Séminaire BOURBAKI Novembre 2004
57^{e} année, 2004-2005, n^{o} 941, p. 113 à 163

FORMES QUADRATIQUES ET CYCLES ALGÉBRIQUES
[d'après Rost, Voevodsky, Vishik, Karpenko...]

par **Bruno KAHN**

Table des matières

INTRODUCTION

La théorie algébrique des formes quadratiques (par opposition à la théorie arithmétique dans la lignée de Legendre, Gauss, Hermite, Minkowski, Hasse...) est l'étude des formes quadratiques sur un corps quelconque : l'article fondateur est celui de Witt ([70], 1937). Elle a connu un développement par à-coups, impulsé par des idées nouvelles et fondamentales introduites successivement par un petit nombre de mathématiciens. Il s'agit maintenant d'une théorie foisonnante, en pleine clarification, où cependant les méthodes les plus sophistiquées voisinent toujours de manière un peu mystérieuse avec les plus élémentaires, donnant parfois des démonstrations très différentes d'un même théorème.

Qu'est-ce que la théorie des formes quadratiques sur un corps F ? Sous un angle, il s'agit de l'étude des polynômes homogènes de degré 2. Le point de vue de Witt était qu'on peut munir ces polynômes d'une somme et d'un produit, en considérant la somme directe et le produit tensoriel des espaces vectoriels sous-jacents : on obtient ainsi l'anneau de Witt (ou plus exactement de Witt-Grothendieck) de F. La tentation de placer ainsi la théorie dans le contexte plus général de l'étude des formes de degré d est trompeuse : pour $d \geqslant 3$, la situation devient trop rigide et l'anneau obtenu est essentiellement inintéressant (*cf.* [20][(1)]).

D'un autre point de vue, la quadrique projective des zéros d'une forme quadratique q est un exemple de variété projective homogène (ici, sous l'action du groupe $SO(q)$) ; en particulier c'est une variété rationnelle. L'étude de l'isotropie de cette quadrique sur les extensions de F est centrale dans la théorie. Quoique d'autres variétés projectives homogènes soient naturellement attachées à des structures algébriques (par exemple les variétés de Severi-Brauer), il n'y a pas d'autre famille de telles variétés qui soit représentée par des structures algébriques qu'on puisse additionner et multiplier comme les formes quadratiques. Ceci donne sa richesse et sa spécificité à la théorie, qui se trouve naturellement au confluent de deux mondes (formes et variétés de drapeaux généralisées).

Pendant longtemps, cette théorie a pu passer pour une curiosité à mi-chemin entre l'« arithmétique des corps » et une géométrie algébrique relativement élémentaire. Elle est en train de trouver sa vraie place : d'une part elle intervient de manière essentielle dans la démonstration de la conjecture de Milnor par Voevodsky ([66], voir [30] pour un rapport dans ce Séminaire). D'autre part, elle est intrinsèquement présente dans la théorie homotopique des schémas de Morel-Voevodsky [49] : ce fait, anticipé par Rost, est illustré par le théorème fondamental de Morel (*cf.* [48, rem. 6.4.2]) selon lequel l'anneau des endomorphismes de l'objet unité de la catégorie homotopique stable des F-schémas n'est autre que l'anneau de Witt-Grothendieck de F, lorsque F est parfait de caractéristique $\neq 2$.

Par ailleurs, la théorie des formes quadratiques sur un schéma, qui était longtemps restée embryonnaire après le travail de fondements de Knebusch dans les années 1970, connaît depuis une dizaine d'années un développement spectaculaire grâce aux résultats de Balmer, Walter et d'autres, obtenus à l'aide des catégories triangulées à dualité [7, 8]. Ce n'est pas le lieu d'en parler ici, mais cela confirme que la théorie arrive à maturité.

(1) Par exemple, d'après un résultat remontant à Camille Jordan, si F est de caractéristique zéro, le groupe des automorphismes d'une telle forme est fini dès que l'hypersurface projective correspondante est lisse ; voir [56] pour une démonstration moderne et un peu plus générale.

Dans cet exposé, j'ai d'abord voulu offrir un survol de la théorie telle qu'elle s'est développée jusqu'au milieu des années 1990 : mal connue des non spécialistes, elle présente une élégance et une originalité qui, j'espère, séduiront certains lecteurs comme elles m'ont séduit moi-même. (Ne pouvant être exhaustif dans un tel exposé, je me suis néanmoins limité aux aspects directement liés aux derniers développements : ainsi, les travaux d'Elman-Lam ou ceux sur les corps ordonnés ne sont pas mentionnés.) Ensuite expliquer les développements de nature motivique (ou pour être plus terre à terre, faisant intervenir les correspondances algébriques) qui la révolutionnent depuis un peu moins de 10 ans, et les illustrer par des applications frappantes qui semblaient hors de portée avant l'apparition de ces méthodes.

J'ai essayé de donner un traitement aussi géométrique que possible de la théorie ; en particulier, chaque fois que cela a été possible je me suis efforcé de la placer dans le contexte plus général des variétés projectives homogènes (voir ci-dessus).

Ce rapport étant déjà excessivement long, j'ai été conduit à faire des choix cornéliens. En particulier, j'ai renoncé à exposer la partie de la théorie faisant intervenir les invariants supérieurs des formes quadratiques, c'est-à-dire la seconde conjecture de Milnor ([50] ; *cf.* [30, (2) à la fin de l'introduction]). On n'y trouvera que de brèves allusions ici ou là, voir notamment remarques 6.9 et 11.32. Un avantage de ce choix est que les résultats expliqués ici sont tous de démonstrations « élémentaires », n'utilisant pas la théorie homotopique des schémas.

Je remercie Yves André, Hélène Esnault, Detlev Hoffmann et Alexander Vishik pour leur aide dans la préparation de ce texte, ainsi que Nikita Karpenko, Jean-Pierre Serre et Tamás Szamuely pour diverses remarques le concernant. Je remercie également le CIMAT de Guanajuato, où il a été en partie conçu, pour son hospitalité et pour les excellentes conditions de travail dont j'ai bénéficié.

On travaille sur un corps F *de caractéristique* $\neq 2$. On note $\overline{F}$ une clôture séparable de F.

PARTIE I
FORMES QUADRATIQUES

1. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Une *forme quadratique* sur F est un espace vectoriel V muni d'une application $q : V \to F$ telle que $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ pour $(\lambda, x) \in F \times V$ et que $\check{q}(x,y) := \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x) - q(y)\big)$ (la *forme polaire* de q) soit bilinéaire : V est l'*espace sous-jacent* à q ; sa dimension est appelée la *dimension* de q, et notée $\dim q$. On a les notions classiques de vecteurs orthogonaux et d'orthogonal $X^\perp$ d'une partie X de V. On dit que q est *non dégénérée* si $V^\perp = \{0\}$.

À partir de maintenant, « forme quadratique » signifie forme quadratique de dimension finie, non dégénérée.

Un *morphisme* de (V, q) vers (V', q') est une application linéaire $f : V \to V'$ telle que $q' \circ f = q$: alors f est automatiquement injective et $f(V)$ est facteur direct orthogonal de V'. Si f est un isomorphisme, on dit que c'est une *isométrie*. On note $q \simeq q'$ s'il existe une isométrie entre q et q', et $q \leqslant q'$ s'il existe un morphisme de q vers q' (*i.e.* si q est isométrique à une sous-forme de q'). On note $O(q)$ le groupe des isométries d'une forme quadratique q : c'est le *groupe orthogonal* de q.

On dit aussi que deux formes q, q' sur F sont *semblables* s'il existe $a \in F^*$ tel que $q \simeq aq'$.

On peut additionner et multiplier les formes quadratiques :

– *Somme directe orthogonale* : $(V, q) \perp (V', q') = (V \oplus V', q \perp q')$, où $(q \perp q')(x, x') = q(x) + q'(x')$.

– *Produit tensoriel* : en termes de formes polaires, $(V, \check{q}) \otimes (V', \check{q}') = (V \otimes V', \check{q} \otimes \check{q}')$, où $(\check{q} \otimes \check{q}')(x \otimes x', y \otimes y') = \check{q}(x, y)\check{q}'(x', y')$.

On peut aussi *étendre les scalaires* de F à une extension quelconque K de F : on notera $q \mapsto q_K$ cette opération.

Si (V, q) est une forme quadratique, par le choix d'une base (e_i) de V, q correspond à un polynôme $Q = \sum_i a_i T_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij} T_i T_j$, où $a_i = q(e_i)$ et $a_{i,j} = \check{q}(e_i, e_j)$. Si $\dim q \geqslant 3$, Q est irréductible et définit une hypersurface lisse $X_q \subset \mathbf{P}(V)$: la *quadrique* associée à q. On a $\dim X_q = \dim q - 2$. Si $\dim q = 2$, X_q n'est plus (géométriquement) irréductible, mais consiste en deux points rationnels ou un point quadratique de $\mathbf{P}(V)$. Deux quadriques X_q et $X_{q'}$ sont isomorphes si et seulement si q et q' sont semblables.

2. LA THÉORIE DE WITT

2.1. Base orthogonale et théorème de simplification

THÉORÈME 2.1

(a) *Toute forme quadratique q possède une base orthogonale.*

(b) *Soient q, q_1, q_2 trois formes quadratiques sur F. Si $q \perp q_1 \simeq q \perp q_2$, alors $q_1 \simeq q_2$.*

La partie (a) de ce théorème est bien connue et sa démonstration se perd dans la nuit des temps. La partie (b) (théorème de simplification) est essentiellement équivalente au fait que, si $\dim q = n$, tout élément de $O(q)$ est produit de n réflexions. Elle est couramment attribuée à Witt [70] ; toutefois, Scharlau [55, § 2][(2)] a fait observer

(2) Je remercie Serre de m'avoir indiqué cette référence.

qu'elle avait été obtenue 30 ans auparavant par Dickson [15] (très probablement sans que Witt en ait conscience).

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthogonale de q et $x = \sum x_i e_i$, on a $q(x) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2$ avec $a_i = q(e_i) \in F^*$. On résume ceci par la notation $q \simeq \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

2.2. Indice de Witt

Soit q une forme quadratique d'espace vectoriel sous-jacent V. Un vecteur $x \in V$ est *isotrope* si $q(x) = 0$. Un sous-espace $W \subset V$ est *totalement isotrope* si $q_{|W} = 0$. La forme q est *isotrope* s'il existe un vecteur isotrope $\neq 0$, *anisotrope* si elle n'est pas isotrope.

On appelle *plan hyperbolique*, et on note $\mathbb{H}$, la forme quadratique de dimension 2, d'espace vectoriel sous-jacent F^2, définie par $q(x, y) = xy$ $((x, y) \in F^2)$. Pour tout $a \in F^*$, on a $\mathbb{H} \simeq \langle a, -a \rangle$; toute forme quadratique isotrope de dimension 2 est isométrique à $\mathbb{H}$. On dit qu'une forme h est *hyperbolique* si $h \simeq m\mathbb{H} =$ pour m convenable.

THÉORÈME 2.2. — *Toute forme quadratique q se décompose de manière unique (à isométrie près) en somme directe orthogonale $q_{\mathrm{an}} \perp h$, où q_{an} est anisotrope et h est hyperbolique.*

Ce théorème, dû à Witt [70], se déduit facilement du théorème 2.1. Il ramène dans une large mesure l'étude des formes quadratiques à celle des formes quadratiques anisotropes. On en déduit immédiatement que, si (V, q) est une forme quadratique, tous les sous-espaces totalement isotropes maximaux de V ont la même dimension : c'est l'*indice de Witt* de q, noté $i(q)$. Avec la notation du théorème 2.2, on a $i(q) = \frac{1}{2} \dim h \leqslant \frac{1}{2} \dim q$. La forme q est hyperbolique si et seulement si $i(q) = \frac{1}{2} \dim q$. Notons le lemme suivant, fort utile et qui donne une idée de l'esprit du sujet :

LEMME 2.3

(a) *Soient q, q' deux formes quadratiques anisotropes, et soit $n = i(q \perp -q')$. Alors il existe des formes quadratiques φ, q_1, q_1', avec $\dim \varphi = n$, telles que*

$$q \simeq \varphi \perp q_1, \qquad q' \simeq \varphi \perp q_1'.$$

(b) *Soient q une forme quadratique sur F et $q' \leqslant q$, de codimension r. Alors $i(q') \geqslant i(q) - r$. En particulier, si $\dim q' > \dim q - i(q)$, alors q' est isotrope.*

Voici une démonstration de (b) : soient V l'espace sous-jacent à q, W le sous-espace de V correspondant à q' et $H \subset V$ un sous-espace totalement isotrope de dimension $i(q)$. Alors $\operatorname{codim}_H(W \cap H) \leqslant r$.

2.3. Anneau de Witt

Définition 2.4. — *Deux formes quadratiques q, q' sont équivalentes au sens de Witt si $q_{\mathrm{an}} \simeq q'_{\mathrm{an}}$; on note cette relation $q \sim q'$.*

L'équivalence de Witt respecte la somme et le produit des formes quadratiques, d'où

Définition 2.5. — *L'*anneau de Witt *de F, noté $W(F)$, est l'anneau des classes d'équivalence de la relation $\sim$, pour l'addition et la multiplication induites respectivement par $\perp$ et $\otimes$.*

D'après le théorème 2.2, une forme quadratique est caractérisée, à isométrie près, par sa dimension et sa classe dans $W(F)$. On a parfois besoin de considérer une variante de l'anneau de Witt, l'anneau de Witt-Grothendieck : c'est l'anneau des classes d'équivalence de la relation $\simeq$ de l'introduction, pour l'addition et la multiplication induites respectivement par $\perp$ et $\otimes$. Il est noté (ici) $\widehat{W}(F)$. Il est clair qu'on a un homomorphisme surjectif $\widehat{W}(F) \to W(F)$, de noyau isomorphe à $\mathbf{Z}$ (engendré par la classe du plan hyperbolique). D'après le théorème 2.1 (a), ces deux anneaux sont engendrés par les classes des formes quadratiques de dimension 1, et il est facile d'en donner en fait une *présentation* (*cf.* [45, ch. II]).

3. LE THÉORÈME DE SPRINGER

Théorème 3.1 ([58]). — *Soit q une forme quadratique anisotrope sur F, et soit E/F une extension finie de degré impair. Alors q_E est encore anisotrope.*

Ce théorème avait été conjecturé par Witt. Il est contenu dans un théorème plus récent de Swan [59] et Karpenko [33, prop. 2.6] :

Théorème 3.2. — *Soit X une quadrique anisotrope sur F, et soit $x \in X$ un point fermé de degré 2. Alors tout 0-cycle sur X est linéairement équivalent à un multiple de x.*

Utilisons l'argument de Springer pour démontrer ce théorème[(3)] : soit $\langle a_0, \dots, a_{d+1}\rangle$ une équation de X, où $d = \dim X$, et $X \subset \mathbf{P}^{d+1}$ le plongement projectif associé. Pour commencer, on peut trouver une droite $l \subset \mathbf{P}^{d+1}$ telle que $l \cap X = \{x\}$. Ensuite, on voit que tout point fermé est linéairement équivalent à un point fermé à corps résiduel séparable (si la caractéristique est $p > 0$ avec p impair, utiliser l'endomorphisme « de Frobenius » $(y_0 : \dots : y_{d+1}) \mapsto (a_0^{\frac{p-1}{2}} y_0^p : \dots : a_{d+1}^{\frac{p-1}{2}} y_{d+1}^p))$. Soit maintenant $y \in X$ un point fermé à corps résiduel séparable, de degré n : le choix d'un élément primitif α de $F(y)$ fournit des polynômes $p_0, \dots, p_{d+1}$ de degrés $< n$ tels que

(3) Je remercie Hélène Esnault pour une remarque éclairante à ce sujet.

$(y_0 : \ldots : y_{d+1}) = (p_0(\alpha) : \ldots : p_{d+1}(\alpha))$; on peut d'ailleurs supposer les p_i premiers entre eux dans leur ensemble. Soit C la courbe rationnelle définie par les p_i : elle est de degré $m < n$. De plus C n'est pas contenue dans X, sans quoi X aurait un point rationnel. Par conséquent, $Z = C \cap X$ est un 0-cycle effectif de X, de degré $2m$ et contenant y. Comme $C \sim ml$, on a $Z \sim mx$ ($\sim$ désigne l'équivalence linéaire). Mais $Z - y$ est un 0-cycle effectif de degré $2m - n < n$: si $n = 2$, on a nécessairement $Z = y$ et, si $n > 2$, les autres points fermés intervenant dans $Z - y$ sont de degrés $< n$. Par récurrence, $Z - y$ est linéairement équivalent à un multiple de x, donc aussi y.

4. LA THÉORIE DE PFISTER : PUISSANCES DE I

L'anneau $W(F)$ est muni d'une augmentation « dimension modulo 2 »

$$\overline{\dim} : W(F) \longrightarrow \mathbf{Z}/2.$$

On note $IF = \operatorname{Ker} \overline{\dim}$: c'est l'*idéal fondamental* de $W(F)$. On note traditionnellement ses puissances I^nF.

4.1. Formes de Pfister

Il est clair que IF est engendré additivement par les formes binaires $\langle 1, -a\rangle$, et donc que I^nF est engendré additivement par les formes

$$\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle := \langle 1, -a_1\rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, -a_n\rangle.$$

Ces formes sont appelées *n-formes de Pfister*. Le premier, Pfister a reconnu que ce sont les pierres de touche de la théorie des formes quadratiques. Il en a démontré des propriétés remarquables :

THÉORÈME 4.1 ([52, Theorem 2]). — *Pour toute n-forme de Pfister φ, $\varphi(x) \neq 0 \Rightarrow \varphi \simeq \varphi(x)\varphi$. En particulier, les valeurs non nulles de φ forment un sous-groupe de F^*.*

On a même mieux : toute forme anisotrope multiplicative en ce sens est une forme de Pfister. Cela se déduit du théorème 4.3 ci-dessous.

Pour $n = 1, 2, 3$, on dispose classiquement d'algèbres expliquant le théorème 4.1 (extensions quadratiques de F, quaternions, octonions) : ce n'est plus le cas pour $n > 3$. D'ailleurs, pour ces valeurs de n, les formules implicites dans le théorème 4.1 contiennent des dénominateurs.

Du théorème 4.1, Pfister déduit facilement :

COROLLAIRE 4.2

(a) *Une forme de Pfister isotrope est hyperbolique.*
(b) *Deux formes de Pfister semblables sont isométriques.*

4.2. Théorèmes de Cassels-Pfister

Il s'agit de trois théorèmes dits de *représentation.* Soit (V, q) une F-forme quadratique et soit A une F-algèbre commutative : on dit que q *représente* $a \in A$ *sur* A s'il existe $\vec{a} \in A \otimes_F V$ tel que $q(\vec{a}) = a$. Notation : $a \in D(q_A)$. La partie (a) du théorème ci-dessous avait été initialement démontrée par Cassels pour des sommes de carrés ; la version générale et la suite sont dus à Pfister [52].

THÉORÈME 4.3

(a) *Soient q une forme quadratique sur F et $f \in F[T] - \{0\}$. Si q représente f sur $F(T)$, alors q représente déjà f sur $F[T]$.*

(b) *Soient $q = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ une forme anisotrope sur F ($n \geqslant 2$), $q' = \langle a_2, \ldots, a_n \rangle$ et $d \in F^*$. Alors $d \in D(q') \Leftrightarrow d + a_1 T^2 \in D(q_{F(T)})$.*

(c) *Soient q, φ deux formes quadratiques sur F, avec q anisotrope. Soient V l'espace vectoriel sous-jacent à φ et $K = F(V^*)$, de sorte que φ peut être vu comme élément de K. Alors $\varphi \in D(q_K) \Leftrightarrow \varphi \leqslant q$.*

4.3. Le discriminant

À part la dimension modulo 2, c'est le seul invariant que nous utiliserons. Si $q = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, on pose

$$d_{\pm} q = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 \cdots a_n \in F^*/F^{*2}.$$

C'est le discriminant de q : il ne dépend que de la classe de q dans $W(F)$. Il interviendra implicitement à cause du lemme suivant :

LEMME 4.4

(a) *L'application $q \mapsto d_{\pm} q$ induit un isomorphisme $IF/I^2F \xrightarrow{\sim} F^*/F^{*2}$.*

(b) *Soient q, q' deux formes de dimension impaire. Alors il existe un scalaire a tel que $q \perp -aq' \in I^2F$.* □

5. CORPS DE FONCTIONS DE QUADRIQUES

Soit q une forme quadratique sur F, et soit $X = X_q$ la quadrique projective associée : c'est une variété F-rationnelle si et seulement si q est isotrope (cela résulte facilement du théorème 2.2). On note en général $F(q)$ le corps des fonctions $F(X)$. C'est un invariant important de q (ou de X). On peut dire que, tenant compte des travaux antérieurs de Pfister, son utilisation systématique remonte véritablement à Arason [6, 4].

5.1. Théorème de la sous-forme

Proposition 5.1. — *Soient q, φ deux formes quadratiques sur F, avec φ anisotrope et $\dim q = n > 2$. Supposons $\varphi_{F(q)} \sim 0$. Alors, pour tout $b \in F^*$ représenté par q, on a*

$$bq(T_1, \dots, T_n)\varphi_K \simeq \varphi_K$$

où $K = F(T_1, \dots, T_n)$.

Cette proposition se démontre facilement par réduction à une extension quadratique. Knebusch [42] en a démontré la réciproque.

Du théorème 4.3 (c) et de la proposition 5.1, on déduit l'important théorème suivant, appelé théorème d'Arason-Cassels-Pfister ou simplement théorème de la sous-forme :

Théorème 5.2. — *Soient q, φ deux formes quadratiques sur F, avec φ anisotrope et $\dim q > 2$. Supposons $\varphi_{F(q)} \sim 0$. Alors, pour tout $(a, b) \in D(q) \times D(\varphi)$, on a $abq \leqslant \varphi$. En particulier, $\dim \varphi \geqslant \dim q$.*

Corollaire 5.3 (Arason [4, Satz 1.3]). — *Si dans le théorème* 5.2, *on suppose que q est une forme de Pfister, alors $\varphi \simeq q \otimes \rho$ pour $\rho \in W(F)$ convenable.*

Cela se voit par récurrence sur $\dim q$, en notant que $q_{F(q)} \sim 0$ par le corollaire 4.2.

5.2. Théorème d'Arason-Pfister

C'est le suivant :

Théorème 5.4 ([6]). — *Soit q anisotrope sur F telle que $q \in I^n F$ pour $n \geqslant 0$. Alors, $\dim q \geqslant 2^n$.*

De ce théorème il résulte immédiatement que $\bigcap I^n F = \{0\}$. Donnons-en la démonstration : Écrivons $q = \pm\varphi_1 + \cdots + \pm\varphi_r$ dans $W(F)$, où les φ_i sont des n-formes de Pfister. Puisque q est anisotrope, on a $r > 0$. Procédons par récurrence sur r. Si $r = 1$ et $\dim q < 2^n$, on a $\pm\varphi_1 \simeq q \perp m\mathbb{H}$ pour $m > 0$ convenable ; alors φ_1 est hyperbolique (corollaire 4.2) et q aussi, absurde. Si $r > 1$, posons $K = F(\varphi_r)$. Distinguons deux cas :

(1) q_K est hyperbolique. Par le corollaire 5.3, il existe ρ tel que $q \simeq \varphi_r \otimes \rho$. En particulier, $2^n = \dim \varphi_r | \dim q$, d'où $\dim q \geqslant 2^n$.

(2) q_K n'est pas hyperbolique. Soit $q' = (q_K)_{\mathrm{an}}$. Alors $q' = \pm\varphi_1 + \cdots + \pm\varphi_{r-1}$ dans $W(K)$. Par récurrence sur r, $\dim q' \geqslant 2^n$; alors $\dim q \geqslant 2^n$ également. $\square$

6. LA THÉORIE DE KNEBUSCH : DÉPLOIEMENT GÉNÉRIQUE

Dans [43] et [44], Knebusch développe une théorie de déploiement générique pour les formes quadratiques, qui peut se voir comme une conceptualisation et une extension des résultats précédents. Elle conduit à la définition de deux importants invariants numériques des formes quadratiques : la *hauteur* et le *degré*.

6.1. Tours de déploiement génériques ; hauteur

Considérons une forme quadratique q sur F. On associe à q un entier $h = ht(q)$ et une suite $(F_i, q_i)_{0\leqslant i\leqslant h}$, où F_i est une extension de F et q_i est une forme quadratique sur F_i, de la manière suivante :

(i) $q_0 = q_{\mathrm{an}}, F_0 = F$.

(ii) Supposons F_i et q_i définis. Si $\dim q_i = 0$ ou 1, alors $i = h$. Sinon, $F_{i+1} = F_i(q_i)$ et $q_{i+1} = ((q_i)_{F_{i+1}})_{\mathrm{an}}$.

Définition 6.1. — *L'entier $ht(q)$ s'appelle la* hauteur *de q* [(4)]*. La suite $F = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_h$ s'appelle la* tour de déploiement canonique *de q. La forme q_i s'appelle le i-*ième noyau *de q. Le corps F_{h-1} (resp. F_h) s'appelle le* corps dominant (*resp.* corps de déploiement canonique) *de q. On note, pour $n > 0$*

$$i_n(q) = i((q_{n-1})_{F_n})$$

*c'est le n-*ième indice de Witt supérieur *de q. La suite*

$$(i_1(q), \dots, i_h(q))$$

s'appelle la suite de déploiement *de q.*
Si X est la quadrique définie par q, on notera aussi $i_n(X) := i_n(q)$.

Comme $\dim q \geqslant \dim q_0 > \dim q_1 > \dots$, l'entier h est bien défini ; comme les $\dim q_i$ ont la même parité que $\dim q$, $ht(q) \leqslant \frac{1}{2}\dim q$.

« Suite de déploiement » est, faute de mieux, une traduction française de « Splitting pattern », terminologie introduite par Hurrelbrink et Rehmann. Signalons que leur définition diffère de la nôtre, qui est celle de Vishik : ils utilisent plutôt la suite $(i_1(q), i_1(q) + i_2(q), \dots)$. Quant à Hoffmann et Izhboldin, ils préfèrent utiliser la suite $(\dim q_0, \dots, \dim q_h)$. On prendra donc garde que la terminologie recouvre plusieurs définitions (aux contenus équivalents) dans la littérature.

Pour alléger, introduisons la notation

$$\dim_{\mathrm{an}} q = \dim q_{\mathrm{an}}.$$

(4) Nous utilisons la notation $ht(q)$ plutôt que $h(q)$ pour éviter toute confusion avec le motif de la quadrique X définie par q, qui sera noté $h(X)$.

THÉORÈME 6.2 (Knebusch [43, th. 5.1]). — *Soient q une forme quadratique sur F et K/F une extension quelconque. Alors il existe un unique $i \in \{0, \dots, ht(q)\}$ tel que* $\dim_{\mathrm{an}} q_K = \dim q_i$.

L'unicité est claire. Knebusch démontre l'existence en utilisant sa théorie de la spécialisation des formes quadratiques [42](5) : donnons-en une démonstration directe. Soit i le plus petit entier tel que $\dim q_i \leqslant \dim_{\mathrm{an}} q_K$. Il faut montrer que $\dim q_i = \dim_{\mathrm{an}} q_K$. Posons, pour tout $j < h$, $K_j = KF_j$. Pour $j < i$, $(q_j)_{K_j} \sim q_{K_j}$ est isotrope ; alors K_{j+1}/K_j est transcendante pure (voir début du § 5). Il en résulte que K_i/K est transcendante pure, d'où il résulte facilement que $((q_K)_{\mathrm{an}})_{K_i}$ est anisotrope. Mais alors

$$\dim_{\mathrm{an}} q_{K_i} = \dim_{\mathrm{an}} q_K \geqslant \dim q_i \geqslant \dim_{\mathrm{an}} (q_i)_{K_i} \tag{6.1}$$

et

$$(q_{K_i})_{\mathrm{an}} \simeq ((q_i)_{K_i})_{\mathrm{an}}.$$

Par conséquent il y a partout égalité dans (6.1). □

DÉFINITION 6.3. — *Une suite $F = K_0 \subset \cdots \subset K_h$ est une* tour de déploiement générique *de q si elle possède la propriété du théorème 6.2 avec $q_i = (q_{K_i})_{\mathrm{an}}$ et si les extensions K_{i+1}/K_i sont régulières.*

(Dans [43], Knebusch demande de plus que, pour toute extension E/F, il existe une F-place de K_i vers E ayant « bonne réduction » en q_i, où i est l'entier tel que $\dim_{\mathrm{an}} q_E = \dim q_i$, mais cette propriété est automatique puisque l'extension composée EK_i/E est transcendante pure, *cf.* remarque au début du § 5.)

La définition suivante, due à Izhboldin, est particulièrement importante.

DÉFINITION 6.4. — *Supposons q anisotrope. La* dimension essentielle *de X_q est*

$$\dim_{\mathrm{es}} X_q = \dim X_q - i_1(q) + 1.$$

Nous poserons aussi

$$\dim_{\mathrm{es}} q = \dim q - i_1(q) + 1.$$

Le lemme suivant est conséquence immédiate du lemme 2.3 (b).

LEMME 6.5. — *Soient q une forme anisotrope et $q' \leqslant q$. Supposons que* $\dim q' \geqslant \dim_{\mathrm{es}} q$. *Alors $q'_{F(q)}$ est isotrope.*

Nous verrons plus loin (§ 8.2) que *la réciproque est vraie.*

(5) Il démontre plus : il existe une F-place $\lambda : F_i \dashrightarrow K$ telle que q_i ait bonne réduction en λ et que $\lambda(q_i) \simeq q_K$.

6.2. Interprétation en termes de groupes algébriques

Kersten et Rehmann [41] ont généralisé la notion de tour de déploiement générique dans le contexte des *groupes algébriques linéaires*.

Soit G un F-groupe réductif connexe, de diagramme de Dynkin Δ, et soit Θ un sous-ensemble de Δ. Une extension K/F est un Θ*-corps de déploiement* de G si G_K contient un K-sous-groupe parabolique P de type Θ ; K est dit *générique* si tout Θ-corps de déploiement de G est une F-spécialisation de K (au sens des F-places). L'existence d'un tel K se démontre ainsi : étant donné P (défini sur une clôture séparable $\overline{F}$ de F), l'espace projectif homogène $V_\Theta = G_{\overline{F}}/P$ est défini sur une plus petite extension finie séparable F_Θ de F : l'extension minimale telle que la $*$-action de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F_\Theta)$ sur Δ laisse Θ invariant. On a alors $K = F_\Theta(V_\Theta)$.

Dans le cas d'une forme quadratique (V,q), avec $\dim q = n \geqslant 3$, le groupe $G = SO(q)$ est de rang $i(q)$. Si $i(q) \geqslant i$, alors $SO(q)$ opère transitivement sur l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes de V de dimension i ; si $i < n/2$, le stabilisateur de l'un d'entre eux est un sous-groupe parabolique P_i correspondant à $\Delta - \{\alpha_i\}$, où α_i est la i-ème racine. Réciproquement, si P_i est rationnel sur F on a $i(q) \geqslant i$. La variété $V_i = G/P_i$ correspondante est la « grassmannienne quadratique » des sous-espaces totalement isotropes de rang i de V. (Dans le cas $i = n/2$, c'est plus compliqué.) Sans hypothèse sur $i(q)$, une tour de déploiement générique de q est « contenue » dans la suite de corps $K_i = F(V_i)$: elle est plus « économique » que celle de la définition 6.1 en ce que ses degrés de transcendance sont plus petits, *cf.* [41, p. 61].

6.3. Formes de hauteur 1 ; degré

La proposition suivante est due indépendamment à Knebusch et Wadsworth ([43, démonstration du th. 5.8], [68]) :

Proposition 6.6. — *Une forme q est de hauteur* 1 *si et seulement si elle est*

– *semblable à une forme de Pfister au cas où* $\dim q$ *est paire ;*

– *semblable à une sous-forme de codimension* 1 *d'une forme de Pfister au cas où* $\dim q$ *est impaire.*

Elle conduit immédiatement à la

Définition 6.7. — *Soit q une forme quadratique sur F.*

(a) *Si* $\dim q$ *est impaire, le* degré *de q est* $\deg(q) = 0$.

(b) *Si* $\dim q$ *est paire et non hyperbolique, soit F_{h-1} son corps dominant. Par la proposition* 6.6, *q_{h-1} est semblable à une forme de Pfister τ : τ est appelée* forme dominante *de q. Si* $\dim \tau = 2^n$, *le* degré *de q est l'entier* $\deg(q) = n$.

(c) *Si* $q \sim 0$, $\deg(q) = \infty$.

Cette notion est intéressante à cause du théorème suivant, dû à Knebusch [43, th. 6.4].

Théorème 6.8. — *Pour tout $n \geqslant 0$, l'ensemble*

$$J_n(F) = \{q \in W(F) \mid \deg(q) \geqslant n\}$$

est un idéal de $W(F)$ contenant I^nF.

(Si $a \in F^*$ et $q \in J_n(F)$, il est clair que $\langle a\rangle q \in J_n(F)$, et de même il est clair que $J_n(F)$ contient les n-formes de Pfister ; la difficulté est de voir que $J_n(F)$ est stable par addition.)

Remarque 6.9. — En fait, *on a* $J_n(F) = I^nF$: ce théorème est dû à Orlov-Vishik-Voevodsky [50]. Leur démonstration repose sur les techniques de [66], donc sur la théorie homotopique des schémas. Il n'en sera pas fait usage ici.

Le théorème 6.8 fournit une nouvelle démonstration du théorème 5.4 : si $q \in I^nF - \{0\}$, alors $\deg(q) \geqslant n$, donc $\dim(q) \geqslant 2^n$. On a de plus le complément suivant :

Corollaire 6.10. — *Soit q de dimension 2^n. Si $q \in J_n(F)$, alors q est semblable à une forme de Pfister.* □

Comme application de la théorie de Knebusch, mentionnons le raffinement suivant du théorème de la sous-forme 5.2 :

Théorème 6.11 (*cf.* [43, prop. 6.11], [5, Satz 18]). — *Soit φ une forme quadratique sur F de dimension paire, de corps dominant L et de forme dominante τ. Soit q une autre forme sur F. Alors $\deg(\varphi_{F(q)}) > \deg\varphi$ si et seulement si q_L est semblable à une sous-forme de τ. En particulier, en posant $n = \deg(\varphi)$,*

(i) *Si $\dim q > 2^n$, on a $\deg(\varphi_{F(q)}) = \deg\varphi$.*

(ii) *Si $\dim q = 2^n$, on a $\deg(\varphi_{F(q)}) > \deg\varphi$ si et seulement si q est semblable à une forme de Pfister τ_0 telle que $(\tau_0)_L \simeq \tau$.*

En particulier, $\varphi_{F(q)} \sim 0 \Rightarrow \dim q \leqslant 2^{\deg(\varphi)}$.

Dans la même direction on a le théorème sensationnel suivant, dû à Fitzgerald [17, th. 1.6] :

Théorème 6.12. — *Soient q, φ deux formes quadratiques sur F, avec $\varphi \not\sim 0$. Supposons que $\varphi_{F(q)} \sim 0$ et que φ ne soit pas semblable à une forme de Pfister. Alors $\dim\varphi - 2^{\deg(\varphi)} \geqslant 2\dim q$.*

6.4. Voisines de Pfister ; formes excellentes

Les notations suivantes sont très utiles :

Notation 6.13. — Pour un entier n, on note $l(n)$ l'unique entier tel que $2^{l(n)-1} < n \leqslant 2^{l(n)}$. Pour une forme quadratique q, on note $l(q) = l(\dim q)$.

La définition suivante est due à Knebusch [44].

DÉFINITION 6.14. — *Soient q une forme quadratique et φ une n-forme de Pfister (éventuellement isotropes). La forme q est dite* voisine *de φ si*

(i) $\dim q > 2^{n-1}$

(ii) *q est semblable à une sous-forme de φ.*

Une forme q' telle que $q \perp q'$ soit semblable à φ s'appelle forme complémentaire *de q.*

Noter que $n = l(q)$. En utilisant le théorème d'Arason-Pfister, on démontre facilement :

THÉORÈME 6.15 ([44, p. 3]). — *Les formes φ et q' de la définition* 6.14 *sont uniquement déterminées par q.*

Knebusch démontre ensuite :

THÉORÈME 6.16. — *Pour une F-forme quadratique q, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour toute extension K/F, la forme $(q_K)_{\mathrm{an}}$ est définie sur F.*

(ii) *Pour tout i, la forme q_i de la définition* 6.1 *est définie sur F.*

(iii) *Il existe des F-formes de Pfister $\tau_1, \dots, \tau_h$ ($h = ht(q)$), telles que $\tau_j \mid \tau_{j-1}$ pour $j \in [1, h]$, des F-formes $q'_0, \dots, q'_i$ et un scalaire a tels que $q'_0 = q_{\mathrm{an}}$ et que, pour tout $j \in [1, h]$, on ait $q'_{j-1} \perp -q'_j \simeq (-1)^{j+1} a\tau_j$.*

Lorsque ces conditions sont vérifiées, on a

$$[q] = a([\tau_1] - [\tau_2] + \cdots + (-1)^{h+1}[\tau_h])$$

dans $W(F)$.

DÉFINITION 6.17. — *Une forme vérifiant les conditions équivalentes du théorème* 6.16 *est dite* excellente.

Les formes excellentes peuvent être considérées comme les plus simples des formes quadratiques. Par exemple, la suite de déploiement S d'une forme excellente q (en termes de dimensions anisotropes) ne dépend que de $n = \dim q$, à savoir :

$$S = \{n, c(n), c(c(n)), \dots\}$$

où, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $c(k) = 2^{l(k)} - k$ (notation 6.13).

7. ÉQUIVALENCE BIRATIONNELLE STABLE

7.1. Généralités

Soit X une variété projective homogène. Les conditions suivantes sont équivalentes [9, th. 21.20] :

(i) X a un point rationnel.

(ii) Il existe une F-place de $F(X)$ vers F.

(iii) X est une variété F-rationnelle, *i.e.* l'extension $F(X)/F$ est transcendante pure.

Soit Y une autre variété : de ce qui précède, il résulte que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X a un point rationnel sur $F(Y)$; autrement dit, il existe une application F-rationnelle de Y vers X.

(ii) Il existe une F-place de $F(X)$ vers $F(Y)$.

(iii) $X \times Y$ est Y-birationnel à $\mathbf{P}^n \times Y$ $(n = \dim X)$.

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que Y *domine* X et on écrit $Y \succcurlyeq X$ ou $X \preccurlyeq Y$. Cette relation est particulièrement intéressante quand Y est aussi projective homogène : la condition (ii) montre qu'elle définit une relation de *préordre* sur la famille de ces variétés. La relation d'équivalence associée est l'équivalence birationnelle stable : nous la noterons ici $\approx$ (d'autres auteurs utilisent la notation $\overset{st}{\sim}$).

Nous utiliserons principalement les relations $\preccurlyeq$ et $\approx$ dans le cas des *quadriques*. On notera $q \preccurlyeq q'$ pour $X_q \preccurlyeq X_{q'}$, etc. On a les propriétés évidentes suivantes (la troisième résultant du lemme 6.5) :

Lemme 7.1

(a) *La relation $\preccurlyeq$ (resp. $\approx$) définit une relation de préordre (resp. d'équivalence) sur (l'ensemble sous-jacent à l'anneau) $W(F)$.*

(b) $q' \leqslant q \Rightarrow q' \preccurlyeq q$.

(c) *Si $q' \leqslant q$ et $\dim q' \geqslant \dim_{\mathrm{es}} q$, alors $q' \approx q$.*

De ce lemme, du corollaire 4.2 et du théorème 5.2, on déduit facilement :

Théorème 7.2. — *Soient π une forme de Pfister, q une voisine de π et q' une forme quadratique anisotrope sur F. Alors,*

(a) $q \approx \pi$.

(b) $q' \preccurlyeq q \Leftrightarrow q'$ *est semblable à une sous-forme de π.*

(c) $q' \approx q \Leftarrow q'$ *est voisine de π.*

En fait l'implication $\Rightarrow$ dans (c) est également vraie, mais c'est un résultat plus profond, cas particulier immédiat du théorème de Hoffmann qui suit.

7.2. Théorème de Hoffmann

C'est le suivant :

Théorème 7.3. — *Si* $q \preccurlyeq q'$, *alors* $l(q) \leqslant l(q')$ (*cf. notation* 6.13). *En d'autres termes, s'il existe* n *tel que* $\dim q' \leqslant 2^n < \dim q$, *alors* $q'_{F(q)}$ *est anisotrope.*

Pour la démonstation originelle on pourra se reporter à [21] ; une démonstration un peu plus simple, mais dans le même esprit, se trouve dans [23]. On peut aussi déduire ce théorème de la *formule du degré de Rost* [46, th. 5.3.1] (cette observation est due à Rost). Nous déduirons au § 8 le théorème de Hoffmann de résultats plus fins obtenus ultérieurement (corollaire 8.3 et théorème 8.5).

Corollaire 7.4. — *Pour toute* q *anisotrope, on a* $\dim_{\mathrm{es}} q > 2^{l(q)-1}$.

Pour voir ceci, prendre une sous-forme $q' \leqslant q$ de dimension $2^{l(q)-1}$ et appliquer le lemme 7.1 (c) et le théorème 7.3. On a même [21, 23] :

Proposition 7.5. — *Pour* q *anisotrope, les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) $\dim_{\mathrm{es}} q = 2^{l(q)-1} + 1$;
(ii) *il existe* K/F *tel que* q_K *soit voisine d'une* K*-forme de Pfister et* $ht(q_K) = ht(q)$.

Une forme vérifiant les propriétés de la proposition 7.5 est dite *à déploiement maximal* ($i_1(q)$ prend la plus grande valeur possible) : ces formes sont donc « stablement » des voisines de Pfister, mais on a des exemples de formes à déploiement maximal qui ne sont pas des voisines de Pfister (par exemple de dimension 5). Un phénomène curieux, toutefois, est que quand $\dim q$ est « proche » de $2^{l(q)}$, une forme à déploiement maximal est une voisine de Pfister. Conjecturalement c'est le cas quand $\dim q > 5 \cdot 2^{l(q)-3}$, ce qui est connu pour $l(q) \leqslant 4$; pour $l(q) > 4$, c'est le cas quand $\dim q \geqslant 2^{l(q)} - 7$ [26, th. 1.7].

8. QUATRE RÉSULTATS FONDAMENTAUX

Jusqu'à maintenant, les résultats énoncés avaient été obtenus par des méthodes ne faisant intervenir que des résultats élémentaires d'algèbre commutative, voire de théorie des corps. Par contre, la démonstration des suivants utilise les correspondances algébriques, quoique de manière élémentaire pour une large part.

8.1. Dimension des formes dans I^n

Théorème 8.1. — *Soit* $q \in I^n F$, *anisotrope. Alors*

– *soit* $\dim q \geqslant 2^{n+1}$ (*et* $\dim q$ *est paire*) ;
– *soit* $\dim q$ *est de la forme* $2^{n+1} - 2^i$ *pour un entier* $i \in [1, n]$.

De plus, toutes les dimensions visées sont atteintes.

Ce théorème généralise le théorème d'Arason-Pfister ; il avait été conjecturé par Vishik. La dernière partie est relativement facile. Il est dû à Vishik et à Karpenko, seule la démonstration de Karpenko étant rédigée [38]. Le cas particulier disant que $\dim q > 2^n \Rightarrow \dim q \geqslant 2^n + 2^{n-1}$ avait été démontré par Pfister pour $n = 3$, par Hoffmann pour $n = 4$ et par Vishik pour tout n [63, th. 6.4] en utilisant le théorème 11.31 ci-dessous. Voir aussi dans [40, th. 4.4] une démonstration de ce cas particulier due à Hoffmann et ne reposant que sur le corollaire 8.3 ci-dessous. Le théorème 8.1 rappelle de manière frappante le comportement des premières classes de Stiefel-Whitney non nulles d'un fibré quadratique (ou réel), *cf.* [28, prop. 1.1 (c)].

8.2. Dimension essentielle des quadriques

Théorème 8.2. — *Soient X une quadrique anisotrope et Y une F-variété propre (éventuellement singulière) dont tous les points fermés sont de degré pair. Supposons que $Y_{F(X)}$ ait un point fermé de degré impair. Alors*

(1) $\dim(Y) \geqslant \dim_{\mathrm{es}}(X)$ *;*
(2) *si* $\dim(Y) = \dim_{\mathrm{es}}(X)$*,* $X_{F(Y)}$ *est isotrope.*

Corollaire 8.3. — *Soient q, q' deux formes quadratiques anisotropes telles que $q \preccurlyeq q'$. Alors*

(1) $\dim_{\mathrm{es}} q \leqslant \dim_{\mathrm{es}} q'$ *;*
(2) $\dim_{\mathrm{es}} q = \dim_{\mathrm{es}} q' \Rightarrow q \approx q'$*.*

Ces résultats sont dus à Karpenko-Merkurjev [40] ; le corollaire 8.3 avait été conjecturé par Izhboldin. Mutatis mutandis, l'énoncé du théorème 8.2 est exactement le même que celui d'un résultat annoncé par Voevodsky dans une lettre à Rost [30, th. 9.3][(6)]. Plus précisément, chez Voevodsky :

– Y est lisse ;
– F est de caractéristique 0 ;
– l'énoncé vaut pour un nombre premier l quelconque ;
– X est supposé être une « (v_n, l)-variété » (voir *loc. cit.*) et la conclusion de (1) est $\dim Y \geqslant \dim X$.

(Une quadrique de dimension d est une $(v_n, 2)$-variété si et seulement si $d = 2^n - 1$: pour $l = 2$, le théorème 8.2 n'est donc pas recouvert par celui de Voevodsky, même pour $i_1(X) = 1$ et même sous les hypothèses additionnelles de ce dernier sur F et Y.)

(6)Dans *loc. cit.*, il faut lire « tout morphisme *au-dessus de* $\mathbf{Z}_{(l)}$ ».

Le cas particulier suivant avait été obtenu antérieurement par Vishik ([63, cor. 4.9], *cf.* § 11.4 ci-dessous) :

COROLLAIRE 8.4. — $q \approx q' \Rightarrow \dim_{\mathrm{es}} q = \dim_{\mathrm{es}} q'$.

L'hypothèse est en particulier vérifiée si $q \leqslant q'$ et $q' \preccurlyeq q$, ce qui fournit la réciproque promise du lemme 6.5.

Pour la démonstration du théorème 8.2, voir § 12.1.

8.3. Une borne pour $i_1(q)$

THÉORÈME 8.5. — *Pour toute forme anisotrope q, on a $i_1(q) \leqslant |\dim_{\mathrm{es}} q - 1|_2^{-1}$, où $|\ |_2$ est la valeur absolue dyadique.*

Ce théorème est dû à Karpenko [37] ; il avait été conjecturé par Hoffmann. En particulier, $i_1(q) = 1$ si $\dim_{\mathrm{es}} q$ est paire. Une autre formulation est la suivante : il existe un entier n tel que $i_1(q) - 1$ soit le reste de la division de $\dim q - 1$ par 2^n.

Pour tout entier m, notons

$$m^{\mathrm{es}} = m - 1 + |m - 1|_2^{-1}.$$

Un peu d'arithmétique élémentaire montre que $l(m) = l(m^{\mathrm{es}})$ (*cf.* notation 6.13) : ainsi, *le théorème* 8.5 *implique le corollaire* 7.4. Il en découle que *le corollaire* 8.3 et le théorème *8.5* impliquent le théorème de Hoffmann *7.3*. (Leurs démonstrations n'utilisent pas ce théorème !)

Pour la démonstration du théorème 8.5, voir § 12.2.

8.4. Une relation entre les indices de Witt supérieurs

THÉORÈME 8.6. — *Soit q une forme quadratique de hauteur h, et soient $i_1, \dots, i_h$ ses indices de Witt supérieurs. Notons v_2 la valuation dyadique. Alors, pour tout $q \in [1, h-1]$, on a*

$$v_2(i_q) \geqslant \inf\left(v_2(i_{q+1}), \dots, v_2(i_h)\right) - 1.$$

Si de plus $\dim q$ *est paire et l'entier $i_q + 2(i_{q+1} + \cdots + i_h)$ n'est pas une puissance de* 2*, on a*

$$v_2(i_q) \leqslant \sup\left(v_2(i_{q+1}), \dots, v_2(i_h)\right).$$

Ce théorème est dû à Karpenko [32]. Il en déduit une autre démonstration du théorème 8.1 : si q est un contre-exemple à ce théorème, on se ramène en montant dans sa tour de déploiement générique à supposer que $q_1, \dots, q_h$ en vérifient la conclusion, ce qui contredit la borne inférieure du théorème 8.6.

9. TROIS APPLICATIONS

9.1. Dimension des formes de hauteur 2

THÉORÈME 9.1. — *Soit q une forme anisotrope de hauteur 2 et de degré $n \geqslant 0$. Alors*

(a) *Si $n = 0$, $\dim q$ est de la forme $2^a - 2^b + 1$ et $i_1(q)$ est de la forme $2^{a-1} - 2^b + 1$ pour $a > b > 1$ (le cas $a = b + 1$ est permis).*

(b) *Si $n > 0$, on a*

$$\dim q \in \{2^n + 2^{n-1}, 2^{n+1}, 2^{r+1} - 2^n (r > n)\}.$$

Ce théorème est dû à Vishik [62, th. 3.1]. Donnons-en une autre démonstration, reposant sur les théorèmes 8.5 et 8.6 :

Démonstration. — Traitons (b) : le cas de (a) se traite de même. D'après la proposition 6.6, on a $\dim q_1 = \dim q - 2i_1(q) = 2^n$. Appliquons le théorème 8.5 : il existe r tel que $i_1(q) \leqslant 2^r$ et $\dim q - 1 \equiv i_1(q) - 1 \pmod{2^r}$. Deux cas se présentent :

(1) $r > n$. Alors $i_1(q) = 2^r - 2^n$, donc $\dim q = 2^{r+1} - 2^n$.

(2) $r \leqslant n$. On a $i_1(q) \equiv 0 \pmod{2^r}$, donc $i_1(q) = 2^r$ et $\dim q = 2^n + 2^{r+1}$.

Cette alternative avait été obtenue antérieurement par Vishik dans sa thèse, au moins quand -1 est un carré [61, Statement 6.2]. On applique maintenant le théorème 8.6, qui montre que (2) n'est possible que pour $r \geqslant n-2$ (noter que, pour $r = n$, on retrouve le cas $r = n + 1$ de (1)). □

Plus précisément, on conjecture (par exemple [61, Question 6.4]) :

CONJECTURE 9.2. — *Une forme anisotrope q de hauteur 2 et de degré $n > 0$ est d'un des trois types suivants :*

(i) *excellente ;*

(ii) *$q \simeq \varphi \otimes \psi$, où φ est une $(n-1)$-forme de Pfister et $\dim \psi = 4$, $\psi \notin I^2F$;*

(iii) *$q \simeq \varphi \otimes \psi$, où φ est une $(n-2)$-forme de Pfister et $\dim \psi = 6$, $\psi \in I^2F$ (on dit que ψ est une* forme d'Albert).

Cette conjecture est connue pour $n = 1$ (Knebusch, [44, § 10]) et pour $n = 2$ [29].

Remarque 9.3 (Cette remarque et le lemme qui la suit sont entièrement dus à Hoffmann)

Dans le cas $n = 0$, la situation est un peu différente. D'après Knebusch [43, § 10], q est excellente dès que sa forme dominante est définie sur F : il obtient ainsi le théorème 9.1 (a) dans ce cas particulier. D'autre part, si $\dim q = 5$, elle est de hauteur 2 mais pas excellente en général (par exemple si q est une sous-forme d'une forme d'Albert anisotrope, *cf.* conjecture 9.2 (iiii)). Mais par ailleurs, le théorème 9.1 (a) entraîne que q est à déploiement maximal si $a > b+1$. Pour $a = b+1$, q est excellente d'après le lemme 9.4 ci-dessous. La conjecture mentionnée à la fin du § 7 implique ainsi que q *doit être excellente en toute dimension* $\neq 5$. C'est par exemple vrai pour $a \leqslant 4$ ou pour $b \leqslant 3$.

LEMME 9.4. — *Soit q une forme de hauteur 2 et de dimension $2^b + 1$, avec $b \geqslant 3$. Alors q est excellente.*

Démonstration. — Comme q est de hauteur 2, il existe un scalaire $u \in F_1^*$ tel que $q_1 \perp \langle u \rangle$ soit semblable à une b-forme de Pfister (proposition 6.6). En fait, la classe de carrés u est définie sur F (pour le voir, on peut l'interpréter comme le discriminant de q_1, et donc de q). Soit $q' = q \perp \langle u \rangle$. Notons que $q' \in I^2 F$, donc que $\deg(q') \geqslant 2$. Évidemment, on a $\deg(q') \leqslant b$. Supposons que $\deg(q') < b$. Alors il existe une extension L telle que

$$4 \leqslant \dim_{\mathrm{an}}(q'_L) \leqslant 2^{b-1}$$

et donc

$$1 < 3 \leqslant \dim_{\mathrm{an}}(q_L) \leqslant 2^{b-1} + 1 < 2^b - 1 \text{ (car } b \geqslant 3)$$

Or par hypothèse, les seules dimensions « anisotropes » possibles de q sont $1, 2^b - 1$, $2^b + 1$. D'où une contradiction.

Par conséquent, $\deg(q') = b$. Comme $b \geqslant 3$, le théorème 8.1 implique que $\dim_{\mathrm{an}} q' = 2^b$ (observer qu'a priori $\dim_{\mathrm{an}}(q') \geqslant 2^b$ par construction de q'). Ainsi $q = q'' + \langle -u \rangle$ avec q'' semblable à une b-forme de Pfister. □

9.2. Une borne pour l'indice de Witt

THÉORÈME 9.5. — *Supposons que $q \preccurlyeq q'$ où q et q' sont deux formes anisotropes. Alors*

$$i(q'_{F(q)}) - i_1(q') \leqslant \dim_{\mathrm{es}} q' - \dim_{\mathrm{es}} q.$$

Ce théorème est dû à Karpenko-Merkurjev [40, cor. 4.2] ; une variante tout aussi frappante est $\dim q' - i(q'_{F(q)}) + 1 \geqslant \dim_{\mathrm{es}} q$. Voici leur démonstration : posons $X = X_q$ et $Y = X_{q'}$. Si $\dim_{\mathrm{es}}(X) = 0$, l'énoncé est trivial. Sinon, soit Y' une sous-quadrique de Y de dimension $\dim_{\mathrm{es}}(X) - 1$. Puisque $\dim_{\mathrm{es}}(Y') < \dim(Y') < \dim_{\mathrm{es}}(X)$, la quadrique Y' reste anisotrope sur $F(X)$ par la première partie du corollaire 8.3. Donc, d'après le lemme 2.3 (b), on a $i(Y_{F(X)}) \leqslant \operatorname{codim}_Y(Y') = \dim(Y) - \dim_{\mathrm{es}}(X) + 1$, d'où l'inégalité.

9.3. Degré de transcendance d'un corps d'isotropie générique

Par définition, un corps d'isotropie générique d'une forme anisotrope q est un corps de type K_1, où (K_i) est une tour de déploiement générique au sens de la définition 6.3.

THÉORÈME 9.6. — *Le plus petit degré de transcendance d'un corps d'isotropie générique K de q est égal à* $\dim_{\mathrm{es}}(X_q) (= \dim_{\mathrm{es}}(q) - 2)$.

Ce théorème est encore dû à Karpenko-Merkurjev [40, th. 4.3] (ils utilisent la terminologie « corps de déploiement générique », attribuée par Knebusch au corps K_h de la définition 6.3). Il le déduisent facilement du théorème 8.2 : nous renvoyons à *loc. cit.* pour les détails.

PARTIE II

CYCLES ALGÉBRIQUES

10. FORMES QUADRATIQUES ET MOTIFS : RÉSULTATS DE BASE

10.1. Motifs de Chow

Nous nous dispenserons de rappeler en détail la construction de la catégorie des motifs de Chow, celle-ci étant maintenant bien connue et ayant fait l'objet d'excellentes expositions, y compris dans ce Séminaire [47, 14, 57, 1]. Rappelons seulement que :

(1) On part de la catégorie des F-variétés projectives lisses.

(2) On « agrandit » celle-ci en gardant les mêmes objets mais en prenant comme morphismes les *correspondances de Chow* : Si X est purement de dimension d, les correspondances de X vers une autre variété Y sont les éléments du groupe de Chow $\mathrm{CH}_d(X \times Y)$. La catégorie obtenue est additive. Elle est munie d'une structure monoïdale symétrique, induite par le produit des variétés, et bilinéaire par rapport à l'addition des correspondances (on dira qu'elle est *tensorielle*). La correspondance « graphe d'un morphisme » définit un foncteur (covariant, avec nos conventions) de la catégorie de (1) vers cette catégorie.

(3) On agrandit la catégorie de (2) en adjoignant des noyaux aux endomorphismes idempotents (enveloppe pseudo-abélienne ou karoubienne). La catégorie obtenue est celle des *motifs de Chow effectifs*. Elles est encore tensorielle et notée $\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}(F)$. Si X est une variété projective lisse, on note $h(X)$ son image dans $\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}(F)$.

(4) Dans $\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}(F)$, on a une décomposition canonique $h(\mathbf{P}^1) = \mathbf{1} \oplus L$, où $\mathbf{1} = h(\operatorname{Spec} F)$ et L est le *motif de Lefschetz*. On passe de $\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}(F)$ à $\mathrm{Mot}(F)$, catégorie des motifs de Chow, en inversant L pour la structure monoïdale. Si $M \in \mathrm{Mot}(F)$ et $n \in \mathbf{Z}$, nous noterons ici

$$M(n) := M \otimes L^{\otimes n}.$$

La catégorie $\mathrm{Mot}(F)$ est rigide, ce qui signifie qu'elle porte une dualité parfaite relativement à sa structure tensorielle : on notera $M^\vee$ le dual d'un motif M [(7)]. Dans les applications arithmético-géométriques des motifs, il est fréquent de tensoriser les groupes de morphismes par $\mathbf{Q}$: ici, au contraire, il est très important de les considérer à coefficients entiers. En fait nous aurons à considérer des variantes à coefficients finis : si p est un nombre premier, on note

$$\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}(F, \mathbf{F}_p), \qquad \mathrm{Mot}(F, \mathbf{F}_p)$$

les catégories définies comme ci-dessus en prenant comme groupes de correspondances les groupes $\mathrm{CH}_d(X \times Y)/p$. La catégorie $\mathrm{Mot}(F, \mathbf{F}_p)$ est encore rigide.

Notation 10.1. — *Pour* $M \in \mathrm{Mot}(F)$, *on note* $\delta(M) \in \mathbf{Z}$ *la dimension de* M *(au sens des catégories rigides : c'est la trace de l'identité). De même pour* $M \in \mathrm{Mot}(F, \mathbf{F}_p)$ *; on a alors* $\delta(M) \in \mathbf{F}_p$.

On sait que, si $M = h(X)$ pour une variété projective lisse X, $\delta(h(X))$ est la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de X par rapport à une cohomologie de Weil quelconque.

10.2. Variétés cellulaires et motifs de Tate purs

Soit X une variété projective lisse de dimension d admettant une décomposition cellulaire : cela signifie que X admet une stratification par des espaces affines. Le motif de X a alors une description très simple : les groupes de Chow de X sont libres de type fini et

$$h(X) \simeq \bigoplus_{n=0}^{d} \mathrm{CH}_n(X) \otimes L^n. \tag{10.1}$$

De plus, les accouplements $\mathrm{CH}^n(X) \times \mathrm{CH}^{d-n}(X) \to \mathbf{Z}$ donnés par le produit d'intersection sont parfaits. La première assertion (vraie sans supposer X projective ni lisse) se montre par dévissage et récurrence sur le nombre de cellules (c'est un cas très particulier de la proposition 10.7 ci-dessous) ; la seconde, qui revient à une formule de Künneth via le principe d'identité de Manin, se démontre de la même manière ; enfin la troisième se déduit de (10.1) par dualité (voir ci-dessous). Ainsi, $h(X)$ est somme directe de motifs de la forme L^n : on dit que $h(X)$ est un *motif de Tate pur*.

La sous-catégorie pleine des motifs de Tate purs est très simple : on a

$$\mathrm{Hom}(L^m, L^n) = \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases} \tag{10.2}$$

[(7)] On prendra garde au fait que, dans [63], Vishik utilise cette notation dans un sens différent : si N est un facteur direct du motif d'une quadrique de dimension d, ce qu'il note $N^\vee$ correspond à ce que nous notons $N^\vee(d)$.

Ainsi, les Hom sont des groupes abéliens libres de type fini, et sont *invariants par extension des scalaires*. Il est également clair que

$$\delta(L^n) = 1 \text{ pour tout } n \ (\textit{cf.} \text{ notation } (10.1)). \tag{10.3}$$

Plus généralement, soit X une variété projective lisse telle que $h(X)$ soit un motif de Tate pur. Alors les groupes de Chow de X sont des $\mathbf{Z}$-modules libres de type fini, comme le montre la formule

$$\mathrm{Hom}(L^n, h(X)) = \mathrm{CH}_n(X).$$

Ces groupes sont en dualité parfaite, comme il résulte des formules (10.2) et de la dualité sur $h(X)$.

Si F est séparablement clos et que l est un nombre premier différent de la caractéristique de F, on a $H^j_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}_l) = 0$ pour j impair et la classe de cycle $\mathrm{CH}^i(X) \otimes \mathbf{Z}_l \to H^{2i}_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}_l(i))$ est bijective : c'est évident en considérant le foncteur de réalisation l-adique. Les groupes de Chow forment donc (pour une telle X) une « cohomologie de Weil » à coefficients entiers. De plus, l'équivalence rationnelle coïncide avec l'équivalence numérique.

On peut pousser plus loin l'analogie : on a des isomorphismes de Künneth pour toute autre variété projective lisse Y (évidents en considérant une fois de plus le motif de X) :

$$\mathrm{CH}_n(X \times Y) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{CH}_i(X) \otimes \mathrm{CH}_j(Y). \tag{10.4}$$

En tenant compte de la dualité sur les groupes de Chow de X donnée ci-dessus, on obtient ainsi une desciption canonique de $\mathrm{Hom}(h(X), h(Y))$:

$$\mathrm{Hom}(h(X), h(Y)) \simeq \prod_{i \geqslant 0} \mathrm{Hom}(\mathrm{CH}_i(X), \mathrm{CH}_i(Y)). \tag{10.5}$$

10.3. Motifs géométriquement de Tate purs

DÉFINITION 10.2. — *Un motif* $M \in \mathrm{Mot}(F)$ *est* géométriquement de Tate pur *si* $\overline{M} \in \mathrm{Mot}(\overline{F})$ *est un motif de Tate pur. On note* $\mathrm{Mot}(F)_{\text{tate}}$ *la sous-catégorie pleine de* $\mathrm{Mot}(F)$ *formée des motifs géométriquement de Tate purs. Si* p *est un nombre premier, on définit de même la catégorie* $\mathrm{Mot}(F, \mathbf{F}_p)_{\text{tate}}$.

La catégorie $\mathrm{Mot}(F)_{\text{tate}}$ est visiblement une sous-catégorie rigide de $\mathrm{Mot}(F)$, stable par facteurs directs, de même que $\mathrm{Mot}(F, \mathbf{F}_p)_{\text{tate}}$ dans $\mathrm{Mot}(F, \mathbf{F}_p)$.

De même que dans le cas classique, on peut définir l'*équivalence numérique* dans $\mathrm{Mot}(F, \mathbf{F}_p)$ et $\mathrm{Mot}(F, \mathbf{F}_p)_{\text{tate}}$: pour $M, N \in \mathrm{Mot}(F, \mathbf{F}_p)$, introduisons

$$\mathcal{N}(M, N) = \{f : M \to N \mid \forall\, g : N \to M, \mathrm{tr}(gf) = 0\}$$

où *tr* est la trace, donnée par la structure rigide de $\mathrm{Mot}(F, \mathbf{F}_p)$: c'est un idéal monoïdal de cette catégorie (*cf.* [2, lemme 7.1.1]) et on définit $\mathrm{Mot}_{\text{num}}(F, \mathbf{F}_p)$ comme l'enveloppe pseudo-abélienne de $\mathrm{Mot}(F, \mathbf{F}_p)/\mathcal{N}$, et de même pour $\mathrm{Mot}_{\text{num}}(F, \mathbf{F}_p)_{\text{tate}}$.

Donnons-nous un nombre premier p. Si F est séparablement clos, le foncteur canonique $\mathrm{Mot}(F, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{tate}} \to \mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}(F, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{tate}}$ est une équivalence de catégories ($\mathcal{N} = 0$). On prendra garde au fait que le foncteur d'extension des scalaires

$$H : \mathrm{Mot}(F, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{tate}} \longrightarrow \mathrm{Mot}(\overline{F}, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{tate}}$$

n'induit pas un foncteur de $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}(F, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{tate}}$ vers $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}(\overline{F}, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{tate}}$ (voir ci-dessous). L'analogie avec la situation classique est tentante : définissons l'*équivalence homologique* sur $\mathrm{Mot}(F, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{tate}}$ comme le noyau de H, et $\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{tate}}$ comme l'enveloppe pseudo-abélienne de $\mathrm{Mot}(F, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{tate}}/\operatorname{Ker}(H)$. On est donc dans la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mot}(F, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{tate}} \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\Pi"'] & \mathrm{Mot}(\overline{F}, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{tate}} \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{tate}} \arrow[r, "\overline{H}"] \arrow[d] & \mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}(\overline{F}, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{tate}} \\
\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}(F, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{tate}} &
\end{tikzcd} \tag{10.6}$$

où le foncteur $\overline{H}$ est (par définition) fidèle. L'argument de Jannsen [27] (*cf.* aussi [1, prop. 2.6] ou [3, th. 1]) donne :

Proposition 10.3. — *La catégorie* $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}(F, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{tate}}$ *est abélienne semi-simple.* □

Malheureusement, pour $M \in \mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{tate}}$, il n'est pas vrai en général que $\mathcal{N}(M, M)$ soit égal au radical de $\operatorname{End}(M)$; c'est même loin d'être le cas :

Proposition 10.4. — *Soit X une quadrique anisotrope. Alors l'image de $h(X)$ dans* $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}(F, \mathbf{F}_2)_{\mathrm{tate}}$ *est égale à* 0.

Démonstration. — Il suffit de voir que tout endomorphisme de $h(X)$ dans $\mathrm{Mot}(F, \mathbf{F}_2)_{\mathrm{tate}}$ est de trace nulle. Cela découle immédiatement du fait que tout 0-cycle sur $X \times X$ est de degré pair, ce qui résulte du théorème 3.2. □

Ceci limite fortement l'intérêt de la proposition 10.3. Néanmoins, la proposition 10.4 a une conséquence intéressante :

Lemme 10.5. — *Soit N un facteur direct de $h(X)$, où X est une quadrique anisotrope. Alors $\delta(N)$ est pair* (*voir notation* 10.1).

En effet, $\delta(N) = \operatorname{tr}(\pi_N)$, où $\pi_N \in \operatorname{End}(h(X))$ est le projecteur définissant N ; le lemme résulte donc immédiatement de la proposition 10.4.

D'après (10.3), cela veut dire que *le nombre de motifs de Tate intervenant dans $H(N)$ est pair.*

10.4. Variétés projectives homogènes

Soit X une variété projective homogène sous un groupe réductif connexe G. Si G est déployé, X admet une décomposition cellulaire [13] et on est dans la situation du § 10.2. C'est par exemple le cas si X est une *quadrique hyperbolique*. En général on est dans la situation du § 10.3.

Si G n'est pas déployé mais que X a un point rationnel, on peut décomposer partiellement le motif de X. Par exemple, si X est une quadrique isotrope définie par la forme quadratique $q \simeq \mathbb{H} \perp q'$, on a

$$h(X) \simeq \mathbf{1} \oplus h(X')(1) \oplus L^d \tag{10.7}$$

où $d = \dim X$ et X' est la quadrique d'équation $q' = 0$. Ce résultat est dû à Rost [53]. Il montre que $h(X)$ « contient » l'indice de Witt $i = i(q)$: en itérant, on obtient une décomposition

$$h(X) \simeq \mathbf{1} \oplus L \oplus \cdots \oplus L^{i-1} \oplus h(Y)(i) \oplus L^{d-i+1} \oplus \cdots \oplus L^d \tag{10.8}$$

où Y est une quadrique dont l'équation est donnée par la partie anisotrope de q. De plus,

Lemme 10.6. — *$h(X)$ ne contient pas L^i en facteur direct.*

En effet

$$\mathrm{Hom}(L^i, h(X)) = \mathrm{Hom}(\mathbf{1}, h(Y)) = \mathrm{CH}_0(Y)$$

et
$$\mathrm{Hom}(h(X), L^i) = \mathrm{Hom}(h(Y), \mathbf{1}) = \mathrm{CH}^0(Y).$$

La composition des correspondances

$$\mathrm{Hom}(h(X), L^i) \times \mathrm{Hom}(L^i, h(X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$$

correspond au produit d'intersection $\mathrm{CH}^0(Y) \times \mathrm{CH}_0(Y) \to \mathbf{Z}$. Or le théorème 3.2 montre que ce produit est d'image $2\mathbf{Z}$.

La décomposition (10.7) a été généralisée par Karpenko, puis par Chernousov-Gille-Merkurjev au cas d'une variété projective homogène quelconque ayant un point rationnel :

Proposition 10.7 ([34, th. 6.5 et cor. 6.11]; [12, th. 7.1]). — *Soit X une variété projective lisse admettant une filtration*

$$\varnothing = X_{-1} \subset X_0 \subset \cdots \subset X_n = X$$

où les X_i sont fermés et où, pour tout $i \in [0, n]$, $X_i - X_{i-1}$ est fibré sur une variété projective lisse Y_i à fibres des espaces affines de dimension constante a_i. Alors on a un isomorphisme canonique dans $\mathrm{Mot}(F)$

$$h(X) \simeq \bigoplus_{i=0}^{n} h(Y_i)(a_i).$$

La manière la plus agréable (mais certainement pas la moins chère) de comprendre la démonstration de cette proposition est de se placer dans la catégorie triangulée des motifs géométriques $DM_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(F)$ de Voevodsky ([65], voir aussi l'exposé Bourbaki de Friedlander [18, § 3]) : rappelons que dans cette catégorie, le motif $M(U)$ d'une variété lisse U est défini et que la catégorie $\mathrm{Mot}^{\mathrm{eff}}(F)$ s'y plonge de manière pleinement fidèle d'après [64]. Traitons le cas $n = 1$: c'est de toute façon le cas essentiel. On a le triangle exact de Gysin

$$M(X - X_0) \longrightarrow M(X) \longrightarrow M(X_0)(c)[2c] \xrightarrow{+} .$$

Soit $p : X - X_0 \to Y_1$ la projection de l'énoncé. Par invariance homotopique, le morphisme $M(p)$ est un isomorphisme. Le point est alors que l'adhérence dans $X \times Y_0$ du graphe de p fournit une correspondance de Chow qui scinde ce triangle exact. On obtient ensuite la proposition en dualisant.

Il en résulte :

Théorème 10.8 ([12, th. 7.4]). — *Soit X une variété projective homogène ayant un point rationnel. Écrivons $X = G/P$, où G est semi-simple adjoint et P est un sous-groupe parabolique de G défini sur F (c'est toujours possible). Alors on a un isomorphisme canonique dans $\mathrm{Mot}(F)$, de la forme*

$$h(X) = \bigoplus_{\delta\in\Delta} h(Z_\delta)(l(\delta))$$

où Δ est l'ensemble (fini) des coïnvariants de l'action de Galois sur $(P\backslash X)(\overline{F})$ et où $l(\delta), Z_\delta$ sont un certain entier $\geqslant 0$ et une certaine variété projective homogène associés à δ.

Karpenko avait obtenu auparavant ce théorème dans le cas où G est classique [34]. En itérant, il en résulte que *le motif de Chow d'une variété projective homogène est somme directe canonique de tordus à la Tate de motifs de Chow de variétés projectives homogènes anisotropes.*

10.5. Le théorème de nilpotence de Rost

Notation 10.9. — On note $\mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{hmg}}$ la sous-catégorie épaisse (c'est-à-dire pleine, additive et stable par facteurs directs) de $\mathrm{Mot}(F)$ engendrée par les $h(X)(n)$, où $n \in \mathbf{Z}$ et X est une variété projective homogène. On note de même $\mathrm{Mot}(F, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{hmg}}$ la catégorie correspondante à coefficients $\mathbf{F}_p$.

La catégorie $\mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{hmg}}$ est visiblement stable par produit tensoriel et par dual ; d'après les remarques du début du § 10.4, c'est une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{tate}}$. Mêmes remarques à coefficients finis.

THÉORÈME 10.10. — *Pour* $M, N \in \mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{hmg}}$, *notons* $I(M,N)$ *l'ensemble des homomorphismes* f *de* M *vers* N *tels que* $f_{\overline{F}} = 0$. *Alors, pour tout* $M \in \mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{hmg}}$, $I(M,M)$ *est un nilidéal de* $\mathrm{End}(M)$.[8]

Ce théorème est dû à Chernousov–Gille–Merkurjev [12, th. 8.2] ; dans le cas où M est le motif d'une quadrique, c'est le célèbre théorème de nilpotence de Rost. Pour le démontrer, on peut visiblement supposer que M est somme de motifs de la forme $h(X)(n)$ pour X projective homogène (cas que considèrent les auteurs). En utilisant le théorème 10.8, on se ramène facilement au théorème suivant :

THÉORÈME 10.11. — *Soient* X, Y *deux variétés projectives lisses et* $f \in \mathrm{End}\, h(X)$. *Supposons que* f *agisse trivialement sur* $\mathrm{CH}_*(X_{F(y)})$ *pour tout point* $y \in Y$. *Alors* $f^{\dim Y+1}$ *agit trivialement sur* $\mathrm{CH}_*(Y \times X)$.

Ce théorème est dû à Brosnan [10, th. 3.1] ; le cas $\mathrm{CH}_{\dim Y}(Y \times X)$ avait été démontré par Rost. Soit $(F_n \mathrm{CH}_*(Y \times X))_{n \geqslant 0}$ la filtration de $\mathrm{CH}_*(Y \times X)$ par la dimension du support de Y. Si $(\mathrm{gr}_n)_{n \geqslant 0}$ est le gradué associé, il suffit de montrer que f agit trivialement sur gr_n pour tout n. Brosnan le démontre en généralisant légèrement la composition classique des correspondances, autorisant trois variétés X_1, X_2, X_3 quelconques à condition que la variété intermédiaire X_2 soit projective lisse. Pour ce faire, il utilise la formule

$$f \circ g = (p_{13})_* \varphi^!(g \otimes f)$$

où φ est l'immersion régulière $X_1 \times X_2 \times X_3 \to X_1 \times X_2 \times X_2 \times X_3$ donnée par la diagonale de X_2 et $\varphi^!$ est le morphisme de Gysin correspondant [19, ch. 6]. Essentiellement, cela lui permet de faire opérer la correspondance f sur la suite spectrale de niveau qui aboutit à la filtration (F_n) [9]. Rost, quant à lui, utilisait une suite spectrale obtenue à l'aide de sa théorie des modules de cycles.

Remarques 10.12

(a) Comme le groupe $\mathrm{End}(M_{\overline{F}})$ est libre de type fini, $I(M)$ est aussi le *sous-groupe de torsion* de $\mathrm{End}(M)$ comme le montre un argument de transfert bien connu.

(b) Les théorèmes 10.8 et 10.10 s'étendent aux motifs à coefficients dans $\mathbf{F}_p$, avec les mêmes démonstrations.

(c) J'ignore si le théorème 10.10 s'étend à tous les objets de $\mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{tate}}$. Même perplexité à coefficients finis.

[8] La démonstration donne même qu'il existe un entier d ne dépendant que de M tel que $f^d = 0$ pour tout $f \in I = I(M,M)$. Contrairement à ce qui était indiqué dans la version diffusée lors de l'exposé, on ne peut pas en déduire que I est nilpotent, car le lemme de Nagata et Higman invoqué dans cette version (*cf.* [2, lemme 7.2.8]) ne s'applique qu'aux $\mathbf{Q}$-algèbres. J'ignore si I est nilpotent ; heureusement cela n'a pas d'importance pour l'application aux corollaires 10.13 et 10.14.

[9] Sa formulation est plus élémentaire.

Puisque les Hom dans $\mathrm{Mot}(\overline{F}, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{tate}}$ sont de dimension finie, la remarque 10.12 (b) entraîne, via [54, pp. 40/41, 235, 241/242] :

Corollaire 10.13. — *Soit p un nombre premier. Alors pour tout objet $M \in \mathrm{Mot}(F, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{hmg}}$, l'anneau $\mathrm{End}(M)$ est extension d'une $\mathbf{F}_p$-algèbre semi-simple par un nilidéal. En particulier le théorème de Krull-Schmidt est vrai : tout objet est somme directe d'un nombre fini d'objets indécomposables, uniques à isomorphisme près.* □

Corollaire 10.14 (*cf.* [12, cor. 8.3]). — *Soit $M \in \mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{hmg}}$, soit K/F une extension, et soit $(p_i) \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{End}(M) \to \mathrm{End}(M_K))$ une famille de projecteurs orthogonaux de somme 1. Alors les p_i se relèvent en une famille de projecteurs orthogonaux de somme 1 de $\mathrm{End}(M)$, de manière unique à conjugaison près.*
Cet énoncé reste vrai à coefficients finis.

On aimerait pouvoir également démontrer que le foncteur d'extension des scalaires $\mathrm{Mot}(F) \to \mathrm{Mot}(\overline{F})$ est conservatif. Il faut faire un peu attention car ce foncteur n'est pas plein. Le problème est de montrer que, si f est un morphisme tel que f_K soit un isomorphisme, l'inverse de f_K est défini sur F : on s'en tire essentiellement quand on sait ceci a priori ou quand la source et le but de f sont égaux. Ce problème est de même nature que pour la conjecture standard B. Cela donne l'énoncé un peu désagréable suivant.

Corollaire 10.15

(a) *Soient $M, N \in \mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{hmg}}$, K/F une extension, et $f : M \to N$, $g : N \to M$ deux morphismes tels que $(gf)_K$ soit un isomorphisme. Alors gf est un isomorphisme. Si $(fg)_K$ est également un isomorphisme, alors f et g sont des isomorphismes.*

(b) *Si N est indécomposable, il suffit de demander que $(gf)_K$ soit un isomorphisme pour que f et g soient des isomorphismes.*

(c) [12, cor. 8.4] *Soient X, Y deux variétés projectives homogènes, K/F une extension et $f \in \mathrm{Hom}(h(X), h(Y))$. Si f_K est un isomorphisme, alors f est un isomorphisme.*

Ces énoncés restent vrais à coefficients finis.

Démonstration

(a) On se ramène immédiatement au cas $M = N, g = 1$. Quitte à agrandir K, on peut supposer que M_K est un motif de Tate mixte. Alors $\mathrm{End}(M_K)$ est produit d'algèbres de matrices M_i sur $\mathbf{Z}$; en observant que le terme constant du polynôme caractéristique de l'image de f_K dans M_i est égal à ± 1 (c'est le déterminant), on voit que l'inverse de f_K est donné par un polynôme $Q(f_K)$. En considérant $fQ(f)$, on se ramène au cas où $f_K = 1$; alors f est unipotent, donc inversible.

(b) En utilisant (a), on se ramène au cas où $(gf)_K = 1$. Alors $(fg)_K$ est idempotent, donc égal à 0 ou 1 par hypothèse. Mais $(fg)_K = 0$ est impossible : cela impliquerait que $g_K = (gfg)_K = 0$, contredisant $(gf)_K = 1$.

(c) On peut encore supposer que X et Y sont déployées sur K. En considérant le motif de Tate de poids maximal intervenant dans $h(X_K)$ et $h(Y_K)$, on remarque que nécessairement $\dim X = \dim Y$. Alors la transposée de f définit un morphisme $g : h(Y) \to h(X)$ et g_K est évidemment un isomorphisme. On est donc ramené au cas (a). □

Dans la veine de (10.6), la définition suivante clarifie bien les choses et sera utile plus loin :

Définition 10.16

(a) *On note* $\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F)_{\mathrm{hmg}}$ *le quotient de la catégorie* $\mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{hmg}}$ *par l'idéal* I *du théorème 10.10.*

(b) *Soit* p *un nombre premier. On note* $\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{hmg}}$ *l'image essentielle de* $\mathrm{Mot}(F, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{hmg}}$ *dans* $\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{tate}}$ (*cf.* (10.6) *et notation* 10.9).

Par définition, les morphismes dans la catégorie

$$\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F)_{\mathrm{hmg}} \quad (\text{resp. } \mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{hmg}}),$$

entre des motifs de variétés $h(X)$ et $h(Y)$, disons, sont formés de l'image de

$$\mathrm{CH}_{\dim X}(X \times Y) \text{ dans } \mathrm{CH}_{\dim X}(\overline{X} \times \overline{Y}) \quad (\text{resp. dans } \mathrm{CH}_{\dim X}(\overline{X} \times \overline{Y})/p).$$

Le théorème 10.10 et sa version modulo p montrent, comme ci-dessus, que les foncteurs

$$\mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{hmg}} \longrightarrow \mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F)_{\mathrm{hmg}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mot}(F, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{hmg}} \longrightarrow \mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{hmg}}$$

sont conservatifs et que l'image d'un motif indécomposable est indécomposable. Le corollaire 10.15 et les remarques le précédant concernent la conservativité partielle (?) des foncteurs

$$\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F)_{\mathrm{hmg}} \longrightarrow \mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(\overline{F})_{\mathrm{hmg}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{hmg}} \longrightarrow \mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(\overline{F}, \mathbf{F}_p)_{\mathrm{hmg}}.$$

10.6. La multiplicité d'une correspondance

Soit $\alpha : h(X) \to h(Y)$ une correspondance entre variétés projectives lisses. Il existe un unique entier $\mu(\alpha)$ tel que $(p_Y)_* \circ \alpha = \mu(\alpha)(p_X)_*$, où p_X et p_Y sont les morphismes structuraux : c'est la *multiplicité de* α. Cette fonction a les propriétés évidentes suivantes :

(1) $\mu(\alpha + \beta) = \mu(\alpha) + \mu(\beta)$.
(2) $\mu(\alpha \circ \beta) = \mu(\alpha)\mu(\beta)$.
(3) $\mu(\alpha \otimes \beta) = \mu(\alpha)\mu(\beta)$.
(4) Si α est le graphe d'une application rationnelle, $\mu(\alpha) = 1$.

En particulier, si $X = Y$ et que π est une correspondance idempotente, on a $\mu(\pi) = 0$ ou 1 ; le second cas se produit si et seulement si la composition

$$N \longrightarrow h(X) \longrightarrow \mathbf{1},$$

où N est le facteur direct défini par π, est non triviale.

On peut aussi définir la multiplicité d'une correspondance $\alpha \in \mathrm{CH}_{\dim X}(X \times Y)$, où X et Y sont des variétés quelconques avec Y propre : c'est l'entier $\mu(\alpha)$ tel que $p_*\alpha = \mu(\alpha)[X] \in \mathrm{CH}_{\dim X}(X)$, où p est la projection $X \times Y \to Y$. Elle coïncide avec la précédente dans le cas projectif lisse.

10.7. Opérations de Steenrod sur les groupes de Chow

Dans [67], Voevodsky définit des opérations de Steenrod en cohomologie motivique modulo p : pour $p = 2$, ces opérations jouent un rôle essentiel dans sa preuve de la conjecture de Milnor ([66], voir aussi [30, § 6]). En comptant les degrés, on observe que les plus importantes d'entre elles préservent les groupes de Chow modulo p

$$\mathrm{CH}^i(X)/p = H^{2i}(X, \mathbf{Z}/p(i))$$

pour X une F-variété lisse. Il est tentant d'essayer de les définir directement dans ce cadre, en évitant la théorie homotopique des schémas : cela correspond d'ailleurs à une question de Fulton [19, ex. 19.2.8]. C'est ce qu'a fait Brosnan dans sa thèse [11]. Sa construction et les propriétés principales de ces opérations (pour $p = 2$) sont exposées lucidement et succinctement par Karpenko dans [37, § 2] :

Au moins pour les variétés quasi-projectives lisses X, Brosnan suit exactement la construction de Steenrod, en utilisant les groupes de Chow équivariants définis par Edidin et Graham [16] (voir aussi Totaro [60]). Il obtient ainsi des opérations

$$S^i : \mathrm{CH}^n(X)/2 \longrightarrow \mathrm{CH}^{n+i}(X)/2$$

(en cohomologie modulo 2, S^i correspondrait à l'opération de Steenrod Sq^{2i}). Ces opérations ont les propriétés suivantes :

(1) L'opération de Steenrod totale $S = \sum S^i$ est un endomorphisme de l'anneau $\mathrm{CH}^*(X)/2$.

(2) S est contravariant pour les morphismes quelconques. Compte tenu de (1), cela fournit la *formule de Cartan* pour les cross-produits de cycles.

(3) Sur $\mathrm{CH}^n(X)/2$, S^i est égal à
- 0 pour $n < i$;
- l'élévation au carré pour $n = i$.

(4) $S^i = 0$ pour $i < 0$; S^0 est l'identité.

(5) *Formule de Riemann-Roch* : si $f : Y \to X$ est un morphisme propre et $\alpha \in \mathrm{CH}^*(Y)/2$, on a

$$f_*(S(\alpha) \cdot c(-T_Y)) = S(f_*\alpha) \cdot c(-T_X)$$

où T_X et T_Y sont respectivement les fibrés tangents de X et Y et c désigne la classe de Chern totale (les expressions $-T_X$ et $-T_Y$ ayant un sens dans $K_0(X)$ et $K_0(Y)$).

Dans le cas où f est une immersion fermée et où α est la classe de Y, la formule de Riemann-Roch se réduit à la *formule de Wu* :

$$S([Y]) = f_*c(N) \tag{10.9}$$

où N est le fibré normal de l'immersion f.

10.8. Le motif d'une quadrique déployée

Soit X une quadrique déployée de dimension d et d'équation $q = 0$. L'anneau de Chow de X admet une description très simple : on a

$$\mathrm{CH}^i(X) = \begin{cases} \mathbf{Z}h^i & \text{si } i < d/2 \\ \mathbf{Z}l_{d-i} & \text{si } i > d/2 \\ \mathbf{Z}l^1 \oplus \mathbf{Z}l^2 & \text{si } i = d/2 \end{cases} \tag{10.10}$$

où h est la classe d'une section hyperplane de X et, si $j < d/2$, l_j désigne la classe d'un sous-espace projectif de X de dimension j. Pour $j = d/2$ (donc d pair), on a deux telles familles de sous-espaces l^1 et l^2, qui sont conjuguées sous l'action de $O(q)$. Plus précisément :

Lemme 10.17

(a) *Soit $u \in O(q)$. Alors u opère trivialement sur* $\mathrm{CH}^i(X)$ *si $i \neq d/2$. Si $i = d/2$, u opère trivialement sur* $\mathrm{CH}^i(X)$ *si $u \in SO(q)$ et échange l^1 et l^2 si $u \notin SO(q)$.*

(b) *L'application naturelle $O(q) \to \mathrm{End}(h(X))$ est triviale si d est impair et se factorise (non trivialement) à travers le déterminant si d est pair.*

(Il suffit de tester (a) sur les réflexions puisque celles-ci engendrent $O(q)$, ce qui est facile ; (b) résulte de (a) puisque $\mathrm{End}(h(X))$ opère fidèlement sur les $\mathrm{CH}^i(X)$, *cf.* (10.5) ci-dessous.)

On a de plus les relations (*cf.* par exemple [33])

$$\begin{aligned} h^i &= 2l_{d-i} \quad (i > d/2) \\ h^{d/2} &= l^1 + l^2 \quad \text{si } d \text{ est pair} \\ \langle h^i, l_{d-i}\rangle &= 1 \qquad (i < d/2) \\ \langle l^1, l^2\rangle &= \begin{cases} 0 & \text{si } d \equiv 0 \pmod 4 \\ 1 & \text{si } d \equiv 2 \pmod 4 \end{cases} \\ \langle l^a, l^a\rangle &= \begin{cases} 1 & \text{si } d \equiv 0 \pmod 4 \\ 0 & \text{si } d \equiv 2 \pmod 4 \end{cases} \qquad \text{pour } a = 1, 2. \end{aligned} \tag{10.11}$$

Ceci permet de donner une formule explicite pour les « projecteurs de Künneth » π_i de X selon la décomposition (10.4) (π_i projette sur $\mathrm{CH}_i(X)$) :

$$\pi_i = \begin{cases} l_i \times h^i & \text{si } i < d/2 \\ h^{d-i} \times l_{d-i} & \text{si } i > d/2 \\ l^1 \times l^1 + l^2 \times l^2 & \text{si } i = d/2 \text{ et } d \equiv 0 \pmod 4 \\ l^1 \times l^2 + l^2 \times l^1 & \text{si } i = d/2 \text{ et } d \equiv 2 \pmod 4. \end{cases} \tag{10.12}$$

Bien entendu, tous ces calculs restent valables modulo 2.

Remarque 10.18. — (10.10) et (10.11) sont des cas particuliers de [51, prop. 1], qui permettrait de généraliser la formule (10.12) à une variété projective homogène déployée quelconque.

Les opérations de Steenrod opèrent de la manière suivante sur les images de h et des l_i dans les groupes de Chow modulo 2 :

$$\begin{aligned} S(h^i) &= h^i(1+h)^i \qquad (i \geqslant 0) \\ S(l_{d-i}) &= l_{d-i}(1+h)^{i+1} \quad (i \geqslant d/2). \end{aligned} \tag{10.13}$$

(La première formule se réduit au cas $i = 1$ par la propriété (1) du § 10.7 ; elle est alors évidente compte tenu de (3) et (4). Quant à la deuxième formule, elle est démontrée par exemple par Karpenko dans [37, cor. 3.3] au moyen de la formule de Wu (10.9). Noter également que $h^i = 0$ pour $i > d/2$ d'après les relations (10.11), de sorte que la contradiction entre les deux formules pour $i = d/2$ quand d est pair n'est qu'apparente !)

11. FORMES QUADRATIQUES ET MOTIFS : THÉORIES DE ROST ET DE VISHIK

Dans cette section, nous exposons les résultats de Rost et Vishik sur la structure du motif d'une quadrique. Ils reposent sur le théorème de nilpotence de Rost (théorème 10.10), que Rost a démontré pour calculer le motif d'une quadrique de Pfister (théorème 11.14). Ce calcul a ensuite été vastement généralisé par Vishik dans sa thèse [61]. Vishik y travaille apparemment dans la catégorie $DM_-^{\mathrm{eff}}(F)$ des motifs triangulés de Voevodsky, mais l'article [63], sur lequel nous nous reposons, clarifie les choses et montre que tout se passe en fait dans la catégorie des motifs purs et résulte de calculs remarquablement élémentaires (à l'exception d'un résultat, le théorème 11.31 qui utilise les opérations de Steenrod motiviques).

11.1. Facteurs directs du motif d'une quadrique, d'après Vishik

Soit X une quadrique anisotrope de dimension d. Notons

– $h(X)$ son motif dans $\mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{hmg}}$;
– $h(X, \mathbf{F}_2)$ son motif dans $\mathrm{Mot}(F, \mathbf{F}_2)_{\mathrm{hmg}}$;
– $h_{\mathrm{hom}}(X)$ son motif dans $\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F)_{\mathrm{hmg}}$;
– $h_{\mathrm{hom}}(X, \mathbf{F}_2)$ son motif dans $\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F, \mathbf{F}_2)_{\mathrm{hmg}}$.

On notera aussi $\overline{X} = X \times_F \overline{F}$ et on ne distinguera pas $h(\overline{X})$ et $h_{\mathrm{hom}}(\overline{X})$, ni $h(\overline{X}, \mathbf{F}_2)$ et $h_{\mathrm{hom}}(\overline{X}, \mathbf{F}_2)$.

D'après le corollaire 10.14, les facteurs directs de $h(X)$ (resp. de $h(X, \mathbf{F}_2)$) sont en correspondance bijective, à isomorphisme près, avec ceux de $h_{\mathrm{hom}}(X)$ (resp. de $h_{\mathrm{hom}}(X, \mathbf{F}_2)$). Vishik démontre de plus que les facteurs directs de $h_{\mathrm{hom}}(X)$ et de $h_{\mathrm{hom}}(X, \mathbf{F}_2)$ sont aussi en correspondance bijective. Son raisonnement pour relever des projecteurs modulo 2 en des projecteurs entiers est assez délicat dans le cas où d est pair : nous en donnons l'essentiel en 11.1.2. En réalité, toutes les applications aux formes quadratiques utilisent les groupes de Chow modulo 2 : la distinction entre le cas entier et le cas modulo 2 n'a donc pas une grande importance en pratique.

11.1.1. Le cas de dimension impaire. — Si d est impair, la situation est relativement simple : pour tout $i \in [0, d]$, la correspondance $2\pi_i$ (*cf.* (10.12)) est rationnelle sur F, représentée par le cycle $h^{d-i} \times h^i$. En particulier, $\mathrm{End}(h_{\mathrm{hom}}(X)) = \mathrm{Im}(\mathrm{End}(h(X)) \to \mathrm{End}(h(\overline{X})))$ contient $2\,\mathrm{End}(h(\overline{X}))$. Pour comprendre cette image on peut donc réduire modulo 2 ; d'après (10.5), on a un isomorphisme d'anneaux

$$\mathrm{End}(h(\overline{X}, \mathbf{F}_2)) \simeq \prod_{i=0}^{d} \mathbf{F}_2.$$

L'image $\mathrm{End}(h_{\mathrm{hom}}(X, \mathbf{F}_2))$ de $\mathrm{End}(h_{\mathrm{hom}}(X))$ dans cet anneau correspond donc à une *partition* P *de* $\{0, \ldots, d\}$, et tout idempotent de $\mathrm{End}(h_{\mathrm{hom}}(X, \mathbf{F}_2))$ se relève en un idempotent de $\mathrm{End}(h_{\mathrm{hom}}(X))$, unique puisque cette algèbre est commutative.

Explicitement, soit I une partie de $\{0, \ldots, d\}$ telle que la correspondance $\pi_I := \sum_{i \in I} \pi_i$ soit définie sur F : alors les I minimaux forment la partition en question. En appliquant le corollaire 10.14, on obtient que les $(\pi_I)_{I \in P}$ se relèvent en des projecteurs orthogonaux $\widetilde{\pi}_I$ de somme 1 dans $\mathrm{End}(h(X))$, de manière unique à conjugaison près. En particulier, les $\widetilde{\pi}_I$ définissent une décomposition

$$h(X) \simeq \bigoplus_{I \in P} N(I)$$

en somme directe de motifs indécomposables, unique à isomorphisme près. On a

$$N(I)_{\overline{F}} \simeq \bigoplus_{i \in I} L^{\otimes i}.$$

Vishik note $N \mapsto \Lambda(N)$ la bijection inverse de $I \mapsto N(I)$: il appelle $\Lambda(N)$ le *support* du facteur direct indécomposable N.

Énonçons une partie de ce qui précède :

Proposition 11.1. — *Supposons d impair. Alors l'algèbre* $\mathrm{End}(h_{\mathrm{hom}}(X,\mathbf{F}_2))$ *est commutative et semi-simple. En particulier,*

(i) *Tout facteur direct indécomposable de* $h_{\mathrm{hom}}(X,\mathbf{F}_2)$ *apparaît avec multiplicité* 1.

(ii) *Si N, N' sont deux facteurs directs indécomposables non isomorphes de* $h_{\mathrm{hom}}(X,\mathbf{F}_2)$*, on a* $\mathrm{Hom}(N,N')=0$. □

11.1.2. Le cas de dimension paire. — Le premier résultat difficile de Vishik est que la description précédente s'étend (essentiellement) au cas pair.

Théorème 11.2. — *Soit X une quadrique non hyperbolique de dimension paire d. Alors*

(a) *Le radical de* $\mathrm{End}(h_{\mathrm{hom}}(X,\mathbf{F}_2))$ *est engendré par $\theta := 1-\tau$, où τ est* (*le graphe d'*)*une réflexion quelconque.*

(b) *L'algèbre quotient est commutative.*

(c) *Tout système d'idempotents orthogonaux de somme* 1 *de* $\mathrm{End}(h_{\mathrm{hom}}(X,\mathbf{F}_2))$ *se relève dans* $\mathrm{End}(h_{\mathrm{hom}}(X))$*, de manière unique à conjugaison près.*

En particulier, tout facteur direct indécomposable de $h(X)$ apparaît avec multiplicité 1.

Ce théorème est (essentiellement) le contenu de [63, Sublemma 5.11]. Voici une démonstration de (a) et (b) : d'après (10.5), $\mathrm{End}(h(X))$ est une sous-algèbre de

$$\prod_{i=0}^{d}\mathrm{End}(\mathrm{CH}^i(\overline{X})/2)=\prod_{i\neq d/2}\mathbf{F}_2\times M_2(\mathbf{F}_2).$$

L'image de θ dans cette algèbre est nulle dans chaque facteur $\mathbf{F}_2$, et vaut $\overline{\theta}=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$ dans $M_2(\mathbf{F}_2)$ (lemme 10.17).

Comme X n'est pas hyperbolique, tous les éléments de $\mathrm{CH}^{d/2}(X)/2$ sont de degré pair (*cf.* remarques suivant (10.7)). En particulier, pour tout $\psi\in\mathrm{End}(h(X))$, $\psi(h^{d/2})$ est de degré pair ; autrement dit, si $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ est l'image de ψ dans $M_2(\mathbf{F}_2)$, on a $a+b+c+d=0$. Notons A la sous-algèbre de $M_2(\mathbf{F}_2)$ définie par cette condition.

Lemme 11.3 (Vishik). — *Pour $x\in A$, soit x, soit $x+\overline{\theta}$ est idempotent.* □

Ce lemme entraîne que soit ψ, soit $\psi+\theta$ est idempotent. Pour conclure la preuve de (a) et (b), il suffit de montrer que θ est dans le radical de $\mathrm{End}(h(X))$: mais il est clair que $\overline{\theta}$ est de carré nul et que son produit avec toute matrice de A est un multiple de θ.

Quant à (c), il n'apparaît pas sous cette forme dans [63], mais voici une manière de le déduire des calculs qui y sont faits. Tout d'abord, l'énoncé de (c) est vrai pour l'homomorphisme $\mathrm{End}(h(\overline{X})) \to \mathrm{End}(h(\overline{X}, \mathbf{F}_2))$ (vérification facile) ; ceci implique (c) au cas ou l'on a

$$(11.1) \qquad 2\,\mathrm{End}(h(\overline{X})) \subset \mathrm{End}(h_{\mathrm{hom}}(X)).$$

LEMME 11.4. — (11.1) *est vrai dans les cas suivants :*

(i) $\mathrm{End}(h_{\mathrm{hom}}(X))$ *contient un élément* ψ *tel que* $\mathrm{tr}(\psi \mid \mathrm{CH}^{d/2}(\overline{X}))$ *soit impair.*

(ii) *Le groupe de Galois absolu* G_F *opère non trivialement sur* $\mathrm{CH}^*(\overline{X})$ (*c'est-à-dire sur* $\mathrm{CH}^{d/2}(\overline{X})$).

Démonstration. — (i) est [63, sublemma 5.7] : nous renvoyons à *loc. cit.* pour la démonstration, très technique. (ii) Si l'action de G_F n'est pas triviale, G_F permute l^1 et l^2, donc opère comme $O(q)$; alors $\mathrm{End}_{G_F}(\mathrm{CH}^{d/2}(\overline{X})) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\theta$ et (11.1) est vérifié. □

Déduisons-en (c) : le cas intéressant est celui où la condition du lemme 11.4 n'est pas vérifiée. Soit $\varepsilon \in \mathrm{End}(h_{\mathrm{hom}}(X, \mathbf{F}_2))$ un idempotent. L'hypothèse implique que la trace de ε opérant sur $\mathrm{CH}^{d/2}(\overline{X})/2$ est égale à 0. Donc ε opère sur ce groupe comme 0 ou l'identité. Quitte à le remplacer par $1-\varepsilon$, on peut supposer qu'il opère trivialement. Or X est déployée par une extension multiquadratique de F : il existe donc un entier s tel que $2^s\,\mathrm{End}(h(\overline{X}))^{G_F} = 2^s\,\mathrm{End}(h(\overline{X})) \subset \mathrm{End}(h_{\mathrm{hom}}(X))$.

Soit A_s l'image de $\mathrm{End}(h_{\mathrm{hom}}(X))$ dans $\mathrm{End}(h(\overline{X}))/2^s$. Comme le noyau de $A_s \to \mathrm{End}(h_{\mathrm{hom}}(X, \mathbf{F}_2))$ est nilpotent, ε se relève en un idempotent $\varepsilon_s \in A_s$, dont l'action sur $\mathrm{CH}^{d/2}(\overline{X})/2^s$ est nécessairement triviale. Par conséquent, l'image de ε_s dans $\mathrm{End}(h(\overline{X}))/2^s$ se relève en un idempotent ε de $\mathrm{End}(h(\overline{X}))$, et on a automatiquement $\varepsilon \in \mathrm{End}(h_{\mathrm{hom}}(X))$. □

Pour compléter cette description, il faut encore étudier les homomorphismes entre facteurs directs indécomposables. Notons $\pi^1_{d/2}$ et $\pi^2_{d/2}$ les deux idempotents de A de somme 1 (voir la définition de A juste avant le lemme 11.3)

$$\pi^1_{d/2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \pi^2_{d/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\pi^1_{d/2}\overline{\theta} = 0, \quad \pi^2_{d/2}\overline{\theta} = \overline{\theta}, \quad \overline{\theta}\pi^1_{d/2} = \overline{\theta}, \quad \overline{\theta}\pi^2_{d/2} = 0.$$

Deux cas se présentent donc :

PROPOSITION 11.5

(a) *Supposons que, dans* $\mathrm{End}(h(X))/\langle\theta\rangle$, *un idempotent indécomposable* ε *contienne* $\pi^1_{d/2} + \pi^2_{d/2}$. *Alors, si* N_ε *est le facteur direct correspondant de* $h(X)$, *on a* $\mathrm{End}(N_\varepsilon) = \mathbf{F}_2 \oplus \mathbf{F}_2\varepsilon\theta\varepsilon$. *Pour tout autre facteur direct indécomposable* N, *on a* $\mathrm{End}(N) = \mathbf{F}_2$, *et* $\mathrm{Hom}(N, N') = 0$ *si* N *et* N' *sont deux facteurs directs indécomposables non isomorphes.*

(b) *Supposons que, dans* $\mathrm{End}(h(X))/\langle\theta\rangle$, *un idempotent indécomposable* ε_1 *contienne* $\pi^1_{d/2}$ *et qu'un autre idempotent indécomposable* ε_2 *contienne* $\pi^2_{d/2}$. *Soient* N_1 *et* N_2 *les facteurs directs de* $h(X)$ *correspondants. Alors, pour tout facteur direct indécomposable* N *de* $h(X)$, *on a* $\mathrm{End}(N) = \mathbf{F}_2$. *Si* N, N' *sont deux facteurs directs indécomposables non isomorphes, on a* $\mathrm{Hom}(N, N') = 0$, *sauf si* $(N, N') = (N_1, N_2)$ *auquel cas* $\mathrm{Hom}(N_1, N_2) = \pi^2_{d/2}\theta\pi^1_{d/2}\mathbf{F}_2 \neq 0$. □

Remarque 11.6. — Comme me l'a fait observer Vishik, il est facile de donner un exemple de deux facteurs directs indécomposables M, N de motifs de quadriques (différentes) tels que $\dim \mathrm{Hom}(M, N) \geqslant 3$ dans $\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F, \mathbf{F}_2)_{\mathrm{hmg}}$: prenons une forme quadratique q de dimension $d + 2$ avec $d \geqslant 5$, de quadrique associée X, telle que $N = h_{\mathrm{hom}}(X, \mathbf{F}_2)$ soit indécomposable (par exemple q générique). On voit facilement que $\mathrm{Im}(\mathrm{CH}^2(X \times X) \to \mathrm{CH}^2(\overline{X} \times \overline{X})/2$ a pour base $(h^2 \times 1, h \times h, 1 \times h^2)$ où h est une section hyperplane. Mais

$$\mathrm{Hom}(N(d-2), N) = \mathrm{Hom}(N(d-2), N^\vee(d)) = \mathrm{Hom}(N \otimes N, L^2)$$

est égal à ce groupe. (Noter que $N(d-2)$ est facteur direct de $h(Y)$, où Y est la quadrique définie par $q \perp (d-2)\mathbb{H}$, *cf.* (10.8).)

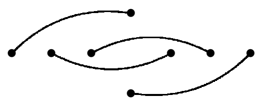
11.1.3. Les diagrammes de Vishik. — On a vu en 11.1.1 que, si la dimension d de la quadrique X est impaire, les facteurs directs indécomposables de $h(X)$ sont en bijection avec une certaine partition de l'ensemble des motifs de Tate intervenant dans $H(h(X))$, qui peut être identifié à $\{0, \dots, d\}$. Lorsque d est pair, le même énoncé est vrai d'après 11.1.2, mais on ne peut plus identifier cet ensemble à un ensemble d'entiers puisque $L^{d/2}$ intervient avec multiplicité 2. En fait, comme le remarque Vishik, ces deux facteurs sont dissymétriques. Plus précisément, il fait le choix suivant :

$$\pi^{up} = l^1 \times (l^1 + l^2)$$
$$\pi_{lo} = \pi_{d/2} - \pi^{up} \qquad (\textit{cf.}\ (10.12)).$$

(Ainsi, π^{up} opère comme $\pi^2_{d/2}$ sur $\mathrm{CH}^2(\overline{X})/2$ si $d \equiv 2 \pmod 4$ et comme $\pi^2_{d/2} + \overline{\theta}$ si $d \equiv 0 \pmod 4$.) Il note L^{up} et L_{lo} les deux facteurs directs correspondants : la restriction de $\overline{\deg}_X$ à $\mathrm{CH}_{d/2}(L^{up})$ (*cf.* 11.1.4) est nulle tandis que sa restriction à $\mathrm{CH}_{d/2}(L_{lo})$ est non nulle. Il note $\Lambda(X)$ l'ensemble de ces motifs de Tate : ainsi, pour tout facteur direct M de $h(X)$, on peut identifier l'ensemble $\Lambda(M)$ des motifs de Tate intervenant dans $H(X)$ à un sous-ensemble de $\Lambda(X)$, et M est déterminé par $\Lambda(M)$ à isomorphisme près. Énonçons ceci explicitement, pour référence ultérieure :

Proposition 11.7. — *Soient* N, N' *deux facteurs directs du motif d'une même quadrique. Si* $\Lambda(N) \cap \Lambda(N') \neq \varnothing$, *alors* $N \simeq N'$.

Pour représenter la décomposition de $h(X)$ en facteurs directs indécomposables, Vishik dessine des diagrammes fondés sur cette description. Ainsi, voici un diagramme représentant la décomposition motivique d'une quadrique définie par une 3-forme de Pfister :



11.1.4. Le caractère de Vishik. — Vishik a introduit un critère très pratique pour démontrer un isomorphisme entre motifs indécomposables :

DÉFINITION 11.8. — *Soit X une quadrique. On note $\overline{\deg}_X$ l'homomorphisme*

$$\overline{\deg}_X : \mathrm{CH}_*(\overline{X})/2 \longrightarrow \mathbf{F}_2$$

prenant la valeur 1 *sur tous les générateurs apparaissant dans* (10.10). *C'est le* caractère de Vishik.

On a le lemme trivial suivant :

LEMME 11.9. — *Si* $\dim X$ *est paire,* $\overline{\deg}_X \circ\theta = 0$*, où* θ *est comme dans le théorème* 11.2.

On en déduit :

THÉORÈME 11.10 ([63, th. 3.8]). — *Soient X_1, X_2 deux quadriques et a_1, a_2 deux entiers $\geqslant 0$. Soient $\alpha : h(X_1)(a_1) \to h(X_2)(a_2)$ et $\beta : h(X_2)(a_2) \to h(X_1)(a_1)$ deux morphismes de* $\mathrm{Mot}(F, \mathbf{F}_2)$*, et soit $r \geqslant 0$ tels que $(\overline{\deg}_{X_1} \circ\beta\circ\alpha)_{|\,\mathrm{CH}_r(\overline{X}_1)/2} \neq 0$. Alors il existe des facteurs directs indécomposables N_1 et N_2 de $h(X_1)(a_1)$ et $h(X_2)(a_2)$, isomorphes, tels que $L^r \in \Lambda(N_1)$ et $L^r \in \Lambda(N_2)$.*

Démonstration. — Tout d'abord, on peut se ramener à $a_1 = a_2 = 0$ en remplacant X_1 et X_2 par X_1' et X_2', où X_i' est d'équation $a_i\mathbb{H} \perp q_i$ si X_i est d'équation q_i (*cf.* (10.8)). Choisissons maintenant des décompositions en somme de facteurs directs indécomposables

$$h(X_1) \simeq \bigoplus_{s\in S} N_s^1, \qquad h(X_2) \simeq \bigoplus_{t\in T} N_t^2.$$

Travaillons dans $\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(F, \mathbf{F}_2)_{\mathrm{hmg}}$. Sur les décompositions ci-dessus, les morphismes $\Pi(\alpha)$ et $\Pi(\beta)$ ont des écritures matricielles (α_{st}) et (β_{ts}) (voir (10.6) pour se rappeler la définition des foncteurs H et Π). De même, $\Pi(\beta\circ\alpha)$ a une écriture matricielle $((\beta\circ\alpha)_{ss'})$. De plus, la proposition 11.5 implique que, modulo θ si $\dim X$ est paire, cette matrice est diagonale. L'hypothèse et le lemme 11.9 impliquent donc qu'il existe s_0 tel que

$$(\beta\circ\alpha)_{s_0s_0} = \sum_{t\in T} \beta_{ts_0}\alpha_{s_0t} \equiv 1 \pmod{\langle\theta\rangle}.$$

Par conséquent, il existe aussi un t_0 tel que $\beta_{t_0s_0}\alpha_{s_0t_0} \equiv 1 \pmod{\langle\theta\rangle}$. Soient $N_1 = N_{s_0}^1$ et $N_2 = N_{t_0}^2$: le corollaire 10.15 (b) implique que $N_1 \simeq N_2$. De plus, l'hypothèse implique immédiatement que $L^r \in \Lambda(N_1)$ et $L^r \in \Lambda(N_2)$. ☐

11.2. Premières applications

DÉFINITION 11.11. — *Pour toute quadrique anisotrope X, on note $N_0(X)$ l'unique facteur direct indécomposable de $h(X)$ tel que $\mathbf{1} \in \Lambda(N_0(X))$: c'est le* motif initial *de X.*

THÉORÈME 11.12. — *Soient X, Y deux quadriques anisotropes. Alors $X \approx Y \Leftrightarrow N_0(X) \simeq N_0(Y)$.*

L'implication $\Rightarrow$ est le corollaire 3.9 de [63]. Voici la démonstration de Vishik : choisissons un point rationnel $p \in Y(F(X))$ et un point rationnel $q \in X(F(Y))$. Alors p et q correspondent à des appplications rationnelles $p : X \rightsquigarrow Y$ et $q : Y \rightsquigarrow X$. Soient $\alpha : h(X) \to h(Y)$ et $\beta : h(Y) \to h(X)$ les correspondances données respectivement par (l'adhérence du) graphe de p et de q. Il est immédiat que la condition du théorème 11.10 est vérifiée avec $r = 0$.

Je n'ai pas trouvé l'implication $\Leftarrow$ dans [63], mais sa démonstration est facile : soit $\varphi : N_0(X) \to N_0(Y)$ un isomorphisme. Il induit un morphisme

$$h(X) \longrightarrow N_0(X) \xrightarrow{\varphi} N_0(Y) \longrightarrow h(Y)$$

qui induit évidemment un isomorphisme $\mathrm{CH}_0(\overline{X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{CH}_0(\overline{Y})$. Par le théorème 3.2, tout point rationnel de X (sur une extension de F) fournit un point rationnel de Y, donc $X \preccurlyeq Y$, et de même $Y \preccurlyeq X$. $\square$

THÉORÈME 11.13. — *Soit X une quadrique anisotrope. Alors $h(X)$ contient*

$$\bigoplus_{i=0}^{i_1(X)-1} N_0(X)(i)$$

en facteur direct (cf. la définition 6.1 *pour se rappeler la définition de $i_1(X)$).*

C'est le corollaire 3.10 de [63]. Vishik le démontre ainsi : comme les $N_0(X)(i)$ sont visiblement deux à deux non isomorphes, il suffit de montrer que chacun est facteur direct de $h(X)$. Fixons $i < i_1(X)$. Dans $X_{F(X)}$, choisissons un sous-espace projectif L de dimension i. Son adhérence dans $X \times X$ définit une correspondance $\alpha : h(X)(i) \to h(X)$. D'autre part, considérons une section plane de codimension i de X, et plongeons-la diagonalement dans $X \times X$: cela définit une correspondance $\beta : h(X) \to h(X)(i)$. Il est alors facile de voir que la condition du théorème 11.10 est vérifiée avec $r = i$.

11.3. Le motif de Rost

THÉORÈME 11.14. — *Soit φ une n-forme de Pfister anisotrope, et soit $X = X_\varphi$ la quadrique associée. Alors il existe un unique motif $M = M_\varphi$ tel que*

(i) $M_{\overline{F}} \simeq \mathbf{1} \oplus L^{\otimes(2^{n-1}-1)}$;
(ii) $h(X) \simeq \bigoplus_{i=0}^{2^{n-1}-1} M(i)$.

Ce théorème est dû à Rost [53]. Le motif M_φ est appelé le *motif de Rost* associé à φ : il joue un rôle clé dans la démonstration par Voevodsky de la conjecture de Milnor (*cf.* [30, § 8.1]).

Voici comment Vishik le déduit du théorème 11.13 : nous allons voir que $M_\varphi = N_0(X_\varphi)$. Partons de ce dernier motif (noté N pour simplifier). Comme $i_1(X_\varphi) = 2^{n-1}$, $h(X_\varphi)$ contient

$$M = \bigoplus_{i=0}^{2^{n-1}-1} N(i)$$

en facteur direct. D'autre part, le lemme 10.5 implique que $H(N)$ contient au moins deux motifs de Tate. En comptant, on voit successivement que

– le nombre de motifs de Tate intervenant dans M est $\geqslant$ au nombre de motifs de Tate intervenant dans $h(X)$;

– $M = h(X)$;

– $H(N)$ contient exactement deux motifs de Tate ;

– le motif de Tate $\neq \mathbf{1}$ intervenant dans $H(N)$ est nécessairement $L^{2^{n-1}-1}$. □

On a le complément suivant :

Lemme 11.15. — *Posons $d = 2^n - 2 = \dim X$. Alors le facteur $L^{d/2}$ contenu dans $\Lambda(M_\varphi)$ est L^{up}.*

C'est le point clé du contenu de [63, § 5.7] (démonstration de la proposition 4.8). Le raisonnement de Vishik est le suivant : $\Lambda(M_\varphi(d/2))$ contient L^d, donc $\mathrm{CH}_d(H(M_\varphi(d/2))) = \mathrm{CH}_d(\overline{X}) = \mathrm{CH}^0(\overline{X})$, dont le générateur est évidemment défini sur le corps de base. Il en est donc de même pour le générateur de $\mathrm{CH}_{d/2}(H(M_\varphi)) = \mathrm{CH}_d(H(M_\varphi(d/2)))$. Comme X n'est pas hyperbolique, ce générateur est nécessairement $h^{d/2}$, et donc $\overline{\deg}_X(\mathrm{CH}_{d/2}(H(M_\varphi))) = 0$.

Avant d'énoncer un corollaire, donnons une définition :

Définition 11.16. — *Soit N un facteur direct de $h(X)$. On note :*

– *$a(N)$ le plus petit entier a tel que $L^a \in \Lambda(N)$.*

– *$b(N)$ le plus grand entier b tel que $L^b \in \Lambda(N)$.*

– *$t(N) = b(N) - a(N)$ (c'est la* taille *de N).*

Corollaire 11.17. — *Soit X une quadrique anisotrope de dimension d. Soit $a < i_1(X)$, et soit N un facteur direct indécomposable de $h(X)$ tel que $L^a \in \Lambda(N)$. Si $a < d/2$, on a $N \simeq N_0(X)(a)$. Si $a = d/2$, on a $N \simeq N_0(X)(a)$ ou $N \simeq N_0(X)$ selon que $L^a = L_{lo}$ ou que $L^a = L^{up}$.*

Cet énoncé recouvre le contenu de [63, § 5.7]. Pour le démontrer, rappelons que $N_0(X)(a)$ est facteur direct de $h(X)$ d'après le théorème 11.13. Si $a < d/2$, $\Lambda(N) \cap \Lambda(N_0(X)(a)) \neq \varnothing$, d'où l'assertion. Supposons maintenant $a = d/2$. Alors $d/2 < i_1(X)$, donc d'après la proposition 6.6, X est définie par une forme de Pfister. D'après le théorème 11.14, $h(X)$ contient exactement deux motifs indécomposables N' tels que $L^{d/2} \in \Lambda(N')$, à savoir $N' = N_0(X)$ et $N' = N_0(X)(d/2)$. L'énoncé résulte donc du lemme 11.15.

11.4. La taille du motif initial

THÉORÈME 11.18. — *Soit X une quadrique anisotrope. Alors :*

(a) $t(N_0(X)) = \dim_{\mathrm{es}}(X)$.

(b) $N_0(X) \simeq N_0(X)^\vee(\dim_{\mathrm{es}}(X))$.

La première partie de ce théorème est le corollaire 4.7 de [63] ; la deuxième partie est un cas particulier du théorème 4.19 de *loc. cit.* La démonstration se fait en deux étapes :

(1) Le cas $i_1(X) = 1$.

(2) Réduction au cas (1).

Pour l'étape (1), nous proposons la démonstration suivante, différente de celle de Vishik : posons $N = N_0(X)$ et $K = F(X)$. D'après (10.7), on a

$$h(X)_K \simeq \mathbf{1} \oplus h(X_1)(1) \oplus L^d$$

où X_1 est la quadrique anisotrope définie par q_1. On a aussi

$$N_K \simeq \mathbf{1} \oplus N'.$$

D'autre part,

$$\delta(N) = \delta(N_K) = 1 + \delta(N')$$

est pair (lemme 10.5), donc $\delta(N')$ est impair. En réappliquant le lemme 10.5, il en résulte que N' n'est pas facteur direct de $h(X_1)(1)$. Mais alors on a forcément $L^d \in \Lambda(N)$, ce qui démontre (a).

Pour (b), on observe que $N^\vee(d)$ est facteur direct de $h(X)^\vee(d) \simeq h(X)$ et que, d'après (a), $\Lambda(N) \cap \Lambda(N^\vee(d)) \neq \varnothing$ et on conclut par la proposition 11.7.

L'étape (2) est une méthode devenue classique dans le sujet. Il y a plusieurs manières de faire cette réduction : dans [25, dém. du lemme 7.9], Izhboldin utilise une technique générique. Vishik, pour sa part, démontre que X contient une sous-quadrique Y telle que $X \approx Y$ et $i_1(Y) = 1$ [63, sublemma 5.25]. Si $i_1(X) = 1$, il n'y a rien à démontrer. Supposons que $i_1(X) > 1$. Alors toute sous-quadrique Z de codimension 1 est stablement birationnellement équivalente à X (lemme 7.1 (c)) et on s'en tire par récurrence sur $d = \dim X$.

Le théorème 11.12 montre maintenant que $N_0(X) \simeq N_0(Y)$. D'après le théorème 11.13, $N_0(X)(i_1(X) - 1)$ est facteur direct de $h(X)$, ce qui implique a priori que $b = b(N_0(X)) \leqslant \dim_{\mathrm{es}}(X)$. Pour montrer l'inégalité inverse, Vishik observe que le lemme 10.6 implique d'abord que $b > d/2$, puis que $b > d - i_1(X)$ parce que $N_{F(X)}$, et donc $h(X)_{F(X)}$, contient un facteur direct isomorphe à L^b.

Le corollaire 8.4 découle immédiatement des théorèmes 11.12 et 11.18. On déduit aussi du théorème 11.18 le corollaire suivant, dû à Karpenko [35, th. 6.4] :

Corollaire 11.19. — *Soit α une correspondance de X vers elle-même, où X est une quadrique anisotrope telle que $i_1(X) = 1$. Alors $\mu(\alpha) \equiv \mu(\alpha^t) \pmod 2$, où α^t est la correspondance transposée et μ est la multiplicité* (*cf.* 10.6).

Démonstration. — Soit π le projecteur définissant $N_0(X)$: on a $\mu(\pi) = 1$ (*cf.* fin de 10.6). On a donc par 10.6 (2)

$$\mu(\alpha) = \mu(\pi\alpha\pi).$$

Le théorème 11.18 implique en particulier que $\pi = \pi^t$. On a donc

$$(\pi\alpha\pi)^t = \pi\alpha^t\pi.$$

Rappelons que $\mathrm{End}(N_0(X)) = \mathbf{F}_2$ ou $\mathbf{F}_2 \oplus \mathbf{F}_2\theta$, où $\theta = 1 - \tau \in End(h(X))$ est l'élément du théorème 11.2 (proposition 11.5). Soit $A = \mathrm{End}(N_0(X))$ dans le premier cas et $A = \mathrm{End}(N_0(X))/\langle\theta\rangle$ dans le second. Remarquons que $\theta^t = \theta$, donc la transposition induit une involution de $A \simeq \mathbf{F}_2$, et cette involution est nécessairement l'identité. Ainsi

$$(\pi\alpha\pi)^t = \pi\alpha\pi \quad \text{dans } A.$$

D'autre part, $\mu(\theta) = \mu(1) - \mu(\tau_*) = 0$ par 10.6 (4). On obtient donc finalement, modulo 2 :

$$\mu(\alpha) = \mu(\pi\alpha\pi) = \mu((\pi\alpha\pi)^t) = \mu(\pi\alpha^t\pi) = \mu(\alpha^t)$$

comme demandé. □

11.5. Motifs supérieurs

Soit X une quadrique anisotrope de dimension d, d'équation $q = 0$, et soit $(i_1, \ldots, i_h)$ sa suite de déploiement (définition 6.1). Pour $0 \leqslant r \leqslant h$, posons également

$$I_r = \sum_{t=1}^{r} i_t.$$

Ainsi I_r est l'indice de Witt de q_{F_r} (voir encore définition 6.1).

Théorème 11.20. — *Soit $r \in [0, h[$. Supposons qu'il existe un facteur direct indécomposable N de $h(X)$ tel que $a(N) \in [I_r, I_{r+1}[$. Alors :*

(a) *Pour tout $j \in [I_r, I_{r+1}[$, $N(j - a(N))$ est facteur direct de $h(X)$.*
(b) *On a $t(N) = \dim_{\mathrm{es}}(X_r)$.*
(c) *On a $N \simeq N^\vee(2a(N) - \dim_{\mathrm{es}}(X_r))$.*

Ce théorème est équivalent à [63, th. 4.13 et cor. 4.14]. Pour démontrer (a), Vishik distingue deux cas : $j \geqslant a(N)$ et $j \leqslant a(N)$. Dans le premier, la démonstration est analogue à celle du théorème 11.13 ([63, § 5.8] ; il utilise les motifs des grassmanniennes quadratiques du § 6.2). Ensuite, il ramène le deuxième au premier par dualité.

Nous proposons la démonstration suivante de (b), un peu différente de celle de Vishik : dans le cas $r = 0$, c'est déjà connu (théorème 11.13, corollaire 11.17, théorème 11.18). À partir de là, on procède par récurrence sur r de la manière suivante.

Lemme 11.21 (*cf.* [63, sublemma 5.29]). — $b(N) \leqslant d - I_r$.

En effet, supposons le contraire. Alors $a(N^\vee(d)) = d - b(N) < i_r$. Observons que $N^\vee(d)$ est facteur direct (indécomposable) de $h(X)^\vee(d) \simeq h(X)$. Par récurrence, on a

$$t(N) = t(N^\vee(d)) = \dim_{\mathrm{es}}(X_s) = d - I_s + 1$$

pour un $s < r$. Mais alors

$$b(N) = a(N) + d - I_s + 1 \geqslant d + I_r - I_s + 1 > d + 1$$

ce qui est impossible. □

Le lemme 11.21 implique que N_{F_r} est un facteur direct de $h(X_r)(I_r)$. Par conséquent, $N' = N_{F_r}(-I_r)$ est facteur direct de $h(X_r)$, et $a(N') < i_1(X_r)$. Il résulte du corollaire 11.17 que N' contient $N_0(X_r)(a(N'))$ en facteur direct, et d'après le théorème 11.18 que

$$t(N) = t(N') \geqslant \dim_{\mathrm{es}}(X_r).$$

Grâce à la partie (a) du théorème 11.20, on peut supposer que $a(N) = I_{r+1} - 1$. Alors $t(N) \geqslant \dim_{\mathrm{es}}(X_r) \Rightarrow b(N) \geqslant I_{r+1} + \dim(X_r) - i_{r+1} = d - I_r$, donc $b(N) = d - I_r$ grâce au lemme 11.21, d'où (b). Enfin, pour (c), on remarque que $d - b(N) \in [I_r, I_{r+1}[$ et on applique la proposition 11.7.

Corollaire 11.22. — *Pour N comme dans le théorème 11.20, on a $b(N) \geqslant d/2$.*

En effet, on a

$$b(N) = a(N) + t(N) \geqslant I_r + \dim_{\mathrm{es}} X_r = I_r + d - 2I_r - i_{r+1} + 1 = d - I_{r+1} + 1$$

et cet entier est toujours $\geqslant d/2$. □

Le corollaire 11.22 implique par dualité que $a(N) \leqslant d/2$ pour tout facteur direct indécomposable N de $h(X)$: ainsi *le théorème 11.20 décrit tous ces facteurs directs.* En particulier :

Corollaire 11.23 ([63, th. 4.19]). — *Tout facteur direct indécomposable N du motif d'une quadrique est polarisable : il existe un entier r tel que $N^\vee \simeq N(r)$.* □

On en déduit :

Corollaire 11.24. — *Soient N, N' deux facteurs directs indécomposables de motifs de quadriques et soit $f : N \to N'$ un morphisme. Supposons que f_K soit un isomorphisme, où K/F est une extension. Alors f est un isomorphisme.*

Démonstration. — En tenant compte du corollaire 11.23, c'est la même que celle du corollaire 10.15 (c) (on observe d'abord que, nécessairement, $a(N) = a(N')$ et $b(N) = b(N')$). □

Remarque 11.25. — Vishik m'a donné un exemple où, bien que $t(N) = \dim_{\mathrm{es}}(X_r)$ dans le théorème 11.20, N_{F_r} n'est pas isomorphe à un twist de $N_0(X_r)$: il prend une sous-forme q de codimension 1 d'une forme p de dimension 12 telle que $p \in I^3F$. Si X est la quadrique correspondante (de dimension 9), on a $h(X) = N_0(X) \oplus N$ où N est indécomposable (avec $\Lambda(N) = \{L, L^3, L^6, L^8\}$). Mais q_1 est une voisine de Pfister (ce résulat est dû à Izhboldin), donc $N_0(X_1)$ est un motif binaire d'après le théorème 11.14, ce qui montre que N_{F_1} est décomposable. *cf.* [63, p. 77].

11.6. Équivalence motivique

THÉORÈME 11.26. — *Soient q, p deux formes quadratiques, $m, n \geqslant 0$ et X, Y les quadriques associées. Supposons que, pour toute extension K/F, les conditions $i(p_K) > n$ et $i(q_K) > m$ soient équivalentes. Supposons que $h(Y)$ admette un facteur direct indécomposable N tel que $a(N) = n$. Alors $h(X)$ admet $N(m-n)$ comme facteur direct.*

C'est le théorème 4.17 de [63]. Sa preuve est dans [63, § 5.9] : c'est une généralisation de celle de l'implication $\Rightarrow$ dans le théorème 11.12, qui repose également sur le théorème 11.10 et utilise les grassmanniennes quadratiques. En voici deux corollaires :

COROLLAIRE 11.27. — *Soit X une quadrique anisotrope, et soit $r \in [0, h[$ où h est la hauteur de X. On prend les notations de la définition 6.1. Supposons qu'il existe une quadrique anisotrope Y telle que $Y \approx X^{(r+1)}$, où $X^{(r+1)}$ est une grassmannienne quadratique de corps des fonctions équivalent à F_{r+1} (cf. § 6.2). Alors l'hypothèse du théorème* 11.20 *est vérifiée.*

C'est le cas particulier $n = 0$ du théorème 11.26. □

COROLLAIRE 11.28 (Équivalence motivique). — *Soient X, Y deux quadriques anisotropes de la même dimension. Alors $h(X) \simeq h(Y)$ si et seulement si $i(X_K) = i(Y_K)$ pour toute extension K/F.*

C'est l'un des plus beaux résultats de Vishik, le théorème 4.18 de [63]. La nécessité résulte facilement du théorème 11.26 ; pour la suffisance, Vishik remarque simplement que le motif de X (ou celui de Y) « code » les indices de Witt supérieurs (*cf.* lemme 10.6).

Izhboldin a remarqué :

PROPOSITION 11.29 ([24, cor. 2.9]). — *Si dans le corollaire 11.28 la dimension commune de X et Y est impaire, alors ses deux conditions équivalentes équivalent encore à $X \simeq Y$.*

En effet, choisissons deux équations q, q' de X et Y. Quitte à multiplier q' par un scalaire, on peut supposer que $q \perp -q' \in I^2F$ (lemme 4.4). Par hypothèse, le corps $F_1 = F(q)$ est un corps d'isotropie générique commun à q et q'. Par récurrence sur la hauteur commune de q et q', on peut supposer que $q_1 \simeq q'_1$; autrement dit,

$(q \perp -q')_{F_1} \sim 0$. En appliquant le théorème 6.12 de Fitzgerald (ou la version plus faible obtenue plus élémentairement par Izhboldin dans [24, cor. 1.2]), on en déduit que $q \perp -q'$ est soit hyperbolique, soit semblable à une forme de Pfister. Mais le deuxième cas est impossible puisque $\dim q = \dim q'$ est impaire. □

11.7. La taille d'un motif binaire

DÉFINITION 11.30. — *Un motif $N \in \mathrm{Mot}(F)_{\mathrm{tate}}$ est* binaire *si $H(N)$ est de la forme $L^a \oplus L^b$.*

Le théorème suivant est l'un des résultats les plus profonds de Vishik :

THÉORÈME 11.31 ([63, th. 4.20]). — *Soit N un motif binaire, facteur direct du motif d'une quadrique anisotrope X. Alors $t(N)$ est de la forme $2^n - 1$.*

Sa démonstration originelle [61, dém. de Statement 6.1] utilise les opérations de Steenrod motiviques de Voevodsky : elle est reproduite dans [26, th. 6.1]. Plus récemment, Karpenko et Merkurjev ont donné dans [39] une démonstration n'utilisant que les opérations construites par Brosnan (*cf.* 10.7).

Remarque 11.32. — Vishik prouve plus : si $\dim_{\mathrm{es}} X = 2^n - 1$ (cas auquel on peut toujours se ramener), alors $\mathrm{Ker}(H^{n+1}(F, \mathbf{Z}/2) \to H^{n+1}(F(X), \mathbf{Z}/2)) \neq 0$. Karpenko et Merkurjev ne retrouvent pas ce complément. Il est directement lié à la conjecture ci-dessous (*cf.* [31, « conjecture » énoncée après le corollaire 2 de l'introduction] : cette conjecture prédit que le noyau précédent est engendré par un symbole $(a_1, \dots, a_{n+1})$). Pour des compléments là-dessus, nous renvoyons à l'article [26] d'Izhboldin et Vishik.

CONJECTURE 11.33. — *Soit N un facteur direct indécomposable binaire du motif d'une quadrique, de taille $2^n - 1$. Alors il existe une $(n+1)$-forme de Pfister φ telle que N soit de la forme $N_0(X_\varphi)(a)$.*

C'est la conjecture 4.21 de [63], *cf.* aussi [36, conj. 1.6] : elle implique que, si tous les facteurs indécomposables de $h(X)$ sont binaires, la quadrique anisotrope X est définie par une forme excellente. Elle est connue pour $n \leqslant 2$ (facilement) et pour $n = 3$ (Karpenko [36]).

11.8. Compléments sur le motif initial

Soit X une quadrique anisotrope. La proposition 11.7 montre que les termes de $\Lambda(N_0(X))$ contrôlent dans une certaine mesure quels motifs supérieurs interviennent dans le théorème 11.20, et présentent donc une interaction avec la suite de déploiement de X. Vishik a explicité cette observation dans un certain nombre de théorèmes.

Notation 11.34. — Gardons les notations du théorème *11.20*. Soit $r \in]1, h]$. On note

$$\Lambda_r(X) = \{n \in [I_r, I_{r+1}[\mid L^n \in \Lambda(N_0(X))\}.$$

(Vishik emploie le terme *r-th shell* pour désigner l'ensemble $[I_r, I_{r+1}[$.)

Théorème 11.35

(a) *Soit* $r \in]1, h]$. *Si* $i_r < i_1$, *alors* $\Lambda_r(X) = \varnothing$.

(b) *Si* i_2 *n'est pas divisible par* i_1, *alors* $\Lambda_2(X) = \varnothing$.

Théorème 11.36. — *Supposons que* $\Lambda_r(X) = \varnothing$ *pour tout* $r > 0$. *Alors* $N_0(X)$ *est binaire.*

Théorème 11.37. — *Supposons que* $h(X_1) \simeq \bigoplus_{l=0}^{i_2-1} N_0(X_1)(l)$ (*on pourrait dire que* $h(X_1)$ *est* engendré *par* $N_0(X_1)$). *Alors soit* $h(X) \simeq \bigoplus_{l=0}^{i_1-1} N_0(X)(l)$, *soit* $N_0(X)$ *est binaire* (*les deux cas étant possibles simultanément*).

Ce sont respectivement les théorèmes 7.7, 7.8 et 7.9 de [63] : ils se démontrent par des arguments de comptage. Nous renvoyons à [63, § 7] pour les démonstrations, ou laissons au lecteur le plaisir de les reconstituer à partir des résultats exposés précédemment. Nous leur ajoutons :

Théorème 11.38. — *Supposons que, pour* $r \in [1, h]$, *il existe un facteur direct indécomposable* N *de* $h(X)$ *tel que* $a(N) \in [I_r, I_{r+1}[$. *Alors tous les* $N_0(X_r)$ *sont binaires.*

La démonstration est du même tonneau.

À tous ces résultats on peut bien sûr ajouter ceux sur la taille des motifs supérieurs (théorème 11.18) et d'un motif binaire (théorème 11.31). Dans [63, § 7], Vishik utilise ceci en conjonction avec des théorèmes de structure d'autres auteurs pour déterminer toutes les suites de déploiement possibles pour les formes de dimension paire $\leqslant 12$ ou impaire $\leqslant 21$. (Hoffmann [22] avait auparavant traité le cas de toutes les formes de dimension $\leqslant 10$.)

12. QUELQUES DÉMONSTRATIONS

12.1. Démonstration du théorème 8.2

Cette démonstration n'utilise pas les opérations de Steenrod ni la théorie de Vishik ; nous allons la simplifier très légèrement en utilisant cette théorie, ce qui nous permet de considérer le corollaire 8.4 comme connu, *cf.* remarque juste avant le corollaire 11.19, ainsi que ce dernier énoncé. Le corollaire 8.4 montre que l'énoncé du théorème 8.2 est stablement birationnel en X, et la réciproque du lemme 6.5 nous réduit alors au cas où $i_1(X) = 1$, ce que font Karpenko et Merkurjev plus élémentairement. Ils démontrent alors (1) et (2) simultanément par double récurrence sur $n = \dim X + \dim Y$, le cas $n = 0$ étant trivial.

Soit $\alpha \in \mathrm{CH}_d(X \times Y)$ la correspondance donnée par le graphe Z de l'application rationnelle $X \rightsquigarrow Y$ déduite d'un point fermé de $Y_{F(X)}$ de degré impair : alors $\mu(\alpha)$ est impair.

Supposons d'abord $\dim X = \dim Y =: d$ et démontrons (2) : nous allons en fait montrer que $\mu(\alpha^t)$ est impair. Supposons le contraire, et soit $x \in X$ un point de degré 2 : quitte à modifier α par un multiple de $x \times Y$, on peut alors supposer que $\mu(\alpha^t) = 0$. Comme $\deg : \mathrm{CH}_0(X_{F(Y)}) \to \mathbf{Z}$ est injectif (théorème 3.2), cela implique que α provient d'une correspondance $\alpha' \in \mathrm{CH}_d(X \times Y')$ avec Y' un fermé propre de Y, et $\mu(\alpha') = \mu(\alpha)$ est impair. Choisissant un cycle représentant α', on peut supposer ce cycle irréductible et donc aussi Y'. Mais $\dim Y' < \dim Y = \dim X$, ce qui contredit (1) par récurrence sur n.

Cette partie de la démonstration utilise seulement le fait que X est une quadrique, mais pas encore l'hypothèse $i_1(X) = 1$; elle va intervenir maintenant.

Démontrons maintenant (1). Supposons au contraire que $\dim Y < \dim X$. Karpenko et Merkurjev se ramènent d'abord au cas où $Z \to Y$ est surjectif en remplaçant Y par l'image de Z. Leur stratégie est alors la suivante :

(i) Produire une correspondance $\gamma : Y \to X$ de multiplicité impaire.

(ii) À l'aide de α et γ, fabriquer une correspondance $\delta : X \to X$ telle que $\mu(\delta)$ soit impaire mais $\mu(\delta^t) = 0$, ce qui contredira le corollaire 11.19.

Pour (i), ils font intervenir une astuce : quitte à faire une extension transcendante pure, ce qui ne change pas la situation, on peut supposer que X contient une sous-quadrique X' de même dimension que Y et vérifiant encore $i_1(X) = 1$ (cette construction est due à Izhboldin ; nous y avons fait allusion au § 11.4). Si $\iota : X' \to X$ est l'immersion fermée correspondante, ils prennent

$$\gamma = \iota_* \iota^*(\alpha^t)$$

qui est bien de multiplicité impaire grâce à (2), par récurrence.

Pour (ii), comme dans la démonstration de (2) on peut « extraire » de γ une correspondance γ' de support T irréductible, tel que la projection $T \to Y$ soit surjective de degré générique impair. Choisissons maintenant une variété propre S munie de morphismes $S \to T, S \to Z$ génériquement finis, le second étant de degré générique impair (prendre pour S une composante irréductible convenable de $T \times_Y Z$). Les deux projections (passant par Z et par T) $S \to X$ fournissent la correspondance δ cherchée (on a $\mu(\delta^t) = 0$ parce que γ n'est pas dominante).

(Comme ils le remarquent, si Y est lisse il suffit de prendre la composée $\gamma \circ \alpha$; on s'en tire dans le cas général en approximant cette construction, parce que le problème est birationnel.)

12.2. Démonstration du théorème 8.5

Cette démonstration utilise les opérations de Steenrod (plus précisément une opération) et, implicitement, la théorie de Vishik, mais Karpenko exprime sa démonstration en termes de cycles algébriques sans parler de motifs. Nous allons la résumer. Cela donnera une idée de sa démonstration du théorème 8.6, qui est de la même eau mais en plus compliqué.

Karpenko raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une quadrique anisotrope X de dimension d telle que $i_1 := i_1(X) > 2^r$, où $r = v_2(d - i_1 + 2)$. Quitte à prendre une section hyperplane itérée, on peut supposer $i_1 = 2^r + 1$ sans changer $d - i_1$ (réciproque du lemme 6.5). En particulier, on remarque que d est *impair*.

Posons

$$e^i = \begin{cases} h^i & \text{si } i < d/2 \\ l_{d-i} & \text{si } i > d/2 \end{cases}$$

cf. (10.10). Dans $\mathrm{CH}^{d-2^r}(\overline{X} \times \overline{X})/2$, tout cycle α s'écrit

$$\alpha = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i e^i \times e^{d-2^r-i}, \quad \alpha_i \in \mathbf{F}_2.$$

Karpenko exhibe un cycle α, défini sur F, tel que $\alpha_{d-2^r} = 1$: pour cela il prend le même cycle que Vishik dans la démonstration du théorème 11.13, à savoir l'adhérence dans $X \times X$ d'un sous-espace projectif de dimension 2^r de $X_{F(X)}$. Observant que $e^i \times e^{d-2^r-i} = h^i \times h^{d-2^r-i}$ est défini sur F pour $d/2 - 2^r < i < d/2$, il modifie α de façon à assurer $\alpha_i = 0$ pour ces valeurs de i.

Comme $2^r < i_1 \leqslant d/2$, e^{2^r} est défini sur F. Le cycle $\beta = \alpha \cdot (e^0 \times e^{2^r})$ s'écrit $\sum \beta_i e^i \times e^{d-i}$, avec $\beta_i = \alpha_i$ pour $i \in [0, d - 2^r]$: ceci résulte de la normalisation ci-dessus et des formules (10.11). Considérant maintenant β comme une correspondance de X vers lui-même, les théorèmes 11.13 et 11.18 impliquent

$$\beta_i = \beta_{d-i_1+1+i} = \beta_{d-2^r+i} \text{ pour } i \in [0, 2^r]. \tag{12.1}$$

Comme on a évidemment $\beta_i = 0$ pour $i \in [d-2^r+1, d]$, (12.1) implique que $\beta_i = 0$ pour $i \in [1, 2^r]$, et donc que

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{2^r} = 0 \tag{12.2}$$

(remarquer que $2^r \leqslant d - 2^r$).

Karpenko considère maintenant la correspondance de degré 0 $\gamma = S^{2^r}(\alpha)$. Il va obtenir une contradiction en montrant par un calcul que (avec des notations analogues aux précédentes) $\gamma_d = 0$, et par un autre calcul que $\gamma_d = 1$.

Pour le premier calcul, en réappliquant (12.1), il suffit de montrer que $\gamma_{2^r} = 0$: mais cela découle trivialement de (12.2) en appliquant simplement les propriétés (2) (formule de Cartan), (3) (pour $n = 0$) et (4) des opérations de Steenrod (§ 10.7). Pour le second calcul, l'égalité $\alpha_{d-2^r} = 1$ (qui n'a pas encore été utilisée !) implique que $S^{2^r}(e^{d-2^r} \times e^0) = \gamma_d(e^d \times e^0)$, et donc que $S^{2^r}(e^{d-2^r}) = \gamma_d e^d$ ou encore $S^{2^r}(l_{2^r}) = \gamma_d l_0$. Mais en appliquant (10.13), on obtient

$$S^{2^d}(l_{2^r}) = \binom{d - 2^r + 1}{2^r} l_0$$

et $\binom{d - 2^r + 1}{2^r}$ est impair. □

RÉFÉRENCES

[1] Y. André – « Motifs de dimension finie (d'après Kimura, O'Sullivan...) », in *Séminaire Bourbaki (2003/04)*, Astérisque, vol. 299, Société Mathématique de France, Paris, 2005, Exp. 929, p. 115–145.

[2] Y. André & B. Kahn – « Nilpotence, radicaux et structures monoïdales (avec un appendice de P. O'Sullivan) », *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **108** (2002), p. 107–291.

[3] ______, « Erratum : Nilpotence, radicaux et structures monoïdales », *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **113** (2005), p. 125–128.

[4] J.Kr. Arason – « Cohomologische Invarianten quadratischer Formen », *J. Algebra* **36** (1975), p. 448–491.

[5] J.Kr. Arason & M. Knebusch – « Über die Grade quadratischer Formen », *Math. Ann.* **234** (1978), p. 167–192.

[6] J.Kr. Arason & A. Pfister – « Beweis des Krullschen Durchschnittsatzes für den Wittring », *Invent. Math.* **12** (1971), p. 173–176.

[7] P. Balmer – « Witt cohomology, Mayer-Vietoris, Homotopy invariance and the Gersten Conjecture », *K-Theory* **23** (2001), p. 15–30.

[8] P. Balmer & C. Walter – « A Gersten-Witt spectral sequence for regular schemes », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **35** (2002), p. 127–152.

[9] A. Borel – *Linear algebraic groups*, 2e éd., Springer, 1991.

[10] P. Brosnan – « A short proof of Rost nilpotence via refined correspondences », *Doc. Math.* **8** (2003), p. 69–78.

[11] ______, « Steenrod operations in Chow theory », *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), p. 1869–1903.

[12] V. Chernousov, S. Gille & A. Merkurjev – « Motivic decomposition of isotropic projective homogeneous varieties », *Duke Math. J.* **126** (2005), p. 137–159.

[13] C. Chevalley – « Sur les décompositions cellulaires des espaces G/B », in *Algebraic groups and their generalizations : classical methods*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 56 (I), American Mathematical Society, Providence, RI, 1994, p. 1–23.

[14] M. Demazure – « Motifs de variétés algébriques », in *Séminaire Bourbaki (1969/70)*, Lect. Notes in Math., vol. 180, Springer, 1971, Exp. 365, p. 19–38.

[15] L.E. Dickson – « On quadratic forms in a general field », *Bull. Amer. Math. Soc.* **14** (1907), p. 108–115, *Math. papers* IV, Chelsea, 1975, p. 512-519.

[16] D. Edidin & W. Graham – « Equivariant intersection theory », *Invent. Math.* **131** (1998), p. 595–634.

[17] R.W. Fitzgerald – « Function fields of quadratic forms », *Math. Z.* **178** (1981), p. 63–76.

[18] E. Friedlander – « Motivic complexes of Suslin-Voevodsky », in *Séminaire Bourbaki (1996/97)*, Astérisque, vol. 245, Société Mathématique de France, Paris, 1997, Exp. 833, p. 355–378.

[19] W. Fulton – *Intersection theory*, 2e éd., Springer, 1984, 1998.

[20] D.K. Harrison – « A Grothendieck ring of higher degree forms », *J. Algebra* **35** (1975), p. 123–138.

[21] D.W. Hoffmann – « Isotropy of quadratic forms over the function field of a quadric », *Math. Z.* **220** (1995), p. 461–476.

[22] ———, « Splitting patterns and invariants of quadratic forms », *Math. Nachr.* **190** (1998), p. 149–168.

[23] J. Hurrelbrink & U. Rehmann – « Splitting patterns of quadratic forms », *Math. Nachr.* **176** (1995), p. 111–127.

[24] O. Izhboldin – « Motivic equivalence of quadratic forms », *Doc. Math.* **3** (1998), p. 341–351.

[25] ———, « Fields of u-invariant 9 », *Ann. of Math. (2)* **154** (2001), p. 529–587.

[26] O. Izhboldin & A. Vishik – « Quadratic forms with absolutely maximal splitting », in *Quadratic forms and their applications (Dublin, 1999)*, Contemp. Math., vol. 272, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000, p. 103–125.

[27] U. Jannsen – « Motives, numerical equivalence and semi-simplicity », *Invent. Math.* **107** (1992), p. 447–452.

[28] B. Kahn – « The total Stiefel-Whitney class of a regular representation », *J. Algebra* **144** (1991), p. 214–247.

[29] ———, « Formes quadratiques de hauteur et de degré 2 », *Indag. Math.* **7** (1996), p. 47–66.

[30] ———, « La conjecture de Milnor, d'après V. Voevodsky », in *Séminaire Bourbaki (1996/97)*, Astérisque, vol. 245, Société Mathématique de France, Paris, 1997, Exp. 834, p. 379–418.

[31] B. Kahn, M. Rost & R. Sujatha – « Unramified cohomology of quadrics, I », *Amer. J. Math.* **120** (1998), p. 841–891.

[32] N. Karpenko – « A relation between higher Witt indices », *Trans. Amer. Math. Soc.*, à paraître.

[33] ———, « Invariants algébro-géométriques de formes quadratiques », *Algebra i Analiz* **2** (1990), p. 141–162, en russe ; traduction anglaise : *Leningrad Math. J.* **2** (1991), p. 119-138.

[34] ———, « Isotropie d'espaces cellulaires relatifs et de variétés de drapeaux isotropes », *Algebra i Analiz* **12** (2000), p. 3–69, en russe ; traduction anglaise : *St. Petersburg Math. J.* **12** (2001), p. 1-50.

[35] ———, « On the anisotropy of orthogonal involutions », *J. Ramanujan Math. Soc.* **15** (2000), p. 1–22.

[36] ———, « Characterization of minimal Pfister neighbors by Rost projectors », *J. Pure Appl. Algebra* **160** (2001), p. 195–227.

[37] ———, « On the first Witt index of quadratic forms », *Invent. Math.* **153** (2003), p. 455–462.

[38] ———, « Holes in I^n », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **37** (2004), p. 973–1002.

[39] N. Karpenko & A. Merkurjev – « Rost projectors and Steenrod operations », *Doc. Math.* **7** (2002), p. 481–493.

[40] ———, « Essential dimension of quadrics », *Invent. Math.* **153** (2003), p. 361–372.

[41] I. Kersten & U. Rehmann – « Generic splitting of reductive groups », *Tôhoku Math. J.* **46** (1994), p. 35–70.

[42] M. Knebusch – « Specialization of quadratic and symmetric bilinear forms, and a norm theorem », *Acta Arith.* **24** (1973), p. 279–299.

[43] ———, « Generic splitting of quadratic forms, I », *Proc. London Math. Soc. (3)* **33** (1976), p. 65–93.

[44] ———, « Generic splitting of quadratic forms, II », *Proc. London Math. Soc. (3)* **34** (1977), p. 1–31.

[45] T.Y. Lam – *Introduction to quadratic forms over fields*, Graduate Studies in Math., vol. 67, American Mathematical Society, Providence, 2005.

[46] F. Loeser – « Cobordisme de variétés algébriques (d'après M. Levine et F. Morel) », in *Séminaire Bourbaki (2001/02)*, Astérisque, vol. 290, Société Mathématique de France, Paris, 2003, Exp. 901, p. 167–192.

[47] Yu.I. Manin – « Correspondances, motifs et transformations monoïdales », *Mat. Sb.* **77 (119)** (1968), p. 475–507, en russe ; traduction anglaise : *Math. USSR Sbornik.*

[48] F. Morel – « An introduction to $\mathbf{A}^1$-homotopy theory », in *Contemporary Developments in Algebraic K-theory* (M. Karoubi, A. Kuku & C. Pedrini, éds.), ICTP Lect. Notes, vol. 15, 2003, p. 357–441.

[49] F. Morel & V. Voevodsky – « $\mathbf{A}^1$-homotopy theory of schemes », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **90** (2001), p. 45–143.

[50] D. Orlov, A. Vishik & V. Voevodsky – « An exact sequence for $K_*^M/2$ with applications to quadratic forms », prépublication, `www.math.uiuc.edu/K-theory`, 2000.

[51] E. Peyre – « Corps de fonctions de variétés homogènes et cohomologie galoisienne », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **321** (1995), p. 891–896.

[52] A. Pfister – « Multiplikative quadratische Formen », *Arch. Math. (Basel)* **16** (1965), p. 363–370.

[53] M. Rost – « Some new results on the Chow groups of quadrics », prépublication, Regensburg, 1990.

[54] L. Rowen – *Ring theory, I*, Pure and Applied Mathematics, vol. 127, Academic Press, 1988.

[55] W. Scharlau – « On the history of the algebraic theory of quadratic forms », in *Quadratic forms and their applications (Dublin, 1999)*, Contemp. Math., vol. 272, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000, p. 229–259.

[56] J.E. Schneider – « Orthogonal groups of nonsingular forms of higher degree », *J. Algebra* **27** (1973), p. 112–116.

[57] A. Scholl – « Classical motives », in *Motives*, Proc. Symp. Pure Math., vol. 55 (I), American Mathematical Society, Providence, RI, 1994, p. 163–187.

[58] T.A. Springer – « Sur les formes quadratiques d'indice zéro », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **234** (1952), p. 1517–1519.

[59] R.G. Swan – « Zero cycles on quadric hypersurfaces », *Proc. Amer. Math. Soc.* **107** (1989), p. 43–46.

[60] B. Totaro – « The Chow ring of a classifying space », in *Algebraic K-theory (Seattle, 1997)*, Proc. Symp. Pure Math., vol. 67, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, p. 249–281.

[61] A. Vishik – « Integral motives of quadrics », prépublication du Max Planck Institut für Mathematik (Bonn), 1998.

[62] ______, « On dimensions of anisotropic forms in I^n », prépublication du Max Planck Institut für Mathematik (Bonn), 2000.

[63] ______, « Motives of quadrics with applications to the theory of quadratic forms », in *Geometric methods in the algebraic theory of quadratic forms*, Lect. Notes in Math., vol. 1835, Springer, 2004, p. 25–101.

[64] V. Voevodsky – « Cancellation theorem », prépublication, 2000.

[65] ______, « Triangulated categories of motives over a field », in *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, p. 188–238.

[66] ______, « Motivic cohomology with $\mathbf{Z}/2$-coefficients », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **98** (2003), p. 59–104.

[67] ______, « Reduced power operations in motivic cohomology », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **98** (2003), p. 1–57.

[68] A.R. Wadsworth – « Noetherian pairs and function fields of quadratic forms », Ph.D. Thesis, Université de Chicago, 1972.

[69] ______, « Similarity of quadratic forms and isomorphism of their function fields », *Trans. Amer. Math. Soc.* **208** (1975), p. 352–358.

[70] E. Witt – « Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern », *J. reine angew. Math.* **176** (1937), p. 31–44.

Bruno KAHN

Institut de Mathématiques de Jussieu
175–179 rue du Chevaleret
F–75013 Paris
E-mail : `kahn@math.jussieu.fr`