans $\mathrm{Sh}_{K_i}(G,X)_{\mathbb{C}}$. Alors tout élément $g \in G(\mathbb{Q})$ définit une correspondance de S_1 vers S_2 via le diagramme

$$S_1 \xleftarrow{\pi_{\Gamma_1}} X^+ \xrightarrow{g\cdot} X^+ \xrightarrow{\pi_{\Gamma_2}} S_2. \tag{6}$$

Comme c'était le cas ci-dessus, la projection π_{Γ_1} et le composé $\pi_{\Gamma_2} \circ g\cdot$ se factorisent par des morphismes entre variétés algébriques, ici $\Gamma_g \backslash X^+ \to S_i$ avec $\Gamma_g = \Gamma \cap g^{-1}\Gamma g$. On aura à se servir du lemme suivant, dont la démonstration est élémentaire.

Lemme 6.6. — *Avec les notations en vigueur ci-dessus, soit $g \in G(\mathbb{A}_f)$ et soient les $g_i \in G(\mathbb{Q})^+$ tels que*

$$G(\mathbb{Q})^+ \cap K_1 g K_2 = \coprod_i \Gamma_1 g_i^{-1} \Gamma_2.$$

Alors les composantes connexes de $T_g \cap (S_1 \times S_2)$ sont les T_{g_i}.

6.3. Modification de (G,X) et de K

Soient (G,X) une donnée de Shimura et $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe compact ouvert. Pour montrer (un cas particulier de) la conjecture d'André–Oort, pour la variété de Shimura $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$, il s'avère souvent utile de remplacer K et G par d'autres groupes. On donnera ici quelques arguments tirés de [19, § 2] permettant de telles modifications dans les hypothèses.

Si $K' \supset K$ est un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$, alors

$$\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{Sh}_{K'}(G,X)_{\mathbb{C}}$$

est un morphisme fini et une sous-variété irréductible de $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ est de type Hodge si et seulement si son image l'est. Cela est vrai en particulier pour un point spécial et il s'ensuit :

Proposition 6.7. — *La conjecture* 2.3 *pour un ensemble de points spéciaux Σ dans $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ est équivalente à la conjecture pour l'image de Σ dans $\mathrm{Sh}_{K'}(G,X)_{\mathbb{C}}$.*

La discussion suivante est basée sur Moonen [26, 2.8 et 2.9] et Edixhoven–Yafaev [19, § 2]. Soit $Z \subset \mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ une sous-variété irréductible. Il existe alors un sous-groupe $H \subset G$, un morphisme de données de Shimura $(H,Y) \to (G,X)$ et un élément $g \in G(\mathbb{A}_f)$ tels que Z soit contenu dans l'image de l'application (3) de 2.2 et que H soit le groupe de Mumford–Tate générique sur Z. La composante irréductible S de l'image de (3) contenant Z est la plus petite sous-variété de type Hodge de $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ contenant Z. L'application (3) se factorise par $\mathrm{Sh}_L(H,Y)_{\mathbb{C}}$ pour un sous-groupe compact ouvert $L \subset H(\mathbb{A}_f)$ et comme ci-dessus, l'application

$$\mathrm{Sh}_L(H,Y)_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$$

a la propriété qu'une sous-variété irréductible (resp. un point) de $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ est de type Hodge (resp. spécial) si et seulement si son image l'est.

Proposition 6.8. — *Soient* $Z \subset \mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ *une sous-variété irréductible fermée et* Σ *un ensemble de points spéciaux, Zariski-dense dans* Z. *Pour montrer la conjecture* 2.3 *pour* Z, *on peut supposer que* Z *contient un point* s *avec* $\mathrm{MT}(s) = G$ *et que la plus petite sous-variété de type Hodge contenant* Z *est une composante connexe de* $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$.

Définition 6.9. — *Si* $Z \subset \mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ *vérifie les conditions du théorème on dira que* Z *est* Hodge générique.

Un énoncé similaire est valable pour le passage au groupe adjoint. Pour toute donnée de Shimura (G,X) on définit X^{ad} comme la $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})$ classe de conjugaison dans $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times, G^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{R}})$ contenant l'image de X et $(G^{\mathrm{ad}}, X^{\mathrm{ad}})$ est alors aussi une donnée de Shimura. Il existe des sous-groupes compacts ouverts $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ et $K^{\mathrm{ad}} \subset G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{A}_f)$ tels que K^{ad} contienne l'image de K. Le morphisme $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Sh}_{K^{\mathrm{ad}}}(G^{\mathrm{ad}}, X^{\mathrm{ad}})_{\mathbb{C}}$ est alors fini et respecte les sous-variétés de type Hodge et les points spéciaux. Cela implique :

Proposition 6.10. — *Soient les notations comme dans la proposition* 6.8. *Pour montrer la conjecture* 2.3 *pour* Z, *on peut remplacer* G *par son groupe adjoint et* Z *et* Σ *par leurs images* Z^{ad} *et* Σ^{ad} *dans* $\mathrm{Sh}_{K^{\mathrm{ad}}}(G^{\mathrm{ad}}, X^{\mathrm{ad}})$. *En outre,* Z *est Hodge générique si et seulement si* Z^{ad} *l'est.*

7. L'APPROCHE D'EDIXHOVEN ET YAFAEV

7.1. Énoncés

Dans les différents résultats obtenus par Edixhoven [16], [17], Edixhoven–Yafaev [19] et Yafaev [39], [41], [40] on peut distinguer deux types d'hypothèses. Dans certains cas, on supposera que l'hypothèse de Riemann généralisée (GRH) soit vérifiée pour une classe de corps de nombres qui dépend des variétés de Shimura considérées. Dans d'autres cas, on impose une condition supplémentaire sur les points spéciaux contenus dans Σ. La stratégie des démonstrations est toutefois très proche d'un cas à l'autre. On cite d'abord les principaux résultats.

Théorème 7.1 (Edixhoven–Yafaev [19], Yafaev [41]). — *Soient* (G,X) *une donnée de Shimura et* $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ *un sous-groupe compact ouvert. Soit* $Z \subset \mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ *une courbe irréductible fermée contenant un ensemble infini* Σ *de points spéciaux.*

Supposons que tous les groupes de Mumford–Tate $\mathrm{MT}(s)$ (*voir définition* 2.1) *avec* $s \in \Sigma$ *sont isomorphes. Alors* Z *est une sous-variété de type Hodge.*

Sous une condition un peu plus restrictive sur Σ, le théorème 7.1 est montré dans [19, 1.2]. L'énoncé donné ici est prouvé dans [41, Theorem 1.3]. Le théorème 2.2 de [17] est maintenant le cas particulier du théorème 7.1 où la variété de Shimura est une surface modulaire de Hilbert. C'est l'analogue du théorème 7.2 avec une condition sur Σ au lieu de GRH.

L'hypothèse sur les points spéciaux en vigueur dans le théorème ci-dessus peut souvent être remplacée par l'hypothèse de Riemann généralisée. Ainsi le théorème 5.3, qui traite le cas de $\mathbb{C}^2$, a été démontré par Edixhoven [16, Theorem 1.1] en admettant GRH pour les corps quadratiques imaginaires. La démonstration dans ce cas a été esquissée dans l'introduction. Le théorème d'Edixhoven a été généralisé par Yafaev [39] à certains autres produits de deux courbes de Shimura. Un deuxième exemple est le théorème suivant qui concerne les surfaces modulaires de Hilbert. On introduit d'abord la notation nécessaire.

Soient F une extension quadratique réelle de $\mathbb{Q}$ et $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_{2/F}$. L'action de $\mathbb{C}^\times$ sur $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ induit un morphisme $\mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}_{2/\mathbb{R}}$ dont on déduit

$$h\colon \mathbb{C}^\times \longrightarrow G_{\mathbb{R}} = \mathrm{GL}^2_{2/\mathbb{R}}.$$

Soit X la $G(\mathbb{R})$-classe de conjugaison de h. Alors (G, X) est une donnée de Shimura et pour $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ compact ouvert, on définit la surface modulaire de Hilbert $\mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}}$ associée à F.

Théorème 7.2 (Edixhoven [17]). — *Supposons que l'hypothèse de Riemann généralisée soit vérifiée. Soient* $\mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}}$ *une surface modulaire de Hilbert et Z une courbe irréductible dans* $\mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}}$ *contenant un ensemble infini de points spéciaux. Alors Z est une sous-variété de type Hodge.*

Remarque 7.3. — Dans [41], Yafaev montre que ce théorème est valable pour toute variété de Shimura. C'est-à-dire que sous l'hypothèse de Riemann généralisée, une courbe irréductible $Z \subset \mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}}$ contenant un ensemble infini de points spéciaux est une sous-variété de type Hodge, quelle que soit la variété de Shimura $\mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}}$. La démonstration suit la méthode de la démonstration du théorème 7.1 en l'améliorant sur plusieurs points.

7.2. La stratégie de la démonstration

Les démonstrations des théorèmes cités dans le paragraphe précédent reposent sur la caractérisation suivante des sous-variétés de type Hodge, donnée dans [19, 7.1].

Critère 7.4. — *Soient (G, X) une donnée de Shimura, $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe compact ouvert assez petit et $Z \subset \mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}}$ une sous-variété irréductible et fermée. On suppose que G est adjoint et que Z est Hodge générique* (*dans le sens de la définition* 6.9). *Comme dans* 2.1, *une composante X^+ de X est fixée et S désigne l'image de X^+ dans* $\mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}}$.

Soient p un nombre premier, $g \in G(\mathbb{Q}_p)$; définissons les $g_i \in G(\mathbb{Q})^+$ comme dans le lemme 6.6, *de sorte que les T_{g_i} sont les composantes connexes de T_g sur S. Supposons que*

1. *les $T_{g_i}Z$ et les $T_{g_i^{-1}}Z$ sont irréductibles,*
2. *pour tout $s \in S(\mathbb{C})$ et tout g_i, l'orbite*

$$\bigcup_{n \geqslant 0} \left(T_{g_i} + T_{g_i^{-1}} \right)^n (s) \tag{7}$$

est dense dans S pour la topologie euclidienne et

3. *$Z \subset T_g Z$.*

Alors $Z = S$, en particulier Z est de type Hodge.

Démonstration. — Supposons que les trois conditions du critère soient vérifiées. Comme $Z \subset S$ et les T_{g_i} sont des correspondances $S \to S$, on a $Z \subset \cup T_{g_i}Z$. Soit i tel que $Z \subset T_{g_i}Z$. La condition 7.4.1 implique alors que $Z = T_{g_i}Z$, que $T_{g_i^{-1}}Z = T_{g_i^{-1}}T_{g_i}Z \supset Z$ et donc que $Z = T_{g_i}Z = T_{g_i^{-1}}Z$. Il s'ensuit que pour $s \in Z(\mathbb{C})$, la $(T_{g_i} + T_{g_i^{-1}})$-orbite de s est contenue dans Z et 7.4.2 implique alors que $Z = S$. □

7.3. Les conditions 7.4.1 et 7.4.2

Dans cette section on verra comment on peut établir les deux premières conditions du critère 7.4. Dans les deux cas, (G, X) est une donnée de Shimura avec G semi-simple et adjoint et $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ est un sous-groupe compact ouvert. On écrit X^+, $G(\mathbb{R})^+$, $G(\mathbb{Q})^+$, $\Gamma = K \cap G(\mathbb{Q})^+$ comme dans 2.1 et, comme avant, $S = \Gamma \backslash X^+$ désigne l'image de X^+ dans $\mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}}$. On suppose que K est assez petit pour que Γ opère librement sur X^+ et que K est le produit de sous-groupes compacts ouverts $K_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$.

Théorème 7.5 ([19], Theorem 5.1). — *Avec les hypothèses ci-dessus, supposons que $Z \subset \mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}}$ soit une sous-variété fermée, irréductible et Hodge générique (dans le sens de la définition* 6.9) *contenant un point spécial. Il existe alors un entier N_1 tel que, pour tout $g \in G(\mathbb{Q})^+$ dont l'image dans $G(\mathbb{Q}_\ell)$ est dans K_ℓ pour tout ℓ divisant N_1, l'image $T_g Z$ soit irréductible. Ici T_g est la correspondance de Hecke sur S définie par g.*

Esquisse de la démonstration. — On reprend les notations de 6.2 pour la construction de T_g et on considère l'équation (6) avec $S_1 = S_2 = S = \Gamma \backslash X^+$ et $S_g = \Gamma_g \backslash X^+$ où $\Gamma_g = \Gamma \cap g^{-1}\Gamma g$. La correspondance T_g étant l'image de S_g dans $S \times S$, il suffit de montrer que, sous les conditions du théorème, l'image réciproque Z_g de Z dans S_g est connexe. Pour le faire, on peut remplacer (et on remplace) Z et Z_g par leurs sous-variétés de points lisses.

On fixe un élément $z \in Z(\mathbb{C})$ dont le groupe de Mumford–Tate est égal à G. Le revêtement $Z_g \to Z$ correspond au $\pi_1(Z,z)$-ensemble $\Gamma_g\backslash\Gamma$ et il suffit de montrer que, toujours sous les conditions du théorème, l'action de $\pi_1(Z,z)$ sur $\Gamma_g\backslash\Gamma$ est transitive. Pour le faire, on construit une variation de $\mathbb{Z}$-structures de Hodge sur S dont on considère la fibre Λ_z en z. Un théorème d'André [3, Proposition 2] implique que l'adhérence de Zariski de l'image de la représentation de monodromie de $\pi_1(Z,z)$ sur $\Lambda_z \otimes \mathbb{Q}$ (le *groupe de monodromie algébrique*) coïncide avec l'adhérence de Zariski de l'image de la représentation de $\pi_1(S,z)$ sur $\Lambda_z \otimes \mathbb{Q}$.

On invoque ensuite un théorème de Nori [30, 5.3] qui assure l'existence d'un entier N_1 tel que pour tout m premier à N_1, les images de $\pi_1(Z,z)$ et de $\pi_1(S,z)$ dans $\mathrm{GL}(\Lambda_z/m\Lambda_z)$ coïncident. Tout cela permet de montrer que si g vérifie les hypothèses de 7.5, avec N_1 comme ci-dessus, alors l'action de $\pi_1(Z,z)$ est transitive, prouvant ainsi l'énoncé. La démonstration détaillée attend le lecteur curieux dans [19, § 5]. □

THÉORÈME 7.6. — *On conserve les notations fixées avant le théorème* 7.5 *et on décompose $G = G_1 \times \cdots \times G_r$ comme produit de facteurs simples. Il existe un entier N_2 tel que pour tout nombre premier $p \geqslant N_2$ l'énoncé suivant soit vérifié. Soit $g \in G(\mathbb{Q}_p)$ un élément dont la projection dans aucun $G_j(\mathbb{Q}_p)$ ne soit contenue dans un sous-groupe compact et soient les $g_i \in G(\mathbb{Q})^+$ comme dans le lemme* 6.6. *Alors pour tout i et tout $s \in S(\mathbb{C})$, la $(T_{g_i} + T_{g_i^{-1}})$-orbite de s (donnée par* (7)*) est dense dans S pour la topologie euclidienne.*

La démonstration est donnée dans [19, § 6].

7.4. Orbites galoisiennes des points spéciaux

Soient (G,X) une donnée de Shimura avec G adjoint et $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe compact ouvert. On fixe une représentation fidèle $\mathbb{Q}$-linéaire V de G et un réseau $V_{\mathbb{Z}} \subset V$ tel que K stabilise $V_{\mathbb{Z}} \otimes \widehat{\mathbb{Z}} \subset V \otimes \mathbb{A}_f$. Pour tout sous-groupe algébrique $H \subset G$, on note $H_{\mathbb{Z}}$ l'adhérence de H dans $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{Z}})$. Si $T \subset G$ est un tore, $\mathrm{Mauvais}(T)$ est l'ensemble de nombres premiers p tels que la fibre de $T_{\mathbb{Z}}$ en caractéristique p ne soit pas un tore.

Soit $R \subset G(\mathbb{A}_f)$ un ensemble de représentants (dont 1_G) pour l'ensemble (fini) des doubles classes $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$. Pour tout $s \in \mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$ on fixe un représentant $(h_s, a_s) \in X \times G(\mathbb{A}_f)$ avec $a_s \in R$.

THÉORÈME 7.7. — *Avec les notations introduites ci-dessus, soient $F \subset \mathbb{C}$ un corps de nombres contenant le corps dual $E(G,X)$ et $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ le modèle canonique sur F de la variété de Shimura $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$.*

Soit $s_0 \in \mathrm{Sh}_K(G,X)(\overline{\mathbb{Q}})$ un point spécial. Il existe alors des constantes c_1 et $c_2 > 0$ telles que pour tout $s \in \mathrm{Sh}_K(G,X)(\overline{\mathbb{Q}})$ avec $\mathrm{MT}(s) \cong \mathrm{MT}(s_0)$ on ait l'inégalité

$$|\Gamma_F \cdot s| > c_1 \prod_{p \in \mathrm{Mauvais}(\mathrm{MT}(h_s))} c_2 p.$$

Remarque 7.8. — Noter que les tores $\mathrm{MT}(h_s) \subset G$ dépendent du choix des h_s et que les ensembles Mauvais($\mathrm{MT}(h_s)$) dépendent en plus du choix de la représentation V et du réseau $V_{\mathbb{Z}}$.

Remarque 7.9. — L'amélioration du théorème 7.7 (sous l'hypothèse de Riemann généralisée) est un des ingrédients principaux du travail de Yafaev [41] menant au résultat cité dans la remarque 7.3.

Esquisse de la démonstration. — Remarquons pour commencer que pour montrer le théorème, on peut modifier K et F à volonté. De plus, il suffit de prouver le théorème avec chaque s remplacé par une image sous la correspondance $T_{a_s^{-1}}$ car R étant fini, le degré des $T_{a_s^{-1}}$ est uniformément borné. Cela permet de supposer que $a_s = 1_G$ pour tout s et que chaque s est dans l'image de $\mathrm{Sh}(\mathrm{MT}(h_s), \{h_s\}) \to \mathrm{Sh}_K(G, X)$.

Dans la proposition suivante, Σ_{s_0} désigne l'ensemble des $s \in \mathrm{Sh}_K(G,X)(\overline{\mathbb{Q}})$ avec $\mathrm{MT}(s) \cong \mathrm{MT}(s_0)$. Via la représentation $G \to \mathrm{GL}(V)$, on considère les h_s comme des applications $\mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}(V_{\mathbb{R}})$.

PROPOSITION 7.10 (Yafaev [41]). — *L'ensemble des* $h_s \colon \mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}(V_{\mathbb{R}})$ *avec* $s \in \Sigma_{s_0}$ *est une réunion finie de* $\mathrm{GL}(V)$*-classes de conjugaison.*

Démonstration. — Comme G est adjoint, chaque morphisme $h \in X$ est déterminé par le morphisme

$$\mu_{h/\mathbb{C}} = h \circ r \colon \mathbb{G}_{m/\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{C}}^\times \longrightarrow G_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{GL}(V_{\mathbb{C}})$$

défini comme dans 6.1, formule (4). Il suffit donc de montrer que l'ensemble des $\mathrm{GL}(V)$-classes de conjugaison dans l'ensemble des μ_{h_s} est fini, pour s parcourant Σ_{s_0}. Tous les μ_{h_s}, pour $s \in \mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$, sont conjugués sous $G(\mathbb{C})$, donc l'ensemble des poids de μ_{h_s} sur $V_{\mathbb{C}}$ ne dépend pas de s.

Pour tout tore T sur $\mathbb{Q}$, notons $X^*(T)$ (resp. $X_*(T)$) le groupe de (co)caractères de T, muni de l'action naturelle à gauche du groupe de Galois absolu $\Gamma_{\mathbb{Q}}$. L'accouplement naturel $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon X_*(T) \times X^*(T) \to \mathbb{Z}$ vérifie $\langle x^\sigma, y^\sigma \rangle = \langle x, y \rangle$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{Q}}$. Le groupe $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ opère sur tous les $\mathrm{MT}(s)$ avec $s \in \Sigma_{s_0}$ via le même quotient fini $\overline{\Gamma}_{\mathbb{Q}}$.

Soit $s \in \Sigma_{s_0}$. Comme $\mathrm{MT}(s)$ est le groupe de Mumford–Tate de s, les conjugués galoisiens de μ_s engendrent $X_*(\mathrm{MT}(s)) \otimes \mathbb{Q}$ et on en déduit une surjection de $\Gamma_{\mathbb{Q}}$-modules (à gauche) $\mathbb{Q}[\overline{\Gamma}_{\mathbb{Q}}] \to X_*(\mathrm{MT}(s)) \otimes \mathbb{Q}$. Cela donne une injection $X^*(\mathrm{MT}(s)) \subset \mathbb{Z}[\overline{\Gamma}_{\mathbb{Q}}]$ de $\Gamma_{\mathbb{Q}}$-modules. Soit $\Pi_s \subset X^*(\mathrm{MT}(s)) \subset \mathbb{Z}[\overline{\Gamma}_{\mathbb{Q}}]$ l'ensemble des caractères intervenant dans la représentation de $\mathrm{MT}(s)_{\overline{\mathbb{Q}}}$ sur $V_{\overline{\mathbb{Q}}}$. Comme Π_s est $\Gamma_{\mathbb{Q}}$-invariant, on a

$$\langle \mu_{h_s}^\sigma, \Pi_s \rangle = \langle \mu_{h_s}^\sigma, \Pi_s^\sigma \rangle = \langle \mu_{h_s}, \Pi_s \rangle$$

pour tout $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{Q}}$. Comme $\langle \mu_{h_s}, \Pi_s \rangle$ est l'ensemble des poids de μ_{h_s} agissant sur $V_{\mathbb{C}}$, celui-ci ne dépend pas de s. Les $\mu_{h_s}^\sigma$ constituent une base de $X_*(\mathrm{MT}(s)) \otimes \mathbb{Q}$, donc cela ne laisse qu'un nombre fini de possibilités pour Π_s (pour s parcourant Σ_{s_0}).

Pour montrer que l'ensemble des classes de $\mathrm{GL}(V)$-conjugaison des μ_{h_s} est fini, on peut maintenant supposer que Π_s ne dépend pas de s. Comme Π_s engendre $X^*(\mathrm{MT}(s))$ en tant que sous-module de $\mathbb{Z}[\overline{\Gamma}_\mathbb{Q}]$, il s'ensuit que $X^*(\mathrm{MT}(s)) \subset \mathbb{Z}[\overline{\Gamma}_\mathbb{Q}]$ ne dépend pas de s. On obtient une identification des tores $\mathrm{MT}(s)$ qui, par construction, est compatible avec les cocaractères μ_{h_s}. En passant à un sous-ensemble infini, on peut supposer que la multiplicité de chaque $\chi \in \Pi_s$ dans la représentation de $\mathrm{MT}(s)_{\overline{\mathbb{Q}}}$ sur $V_{\overline{\mathbb{Q}}}$ est indépendante de s. Les tores $\mathrm{MT}(s)$ sont alors conjugués dans $\mathrm{GL}(V)$ et il en est de même pour les μ_{h_s}. $\square$

Soit Σ'_{s_0} l'ensemble des s tels que h_s soit le conjugué de h_{s_0} par un élément $t_s \in \mathrm{GL}(V)$. Grâce à la proposition, il suffit de prouver le théorème 7.7 pour s parcourant Σ'_{s_0}. Pour tout élément $s \in \Sigma'_{s_0}$, la conjugaison par t_s est un isomorphisme de données de Shimura $(\mathrm{MT}(h_{s_0}), \{h_{s_0}\}) \cong (\mathrm{MT}(h_s), \{h_s\})$ et les corps duaux des $(\mathrm{MT}(h_s), \{h_s\})$ coïncident avec le même corps $E \subset \mathbb{C}$. Les isomorphismes des données de Shimura sont compatibles avec les lois de réciprocité (définies dans 6.1, formule (5)).

On contemple le diagramme commutatif suivant (d'applications entre ensembles)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}(\mathrm{MT}(h_{s_0}), \{h_{s_0}\})(\mathbb{C}) \arrow[r] & \mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C}) \arrow[d] \\
\mathrm{Sh}(\mathrm{MT}(h_s), \{h_s\})(\mathbb{C}) \arrow[u, "\mathrm{Sh}(\mathrm{inn}_{t_s})"] \arrow[r, "f_s"] & \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash\big(Y \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_f)/\mathrm{GL}_n(\widehat{\mathbb{Z}})\big).
\end{tikzcd}$$

La flèche $\mathrm{Sh}(\mathrm{inn}_{t_s})$ vient de l'isomorphisme entre modèles canoniques, les points complexes des variétés dans la colonne de gauche sont $\overline{\mathbb{Q}}$-rationnels et $\mathrm{Sh}(\mathrm{inn}_{t_s})$ est Γ_E-équivariant. La première flèche horizontale vient aussi d'un morphisme entre modèles canoniques et on voit assez facilement (*cf.* [19, 4.2]) que, pour prouver le théorème, il suffit de donner une borne inférieure pour l'ordre de la $(\widehat{\mathbb{Z}} \otimes \mathscr{O}_E)^\times$-orbite de s dans $\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$, pour l'action de $(\widehat{\mathbb{Z}} \otimes \mathscr{O}_E)^\times$ donnée par $r(\mathrm{MT}(h_s), \{h_s\})$.

En ce qui concerne *l'ensemble* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash(Y \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_f)/\mathrm{GL}_n(\widehat{\mathbb{Z}}))$, on a identifié $V \cong \mathbb{Q}^n$, noté par $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_{n/\mathbb{Q}}$ le morphisme déduit de la représentation de G sur V et défini Y comme la classe de conjugaison de morphismes $\mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}_{n/\mathbb{R}}$ contenant l'image de X. Cela définit la deuxième colonne du diagramme et permet de définir f_s comme l'application rendant le carré commutatif. Cette application est déduite de la composée $\rho_{|\mathrm{MT}(h_s)} \circ \mathrm{inn}_{t_s}$ en passant au quotient. Dans [19, § 4] l'estimation de l'orbite de s provient d'une minoration de l'ordre de l'orbite de l'image de s dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash(Y \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_f)/\mathrm{GL}_n(\widehat{\mathbb{Z}}))$ sous l'action de $(\widehat{\mathbb{Z}} \otimes \mathscr{O}_E)^\times$ via la loi de réciprocité $r(\mathrm{MT}(h_s), h_s)$. On se ramène au calcul de l'orbite de t_s dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_f)/\mathrm{GL}_n(\widehat{\mathbb{Z}})$ sous l'action de $(\widehat{\mathbb{Z}} \otimes \mathscr{O}_E)^\times$ donnée par $r(\mathrm{MT}(h_{s_0}), h_{s_0})^m$ pour un entier m assez grand. Ceci est achevé par un calcul long mais explicite qui occupe [19, 4.3 et 4.4]. $\square$

7.5. Fin de la démonstration du théorème 7.1

Les différentes propositions dans 6.3 permettent de se ramener au cas où le groupe G est adjoint, Z est Hodge générique et K est le produit de sous-groupes compacts ouverts $K_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$. En appliquant une correspondance de Hecke, on peut en outre supposer que

$$Z \subset S \subset \mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}} \tag{8}$$

avec S l'image dans $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ d'une composante connexe fixée X^+ de X. On fixe, pour tout $s \in \Sigma$, un élément $h_s \in X^+$ tel que $s = \overline{(h_s,1)} \in \mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$. Le lemme 6.1 montre que les variétés et les inclusions de l'équation (8) sont définies sur un corps de nombres $F \subset \mathbb{C}$ et on en fixe un modèle sur F. On supposera aussi que tous les tores $\mathrm{MT}(s)$, pour $s \in \Sigma$, sont décomposés sur F. Comme dans le paragraphe 7.4 on fixe une représentation fidèle $\mathbb{Q}$-linéaire V de G et un réseau $V_{\mathbb{Z}} \subset V$ de sorte que l'on peut prendre l'adhérence $H_{\mathbb{Z}}$ de tout sous-groupe $H \subset G$ et définir $\mathrm{Mauvais}(T)$ pour tout tore $T \subset G$ comme dans 7.4. Dans la suite de la démonstration, on note $m(s)$ l'ordre de l'ensemble $\mathrm{Mauvais}(\mathrm{MT}(h_s))$ et on distingue deux possibilités.

Le cas où $m(s)$ est borné. — Pour tout nombre premier, p soit Σ_p l'ensemble des $s \in \Sigma$ tels que $\mathrm{MT}(h_s)_{\mathbb{F}_p}$ soit un tore. Supposons que $m(s) < B$ pour tout $s \in \Sigma$. Pour tout ensemble E de nombres premiers avec $|E| = B$, on a alors $\cup_{p\in E}\Sigma_p = \Sigma$ et pour au moins un $p \in E$ l'ensemble Σ_p est dense dans Z. Il y a donc au plus $B-1$ nombres premiers tels que Σ_p ne soit pas Zariski-dense. Il s'ensuit qu'il existe une infinité de nombres premiers p supérieurs à N_1 (comme dans le théorème 7.5), et à N_2 (du théorème 7.6), avec $G_{\mathbb{F}_p}$ lisse, $K_p = G_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_p)$ et $\Sigma_p \subset Z$ Zariski-dense et tels que tous les $\mathrm{MT}(h_s)_{\mathbb{Q}_p}$ (pour $s \in \Sigma$) soient scindés. Seule la dernière condition pourrait exclure un ensemble infini de nombres premiers, mais le théorème de Chebotarev implique qu'elle est vérifiée pour un ensemble de p avec une densité positive.

En utilisant [19, Proposition 7.3.1] on se ramène au cas où les tores $\mathrm{MT}(h_s)_{\mathbb{Z}_p}$ (pour $s \in \Sigma_p$) sont conjugués sous K_p. On fixe un élément $s_0 \in \Sigma_p$ et, pour tout $s \in \Sigma_p$, un transporteur $t_s \in K_p$ tel que $\mathrm{MT}(h_s) = t_s \mathrm{MT}(h_{s_0}) t_s^{-1}$. Dans [19, 7.3], il est montré qu'il existe $g \in \mathrm{MT}(h_{s_0})(\mathbb{Q}_p)$ dans l'image de Γ_F (via le morphisme de réciprocité) vérifiant les conditions du théorème 7.6. La démonstration utilise les faits que $r(\mathrm{MT}(h_{s_0}), \{h_{s_0}\})$ est une surjection (de groupes algébriques) et que $\mathrm{MT}(h_{s_0})_{\mathbb{Q}_p}$ est scindé.

Pour tout $s \in \Sigma_p$, le conjugué $t_s g t_s^{-1} \in \mathrm{MT}(h_s)$ est dans l'image de Γ_F par le morphisme de réciprocité donc $\overline{(h_s, t_s g t_s^{-1})} \in \Gamma_F \cdot s$. Comme on a également $\overline{(h_s, t_s g t_s^{-1})} = \overline{(h_s, t_s g)} \in T_g s$, on conclut que $\Gamma_F \cdot s$ rencontre $T_g Z$. Comme $T_g Z$ est définie sur F, cela implique que $s \in T_g Z$.

On a montré que $\Sigma_p \subset T_g Z(\mathbb{C})$ et cela implique que $Z \subset T_g Z$. Les conditions du critère 7.4 étant vérifiées, le théorème est démontré dans ce premier cas. □

Remarque 7.11. — Les résultats de la section 7.4 concernant les orbites galoisiennes n'ont pas été utilisés dans le cas qui vient d'être traité. On ne s'est pas non plus servi de l'hypothèse que Z soit une courbe.

Le cas où $m(s)$ n'est pas borné. — Pour les détails le lecteur est renvoyé à [19, 7.4]. En utilisant le corollaire 6.5 et une étude de l'action des tores $\mathrm{MT}(s)_{\mathbb{Z}_p}$ sur $V_{\mathbb{Z}_p}$ on montre le lemme suivant, voir [19, Corollary 7.4.4].

LEMME 7.12. — *Il existe un entier k avec la propriété suivante. Soient $s \in \Sigma$ et p un nombre premier tels que $\mathrm{MT}(h_s)_{\mathbb{Q}_p}$ soit scindé et $p \notin \mathrm{Mauvais}(\mathrm{MT}(h_s))$. Alors il existe un $g \in \mathrm{MT}(h_s)(\mathbb{Q}_p)$ appartenant à $r(\mathrm{MT}(h_s), \{h_s\})(\mathbb{Q}_p \otimes F)$, vérifiant les conditions du théorème 7.6 et tel que $|T_g Z \cap Z| \leqslant p^k$ si cette intersection est finie.*

Soit k comme dans le lemme. Comme $m(s)$ devient arbitrairement grand, le théorème de Chebotarev implique l'existence d'un élément $s \in \Sigma$ et d'un nombre premier p vérifiant les conditions du lemme, avec $p \geqslant N_1$ et N_2 (comme dans les théorèmes 7.5 et 7.6) et tels que la minoration de $|\Gamma_F \cdot s|$ établie dans le théorème 7.7 soit supérieure à p^k. Pour l'élément g fourni par le lemme ci-dessus, le fait que g appartient à l'image de Γ_F assure que $T_g s$ contient un conjugué de s sous Γ_F et donc que $\Gamma_F \cdot s \subset T_g Z \cap Z$. Il s'ensuit que l'intersection $T_g Z \cap Z$ ne peut pas être finie et comme Z est irréductible on en déduit que $Z \subset T_g Z$. L'élément g vérifie les conditions du critère 7.4 et la démonstration du théorème est achevée. $\square$

7.6. Esquisse de la démonstration du théorème 7.2

Rappelons les notations en vigueur dans le théorème 7.2. On a fixé une extension quadratique réelle F de $\mathbb{Q}$, posé $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} \mathrm{GL}_{2/F}$, construit un morphisme

$$h\colon \mathbb{C}^\times \longrightarrow G_{\mathbb{R}} = \mathrm{GL}_{2/\mathbb{R}}^2$$

et défini X comme la $G(\mathbb{R})$ classe de conjugaison de h. Le groupe G admet un modèle naturel sur $\mathbb{Z}$, à savoir $G_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F/\mathbb{Z}} \mathrm{GL}_{2/\mathscr{O}_F}$ et on pose $K = G_{\mathbb{Z}}(\widehat{\mathbb{Z}})$. La variété de Shimura $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ admet alors un modèle canonique sur $\mathbb{Q}$. On se donne un corps de nombres F et une courbe irréductible fermée $Z \subset \mathrm{Sh}_K(G,X)_F$ contenant un ensemble infini Σ de points spéciaux. Il faut montrer que Z est de type Hodge.

Dans [17] on travaille avec la donnée de Shimura (G,X) et avec une donnée de Shimura (G',X') associée à un sous-groupe $G' \subset G$. Ici on essayera de se ramener autant que possible à la méthode exposée ci-dessus. On passe donc à la donnée de Shimura adjointe $(G^{\mathrm{ad}}, X^{\mathrm{ad}})$ en remarquant que celle-ci est aussi la donnée de Shimura adjointe de (G',X'). Le groupe G^{ad} hérite d'un modèle entier $G^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{Z}}$ et on prend $K^{\mathrm{ad}} = G^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{Z}}(\widehat{\mathbb{Z}})$. L'image de Z dans $\mathrm{Sh}_{K^{\mathrm{ad}}}(G^{\mathrm{ad}}, X^{\mathrm{ad}})$ est notée Z^{ad}. Si Z^{ad} n'est pas Hodge générique, alors le théorème 7.2 est trivialement valable et on supposera dans la suite qu'on se trouve dans le cas restant : $Z^{\mathrm{ad}} \subset \mathrm{Sh}_{K^{\mathrm{ad}}}(G^{\mathrm{ad}}, X^{\mathrm{ad}})$ est Hodge générique. Il suffit de montrer que Z^{ad} est une composante de $\mathrm{Sh}_{K^{\mathrm{ad}}}(G^{\mathrm{ad}}, X^{\mathrm{ad}})$, car cela implique que Z^{ad}

est de type Hodge. Alternativement, si Z^{ad} est une composante de $\mathrm{Sh}_{K^{\mathrm{ad}}}(G^{\mathrm{ad}}, X^{\mathrm{ad}})$, cela contredit le fait que Z^{ad} soit une courbe. En tout cas, le théorème sera prouvé.

On a $G(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{GL}_2(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)$. Le critère 7.4 sera appliqué à la correspondance de Hecke T_p^{ad} associée à l'image dans $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{A}_f)$ d'un élément de la forme

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(F \otimes \mathbb{Q}_p) = G(\mathbb{Q}_p) \subset G(\mathbb{A}_f),$$

avec p premier. Les théorèmes 7.5 et 7.6 impliquent l'existence de constantes N_1 et N_2 tels que les conditions 7.4.1 et 7.4.2 soient vérifiées pour $p \geqslant N = \max(N_1, N_2)$.

Pour que la condition 7.4.3 soit vérifiée, on utilise la même idée que ci-dessus, c'est-à-dire qu'on choisira p tel que l'intersection $T_p^{\mathrm{ad}} Z^{\mathrm{ad}} \cap Z^{\mathrm{ad}}$ ne puisse pas être propre. Si cette intersection est propre, alors la borne supérieure pour $|T_p^{\mathrm{ad}} Z^{\mathrm{ad}} \cap Z^{\mathrm{ad}}|$ fournie par le corollaire 6.5 est de la forme $c_1 p^k$ pour une constante $c_1 > 0$ et un entier k.

Il reste à trouver une minoration $|T_p^{\mathrm{ad}} Z^{\mathrm{ad}} \cap Z^{\mathrm{ad}}|$ et pour cela on suivra [17]. En particulier, on se place à nouveau dans $\mathrm{Sh}_K(G, X)_F$ où il suffit maintenant de trouver une estimation de $|T_p Z \cap Z|$. La variété $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ peut être interprétée comme espace de modules de variétés abéliennes munies d'une injection $\mathscr{O}_K \subset \mathrm{End}(A)$ vérifiant certaines conditions. Pour tout $s \in \mathrm{Sh}_K(G, X)$, on note R_s l'anneau $\mathrm{End}_{\mathscr{O}_K}(A_s)$ où A_s est la variété abélienne correspondant à s. Par des arguments similaires à ceux utilisés dans le paragraphe 7.5, Edixhoven montre dans [17, Lemma 8.1] que si $s \in Z(\overline{\mathbb{Q}})$ est un point spécial et p un nombre premier tels que R_s soit scindé au-dessus de p, on a $\Gamma_F \cdot s \subset T_p Z \cap Z$.

Le théorème 7.7 trouve un analogue dans [17, Theorem 6.2] [(4)] qui donne une estimation $|\Gamma_F \cdot s| > c_2 d_s$ où $d_s = |\mathrm{discr}(R_s)|^{1/4-\varepsilon}$ et $c_2 > 0$. On peut montrer que, pour $s \in \Sigma$, le nombre d_s devient arbitrairement grand. L'hypothèse de Riemann généralisée implique une version effective du théorème de Chebotarev dont on déduit que, pour d_s assez grand, il existe des nombres premiers p tels que $R_s \otimes \mathbb{F}_p \cong \mathbb{F}_p^n$ et vérifiant une estimation de valeur polynomiale en $\log d_s$. Toujours pour d_s assez grand on en déduit l'existence d'un tel nombre premier p avec $c_2 d_s > c_1 p^2$. Pour un tel p on a $Z \subset T_p Z$ et le critère 7.4 implique alors le théorème.

8. SOUS-VARIÉTÉS DE DIMENSION SUPÉRIEURE

8.1. Travaux de Moonen et de Yafaev

Le premier cas particulier de la conjecture d'André–Oort qui ait été prouvé est dû à Moonen, voir le paragraphe 5.1. Ses résultats sont valables pour des sous-variétés de dimension arbitraire dans les variétés de Shimura. Les énoncés prouvés par la méthode d'Edixhoven et Yafaev traités jusqu'ici sont limités au cas des courbes contenues dans

(4) Historiquement, le théorème 7.7 est postérieur à [17].

les variétés de Shimura. Toutefois, en généralisant la démonstration du théorème 7.1, en particulier le cas où la fonction $m(s)$ est bornée, et en adaptant les théorèmes 7.5 et 7.6, Yafaev [40] prouve la généralisation suivante du théorème 5.2.

THÉORÈME 8.1. — *Soient* (G, X) *une donnée de Shimura* (G, X) *et* $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ *un sous-groupe compact ouvert. On fixe une représentation fidèle* $\mathbb{Q}$*-linéaire* V *de* G *muni d'un réseau* $V_{\mathbb{Z}} \subset V$ *et, en utilisant cette représentation, on identifie* G *avec un sous-groupe fermé de* $\mathrm{GL}_{n/\mathbb{Q}}$.

Soit $\Sigma_X \subset X$ *un ensemble de points spéciaux. Supposons qu'il existe un nombre premier* p *vérifiant la condition que pour tout* $s \in \Sigma_X$ *il existe un sous-tore* $M_s \cong \mathbb{G}_{m/\mathbb{Q}_p}$ *de* $\mathrm{MT}(s)_{\mathbb{Q}_p}$ *tel que*

– *l'ensemble des poids de* M_s *agissant sur* $V_{\mathbb{Q}_p}$ *est uniformément borné en* s,

– *pour aucun quotient non trivial* T *de* $\mathrm{MT}(s)$, *l'image de* M_s *dans* $T_{\mathbb{Q}_p}$ *ne soit triviale et*

– *l'adhérence de* M_s *dans* $\mathrm{GL}_{n/\mathbb{Z}_p}$ *est isomorphe à* $\mathbb{G}_{m/\mathbb{Z}_p}$.

Alors pour tout $g \in G(\mathbb{A}_f)$ *les composantes irréductibles de l'adhérence de l'image de* $\Sigma_X \times \{g\}$ *dans* $\mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}}$ *sont de type Hodge.*

8.2. Le cas de $\mathbb{C}^n$

Signalons encore que la méthode d'André esquissée dans le paragraphe 5.2 permet de montrer la conjecture d'André–Oort inconditionnellement pour les courbes dans $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$. Dans [18] Edixhoven adapte sa méthode au cas d'une sous-variété de dimension quelconque de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ contenant un sous-ensemble dense de points spéciaux.

Dans la section précédente, le fait que la sous-variété Z est une courbe est essentiel dans la fin de la démonstration : pour appliquer le critère 7.4 il faut que $Z \subset T_g Z$, pour une correspondance de Hecke convenable T_g. Pour montrer cette inclusion dans le cas où Z est une courbe irréductible, il suffit de montrer que l'intersection ne peut pas être finie. On verra ici, de manière succincte, comment l'approche d'Edixhoven [16] peut être généralisée pour des sous-ensembles de points spéciaux dans $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$, vu comme produit n copies de la courbe modulaire. Dans la suite on note, comme dans 5.2, $\mathbb{A}^1$ la variété de modules (grossière) des courbes elliptiques. On a alors les trois résultats suivants, dus à Edixhoven [18].

THÉORÈME 8.2. — *Soit* $\Sigma \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ *un ensemble de points spéciaux. Supposons que l'hypothèse de Riemann généralisée soit vérifiée. Alors les composantes irréductibles de l'adhérence de* Σ *sont de type Hodge.*

THÉORÈME 8.3. — *Soit* $\Sigma \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ *un ensemble de points spéciaux tels que les variétés abéliennes* (*toutes produits de courbes elliptiques*) *correspondantes soient toutes isogènes. Alors les composantes irréductibles de l'adhérence de* Σ *sont de type Hodge.*

D'après la proposition 6.7, ces théorèmes impliquent :

Corollaire 8.4. — *Soit* (GL_2, Y) *la donnée de Shimura considérée en* 5.2. *Alors les énoncés ci-dessus restent valables si chaque facteur* $\mathbb{A}^1$ *est remplacé par une courbe modulaire* $X_i = \mathrm{Sh}_{K_i}(\mathrm{GL}_2, Y)$, *pour des sous-groupes compacts ouverts* $K_i \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$.

Dans [18], les énoncés sont formulés en termes d'une description explicite des sous-variétés de type Hodge. Pour donner cette description, on décrit d'abord deux types particuliers : Un point de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ est de type Hodge si et seulement si c'est un point spécial. Une courbe dans $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ est de type Hodge si et seulement si c'est une composante connexe de l'image de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ par un produit $(T_{g_1}, \ldots, T_{g_n})\colon \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ de correspondances de Hecke associées à des éléments $g_i \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. En général, une sous-variété de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ est de type Hodge si et seulement si, après une permutation des facteurs, c'est un produit de sous-variétés des deux types précédents. Cette description est utilisée pour établir la caractérisation des sous-variétés de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ de type Hodge donnée dans la proposition 8.6.

Définition 8.5. — *Pour* $I \subset \{1, \ldots, n\}$, *soit* $p_I \colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^I$ *la projection sur les facteurs indexés par* I. *Soit* $Z \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ *une sous-variété fermée irréductible. Alors un sous-ensemble* $I \subset \{1, \ldots, n\}$ *est* minimal *pour* Z *si* $\dim p_I Z < |I|$ *mais* $\dim p_J Z = |J|$ *pour tout* $J \subsetneqq I$.

Proposition 8.6. — *Soit* $Z \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ *une sous-variété fermée irréductible. Alors* Z *est de type Hodge si et seulement si, pour tout* $I \subset \{1, \ldots, n\}$ *qui est minimal pour* Z, *on a* $|I| \leqslant 2$ *et* $\overline{p_I Z}$ *est de type Hodge.*

On passe au résumé de la démonstration des deux théorèmes. On fixe un ensemble de points spéciaux $\Sigma \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ et on définit Z comme l'adhérence de Σ. On peut supposer que Z est irréductible. Pour tout entier m, notons T_m la correspondance de Hecke associée à l'élément $\left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^n \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)^n$. Une des innovations principales de [18] est le théorème 8.7.

Théorème 8.7. — *Si* Σ *vérifie les conditions d'un des théorèmes* 8.2 *ou* 8.3, *alors pour tout* $s \in \Sigma$, *sauf un nombre fini, il existe une courbe* $C \subset Z$ *de type Hodge avec* $s \in C(\mathbb{C})$.

Esquisse de la démonstration. — L'idée centrale est de couper Z avec son image $T_p Z$ pour un nombre premier p convenable. Comme dans la dernière partie de la démonstration du théorème 7.1, présentée dans 7.5, on doit choisir p de sorte que $Z_1 = Z \cap T_p Z$ contienne s et que l'orbite galoisienne de s soit assez grande pour pouvoir déduire par un argument d'intersection que Z_1 est de dimension strictement positive.

Si $\dim Z_1 = \dim Z$, alors $Z \subset T_p Z$ et on montre que Z est de type Hodge en appliquant [18, Theorem 4.1] qui est un analogue de la combinaison des théorèmes 7.5 et 7.6 avec le critère 7.4. Le théorème 8.7 est évident dans ce cas. Si $\dim Z_1 < \dim Z$, alors on répète l'opération. On ne sait pas si Z_1 contient un sous-ensemble dense de points spéciaux, mais l'orbite de s sous l'action du groupe de Galois suffit pour appliquer les arguments ci-dessus. $\square$

Les théorèmes 8.2 et 8.3 sont prouvés en appliquant la proposition 8.6. Clairement, le théorème 8.7 implique que si I est minimal pour Z et $|I| \leqslant 2$, alors $\overline{p_I Z}$ est de type Hodge.

Le fait qu'il n'existe pas de sous-ensemble $I \subset \{1, \dots, n\}$ d'ordre au moins 3 qui est minimal pour Z est un peu plus difficile à montrer, voir [18, § 9].

RÉFÉRENCES

[1] A. Abbes – « Hauteurs et discrétude (d'après L. Szpiro, E. Ullmo et S. Zhang) », dans *Séminaire Bourbaki (1996/97)*, Astérisque, vol. 245, Société Mathématique de France, Paris, 1997, Exp. n° 825, p. 141–166.

[2] Y. André – *G-functions and geometry*, Aspects of Mathematics, vol. E13, Vieweg, 1989.

[3] ______, « Mumford–Tate groups of mixed Hodge structures and the theorem of the fixed part », *Compos. Math.* **82** (1992), no. 1, p. 1–24.

[4] ______, « Distribution des points CM sur les sous-variétés des variétés de modules de variétés abéliennes », Prépublication 120, Institut Mathématique de Jussieu, 1997.

[5] ______, « Finitude des couples d'invariants modulaires singuliers sur une courbe algébrique plane non modulaire », *J. Reine Angew. Math.* **505** (1998), p. 203–208.

[6] ______, « Shimura varieties, subvarieties, and CM points », Six lectures at the Franco–Taiwan arithmetic festival, August–September 2001, `http://www.math.umd.edu/~yu/notes.shtml`.

[7] F. Breuer – « La conjecture d'André–Oort pour le produit de deux courbes modulaires de Drinfeld », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **335** (2002), no. 11, p. 867–870.

[8] L. Clozel & E. Ullmo – « Correspondances modulaires et mesures invariantes », *J. Reine Angew. Math.* **558** (2003), p. 47–83.

[9] ______, « Équidistribution des points de Hecke », dans *Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory*, Johns Hopkins Univ. Press, 2004, p. 193–254.

[10] ______, « Équidistribution de sous-variétés spéciales », *Ann. of Math.* **161** (2005), no. 3, p. 1571–1588.

[11] P. Cohen & G. Wüstholz – « Application of the André–Oort conjecture to some questions in transcendence », dans *A panorama of number theory or the view from Baker's garden (Zürich, 1999)* (G. Wüstholz, éd.), Cambridge Univ. Press, 2002, p. 89–106.

[12] R. Coleman – « Torsion points on curves », dans *Galois representations and arithmetic algebraic geometry* (Y. Ihara, éd.), Adv. Stud. Pure Math., vol. 12, North-Holland, Amsterdam, 1987, p. 235–247.

[13] C. Cornut – « Non-trivialité des points de Heegner », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **334** (2002), no. 12, p. 1039–1042.

[14] P. Deligne – « Travaux de Shimura », dans *Séminaire Bourbaki (1970/71)*, Lect. Notes in Math., vol. 244, Springer-Verlag, 1972, Exp. n° 389, p. 123–165.

[15] ———, « Variétés de Shimura : interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques », dans *Automorphic forms, representations, and L-functions* (A. Borel & W. Casselman, éds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. XXXIII, Part 2, American Mathematical Society, Providence, RI, 1979, p. 247–289.

[16] S.J. Edixhoven – « Special points on the product of two modular curves », *Compos. Math.* **114** (1998), no. 3, p. 315–328.

[17] ———, « On the André–Oort conjecture for Hilbert modular surfaces », dans *Moduli of abelian varieties (Texel Island, 1999)* (G. van der Geer, C. Faber & F. Oort, éds.), Progress in Math., vol. 195, Birkhäuser, 2001, p. 133–155.

[18] ———, « Special points on products of modular curves », *Duke Math. J.* **126** (2005), no. 2, p. 325–348.

[19] S.J. Edixhoven & A. Yafaev – « Subvarieties of Shimura varieties », *Ann. of Math.* **157** (2003), no. 2, p. 621–645.

[20] M. Hindry – « Points de torsion sur les sous-variétés de variétés abéliennes », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **304** (1987), no. 12, p. 311–314.

[21] ———, « Autour d'une conjecture de Serge Lang », *Invent. Math.* **94** (1988), no. 3, p. 575–603.

[22] D.-H. Jiang, J.-S. Li & S.-W. Zhang – « Periods and distribution of cycles on Hilbert modular varieties », *Pure Appl. Math. Q.* **2** (2006), no. 1, p. 219–277.

[23] J. de Jong & R. Noot – « Jacobians with complex multiplication », dans *Arithmetic algebraic geometry* (G. van der Geer, F. Oort & J.H.M. Steenbrink, éds.), Progress in Math., vol. 89, Birkhäuser, 1991, p. 177–192.

[24] J.S. Milne – Lettre à Deligne, 28–03–1990, `http://www.jmilne.org/math/Manuscripts/svd.pdf`.

[25] B.J.J. Moonen – « Special points and linearity properties of Shimura varieties », Thèse, Universiteit Utrecht, 1995.

[26] ———, « Linearity properties of Shimura varieties, I », *J. Algebraic Geom.* **7** (1998), p. 539–567.

[27] ———, « Linearity properties of Shimura varieties, II », *Compos. Math.* **114** (1998), p. 3–35.

[28] ———, « Models of Shimura varieties in mixed characteristics », dans *Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996)* (A.J. Scholl & R.L. Taylor, éds.), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 254, Cambridge Univ. Press, 1998, p. 267–350.

[29] R. Noot – « Models of Shimura varieties in mixed characteristic », *J. Algebraic Geom.* **5** (1996), no. 1, p. 187–207.

[30] M.V. Nori – « On subgroups of $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$ », *Invent. Math.* **88** (1987), no. 2, p. 257–275.

[31] F. Oort – « Some questions in algebraic geometry », 1995, `http://www.math.uu.nl/people/oort/`.

[32] ———, « Canonical liftings and dense sets of CM-points », dans *Arithmetic geometry (Cortona, 1994)*, Sympos. Math., vol. XXXVII, Cambridge Univ. Press, 1997, p. 228–234.

[33] R. Pink – « A combination of the conjectures of Mordell–Lang and André–Oort », dans *Geometric methods in algebra and number theory*, Progr. Math., vol. 235, Birkhäuser, 2005, p. 251–282.

[34] M. Raynaud – « Courbes sur une variété abélienne et points de torsion », *Invent. Math.* **71** (1983), no. 1, p. 207–233.

[35] ———, « Sous-variétés d'une variété abélienne et points de torsion », dans *Arithmetic and geometry, Vol. I* (M. Artin & J. Tate, éds.), Progress in Math., vol. 35, Birkhäuser, 1983, p. 327–352.

[36] J.-P. Serre – *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, 1970.

[37] E. Ullmo – « Théorie ergodique et géométrie arithmétique », dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*, Higher Ed. Press, 2002, p. 197–206.

[38] J. Wolfart – « Werte hypergeometrischer Funktionen », *Invent. Math.* **92** (1988), no. 1, p. 187–216.

[39] A. Yafaev – « Special points on products of two Shimura curves », *Manuscripta Math.* **104** (2001), no. 2, p. 163–171.

[40] ———, « On a result of Moonen on the moduli space of principally polarised abelian varieties », *Compos. Math.* **141** (2005), no. 5, p. 1103–1108.

[41] ———, « A conjecture of Yves André's », *Duke Math. J.* **132** (2006), no. 3, p. 393–407.

[42] S.-W. Zhang – « Equidistribution of CM-points on quaternion Shimura varieties », *Int. Math. Res. Not.* (2005), no. 59, p. 3657–3689.

Rutger NOOT

IRMA
Université Louis Pasteur et CNRS
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg
E-mail : `rutger.noot@math.u-strasbg.fr`
URL : `http://www-irma.u-strasbg.fr/~noot/`