Séminaire BOURBAKI Novembre 2003
56^e année, 2003-2004, n^O 927, p. 59 à 93

DÉVIATIONS DE MOYENNES ERGODIQUES, FLOTS DE TEICHMÜLLER ET COCYCLE DE KONTSEVICH-ZORICH [d'après Forni, Kontsevich, Zorich...]

par **Raphaël KRIKORIAN**

1. INTRODUCTION

Considérons un espace topologique X sur lequel agit un flot ϕ et supposons que μ soit une mesure de probabilité invariante ergodique pour le flot ϕ (c'est-à-dire que les seuls ensembles μ mesurables ϕ-invariants sont de mesure 0 ou 1). On sait d'après le théorème de Birkhoff que pour toute observable μ-intégrable $f : X \to \mathbb{R}$ on a pour μ-presque tout $x \in X$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(\phi^s(x))ds = \int_X f d\mu.$$

En particulier si f est d'intégrale nulle, les moyennes ergodiques précédentes convergent vers 0 et il est naturel d'étudier dans ce cas le comportement asymptotique des intégrales ergodiques $\int_0^t f(\phi^s(x))ds$. Lorsque l'on suppose que le système dynamique est hyperbolique, comme c'est le cas par exemple du flot géodésique sur des surfaces compactes de courbure négative, le comportement des intégrales ergodiques est décrit par le théorème central limite (comme dans le cas de variables aléatoires indépendantes de même loi). Pour des flots non hyperboliques, les situations dans lesquelles on peut espérer énoncer des résultats intéressants sont peu nombreux mais existent. Ainsi, pour mentionner l'exemple le plus simple, le comportement des intégrales ergodiques des flots (linéaires car le cas général s'y ramène) sur des tores est bien compris. Soit ϕ le flot du champ de vecteurs $X = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}$ sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$; supposons que

– (hypothèse sur l'arithmétique) (α, β) vérifie une condition diophantienne de la forme

$$|k\alpha + l\beta| \geqslant \frac{K^{-1}}{(|k| + |l|)^\tau}, \qquad \forall\, (k, l) \in \mathbb{Z}^2 - \{0, 0\}$$

condition qui, dès que $\tau > 1$, est de mesure de Lebesgue positive pour $K > 0$ assez grand et de mesure totale si l'on prend l'union sur tous les K positifs ;

– (hypothèse sur la régularité de f) f soit suffisamment dérivable (par exemple $C^{\tau+2}$).

Dans ce cas il est facile de voir, en utilisant l'analyse de Fourier (bien définie sur le tore!) et la condition diophantienne, que les intégrales ergodiques sont bornées pour toute f régulière et tout $x \in \mathbb{T}^2$. Dans le cas où (α, β) n'est pas diophantien mais seulement irrationnel et f est à variations bornées, les intégrales ergodiques ne sont plus bornées mais admettent une borne de type logarithmique (en fonction de t). Il faut alors utiliser le développement en fractions continues de (α/β) (que l'on suppose irrationnel) et la propriété de Denjoy-Koksma.

Le cas qui nous intéresse ici est celui des flots des champs de vecteurs sur des surfaces de genre plus grand que 2 qui préservent une forme volume et dont les singularités sont de type selle. La dynamique dans ce cas n'est ni hyperbolique (comme c'est le cas du flot géodésique où deux points proches ont tendance à se séparer de façon exponentielle sous l'effet du flot), ni elliptique (comme dans le cas des flots sur le tore où deux points proches le restent sous l'effet de la dynamique) mais plutôt de type parabolique (comme dans le cas du flot horocyclique où deux points proches se séparent à vitesse au plus polynomiale). Ce type de flot intervient naturellement dans l'étude d'au moins deux problèmes importants de dynamique : les billards rationnels et les échanges d'intervalles.

Considérons un billard plan polygonal P dont les angles sont des multiples rationnels de 2π ; on peut réduire la dynamique des points $(x, v) \in P \times \mathbb{R}^2$, v étant de direction fixée, à celle d'un flot sur une surface de genre g obtenue en recollant des copies de la table (qui sont les images du polygone par le groupe engendré par les symétries par rapport à ses côtés). On peut ainsi voir que, pour presque toute direction v, le flot (dans l'espace des configurations) est uniquement ergodique (*cf.* [8] utilisant des résultats antérieurs de Masur [12], Veech [15]) et ceci permet de démontrer qu'il existe un G_δ-dense de billards (non rationnels) uniquement ergodiques (dans l'espace des phases). Je renvoie au séminaire Bourbaki de P. Arnoux [1] pour un exposé très clair de ces travaux.

Un échange d'intervalles sur n intervalles $(I_1, \ldots, I_n)$ qui forment une partition de $[0, 1]$ est déterminé par une paire (l, π) où $l = (|I_1|, \ldots, |I_n|)$ (longueurs des intervalles) et π est une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. On suppose que la permutation est irréductible c'est-à-dire qu'il n'existe pas $k < n$ pour lequel $\pi\{1, \ldots, k\} = \{1, \ldots, k\}$. Notons S_n^0 l'ensemble des permutations irréductibles. L'ensemble des échanges d'intervalles irréductibles est donc paramétré par $\Delta^{n-1} \times S_n^0$ où Δ^{n-1} est le simplexe standard de dimension $n-1$. Une rotation est un cas particulier d'échange d'intervalles où $n = 2$. On peut définir pour les échanges d'intervalles des procédures de *renormalisation* G (*cf.* Rauzy, Veech, Zorich, Marmi-Moussa-Yoccoz...) qui sont des analogues de l'algorithme de Gauss pour les rotations et qui permettent une analyse fine des propriétés ergodiques des échanges d'intervalles. Nous renvoyons le lecteur à [11] pour de plus amples renseignements. L'ensemble des échanges d'intervalles (irréductibles) $\Delta^{n-1} \times S_n^0$ se décompose sous l'action de G en sous-ensembles invariants de la forme $\Delta^{n-1} \times R$ et on appelle les ensembles R ainsi obtenus les classes de Rauzy. Zorich [18] montre qu'une de ces applications de Gauss, l'algorithme de Zorich (qui est une version accélérée de l'algorithme de Rauzy), est ergodique par rapport à une mesure de probabilité μ_R absolument continue sur chaque classe de Rauzy. C'est l'analogue d'un théorème de Veech et Masur ([15], [12]) sur l'ergodicité du flot de Teichmüller sur les composantes connexes de l'espace des modules (*cf.* section 4). Ces liens entre flots et échanges d'intervalles sont en fait naturels : on peut voir un échange d'intervalles comme la dynamique induite par l'application de retour d'un flot sur un intervalle (transverse au flot) d'une surface de genre g. Considérons un échange d'intervalles T sur n intervalles $I_1, \dots, I_n$ et notons,

$$S_i(x, N) = \sum_{k=0}^{N-1} \chi_i(T^k(x)),$$

la N-ième somme ergodique de la fonction caractéristique χ_i de l'intervalle I_i sous l'action de T (on compte le nombre de retours dans I_i entre les temps 0 et N). Formons le vecteur $S(x, N) = (S_1(x, N), \dots, S_n(x, N)) \in \mathbb{R}^n$. Si l'échange d'intervalles est uniquement ergodique (ce qui est une condition de mesure pleine) alors pour tout x

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S(x, N)}{N} = l,$$

Zorich démontre le résultat suivant :

THÉORÈME 1.1 (Zorich [19]). — *Soit R une classe de Rauzy. Il existe $\theta_1 > \theta_2 \geqslant 0$ tels que pour presque tout échange d'intervalle et presque tout x*

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\log |S(x, N) - Nl|}{\log N} = \frac{\theta_2}{\theta_1} < 1.$$

Les réels θ_1, θ_2 sont en fait les deux plus grands exposants de Lyapunov d'un cocycle de matrices défini au-dessus de $\Delta^{n-1} \times R$ (*cf.* section 5.1) introduit par Zorich.

Revenons aux champs de vecteurs sur les surfaces de genre $g \geqslant 2$. Soient M une surface orientable compacte de genre $g \geqslant 2$ et ω une forme volume sur M. Considérons un champ de vecteurs X (on note $\phi_X(\cdot, t)$ son flot) dont les singularités sont de type selle (Σ, ι) où $\Sigma = \{p_1, \dots, p_\sigma\}$ est l'ensemble des singularités du champ X et ι_k, $1 \leqslant k \leqslant \sigma$ est l'indice de X au point p_k. La notion de distribution sur M (au sens de Schwartz et De Rham) a bien un sens ; par ailleurs on peut définir de façon habituelle l'espace de Sobolev $H^1(M)$ et son dual $H^{-1}(M)$. Une distribution $\mathcal{D}$ est dite X-invariante si $X\mathcal{D} = 0$ et d'ordre 1 si elle est dans $H^{-1}(M)$. Nous noterons $\mathcal{I}^1_X(M)$ l'ensemble des distributions X-invariantes et d'ordre 1.

Le résultat que démontre Giovanni Forni est le suivant :

Théorème 1.2 (Forni [5]). — *Pour « presque tout » champ de vecteurs X qui préserve ω et dont les singularités sont de type selle il existe des nombres réels strictement positifs $\lambda'_1(X) > \cdots > \lambda'_s(X)$ et des espaces de distributions $\mathcal{I}^1_X(\lambda'_i)$, $1 \leqslant i \leqslant s$, X-invariantes et d'ordre 1 tels que*

(1) *on ait la décomposition*

$$\mathcal{I}^1_X = \mathcal{I}^1_X(\lambda'_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}^1_X(\lambda'_s),$$

(2) *si $i < s$ et si une observable f à support dans $M - \Sigma$ et dans l'espace de Sobolev $H^1_0(M - \Sigma)$ vérifie*

$$\forall \mathcal{D} \in \mathcal{I}^1_X(\lambda'_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}^1_X(\lambda'_i), \quad \mathcal{D}(f) = 0$$

alors pour presque tout point $p \in M$

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{\log |\int_0^T f(\phi_X(p,\tau))d\tau|}{\log T} \leqslant \lambda'_{i+1};$$

en outre il existe une distribution $\mathcal{D}_{i+1} \in \mathcal{I}_X(\lambda'_{i+1})$ telle que si $\mathcal{D}_{i+1}(f) \neq 0$ alors l'inégalité précédente est une égalité ;

(3) *si $i = s$ et sous les mêmes hypothèses sur f qu'en* (2),

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{\log |\int_0^T f(\phi_X(p,\tau))d\tau|}{\log T} = 0.$$

Le « presque tout » signifie la chose suivante : à tout champ de vecteurs X préservant la forme volume ω on associe la classe de cohomologie $[i_X\omega] \in H^1(M, \Sigma, \mathbb{R})$ (*cf.* section 6.1). Un ensemble de champs de vecteurs préservant ω est négligeable si son image par l'application précédente est de mesure de Lebesgue nulle dans $H^1(M, \Sigma, \mathbb{R})$.

La preuve de ce résultat repose sur l'analyse de deux types de dynamiques différents. Il y a, d'une part, la dynamique du champ de vecteurs X sur la surface M que l'on peut ramener à celle du feuilletage horizontal d'une différentielle quadratique q. D'autre part, il existe des dynamiques de « renormalisation » qui ont pour but d'accélérer la dynamique sur M. Les espaces dans lesquels travaillent ces dynamiques sont des espaces de modules (*cf.* section 2) et pour les comprendre il est important de savoir démontrer que les exposants de Lyapunov de certains cocycles, le cocycle de Kontsevich-Zorich (*cf.* section 3.2) et le cocycle de Forni (*cf.* section 6.3 et section 8) ont des exposants de Lyapunov non nuls (*cf.* section 5 et section 7). Pour cela Forni utilise des outils d'Analyse qu'il a développés dans [4] et que l'on peut voir comme une extension de la théorie de Hodge (section 4).

Remarque. — Il existe des liens importants entre le problème des déviations des moyennes ergodiques pour des flots sur des surfaces de genre supérieur à 2 ou des échanges d'intervalles, et celui de la résolution des équations cohomologiques. Dans le cas des flots, par exemple, il s'agit de résoudre l'équation $\mathcal{L}_X f = g$ où g est une fonction (ou une distribution) donnée ($\mathcal{L}_X$ est la dérivation de Lie). Ces équations n'ont pas toujours de solution, mais on connaît dans certains cas les obstructions. Nous ne parlerons pas de ce sujet dans la suite mais nous renvoyons à l'article fondateur de Forni [4] et mentionnons les résultats nouveaux de Marmi-Moussa-Yoccoz [11] dans le cadre des échanges d'intervalles.

Remerciements. — Je tiens à remercier Giovanni Forni, qui a répondu très patiemment à mes nombreuses questions, pour son aide, Jean-Paul Thouvenot, Stefano Marmi et Jean-Christophe Yoccoz pour leurs commentaires éclairés.

2. LES ESPACES DE MODULES

2.1. L'espace de Teichmüller

L'espace de Teichmüller T_g d'une surface M de genre $g \geqslant 2$ est l'ensemble des structures complexes de M à isotopies près, c'est-à-dire l'ensemble obtenu en décrétant que deux structures complexes sont équivalentes si l'on peut passer de l'une à l'autre par un élément de $\mathrm{Diff}_0(M)$, l'ensemble des difféomorphismes de M isotopes à l'identité. C'est aussi l'ensemble des métriques de courbure -1 à isotopies près. On peut munir T_g d'une distance : si $[C_1]$ et $[C_2]$ sont deux classes de structures conformes, $d([C_1],[C_2])$ est l'infimum sur les $h \in \mathrm{Diff}_0(M)$ des $(1/2)\ln K(h)$, $K(h)$ étant la constante de quasi-conformalité de h (relativement à C_1, C_2). Muni de cette distance, T_g est homéomorphe à la boule ouverte d'un espace euclidien réel de dimension $6g-6$. On peut également munir T_g d'une structure complexe qui en fait un domaine borné d'holomorphie de $\mathbb{C}^{3g-3}$.

2.2. Différentielles quadratiques

Une structure complexe étant choisie sur M, une différentielle quadratique holomorphe q sur M est la donnée, pour chaque carte d'un atlas conforme $(U_i,\zeta_i)_i$, d'une expression $q_i(\zeta_i)d\zeta_i^2$ (q_i holomorphe sur U_i) où l'élément différentiel signifie que sur l'ouvert $U_i \cap U_j$ on a la relation de compatibilité

$$q_j(\zeta_j)\Big(\frac{d\zeta_j}{d\zeta_i}\Big)^2 = q_i(\zeta_i).$$

Le quotient de deux différentielles quadratiques est une fonction méromorphe (qui a donc autant de zéros que de pôles) et par conséquent toutes les différentielles quadratiques ont le même nombre de zéros qui est le double du nombre de zéros d'une 1-forme holomorphe : une différentielle quadratique a donc $4g-4$ zéros (comptés avec multiplicité). L'espace des différentielles quadratiques sur M est un espace vectoriel de dimension (complexe) finie égale à $3g-3$ (Riemann-Roch) si $g \geqslant 2$ et de dimension 1 sur le tore. Chaque différentielle quadratique définit une structure plate sur M avec des singularités (Gauss-Bonnet) aux zéros de q : en un point $x \in M$ où $q(x) \neq 0$

il existe un paramètre local z sur un voisinage U de x où $q = dz^2$ que l'on obtient de la façon suivante : si dans la carte (U, ζ) on a $q = q(\zeta)d\zeta^2$, on pose

$$z(y) = \int_{[x,y]} (q(\zeta))^{1/2} d\zeta.$$

Puisqu'un tel z est invariant modulo des translations et un changement de signe, M a localement une structure plate au voisinage de tout point non singulier. En un point où q admet un zéro d'ordre k on peut trouver un paramètre local pour lequel $q = z^k dz^2$. On peut ainsi définir grâce à q deux objets différentiels importants sur M et un objet de nature plus géométrique (voir pour la partie géométrique la référence qu'est [3]) :

– une métrique plate en dehors des zéros de q que nous noterons R_q : $R_q = (dx^2 + dy^2)^{1/2}$ au voisinage d'un point régulier et $R_q = |z|^{k/2}(dx^2 + dy^2)^{1/2}$ au voisinage d'un zéro d'ordre k ;

– une forme volume $\omega_q = (i/2)h \wedge \overline{h}$ où $h = q^{1/2}$: $\omega_q = dx \wedge dy$ au voisinage d'un point régulier et $\omega_q = |z|^k dx \wedge dy$ au voisinage d'un zéro d'ordre k ;

– une paire de feuilletages mesurés transverses $(\mathcal{F}_q, \mathcal{F}_{-q})$ définis par $\mathcal{F}_q = \{\mathrm{Im}(q^{1/2}) = 0\}$ (le feuilletage horizontal) et $\mathcal{F}_{-q} = \{\mathrm{Re}(q^{1/2}) = 0\}$ (le feuilletage vertical).

Nous noterons Q_g l'ensemble des différentielles quadratiques modulo l'action des difféomorphismes de M *isotopes* à l'identité. Remarquons que Q_g se projette sur T_g (puisqu'une différentielle quadratique « porte » sa propre structure complexe). On peut démontrer que Q_g est naturellement l'espace *co*tangent de T_g (donc de dimension complexe $6g - 6$). En fait nous ne considérerons dans la suite (comme le fait Forni) que des différentielles quadratiques qui sont le carré de différentielles holomorphes (abéliennes) $q = h^2$, $h = h(z)dz$ (ce qui correspond au cas où les feuilletages sont orientables) car ce sont celles qui interviennent en dynamique ; par ailleurs, le cas général s'y ramène. On a alors $h = \alpha + i\beta$ où α, β sont deux 1-formes réelles fermées et transverses (*i.e.* $\alpha \wedge \beta > 0$ sauf en un nombre fini de points). Réciproquement si α, β sont deux 1-formes fermées réelles transverses avec des singularités canoniques (de la forme $\mathrm{Re}(z^k dz) = 0$), il existe une unique structure conforme telle que $\alpha + i\beta$ soit une 1-forme holomorphe (c'est clair en dehors des points où $\alpha \wedge \beta$ s'annule et en ces points on invoque le théorème de Riemann sur les singularités isolées des fonctions holomorphes). Cette remarque permet de faire agir le groupe des difféomorphismes $\mathrm{Diff}^+(M)$ sur l'ensemble des différentielles quadratiques orientables : si $f \in \mathrm{Diff}^+(M)$ et $q = h^2$ avec $h = \alpha + i\beta$, $d\alpha = d\beta = 0$, l'action de f sur q est $f^*q = (f^*\alpha + if^*\beta)^2$.

Afin d'obtenir une paramétrisation plus agréable des points de Q_g, il est nécessaire de se restreindre aux *strates* de Q_g définies de la façon suivante. Fixons $\kappa = (k_1, \ldots, k_\sigma)$ un σ-uplet d'entiers positifs pairs dont la somme vaut $4g-4$ et considérons l'ensemble des différentielles quadratiques qui sont le carré de différentielles holomorphes et dont les zéros distincts ont pour ordre $(k_1, \ldots, k_\sigma)$. Il est possible de voir que ces propriétés sont invariantes par isotopies et on note Q_κ l'ensemble obtenu en quotientant par $\mathrm{Diff}_0(M)$; c'est un sous-ensemble complexe analytique de Q_g de dimension complexe $2g+\sigma-1$ et quand $\sigma = 2g-2$ (on parle alors de la strate principale) de dimension $2g+2g-2-1 = 4g-3 = 3g-3+g$.

2.3. Les espaces de modules

Notons $\Gamma_g = \mathrm{Diff}^+(M)/\mathrm{Diff}_0(M)$ (le « pure mapping class group ») le groupe des difféomorphismes de M préservant l'orientation à isotopies près. Ce groupe agit par pull-back sur T_g, Q_g, Q_κ et on peut définir les espaces de modules de structures complexes et de différentielles quadratiques suivants : $R_g = T_g/\Gamma_g$, $\mathcal{M}_g = Q_g/\Gamma_g$, $\mathcal{M}_\kappa = Q_\kappa/\Gamma_g$. Ce sont des espaces complexes analytiques. Par ailleurs les strates $\mathcal{M}_\kappa$ de $\mathcal{M}_g$ peuvent être munies d'une structure complexe affine dont le modèle est $H^1(M,\Sigma_k,\mathbb{C})$ au moyen de l'application de périodes. Fixons $a_1,\dots a_g, b_1,\dots,b_g$ des générateurs de l'homologie $H_1(M,\mathbb{Z})$ et $\gamma_1,\cdots,\gamma_{\sigma-1}$ des chemins reliant une singularité fixée de q (un point de Σ_q) aux autres singularités de q (les autres points de Σ_q). Localement, deux 1-formes holomorphes $q_1^{1/2}$ et $q_2^{1/2}$ définissent le même point de $H^1(M,\Sigma_\kappa,\mathbb{C})$ si et seulement si elles sont isotopes, ce qui identifie localement Q_κ à $H^1(M,\Sigma_\kappa,\mathbb{C})$. L'intégration de la 1-forme holomorphe $q^{1/2}$ le long des a_i, b_i, γ_i définit un point $(x_1,\dots,x_g,y_1,\dots y_g,t_1,\dots t_{\sigma-1})$ de $\mathbb{C}^{2g+\sigma-1}$ et on peut vérifier que les changements de cartes (obtenus par changement des générateurs (a_i,b_i,γ_i)) sont holomorphes, ce qui munit Q_κ d'une structure affine complexe. Ces changements de cartes préservent par ailleurs le volume, ce qui permet de tirer en arrière la forme $dx_1\wedge d\overline{x}_1\wedge\cdots\wedge dx_g\wedge d\overline{x}_g\wedge dy_1\wedge d\overline{y}_1\wedge\cdots\wedge dy_g\wedge d\overline{y}_g\wedge dt_1\wedge d\overline{t}_1\wedge\cdots\wedge dt_{\sigma-1}\wedge d\overline{t}_{\sigma-1}$ et de définir une mesure absolument continue μ_κ sur Q_κ (normalisée en demandant que la mesure de Lebesgue du tore complexe obtenu en quotientant par le réseau entier $\mathbb{C}\otimes H^1(M_q,\Sigma_q,\mathbb{Z})$ soit égale à 1). Cette mesure se projette sur $\mathcal{M}_\kappa$. Notons qu'à ce niveau il n'est pas clair que la mesure μ_κ soit finie sur $\mathcal{M}_\kappa$. D'autre part, comme cela a été mis en évidence par P. Arnoux et W.A. Veech ces espaces de modules ne sont pas toujours connexes et on devra parfois se restreindre dans la suite à leurs composantes connexes.

Pour terminer la description de ces espaces $\mathcal{M}_\kappa$, notons qu'il existe

– une fonction (la fonction d'aire) $A : \mathcal{M}_\kappa \to [0,\infty)$ définie par

$$A(q) = \int_M \omega_q$$

(c'est bien invariant par l'action de $\mathrm{Diff}^+(M)$)

– une action du groupe $GL_+(2,\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_\kappa$ définie par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(q^{1/2}) \\ \mathrm{Im}(q^{1/2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,\mathrm{Re}(q^{1/2}) + b\,\mathrm{Im}(q^{1/2}) \\ c\,\mathrm{Re}(q^{1/2}) + d\,\mathrm{Im}(q^{1/2}) \end{pmatrix}.$$

Cette action sur Q_κ commute à celle de Γ_g.

3. DYNAMIQUES SUR LES ESPACES DE MODULES

3.1. Le flot de Teichmüller

Par définition c'est l'action du sous-groupe $\mathbb{A}$ de $SL(2,\mathbb{R})$ constitué des matrices diagonales $G_t = \operatorname{diag}(e^t, e^{-t})$ sur l'espace Q_g. Ce flot s'identifie au flot géodésique sur l'espace de Teichmüller : si $\pi(q)$ désigne la structure complexe définie par q, on a $d(\pi(q), \pi(G_t(q))) = t$. Par ailleurs, ce flot laisse invariante chacune des strates Q_κ et la fonction d'aire A. Par conséquent les ensembles $Q_\kappa^{(1)} = Q_\kappa \cap A^{-1}(1)$ sont également invariants par la dynamique du flot de Teichmüller. Puisque l'action de $GL_+(2,\mathbb{R})$ commute à celle du groupe modulaire Γ_g , on peut définir le flot de Teichmüller sur chacun des espaces de modules, $\mathcal{M}_g$, $\mathcal{M}_\kappa$, $\mathcal{M}_g^{(1)} = \mathcal{M}_g \cap A^{-1}(1)$, $\mathcal{M}_\kappa^{(1)} = \mathcal{M}_\kappa \cap A^{-1}(1)$. On notera $\mu_\kappa^{(1)}$ la mesure induite par μ_κ sur les ensembles $\mathcal{M}_g^{(1)}$, $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$.

THÉORÈME 3.1 (Masur [12], Veech [16]). — *Pour chaque strate $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$:*

– *Le volume total de $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ pour la mesure $\mu_\kappa^{(1)}$ est fini.*

– *Le flot de Teichmüller G_t est ergodique sur chaque composante connexe de $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ pour la mesure invariante $\mu_\kappa^{(1)}$ et est non uniformément hyperbolique (Veech).*

3.2. Le cocycle de Kontsevich et Zorich

3.2.1. Première description. — Soit $\mathcal{W}_\kappa \subset \mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ une petite section transverse au flot de Teichmüller et soit $\widetilde{\mathcal{W}}_\kappa$ un représentant de $\mathcal{W}_\kappa$ dans $Q_\kappa^{(1)}$ (l'action de Γ_g est discrète et propre sur $Q_\kappa^{(1)}$ et ses points fixes constituent un ensemble de $\mu_\kappa^{(1)}$-mesure nulle). Pour $\mu_\kappa^{(1)}$-presque tout point q de $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$ (resp. $t \in \mathbb{R}_-$) notons $0 \leqslant t_0 < \cdots < t_r \leqslant t$ (resp. $t \leqslant t_r < \cdots < t_0 \leqslant 0$) les temps tels que $G_{t_i}(q) \in \mathcal{W}_\kappa$. Soit $\widetilde{q} \in Q_\kappa$ un représentant de $q \in \mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ tel que $G_{t_0}(\widetilde{q}) \in \widetilde{\mathcal{W}}_\kappa$ (l'action de Γ_g commute à celle de G_t). Pour chaque $0 \leqslant i \leqslant r-1$, il existe un unique $f_i \in \Gamma_g$ tel que $G_{t_{i+1}}(\widetilde{q}) = f_i^*.G_{t_i}(\widetilde{q})$. L'action de $f_{r-1}^* \circ \cdots \circ f_0^*$ sur $H^1(M,\mathbb{R})$ est symplectique et on l'identifie à une matrice de $Sp(2g,\mathbb{R})$. On pose $G_t^{KZ}(q) = f_{r-1}^* \circ \cdots \circ f_0^*$. On a alors la relation de cocycle

$$G_{t+s}^{KZ}(q) = G_t^{KZ}(G_s(q))G_s^{KZ}(q).$$

On a ainsi une action de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{M}_\kappa^{(1)} \times H^1(M,\mathbb{R})$: pour $(q,v) \in \mathcal{M}_\kappa^{(1)} \times H^1(M,\mathbb{R})$

$$t \cdot (q,v) = (G_t(q), G_t^{KZ}(q) \cdot v).$$

Le cocycle $G^{KZ} : \mathbb{R} \times \mathcal{M}_\kappa^{(1)} \to Sp(2g,\mathbb{R})$ est (une version) du cocycle de Kontsevich-Zorich. Kontsevich et Zorich donnent une définition intrinsèque de ce cocycle en utilisant le transport parallèle que fournit la connexion de Gauss-Manin (*cf.* [10] ou [5]).

Si l'on choisit une norme sur $H^1(M,\mathbb{R})$, il n'est pas difficile de voir que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathcal{M}_\kappa^{(1)}} \log \|G_t^{KZ}(q)\| d\mu_\kappa(q) < \infty,$$

si bien que l'on peut appliquer le théorème d'Oseledec (*cf.* section 5.1). La conjecture de Kontsevich et Zorich ([9], [10]) est la suivante :

CONJECTURE 3.2 (Kontsevich-Zorich). — *Les exposants de Lyapunov du cocycle de Kontsevitch-Zorich sont tous non nuls et simples.*

Kontsevich et Zorich esquissent dans leur article [10] la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 3.3 (Kontsevich-Zorich)

(1) *Le plus grand exposant de Lyapunov est* 1 *et est simple (ce qui découle de la non hyperbolicité uniforme du flot géodésique prouvée par Veech) ; l'espace instable associé est* $[\mathrm{Re}(q^{1/2})]$.

(2) *Le deuxième exposant de Lyapunov gouverne le terme d'erreur dans le théorème ergodique pour les échanges d'intervalles.*

(3) *Les espaces instables au-dessus du point* q *ne dépendent que de la classe de cohomologie de* $\mathrm{Im}(q^{1/2})$ *dans* $H^1(M, \Sigma, \mathbb{R})$.

Ils fournissent également une formule donnant la somme des exposants de Lyapunov positifs et conjecturent que cette somme est toujours un nombre rationnel.

Remarque. — La conjecture de Kontsevich-Zorich a été très récemment démontrée par A. Avila et M. Viana : « Simplicity of Lyapunov spectra : proof of the Zorich-Kontsevich conjecture ».

3.2.2. Seconde description. — Au lieu de considérer le cocycle $G_t^{KZ}(q)$ défini sur $\mathbb{R} \times \mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ et de fixer une norme sur $H^1(M, \mathbb{R})$, Forni procède de la façon suivante. Il considère le produit trivial $Q_\kappa^{(1)} \times H^1(M, \mathbb{R})$ et considère le flot $\widetilde{G}_t$ sur ce produit qui agit par le flot de Teichmüller sur Q_κ et de façon triviale sur $H^1(M, \mathbb{R})$, *i.e.* $\widetilde{G}_t(q, v) = (G_t(q), v)$. En revanche, au lieu de fixer une norme qui est la même sur tous les $H^1(M, \mathbb{R})$, au-dessus de chaque $q \in Q_\kappa^{(1)}$, il munit $H^1(M, \mathbb{R})$ de la norme de Hodge

$$(\alpha, \beta)_q = \int_M \alpha \wedge {}^*\beta,$$

où l'opérateur * est défini par la structure complexe induite par q (*i.e.* dans une carte conforme ${}^*dx = dy$, ${}^*dy = -dx$, $x + iy$ étant le paramètre local). Une propriété évidente mais importante de cette norme est qu'elle est Γ_g-équivariante, c'est-à-dire $(\alpha, \beta)_q = (f^*\alpha, f^*\beta)_{f^*q}$ pour tout difféomorphisme f qui préserve l'orientation ; par conséquent le spectre de Lyapunov du cocycle $G_t^{KZ}(x)$ étudié précédemment et celui du cocycle que définissent $\widetilde{G}$ et les normes $(\cdot, \cdot)_q$ sont les mêmes (*cf.* section 5.1). Nous noterons à nouveau G_t^{KZ} le cocycle $\widetilde{G}_t$.

Forni démontre une partie de la conjecture de Kontsevich et Zorich :

Théorème 3.4 (Forni [5]). — *Les exposants du cocyle de Kontsevich-Zorich sont tous non nuls et le plus grand est simple (la simplicité du plus grand exposant étant vraie pour n'importe quelle mesure invariante ergodique par le flot de Teichmüller).*

3.3. Un exemple

Nous illustrons sur un exemple simple les notions précédentes. Supposons que $f : M \to M$ soit un difféomorphisme pseudo-Anosov dont les feuilletages invariants sont orientables, c'est-à-dire qu'il existe deux feuilletages mesurés orientables transverses $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^\perp$ et un réel non nul Λ tels que

$$f_*(\mathcal{F}) = \Lambda \mathcal{F}, \qquad f_*(\mathcal{F}^\perp) = \Lambda^{-1}\mathcal{F}^\perp.$$

De façon équivalente, on peut supposer qu'il existe une différentielle quadratique orientable q telle que

$$f^*(\mathrm{Re}(q^{1/2})) = \Lambda\,\mathrm{Re}(q^{1/2}), \qquad f^*(\mathrm{Im}(q^{1/2})) = \Lambda^{-1}\,\mathrm{Im}(q^{1/2}).$$

Les équations précédentes admettent des interprétations distinctes dans des espaces différents :

– sur M : les classes de $\mathrm{Re}(q^{1/2})$, $\mathrm{Im}(q^{1/2})$ dans $H^1(M,\mathbb{R})$ sont valeurs propres de l'application linéaire symplectique $f^* : H^1(M,\mathbb{R}) \to H^1(M,\mathbb{R})$ (qu'on identifie à un élément de $Sp(2g,\mathbb{R})$) ;

– sur $\mathcal{M}_\kappa$: $[q] \in \mathcal{M}_\kappa$ est un point périodique de période $T = \log|\Lambda|$ du flot de Teichmüller G_t.

Par définition du flot de Kontsevich-Zorich on a

$$G_T^{KZ} = f^*,$$

et donc les valeurs propres de f^*, $\Lambda_i^{\pm 1}$ $1 \leqslant i \leqslant g$ ($|\Lambda_1| \geqslant \cdots \geqslant |\Lambda_g|$) et les exposants de Lyapunov $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_g \geqslant -\lambda_g \geqslant \cdots \geqslant -\lambda_1$ du cocycle de Kontsevich-Zorich sont reliés par

$$\lambda_i = \frac{\log|\Lambda_i|}{\log|\Lambda|}.$$

On peut démontrer que $1 = \lambda_1 > \lambda_2$ (trou spectral, *cf.* section 4.3) et donc $\Lambda = \Lambda_1$ et $|\Lambda_1| > |\Lambda_2|$.

On va s'intéresser à présent non pas à f mais à la dynamique du feuilletage horizontal (ou vertical) ; ces feuilletages sont minimaux (toute feuille ne passant pas par les singularités de q est dense). On note (*cf.* section 4) S et T les champs de vecteurs associés aux feuilletages horizontal et vertical de q et ϕ_q^t le flot du champ de vecteurs horizontal S. Supposons en outre que μ soit une mesure invariante par S et même ergodique. Il n'est alors pas difficile de voir en appliquant le théorème ergodique (voir section 6.1 pour plus de détails) que si on note $\gamma_t(p)$ le chemin $\phi_q^s(p)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, on a pour μ-presque tout p et toute 1-forme fermée α

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{\gamma_t(p)} \alpha = \rho_\mu(\alpha),$$

où $\rho_\mu \in H_1(M,\mathbb{R})$ est le vecteur de rotation de la mesure μ (défini section 6.1). Remarquer que le facteur $(1/t)$ est l'inverse de la q-longueur $L_q(\gamma_t)$ du chemin γ_t. On a toujours

$$\frac{1}{t} \int_{f_*\gamma_t(p)} f^*\alpha = \frac{1}{t} \int_{\gamma_t(p)} \alpha$$

et, comme $L_q(f(\gamma_t)) = \Lambda L_q(\gamma_t)$, on a

$$\Lambda^{-1}\langle \rho_\mu, f^*\alpha\rangle = \langle \rho_\mu, \alpha\rangle$$

et donc

$$f_*\rho_\mu = \Lambda\rho_\mu.$$

Comme Λ est simple, toutes les mesures ergodiques ont donc le même vecteur de rotation. Mais comme l'application $\mu \mapsto \rho_\mu$ est injective (*cf.* section 6.1), il n'y a qu'une seule mesure ergodique : le champ de vecteurs S (le feuilletage horizontal) est uniquement ergodique.

Si γ_t est une q-trajectoire horizontale de q-longueur t, on peut la fermer pour certaines valeurs de t par des chemins verticaux de q-longueurs petites. Notons $\widehat{\gamma}_t$ un tel chemin et étudions $f^n(\widehat{\gamma}_t)$; c'est un cycle de q-longueur $L_n \approx \Lambda^n L_q(\widehat{\gamma}_t)$ et si on projette $[f^n(\widehat{\gamma}_t)]$ sur l'espace propre de f_* de valeur propre Λ_2 (on note π_2 la projection), on obtient un cycle de q-longueur à peu près égale à $|\Lambda_2|^n = L_n^{\lambda_2}$. Ainsi,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log|\pi_2([f^n(\widehat{\gamma}_t)])|}{\log L_q(f^n(\widehat{\gamma}_t))} \leqslant \lambda_2.$$

Comme $f^*q = (\Lambda, \Lambda^{-1}).q$, $f^n(\widehat{\gamma}_t)$ est une trajectoire q-horizontale fermée par un petit chemin q-vertical ; ceci suggère que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log|\pi_2([\gamma_t(x)])|}{\log t} \leqslant \lambda_2.$$

pour μ-presque tout $x \in M$.

Si $F : M \to \mathbb{R}$ est une observable, ses moyennes ergodiques peuvent s'écrire

$$\frac{1}{t} \int_M F(\phi_S^t(x))d\mu(x) = \frac{1}{t} \int_{\gamma_t} \alpha,$$

où α est la 1-forme $F\eta_T$ (pas forcément fermée) et on peut espérer obtenir des déviations de moyennes ergodiques si on projette α, donc F, sur des espaces convenables.

4. L'ANALYSE HARMONIQUE SUR M

Les résultats de cette partie sont démontrés dans [4].

Soit q un élément de $\mathcal{M}_{\kappa}^{(1)}$. Notons η_{Ver} et η_{hor} les 1-formes fermées

$$\eta_{\mathrm{Ver}} = \mathrm{Re}(q^{1/2}), \qquad \eta_{\mathrm{hor}} = \mathrm{Im}(q^{1/2}),$$

si bien que $\omega_q = \eta_{\mathrm{Ver}} \wedge \eta_{\mathrm{hor}}$. Il existe des champs de vecteurs S, T qui commutent, définis sur $M - \Sigma_q$ tels que (i_X désignant la contraction avec le champ de vecteurs X)

$$\eta_{\mathrm{Ver}} = \eta_T = -i_T\omega_q, \qquad \eta_{\mathrm{hor}} = \eta_S = i_S\omega_q.$$

Ces champs sont C^∞ sur $M - \Sigma_q$, préservent la forme d'aire ω_q et explosent sur Σ_q. Au voisinage d'une singularité de q d'ordre $k = 2m$, ils s'écrivent ($z = x + iy$)

$$S = |z|^{-2m}\Big(\mathrm{Re}(z^m)\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{Im}(z^m)\frac{\partial}{\partial y}\Big),$$
$$T = |z|^{-2m}\Big(\mathrm{Im}(z^m)\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{Re}(z^m)\frac{\partial}{\partial y}\Big).$$

4.1. Espaces fonctionnels

Il faut distinguer plusieurs espaces fonctionnels. Tout d'abord, si ω (à ne pas confondre avec ω_q) est une forme volume non dégénérée, on peut définir l'espace $L^2(M)$ des fonctions telles que $\|u\|_0 < \infty$ pour la norme

$$\|u\|_0 = \Big(\int_M |u|^2\omega\Big)^{1/2},$$

et les espaces de Sobolev standards $H^s(M)$ définis en cartes locales.

Par ailleurs, la 2-forme dégénérée ω_q définit également un espace $L^2_q(M)$ de fonctions L^2_q-intégrable pour la norme

$$|u|_0 = \Big(\int_M |u|^2\omega_q\Big)^{1/2}.$$

L'espace de Sobolev $H^1_q(M)$ est alors le complété de l'espace des fonctions $C^\infty(M)$ pour le produit scalaire

$$|u|_1 = \Big(|u|_0^2 + |Su|_0^2 + |Tu|_0^2\Big)^{1/2}$$

et plus généralement les espaces $H^s_q(M)$ sont définis comme les complétés de $C^\infty(M)$ pour la norme

$$|u|_s = \Big(\sum_{i+j\leqslant s} |S^iT^ju|_0^2\Big)^{1/2}.$$

Les espaces $H^s_q(M)$ sont naturellement des espaces de Hilbert et les opérateurs S, T vérifient pour $u, v \in H^1_q(M)$

$$(Su, v)_q = -(u, Sv)_q, \qquad (Tu, v)_q = -(u, Tv)_q,$$

et la relation de commutation plus forte que $ST = TS$

$$(Su, Tv)_q = (Tu, Sv)_q,$$

ce qui se vérifie en utilisant les relations

$$(Su)\omega_q = du \wedge \eta_S = d(u\eta_S), \qquad (Tu)\omega_q = -du \wedge \eta_T = -d(u\eta_T)$$
$$dv = (Tv)\eta_S + (Sv)\eta_T,$$

et la formule de Green.

Les relations entre les espaces de Sobolev standards et les $H^s_q(M)$ sont les suivantes :

– $L^2(M) \subset L^2_q(M)$
– $H^1(M) = H^1_q(M)$
– $H^s_q(M) \subset H^s(M)$ pour $s \geqslant 2$.

Les deuxième et troisième points se démontrent grâce à une inégalité de type Poincaré que Forni démontre dans ([4]). Remarquons que l'espace $C^\infty_0(M - \Sigma)$ n'est *pas* dense dans $H^s_q(M)$ pour $s \geqslant 2$.

Notons $L^2_q(M) = L^2(M, \omega_q)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable par rapport à la forme d'aire ; ces espaces de Hilbert *sont invariants sous l'action du flot de Teichmüller*, c'est-à-dire que $|u|_q = |u|_{G_t(q)}$ (attention à ne pas confondre le produit scalaire sur $L^2(M, \omega_q)$ et celui de Hodge pour les 1-formes). Notons $\partial^\pm_q$ les opérateurs de Cauchy-Riemann

$$\partial^\pm_q = S \pm iT.$$

L'analyse harmonique sur M développée par Forni dans [4] peut en partie se résumer dans le théorème suivant

Théorème 4.1 (Forni). — *Soit q une différentielle quadratique qui est le carré d'une forme abélienne :*

(1) *Les opérateurs $\partial^\pm_q$ sont fermés sur le domaine $H^1(M) \subset L^2_q(M)$ constitué des fonctions L^2_q dont les dérivées au sens des distributions sont L^2_q.*

(2) *Les opérateurs $\partial^\pm_q$ ont des images $R^\pm_q$ fermées et de codimension finie.*

(3) $(\partial^\pm_q)^* = -\partial^\mp_q$.

(4) *On a les décompositions orthogonales suivantes :*

$$L^2_q(M) = R^-_q \oplus \mathcal{M}^+_q = R^+_q \oplus \mathcal{M}^-_q$$

(on notera $\pi^\pm_q$ les projections orthogonales sur $\mathcal{M}^\pm_q$ associées).

(5) *Les espaces de fonctions méromorphes (antiméromorphes) $\mathcal{M}^+_q$ [$\mathcal{M}^-_q$] sont isomorphes à l'espace $H^1(M_q, \mathbb{R})$ muni de la norme de Hodge déterminée par q.*

4.2. Les équations d'évolution

Le dernier point du théorème permet de *paramétrer* $H^1(M,\mathbb{R})$ muni de la norme de Hodge $\|\cdot\|_q$ par les fonctions q-méromorphes ou q-antiméromorphes de la façon suivante : les applications $\mathbb{R}$-linéaires $c_q^{\pm} : \mathcal{M}_q^{\pm} \to H^1(M_q,\mathbb{R})$ définies par

$$c_q^+(m^+) = [\mathrm{Re}(m^+ q^{1/2})]$$
$$c_q^-(m^-) = [\mathrm{Re}(m^- \overline{q}^{1/2})]$$

sont des isomorphismes d'espaces vectoriels. En effet, d'après la théorie de Hodge, toute 1-forme fermée réelle est cohomologue à la partie réelle d'une forme abélienne h (une 1-forme harmonique). Or $h = (h/q^{1/2})q^{1/2}$, où $h/q^{1/2}$ est une fonction q-méromorphe L_q^2-intégrable. On a en outre les relations

$$\|c_q^{\pm}(m^{\pm})\|_q^2 = \int_M c_q^{\pm}(m^{\pm}) \wedge {}^*c_q^{\pm}(m^{\pm}) = |m^{\pm}|_0^2,$$

et pour $m_1^{\pm}, m_2^{\pm}$ dans $\mathcal{M}_q^{\pm}$

$$c_q^{\pm}(m_1^{\pm}) \wedge c_q^{\pm}(m_2^{\pm}) = \mathrm{Im}((m_1^{\pm}, m_2^{\pm})_q).$$

La décomposition du théorème 4.1, (4)

$$u = \partial_q^+ v + \pi_q^-(u), \quad v \in H^1(M)$$

permet de définir un opérateur *unitaire* U_q sur L_q^2 par

$$U_q : u = \partial_q^+ v + \pi_q^-(u) \mapsto \partial_q^- v - \overline{\pi_q^-(u)}$$

($v \in H^1(M)$). Forni peut alors décrire l'action du cocycle de Kontsevich-Zorich. Rappelons que si $q_t = G_t(q)$

$$\eta_T(t) = \mathrm{Re}(q_t^{1/2}) = e^t\,\mathrm{Re}(q^{1/2}) = e^t \eta_T$$
$$\eta_S(t) = \mathrm{Im}(q_t^{1/2}) = e^{-t}\,\mathrm{Im}(q^{1/2}) = e^{-t}\eta_S.$$

On a alors

$$\partial_t^{\pm} = S_t \pm iT_t = e^{-t}S \pm ie^t T.$$

Une des clés dans l'approche de Forni est la remarque suivante : il existe une correspondance entre les solutions de l'équation différentielle

$$m'(t) = U_{q_t}(m(t))$$

et le flot de Kontsevich-Zorich, en particulier

Proposition 4.2. — *Avec les notations précédentes $m^+(t)$ est solution de l'équation différentielle*

$$m'(t) = U_{q_t}(m(t)) \tag{1}$$

avec condition initiale $m^+ \in \mathcal{M}_q^+$ (et alors $m^+(t)$ est q_t-méromorphe) si et seulement si

$$G_t^{KZ}(c_q^+(m^+)) = c_{q_t}^+(m_t^+). \tag{2}$$

4.3. Exemple d'application : le trou spectral

Forni utilise ces équations d'évolution pour démontrer le trou spectral $\lambda_1 > \lambda_2$ (la plus grande valeur propre est simple) pour *toute* mesure μ invariante (et ergodique) par le flot géodésique (pas seulement $\mu_\kappa^{(1)}$).

Par définition du cocycle de Kontsevich-Zorich, les espaces $E_1(q) = \mathbb{R}[\mathrm{Im}(q^{1/2})]$, $E_{-1}(q) = \mathbb{R}[\mathrm{Re}(q^{1/2})]$ sont invariants et ont des exposants de Lyapunov 1 et -1 respectivement. Définissons, pour $q \in \mathcal{M}_\kappa$, $E_0(q)$ de la façon suivante :

$$E_0(q) = \{c \in H^1(M, \mathbb{R}), \quad c \wedge [\mathrm{Re}(q^{1/2})] = c \wedge [\mathrm{Im}(q^{1/2})] = 0\}.$$

Une classe c appartient à $E_0(q)$ si et seulement si c peut s'écrire $c = \mathrm{Re}(m^+ q^{1/2})$ où m^+ est méromorphe (dans $L^2_q(M)$) et d'intégrale nulle, $\int_M m^+\omega_q = 0$. Les fibrés $E_0(\cdot)$ sont invariants par le cocycle de Kontsevich-Zorich. Si $q_t = G_t(q)$, $c_t = G_t^{KZ}(c)$ avec $c \in E_0(q)$ et q μ-générique, on peut démontrer en utilisant les équations d'évolution que

$$\frac{d}{dt}\log|m_t^+|_0 = -\frac{\mathrm{Re}((m_t^+, \overline{m_t^+})_q)}{|m_t^+|_0^2}.$$

En intégrant par rapport au temps il vient

$$\frac{1}{t}\log\frac{|m_t^+|_0}{|m^+|_0} = \frac{1}{t}\int_0^t -\frac{\mathrm{Re}((m_t^+, \overline{m_t^+})_q)}{|m_t^+|_0^2}dt,$$

et si on applique le théorème d'Oseledec (*cf.* 5.1) on a

$$\lambda_2 \leqslant \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t -\frac{\mathrm{Re}((m_t^+, \overline{m_t^+})_q)}{|m_t^+|_0^2}dt.$$

Il est tentant d'utiliser pour le membre de droite le théorème de Birkhoff mais il faut trouver une fonction qui ne dépende que de q. À cet effet on introduit la quantité

$$\Lambda(q) = \max\Big\{ -\frac{\mathrm{Re}((m^+, \overline{m^+})_q)}{|m^+|_0^2}, \quad m^+ \in \mathcal{M}_q^+ - \{0\}, \quad \int_M m^+\omega_q = 0\Big\}$$

et on obtient

$$\lambda_2 \leqslant \int_M \Lambda(q)d\mu(q).$$

Mais pour tout q, $\Lambda(q) < 1$ car sinon, d'après Cauchy-Schwarz, on aurait $\overline{m^+} = \rho m^+$, $|\rho| = 1$, ce qui voudrait dire que m^+ est méromorphe et anti-méromorphe donc constante donc nulle (*cf.* la condition d'intégrale nulle). Un argument de compacité donne la conclusion.

5. FORMULES POUR LES SOMMES DES EXPOSANTS DE LYAPUNOV

5.1. Rappels sur le théorème d'Oseledec

Considérons un espace X muni d'une mesure de probabilité μ et d'un flot $(\phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire d'une famille à un paramètre d'homéomorphismes de X tels que $\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s$ pour $t, s \in \mathbb{R}$). Soit par ailleurs $S : \mathbb{R} \times X \to Sp(2g, \mathbb{R})$ une application μ-intégrable vérifiant la relation de cocycle $S^{t+s}(x) = S^t(\phi^s(x))S^s(x)$ (on notera parfois dans la suite $S_t(x) = S^t(x) = S(t, x)$). On a ainsi une action de $\mathbb{R}$ sur $X \times \mathbb{R}^{2g}$:

$$t \cdot (x, v) = (\phi^t(x), S^t(x)v).$$

On peut aussi supposer que pour μ-presque tout x il existe une norme $\|\cdot\|_x$ sur $\mathbb{R}^{2g}$ dépendant mesurablement de x et on note $\|S^t(x)\|_{t,x}$ la norme de l'application linéaire $S^t(x) : (\mathbb{R}^{2g}, \|\cdot\|_x) \to (\mathbb{R}^{2g}, \|\cdot\|_{\phi^t(x)})$. Le théorème d'Oseledec (que nous énonçons dans le cas ergodique et symplectique) dit en partie la chose suivante

THÉORÈME 5.1. — *Si le flot $(\phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ est μ-ergodique et si pour tout $t \in \mathbb{R}$*

$$\int_X \log \|S^t(x)\|_{t,x}\, d\mu(x) < \infty,$$

alors pour μ-presque tout x on peut trouver

- *un entier $0 \leqslant h \leqslant 2g$*
- *des nombres réels $\lambda'_h < \cdots < \lambda'_1$ tels que $\lambda'_i + \lambda'_j = 0$ si $i + j = h + 1$*
- *des espaces $E_1(x), \dots, E_h(x)$ tels que*

$$\mathbb{R}^{2g} = \bigoplus_{i=1}^{h} E_i(x)$$

qui dépendent mesurablement de x et sont invariants par la dynamique (i.e. $\phi^t(E_i(x)) = E_i(\phi^t(x))$)

tels que pour tout vecteur $v \in E_i(x)$ non nul

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{|t|} \log \|S^t(x)v\|_x = \pm\lambda'_i.$$

Par ailleurs, les espaces $E_1 \oplus \cdots \oplus E_i$ $1 \leqslant i \leqslant [h/2]$ sont isotropes (et pour $i = h/2$ lagrangien).

La donnée des λ'_i et des dimensions des espaces E_i $(1 \leqslant i \leqslant h)$ s'appelle le spectre de Lyapunov du cocycle ; on dit que l'exposant λ'_i est simple si $\dim E_i$ égale 1 et que le spectre est simple si tous les exposants sont simples. La somme directe des $E_i(x)$ sur les $1 \leqslant i \leqslant h$ tels que $\lambda'_i > 0$ (resp. $\lambda'_i < 0$) s'appelle l'espace instable (resp. stable) en x.

Une astuce classique pour avoir accès à la somme des exposants $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ (comptés avec multiplicités) est la suivante. On considère l'espace vectoriel $\Lambda^k E$ des

k-formes alternées sur E^* qu'on peut munir du produit scalaire suivant : pour deux k-vecteurs décomposables $v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ et $w = w_1 \wedge \cdots \wedge w_k$

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k, w_1 \wedge \cdots \wedge w_k) = \det((v_i, w_j)_{ij}).$$

Étant donnée T une application linéaire sur E on définit sur $\Lambda^k E$ l'application linéaire $T^{\wedge k}$ par son action sur les k-vecteurs décomposables

$$T^{\wedge k}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = (Tv_1) \wedge \cdots \wedge (Tv_k).$$

Si $v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ et $\widetilde{v} = \widetilde{v}_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{v}_k$ ($\widetilde{v}_i = Tv_i$),

$$\frac{\|T^{\wedge k} v\|}{\|v\|} = \frac{\|\widetilde{v}_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{v}_k\|}{\|v_1 \wedge \cdots \wedge v_k\|} = \left(\frac{\det((\widetilde{v}_i, \widetilde{v}_j)_{ij}}{\det((v_i, v_j)_{ij}} \right)^{1/2}$$

et cette dernière quantité ne dépend que de l'espace I engendré par les $v_1, \ldots, v_k$. On la notera $\det A_T^k(I)$. Par ailleurs, comme la somme des k plus grands exposants $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ est égale à

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_X \log \|S_t^{\wedge k}(x)\| d\mu(x)$$

on a le lemme suivant :

Lemme 5.2. — *Soit G_k la grassmanienne des k-plans isotropes I_k de $\mathbb{R}^{2g}$ et σ_k la mesure canonique sur G_k. La somme $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ égale*

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_X \int_{G_k} \log |\det A^k_{S^t(x)}(I)|^{1/2} d\sigma^k(I) d\mu(x).$$

5.2. Disques de Teichmüller et laplacien hyperbolique

L'orbite d'une différentielle quadratique q sous l'action du groupe $SL(2,\mathbb{R})$ est métriquement isométrique au fibré unitaire cotangent du disque de Poincaré (muni de sa métrique de courbure -4). Le quotient $Q_g^{(1)}/SO(2,\mathbb{R})$ est feuilleté par des feuilles de dimension réelle 2 isométriques au disque de Poincaré qu'on appelle disques de Teichmüller. De façon plus explicite, soit $z = re^{i\theta}$, $|z| < 1$ un point du disque de Poincaré. Notons

$$q_z = G_t(q_\theta), \qquad q_\theta = e^{i\theta} q,$$

où $t = (1/2) \log \frac{1+r}{1-r}$. On pose $j_q(z) = [q_z] \in Q_g^{(1)}/SO(2,\mathbb{R})$. Observons que $j_q(0) = [q]$. On peut projeter ce plongement sur $\mathcal{M}_g^{(1)}$ et on obtient un feuilletage $\mathcal{T}_g$ de $\mathcal{M}_g^{(1)}/SO(2,\mathbb{R})$ qui est régulier pour presque toute feuille (*cf.* [10]).

Sur le disque hyperbolique muni de sa métrique $|dz|/(1-|z|^2)$ (de courbure -4) le laplacien hyperbolique en coordonnées polaires hyperboliques (t,θ) s'écrit

$$\Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2 \coth(2t) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4}{\sinh^2(2t)} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Le lemme suivant est très utile pour la suite :

Lemme 5.3. — *Soit $\Lambda : D \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et C^∞ et $L : D \to \mathbb{R}$ une solution C^∞ de*

$$\Delta_h L = \Lambda.$$

La relation suivante est alors vraie :

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi} L(t,\theta)d\theta = \frac{1}{2}\tanh(t)\frac{1}{|D_t|}\int_{D_t}\Lambda\omega_P,$$

où $|D_t|$ représente l'aire du disque de centre 0 et de rayon (hyperbolique) t et ω_P est la forme d'aire.

5.3. Utilisation des équations d'évolution

Reprenons les notations de la section 5.1 dans le cadre du cocycle de Kontsevich-Zorich. Notons $G_k(M,\mathbb{R})$ la grassmanienne des espaces isotropes de dimension k ($1 \leqslant k \leqslant g$) de l'espace symplectique $H^1(M,\mathbb{R})$ (pour la forme d'intersection) et soit $I_k \in G_k(M,\mathbb{R})$ un k-plan isotrope dont on a choisi une base $(c_1,\dots,c_k)$. Si q est une différentielle quadratique on peut définir (*cf.* section 4) des fonctions méromorphes $m_1^+,\dots,m_k^+$ telles que

$$c_i = \mathrm{Re}(m_i^+ q^{1/2}),$$

et introduire des fonctions $v_1,\dots,v_k \in H^1(M)$ telles que

$$m_i^+ = \partial_q^+ v_i + \pi_q^-(m_i^+),$$

où $\pi_q^- : L_q^2(M) \to \mathcal{M}_q^-$ est l'opérateur de projection orthogonal sur les fonctions anti-méromorphes défini précédemment.

D'après le lemme 5.2 la somme des exposants $\lambda_1+\cdots+\lambda_k$ du cocycle de Kontsevich-Zorich est égale à

$$\lambda_1+\cdots+\lambda_k = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\mathcal{M}_\kappa^{(1)}}\int_{G_k(M)} \log|\det A_T^k(q,I)|^{1/2} d\sigma^k(v)d\mu_\kappa^{(1)}(x),$$

où $\det A_T^k(q,I) = \det A_{G_T(q)}^k(I)$ est le déterminant de la matrice dont le coefficient i,j est $(c_i(T),c_j(T))_q$ ou de façon équivalente $(m_i^+(T),m_j^+(T))_q$.

Pour clarifier un peu ce qui va suivre, plaçons-nous dans le cadre suivant. Soient X un espace « sympathique » sur lequel le groupe $SL(2,\mathbb{R})$ agit, ν une mesure invariante par l'action du sous-groupe $SO(2,\mathbb{R})$ et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction « régulière ». Nous notons g_t la matrice diagonale $\mathrm{diag}(e^t, e^{-t})$ et $\rho_\theta \in SO(2,\mathbb{R})$ la rotation d'angle θ. On veut évaluer le comportement de $f(g_t\cdot x)$ quand t tend vers l'infini. L'idée est d'introduire une complexification du temps : au lieu d'étudier $f(t\cdot x) := f(g_t\cdot x)$ on va étudier $f(z\cdot x)$ où z est dans le disque de Poincaré. Définissons pour $z = re^{i\theta}$ (avec $t = (1/2)\log\frac{1+r}{1-r}$)

$$f_x(z) = f(z\cdot x) = f((g_t\rho_\theta)\cdot x).$$

La formule du lemme précédent montre que si $h_x = \Delta_h f_x$ on a
$$\frac{1}{2\pi}\partial_t \int_0^{2\pi} f((g_t\rho_\theta)\cdot x)d\theta = \frac{1}{2}\tanh(t)\frac{1}{|D_t|}\int_{D_t} h(z\cdot x)\omega_P(z).$$
Comme ν est une mesure finie sur X invariante par l'action de $SO(2,\mathbb{R})$, on a en intégrant par rapport à ν
$$\partial_t \int_X f(g_t\cdot x)d\nu(x) = \frac{1}{2}\tanh(t)\frac{1}{|D_t|}\int_X\int_{D_t} h(z\cdot x)\omega_P(z)d\nu(x).$$
Si on suppose en plus que h vérifie pour tout t
$$\int_X h(g_t\cdot x)d\nu(x) = \int_X h d\nu,$$
c'est-à-dire si en plus de la $SO(2,\mathbb{R})$-symétrie de ν, (h,ν) possède une symétrie (faible) par rapport au groupe diagonal, on obtient
$$\partial_t \int_X f(t\cdot x)d\nu(x) = \frac{1}{2}\tanh(t)\int_X h(x)d\nu(x),$$
et si on intègre en t,
$$\int_X f(t\cdot x)d\nu(x) = \mathrm{cste} + \log\cosh(t)\int_X h(x)d\nu(x).$$
Enfin si on divise par t et qu'on passe à la limite
$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_X f(t\cdot x)d\nu(x) = \int_X h(x)d\nu(x). \tag{3}$$

Dans la suite l'espace X sera le produit $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}\times G_k(M,\mathbb{R})$, $x=(q,I)$ et la mesure ν sera le produit de la mesure $\mu_\kappa^{(1)}$ par la mesure canonique σ_k sur $G_k(M,\mathbb{R})$. Notons que $\mu_\kappa^{(1)}$ est invariante par l'action de $SL(2,\mathbb{R})$ tandis que σ_k et donc ν ne sont invariantes que par $SO(2,\mathbb{R})$. L'application $f_x(z)$ sera égale à $\log|\det A_z^k(q,I)|^{1/2}$. Il nous faut à présent identifier la fonction h et pour cela calculer le laplacien hyperbolique de f_x. La paramétrisation introduite par Forni que nous avons décrite en 4 se révèle alors très utile.

On a vu que l'évolution des $c_i(t)$ suivant le cocycle de Kontsevich-Zorich, c'est-à-dire l'évolution des c_i sous l'action du groupe diagonal $\mathbb{A}$ se lisait dans la façon dont évoluent les $m_i^+(t)$ suivant la dynamique donnée par (1). De manière analogue Forni calcule le laplacien hyperbolique de f (il faut en plus dériver f par rapport à l'algèbre de Lie du groupe des rotations). Le résultat est alors le suivant : si on note
$$\begin{aligned}
A_{ij}^k &= (m_i^+, m_j^+)_q,\\
H_{ij}^k &= (\pi_q^-(m_i^+), \pi_q^-(m_j^+))_q,\\
B_{ij}^k &= B_q(m_i^+, m_j^+) = (m_i^+, \overline{m_j^+})_q,\\
V_{ij}^k &= (\partial_q^+ v_i, \partial_q^+\overline{v_j})_q = (\partial_q^- v_i, \partial_q^-\overline{v_j})_q
\end{aligned}$$

on a
$$\Delta_h \log|\det(A_z^k)|^{1/2} = 4\,\mathrm{tr}[(A_z^k)^{-1}H_z^k] - 2\,\mathrm{tr}[(A_z^k)^{-1}B_z^k(A_z^k)^{-1}\overline{B_z^k}]$$
La fonction
$$\Phi_k = 2\,\mathrm{tr}[(A^k)^{-1}H^k] - \mathrm{tr}[(A^k)^{-1}B^k(A^k)^{-1}\overline{B^k}]$$
est en fait indépendante de la base choisie pour le k-plan isotrope I_k et définit une fonction $\Phi_k : Q_\kappa^{(1)} \times G_k(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ invariante par l'action naturelle du groupe modulaire Γ_g. Soient $I_1 \subset \cdots \subset I_g \subset H^1(M,\mathbb{R})$ une suite d'espaces isotropes, $q \in Q_\kappa^{(1)}$, et $m_1^+,\ldots,m_g^+$ une base orthonormale de $\mathcal{M}_q^+$ tels que les $c_1^+,\ldots,c_k^+$ représentent une base orthonormale de I_k (via $c_i = [\mathrm{Re}(m_i^+ q^{1/2})]$) alors

(1) $\Phi_1(q,I_1) = 2|\pi_q^-(m_1^+)|^2 - |B_q(m_1^+)|^2$,

(2) $\Phi_k(q,I_k) = \Phi_g(q,I_g) - \sum_{i,j=k+1}^g |B_q(m_i^+,m_j^+)|^2$

(3) $\Phi_g(q,I_g) = \Lambda_1(q)+\cdots+\Lambda_g(q)$ où les $\Lambda_1(q) \geqslant \cdots \geqslant \Lambda_g(q) \geqslant 0$ sont les valeurs propres de la matrice hermitienne positive H_q. Notons que dans le cas $k = g$ il n'y a pas de dépendance en I_g.

5.4. Conséquences

Revenons au problème de la somme des exposants de Lyapunov du cocycle de Kontsevich-Zorich. Nous avons vu précédemment que l'hypothèse sous laquelle la formule donnant la somme des exposants de Lyapunov est vraie et que la fonction $h(q,I) = \Phi_k(q,I)$ a une symétrie supplémentaire sous l'action du groupe diagonal. Comme la mesure $\mu_\kappa^{(1)}$ est invariante pour l'action de $SL(2,\mathbb{R})$, ceci est assuré quand $k = g$ car dans ce cas $h(q,I) = \Phi_g(q,I) = \Lambda_1(q)+\cdots+\Lambda_g(q)$ ne dépend *pas* de I. Par conséquent si $\mathcal{C}_\kappa^{(1)}$ est une composante connexe de $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ (où la mesure $\mu_\kappa^{(1)}$ est ergodique ce qui permet d'appliquer la version ergodique du théorème d'Oseledec)
$$\lambda_1+\cdots+\lambda_g = \frac{1}{\mu_\kappa^{(1)}(\mathcal{C}_\kappa^{(1)})}\int_{\mathcal{C}_\kappa^{(1)}} (\Lambda_1(q)+\cdots+\Lambda_g(q))\,d\mu_\kappa^{(1)}(q).$$
Une formule explicite donnant la somme des exposants avait déjà été obtenue par Kontsevich et Zorich ([10]). Comme $\lambda_1 = 1$ et $\Lambda_1 \equiv 1$ la formule précédente donne
$$\lambda_2+\cdots+\lambda_g = \frac{1}{\mu_\kappa^{(1)}(\mathcal{C}_\kappa^{(1)})}\int_{\mathcal{C}_\kappa^{(1)}} (\Lambda_2(q)+\cdots+\Lambda_g(q))\,d\mu_\kappa^{(1)}(q),$$
et montre que $\lambda_2 > 0$ *pourvu que* l'on sache démontrer que (par exemple) Λ_g est *strictement* positive sur un ouvert de la composante $\mathcal{C}_\kappa^{(1)}$ (en fait Forni donne dans ce cas une démonstration plus simple).

Dans le cas où $1 \leqslant k < g$ et en supposant que l'on sache démontrer que $\Lambda_g(q)$ est *strictement* positive sur un ouvert de la composante $\mathcal{C}_\kappa^{(1)}$, l'argument précédent ne fonctionne pas directement mais dans le cas où k est inférieur où égal à $g/2$ Forni démontre de façon analogue et par un argument de dimension que la somme $\lambda_1+\cdots+\lambda_k$ est strictement positive. Dans les autres cas, la conclusion de l'analyse est la suivante :

PROPOSITION 5.4. — *Si pour $1 \leqslant k \leqslant g-1$ on a $\lambda_k > \lambda_{k+1} \geqslant 0$, alors*

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = \frac{1}{\mu_\kappa^{(1)}(\mathcal{C}_\kappa^{(1)})} \int_{\mathcal{C}_\kappa^{(1)}} \Phi_k(q, E_k^+(q)) d\mu_\kappa^{(1)}(q),$$

où $E_k^+(q)$ est le sous-espace de $H^1(M,\mathbb{R})$ de dimension k correspondant aux exposants $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$.

5.5. Le « determinant locus »

Comme on vient de le voir, pour obtenir des résultats de positivité d'exposants de Lyapunov il est important de savoir que $\Lambda_g(q)$ est *strictement* positive sur un ouvert de la composante $\mathcal{C}_\kappa^{(1)}$ et il est donc important de connaître le lieu des q où $\Lambda_g(q)$ s'annule. La matrice des périodes va jouer un rôle important dans cette analyse géométrique. Si $\{a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g\}$ est une base canonique de l'homologie (donnant le marquage de M) et $\theta_1, \ldots, \theta_g$ la base duale des différentielles holomorphes (*i.e.* telle que $\theta_i(a_j) = \delta_{ij}$) la matrice des périodes Π est la matrice complexe $g \times g$ d'éléments $\Pi_{ij} = \theta_i(b_j)$ qui vit dans l'espace de Siegel des matrices complexes symétriques et de partie réelle définie positive. Cette matrice Π dépend de la structure complexe choisie. Si $(M_t, q_t) = G_t(M, q)$, posons $\Pi_t = \Pi(M_t)$. Forni définit $\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$ l'ensemble des $[q] \in \mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ où

$$\det\left(\left(\frac{d\Pi}{dt}\right)|_{t=0}\right) = 0$$

(c'est bien invariant par le groupe modulaire à cause du déterminant). C'est une surface analytique réelle dans $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ de codimension 2. Le lemme clé est alors

LEMME 5.5. — *L'ensemble des q où $\Lambda_g(q) = 0$ est égal à $\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$.*

Si on pose $\phi_i^+ = \theta_i / q^{1/2}$, $\{\phi_1^+, \ldots, \phi_g^+\}$ est une base de $\mathcal{M}_q^+$ et il est possible de voir (formule de Rauch) que

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\Pi}{dt}\right)|_{t=0} &= \int_M \phi_i^+ \phi_j^+ \omega_q \\ &= (\phi_i^+, \overline{\phi_j^+})_q\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{d\Pi}{dt}\right)|_{t=0} = B_q(\phi_i^+, \phi_j^+).$$

Comme $\{\phi_1^+, \ldots, \phi_g^+\}$ et $\{m_1^+, \ldots, m_g^+\}$ sont deux bases, le déterminant $\det B_q(m_i^+, m_j^+)$ est nul si et seulement si $\det B_q(\phi_i^+, \phi_j^+)$ l'est. Comme $|\det H_q(m_i^+, m_j^+)| = |\det B_q(m_i^+, m_j^+)|^2$, on a bien la conclusion du lemme.

Ainsi, pour pouvoir démontrer que $\Lambda_g(q) > 0$ sur un ouvert de la compostante $\mathcal{C}_\kappa^{(1)}$, il faut démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 5.6. — *Les composantes $\mathcal{C}_\kappa^{(1)}$ de $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ ne sont jamais contenues dans le « determinant locus ».*

La preuve de ce résultat nécessite une analyse fine de ce qui se passe au bord de l'espace des modules, c'est-à-dire quand on « pince » certaines courbes sur la surface. Il se trouve que dans cette situation les calculs sont plus faciles, car pincer revient à remplacer certains morceaux de cylindres dans M par des cylindres beaucoup plus longs (mais de même diamètre) ce qui a tendance à « concentrer la masse » en des endroits (les cylindres) où les calculs sont plus explicites.

6. CYCLES ASYMPTOTIQUES ET COURANTS

6.1. Cycles asymptotiques

Considérons, sur une surface compacte M, le flot ϕ_X^t d'un champ de vecteurs X dont les singularités sont de type selle ; en genre $g \geqslant 2$ un tel champ de vecteurs a des singularités $\Sigma = \{p_1, \ldots, p_\sigma\}$ d'indices $n_1, \ldots, n_\sigma$ (nombres de séparatrices moins 1) qui vérifient $n_1 + \cdots + n_\sigma = 2g - 2$ (Poincaré-Hopf). Les entiers σ, p_i, n_i $(1 \leqslant i \leqslant \sigma)$ déterminent le type de singularité de X. Si μ est une mesure invariante pour le flot ϕ_X^t on peut définir pour toute 1-forme fermée α la quantité,

$$\int_M i_X \alpha d\mu,$$

qui dépend linéairement de α et on vérifie facilement que si α est exacte cette quantité est nulle. On a ainsi construit un élément $\rho_{X,\mu}$ dans le dual de $H^1(M, \mathbb{R})$ (que l'on identifie à $H_1(M, \mathbb{R})$) :

$$\rho_{X,\mu}([\alpha]) = \int_M i_X \alpha d\mu,$$

que l'on appelle le vecteur de rotation de μ. Quand μ est une mesure ergodique pour le flot, on sait d'après le théorème de Birkhoff que pour μ-presque tout $x \in M$

$$\begin{aligned}\rho_{X,\mu}([\alpha]) &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t (i_X\alpha)(\phi_X^t(x))dt \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{\gamma_t} \alpha,\end{aligned}$$

où γ_t est le morceau d'orbite de x pour $0 \leqslant s \leqslant t$ suivant le flot ϕ_t. Si on choisit t de façon que x et $\phi_X^t(x)$ soient proches, on peut fermer l'orbite par une petite transversale au flot pour obtenir un chemin fermé $\widetilde{\gamma}_t$. On a alors dans $H_1(M, \mathbb{R})$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} [\widetilde{\gamma}_t] = \rho_{X,\mu}.$$

On peut aussi définir ρ d'une autre manière quand μ est définie par une forme volume ω : puisque $0 = i_X(\alpha \wedge \omega) = i_X \alpha \omega + \alpha \wedge i_X \omega$

$$\rho_{X,\mu}(\alpha) = \int_M i_X \omega \wedge \alpha$$

et, via la dualité de Poincaré, $\rho_{X,\mu}$ s'identifie à $i_X\omega$. (Dans le cas général : Si γ est un chemin fermé sur M, on laisse évoluer γ suivant le flot entre 0 et t et on calcule l'aire balayée au cours du mouvement.) Puisque $i_X \circ d + d \circ i_X = \mathcal{L}_X$, on voit que la 1-forme $i_X\omega$ est fermée si et seulement si ω est invariante par le flot de X (la mesure que définit ω est donc invariante par le flot). On peut associer deux classes de cohomologie à $i_X\omega$ qui ont des rôles distincts :

(1) d'une part sa classe de cohomologie dans $H^1(M, \Sigma, \mathbb{R})$ (de dimension $2g+\sigma-1$) qui intervient dans la classification des *champs de vecteurs* X dont les singularités sont de type prescrit et qui préservent une forme volume fixée ω : un théorème de Katok (*cf.* [7] chap. 14) dit que deux tels champs de vecteurs qu'on peut relier par un chemin continu de champs de vecteurs sont orbite-équivalents (ou équivalents modulo changement de temps) si et seulement si leurs classes de cohomologie dans $H^1(M, \Sigma, \mathbb{R})$ sont colinéaires (la constante de colinéarité étant positive). La conjugaison peut être choisie Lipschitz sur M et C^∞ en dehors des singularités ;

(2) d'autre part sa classe de cohomologie dans $H^1(M, \mathbb{R})$ (de dimension $2g$) qui intervient dans la classification des *mesures* μ-invariantes par X : un théorème de Katok (*cf. loc. cit.*) dit que deux mesures μ_1 et μ_2 invariantes par X et supportées sur des composantes transitives sont égales si et seulement si $\rho_{X,\mu_1} = \rho_{X,\mu_2}$ dans $H^1(M, \mathbb{R})$. Par ailleurs l'image de ces mesures par $\rho_{X,\cdot}$ dans $H^1(M, \mathbb{R})$ est un espace *isotrope*, donc de dimension inférieure à g.

Détaillons un peu ce dernier point. Si μ_1, μ_2 sont deux mesures invariantes que l'on suppose régulières (*i.e.* données par des 2-formes C^∞ ω_1, ω_2) dont les nombres de rotation sont les mêmes, on a

$$i_X\omega_1 - i_X\omega_2 = df,$$

où f est une fonction C^∞. En contractant l'égalité précédente suivant X on obtient $i_X df = 0$, c'est-à-dire $\mathcal{L}_X f = 0$: f est invariante par le flot. Si on suppose ce flot (quasi-) minimal alors f est constante et donc $df = 0$ soit

$$i_X\omega_1 = i_X\omega_2,$$

et en prenant le produit extérieur avec n'importe quelle 1-forme α on voit que les fonctions $(i_X\alpha)$ sont d'ω-intégrales nulles ($\omega = \omega_1 - \omega_2$) donc $\omega_1 = \omega_2$.

Si on ne fait aucune hypothèse de régularité sur les mesures μ_1, μ_2, hormis l'hypothèse qu'elles sont sans atomes, on a encore

$$i_X\mu_1 - i_X\mu_2 = df,$$

mais cette fois-ci au sens des distributions (ou des courants) et on voit (intégrer l'équation précédente sur un chemin) que f est continue et donc, si X est quasi-minimal, constante.

Ceci suggère qu'il est important de travailler dans l'espace des courants.

Dans le cas « générique » le flot de ϕ_X^t est (quasi-) minimal et il n'y a donc, en dehors des mesures de Dirac aux singularités qu'une seule mesure invariante (ergodique) par X : l'image des mesures dans $H^1(M,\mathbb{R})$ est donc « génériquement » de dimension 1. Nous verrons par la suite que si au lieu de considérer des mesures invariantes on considère des *distributions* invariantes on pourra atteindre, en fonction de la régularité de ces distributions, des espaces de dimension g (lagrangiens) ou même $2g-1$.

6.2. Courants

Un courant (*cf.* [14], [2]) est une forme linéaire C sur $\Lambda_0^* M$ (les formes C^∞ à support compact) continue au sens des distributions, *i.e.* $C(\phi_j)$ tend vers 0 pour toute suite de formes à support compact ϕ_j tendant vers 0 en topologie C^∞. Il est homogène de dimension p s'il est nul sur toute k-forme $k \neq p$. Les opérations usuelles de bord, contractions... se définissent par dualité (en général via Stokes) comme pour les distributions et un point important est le théorème de De Rham : tout courant peut être régularisé, plus précisément : tout courant est cohomologue (au sens des courants) à un courant lisse.

Dans $\mathcal{D}'(M-\Sigma)$ une distribution $\mathcal{D}$ est un courant de dimension 0 et de degré 2 et on peut lui associer canoniquement un courant $\widetilde{\mathcal{D}}$ de dimension 2 et de degré 0 tel que $\mathcal{D} = \widetilde{\mathcal{D}}\omega_q$; tout courant de dimension 0 peut se représenter de façon unique sous cette forme. Afin de ne pas trop alourdir les notations, nous identifierons les courants de dimension 0 et 2 et parlerons plus simplement de distributions. Un courant C homogène de degré 1 dans $\mathcal{D}'(M-\Sigma)$ est dit *basique* par rapport à un feuilletage $\mathcal{F}$ si pour tout champ de vecteurs X tangent au feuilletage $\mathcal{F}$

$$i_X C = 0, \qquad \mathcal{L}_X C = 0.$$

Dans la suite il sera important de travailler avec des courants qui se comportent bien aux singularités. En particulier un courant est dit *q-tempéré* s'il est dans le dual topologique de l'espace des formes α qui sont C^∞ et qui au voisinage de chaque singularité $p \in \Sigma$ d'ordre m (*i.e.* $q(z) = z^{2m}dz^2$ au voisinage de p) s'écrivent $\alpha = \pi_p^*(\lambda_p)$ où λ est C^∞ et π_p s'écrit localement $\pi_p(z) = z^{m+1}/(m+1)$. On définit aussi des espaces de Sobolev : d'abord d'ordre $s \geqslant 0$ pour les 1-formes : une 1-forme est dans l'espace de Sobolev $\mathcal{H}_q^s(M)$ si ses contractions avec les champs de vecteurs S, T sont des fonctions dans $H_q^s(M)$; puis par dualité on définit les espaces $\mathcal{H}_q^{-s}(M)$, $s \geqslant 0$. L'espace de Sobolev d'ordre $s \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_q^s(M)$ (resp. $\mathcal{B}_{-q}^s(M)$) est l'ensemble des courants basiques q-tempérés C tels que $i_S C = 0$ dans $H_q^{-s}(M)$ et $\mathcal{L}_S C = 0$ dans $\mathcal{H}_q^{-s-1}(M)$ (resp. $i_T C = 0$ dans $H_q^{-s}(M)$ et $\mathcal{L}_T C = 0$ dans $\mathcal{H}_q^{-s-1}(M)$).

En fait tout courant basique tempéré $C \in \mathcal{B}_q^s(M)$ peut se représenter sous la forme $\mathcal{D}\eta_S$ (*i.e.* $\mathcal{D}.i_S\omega_q$) où $\mathcal{D}$ est une distribution S-invariante (*i.e.* $\mathcal{L}_S\mathcal{D} = 0$) dans $H_q^{-s}(M)$ définie par

$$\mathcal{D}\omega_q = -C^+ \wedge \eta_T.$$

et réciproquement si $\mathcal{D}$ est une distribution invariante tempérée $\mathcal{D}\eta_S$ est un courant basique tempéré.

Tout courant basique C réel est fermé et définit un élément du dual $H^1_c(M-\Sigma,\mathbb{R})^*$ des formes à support compact ; par la dualité de Poincaré $H^1_c(M-\Sigma,\mathbb{R})^* = H^1(M-\Sigma,\mathbb{R})$. Si le courant est q-tempéré on peut en fait lui associer une classe de cohomologie dans $H^1(M,\mathbb{R})$. Nous notons j_q cette application. Les images par j_q des espaces $\mathcal{B}^s_q$ ne dépendent que de la classe de cohomologie de $\operatorname{Im} q^{1/2}$ dans $H^1(M,\Sigma,\mathbb{R})$ ce qui découle d'une version du théorème de Katok de la section 6.1 (1). À la différence du vecteur de rotation des mesures, la classe de cohomologie d'un courant basique tempéré ne détermine pas le courant de façon unique. D'autre part, il n'est pas clair que l'image par j_q de l'ensemble des courants basiques tempérés soit isotrope dans $H^1(M,\mathbb{R})$. En revanche, pour *presque tout* q (dans un sens à préciser) Forni apporte les réponses suivantes :

(1) Soit q une différentielle quadratique. Alors, pour presque tout θ, l'application $\mathcal{B}^1_{e^{i\theta}q}(M) \to H^1(M,\mathbb{R})$ qui à un courant basique $qe^{i\theta}$-tempéré associe sa classe de cohomologie est injective (pour des courants d'ordre $s \geqslant 1$ il existe en fait une suite exacte qui généralise ce résultat).

(2) Il existe un entier $l > 1$ tel que pour tout $s \geqslant l$ et presque toute différentielle quadratique l'image par j_q dans $H^1(M,\mathbb{R})$ des courants basiques q-tempérés d'ordre s est de dimension $2g-1$: c'est l'ensemble des classes c telles que $c \wedge [\operatorname{Im} q^{1/2}] = 0$.

(3) Dans le cas où $s = 1$, l'image par j_q des courants basiques q-tempérés est pour presque tout q un espace lagrangien de $H^1(M,\mathbb{R})$.

Le cas où $s = 1$ est celui qui intervient dans l'étude du cocycle de Kontsevich-Zorich. On peut d'ailleurs identifier ce sous-espace lagrangien : c'est l'espace instable du cocycle de Kontsevich-Zorich au-dessus du point q. Nous reviendrons sur ce point plus tard.

6.3. Espaces stables/instables, courants basiques et cocycle de Forni

À ce stade nous ne savons pas si les exposants de Lyapunov du cocycle de Kontsevich-Zorich sont tous non nuls. Plaçons-nous dans l'hypothèse de la proposition 5.4 : pour $1 \leqslant k \leqslant g-1$ on a $\lambda_k > \lambda_{k+1} = 0$ (on prend k maximal), c'est-à-dire que pour presque tout $q \in \mathcal{C}^{(1)}_\kappa$ on peut parler des espaces stables et instables $E^- = E^-_k$, $E^+ = E^+_k$ qui sont de dimension k.

THÉORÈME 6.1. — *Pour $\mu^{(1)}_\kappa$-presque tout q les espaces $E^+(q)$, $E^-(q)$ coïncident avec $\mathcal{B}^1_q(M)$, $\mathcal{B}^1_{-q}(M)$ les espaces de courants basiques tempérés (c'est-à-dire que l'image dans $H^1(M,\mathbb{R})$ de $\mathcal{B}^1_{\pm q}(M)$ par j_q égale $E^\pm(q)$).*

A) Esquissons la preuve du fait que toute classe $[c]$ dans $E^+(q)$ peut être représentée par un courant basique tempéré d'ordre 1.

1) Déjà, d'après la théorie de Hodge c est cohomologue à une 1-forme harmonique fermée de la forme $\mathrm{Re}(m^+q^{1/2})$ où m^+ est méromorphe dans $L^2_q(M)$. Notons $c_t = G^{KZ}_t(c) = \mathrm{Re}(m^+_t q_t^{1/2})$ son image sous l'évolution du cocycle de Kontsevich-Zorich. Puisque c_t et c sont cohomologues, il existe une fonction U_t qu'on peut choisir de moyenne nulle telle que

$$dU_t = \mathrm{Re}(m^+q^{1/2}) - \mathrm{Re}(m^+_t q_t^{1/2}). \tag{4}$$

Contractons l'équation précédente suivant S ; nous obtenons

$$SU_t = \mathrm{Re}(m^+) - e^t\,\mathrm{Re}(m^+_t).$$

Nous allons démontrer que $|U_t|_{L^2_q}$ est bornée. On pourra ainsi extraire de U_t une sous-suite faiblement convergente dans L^2 vers un U et comme $e^t\,\mathrm{Re}(m^+_t)$ tend vers 0 quand $t \to -\infty$ on aura au sens des distributions

$$SU = \mathrm{Re}(m^+).$$

Pour cela, rappelons que

$$m^+_t = \partial^+_t v_t + \pi^-_t(m^+_t), \tag{5}$$

(où v_t est définie à une constante près) vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dm^+_t}{dt} = \partial^-_t v_t - \overline{\pi^-_t(m^+_t)},$$

si bien qu'en dérivant (4) on obtient

$$\frac{d}{dt}(dU_t) = \mathrm{Re}(dv_t),$$

et en intégrant

$$\frac{d}{dt}U(t) = \mathrm{Re}(v_t). \tag{6}$$

Comme la décomposition (5) est orthogonale, on a

$$|\partial^+ v_t|_0 \leqslant |m^+_t|_0.$$

Forni démontre et utilise à présent une inégalité de Poincaré avec estimation de la constante :

$$|v_t|_0 \leqslant C(q_t)|\partial^+ v_t|_0$$

où la constante $C(q)$ est majorée par l'inverse de la longueur $l(q)$ de la plus courte géodésique entre les singularités de q_t (les éléments de Σ_{q_t}). Mais d'après un résultat de H. Masur [13] on sait que presque sûrement

$$\limsup_{t\to\pm\infty} \frac{-\log l(q_t)}{\log |t|} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent

$$|v_t|_0 \leqslant Ct|m^+_t|_0,$$

et d'après (6) ($U_0 = 0$)

$$|U_t|_0 \leqslant C \int_{-\infty}^{0} s|m_s^+|_0 ds,$$

ce qui montre que $|U_t|_0$ est bornée pour $t \to -\infty$ puisque par définition q est dans $E^+(q)$.

2) Écrivons

$$dU = SU\eta_T + TU\eta_S$$

et utilisons l'égalité que nous venons de démontrer

$$SU = \mathrm{Re}(m^+).$$

Nous obtenons,

$$dU = (1/2)[(m^+(\eta_T + i\eta_S) + \overline{m^+}((\eta_T - i\eta_S)] + \mathcal{D}\eta_S$$

avec

$$\mathcal{D} = TU - im^+ + i\overline{m^+},$$

c'est-à-dire

$$dU = \mathrm{Re}(m^+ q^{1/2}) + \mathcal{D}\eta_S,$$

ce que l'on voulait démontrer puisque $\mathcal{D}\eta_S$ est un courant basique tempéré d'ordre 1.

B) Passons à la réciproque. Il s'agit de démontrer qu'un courant basique tempéré d'ordre 1 pour le feuilletage $\mathcal{F}_{\pm q}$ a pour image dans $H^1(M, \mathbb{R})$ un élément de $E^{\pm}(q)$. Forni introduit un cocycle G_t^F (que nous appellerons le cocycle de Forni) sur l'espace $\mathcal{Z}'_\kappa$ des courants tempérés fermés d'ordre 1 qu'il définit de façon analogue au cocycle de Kontsevich-Zorich : ce cocycle envoie de façon triviale (c'est l'identité) la fibre $\{q\} \times \mathcal{H}_q^{-1}(M)$ (munie de sa q-norme d'espace de Hilbert) au-dessus de $q \in Q_\kappa^{(1)}$ sur la fibre $\{G_t(q)\} \times \mathcal{H}_{G_t(q)}^{-1}(M)$ (munie de sa $G_t(q)$-norme d'espace de Hilbert) au-dessus de $G_t(q) \in Q_\kappa^{(1)}$. Ce cocycle vérifie

$$j_\kappa \circ G_t^F = G_t^{KZ} \circ j_\kappa,$$

et ses fibrés stable et instable sont en fait les fibrés $\mathcal{B}^{\mp}$. Pour démontrer ce point Forni utilise une construction de Burns-Katok ([6]), inspirée d'un article de Wojtkowski ([17]), et construit des fonctions de Lyapunov $\mathcal{L}^{\pm}$ pour les fibrés $\mathcal{B}_q^1$ qui vérifient

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}^+ \circ G_t^F(C^+) > 0,$$
$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}^- \circ G_t^F(C^+) < 0.$$

Leur construction se fait de la façon suivante (par exemple pour $\mathcal{L}^+$) : Pour un courant basique $C^+ \in \mathcal{B}_q^1(M)$ la distribution $\mathcal{D}^+ = C^+ \wedge \eta_T$ est dans l'espace de Sobolev $H_q^{-1}(M)$. D'après les travaux précédents de Forni ([4]) on peut écrire

$$\mathcal{D}^+ = \partial^+ U^+ + A^+,$$

où U^+ est une fonction de $L^2_q(M)$ orthogonale aux fonctions méromorphes $\mathcal{M}^+_q$ et $A^+ = \mathcal{D}(1)$ (« l'intégrale » de $\mathcal{D}$). La fonction de Lyapunov $\mathcal{L}^+$ que Forni définit est

$$\mathcal{L}^+(C^+) = |U^+|_0^2 + (A^+)^2.$$

7. LE COCYCLE DE KONTSEVICH-ZORICH EST NON UNIFORMÉMENT HYPERBOLIQUE (FIN)

Pour notre propos, ce qu'il faut retenir de la section précédente c'est que pour presque tout q l'espace instable $E^+(q)$ (resp. $E^-(q)$) ne dépend que (de la classe de cohomologie dans $H^1(M, \Sigma_q, \mathbb{R})$) du feuilletage horizontal $\mathrm{Im}(q^{1/2}) = 0$ (resp. vertical $\mathrm{Re}(q^{1/2}) = 0$). Revenons à la formule de la proposition 5.4.

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = \frac{1}{\mu_\kappa^{(1)}(\mathcal{C}_\kappa^{(1)})} \int_{\mathcal{C}_\kappa^{(1)}} \Phi_k(q, E_k^+(q)) d\mu_\kappa^{(1)}(q),$$

où $E_k^+(q)$ est l'espace $H^1(M, \mathbb{R})$ de dimension k correspondant aux exposants $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Comme on suppose $\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_g = 0$ on a donc d'après la proposition 5.4 que pour $\mu_\kappa^{(1)}$-presque tout q

$$\Phi_k(q, E^+(q)) = \Lambda_1(q) + \cdots + \Lambda_g(q).$$

Si on choisit $\{c_1, \ldots, c_g\} \in H^1(M_q, \mathbb{R})$ une base orthonormale (pour la norme de Hodge) telle que $\{c_1, \ldots, c_k\}$ soit une base de $E_k^+(q)$ et si on pose $c_i = \mathrm{Re}(m_i^+ q^{1/2})$ on aura alors presque partout

$$\sum_{i,j=k+1}^{g} |B_q(m_i^+, m_j^+)|^2 = 0. \tag{7}$$

Nous allons démontrer que si $k < g$ cette égalité est violée sur un ensemble de q de mesure positive. La belle idée de Forni est la suivante :

A) comme la dépendance de $E^\pm(q)$ par rapport à q est mesurable, on peut trouver un ensemble de $\mu_\kappa^{(1)}$-mesure positive proche de 1 tel que sur cet ensemble $q \mapsto E^\pm(q)$ soit continue et générique pour le théorème d'Oseledec ;

B) il existe des différentielles quadratiques (que Forni appelle lagrangiennes) i) dont toutes les feuilles verticales sont fermées (en dehors de celles qui passent par les singularités) ; ii) dont les classes d'homologies engendrent un sous-espace lagrangien Λ de $H_1(M, \mathbb{R})$; iii) telles que le dual de Poincaré $\mathcal{L}_0 = P(\Lambda)$ de ce sous-espace lagrangien soit transverse à $E^+(q)$; iv) pour lesquelles on peut choisir g feuilles régulières verticales $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ telles que $M - \cup\{\gamma_1, \ldots, \gamma_g\}$ soit une sphère moins $2g$ trous. Choisissons-en une q_0.

C) on peut trouver proche de q_0 une différentielle quadratique q dans l'ensemble défini en A) et des courbes $\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_g$ qui sont des q-trajectoires (des géodésiques pour la métrique plate R_q) presque verticales pour q et qui engendrent le même sous-espace lagrangien de $H_1(M, \mathbb{R})$. Appelons $a_1, \ldots, a_g$ ces courbes $\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_g$ et $b_1, \ldots, b_g$ une base duale symplectique de $a_1, \ldots, a_g$ (pour la forme d'intersection). Le dual de Poincaré $\overline{\mathcal{L}}_0'$ de l'espace lagrangien engendré par les b_i peut être choisi transverse à $E^-(q)$.

D) On laisse agir le flot géodésique jusqu'au temps T grand, de façon que les espaces $E^+(q_T)$ de dimension k et l'espace lagrangien $\overline{\mathcal{L}}_0'(T)$ soient proches. On a ainsi au-dessus de q_T deux espaces $E^+(q_T)$ et $\overline{\mathcal{L}}_0'(T)$ qui sont proches (on a utilisé le fait que $\overline{\mathcal{L}}_0'$ et $E^-(q)$ sont transverses).

E) Forni effectue une déformation de (M, q_T) qui l'amène au bord de l'espace des modules (à la limite on obtient une surface pincée) tout en préservant le feuilletage horizontal. Pour cela : i) par un élément du flot horocyclique on peut faire en sorte que les q-trajectoires $a_i = \overline{\gamma}_i(T)$ (qui font de petits angles non nuls avec le feuilletage vertical) deviennent des trajectoires verticales sans que l'on change le feuilletage horizontal ; ii) on effectue ensuite un pincement $(M, \widetilde{q}_T)$ le long des courbes $a_1, \ldots, a_g$ (il faut imaginer que les bouts de cylindre dont les génératrices horizontales qui sont orthogonales aux courbes a_i qui les entourent deviennent très longs, les longueurs des courbes a_i restant constantes) ; iii) on revient par l'inverse du flot horocyclique : on a effectué une conjugaison. Les courbes a_i et le feuilletage horizontal font toujours le même angle (mesuré par la nouvelle différentielle quadratique $\widetilde{q}_T$). Comme on a préservé le feuilletage horizontal et que $E^+(q)$ ne dépend que de la classe de cohomologie dans $H^1(M, \Sigma, \mathbb{R})$ du feuilletage horizontal, $E^+(q_T)$ et $E^+(\widetilde{q}_T)$ sont les mêmes. On a donc au-dessus du point $\widetilde{q}_T$, qui est près du bord de l'espace des modules, un espace instable $E^+(\widetilde{q}_T) = E^+(q_T)$ et un plan lagrangien $\overline{\mathcal{L}}_0(\widetilde{q}_T)$ (qui est le dual de Poincaré de l'espace engendré par les courbes b_i) qui sont proches.

F) Mais dans cette situation les calculs sont plus faciles à faire et on peut voir que si on a suffisamment pincé

$$|B_q(m_i^+, m_j^+)| \geqslant (1/2)$$

où les m_i sont associés aux courbes b_i (via la dualité de Poincaré) : si $\{c_1, \ldots, c_g\}$ est une base orthonormale pour la forme de Hodge du dual de Poincaré de l'espace engendré par les b_i, on a posé $c_i = \mathrm{Re}(m_i^+ q^{1/2})$.

G) En utilisant la continuité de B_q, Forni trouve ainsi un ensemble de mesure positive où (7) n'est pas satisfaite.

8. LE COCYCLE DE FORNI

Le théorème fondamental qui géométrise les résultats précédents est le suivant :

Théorème 8.1. — *Le fibré $\mathcal{Z}^1_\kappa \subset \mathcal{H}^{-1}_\kappa$ des courants fermés d'ordre* 1 *admet la décomposition suivante qui est G^F_t-invariante :*

$$\mathcal{Z}^1_\kappa = \mathcal{B}^1_{\kappa,+} \oplus \mathcal{B}^1_{\kappa,-} \oplus \mathcal{E}^1_\kappa.$$

– *Le fibré $\mathcal{E}^1_\kappa$ est défini au-dessus de* tout *point $q \in \mathcal{M}_\kappa$ et sa fibre $\mathcal{E}^1_q$ (de dimension infinie) au-dessus du point q est l'ensemble des courants exacts de $\mathcal{Z}^1_q$*

$$\mathcal{E}^1_q = \{dU, \quad U \in L^2_q(M)\}.$$

– *Pour $\mu^{(1)}_\kappa$-presque tout q les fibres $\mathcal{B}^1_{\pm q}$ de $\mathcal{B}^1_{\kappa,\pm}$ sont de dimensions finies et égales.*

– *La restriction du cocycle de Forni G^F_t au fibré*

$$\mathcal{B}^1_\kappa = \mathcal{B}^1_{\kappa,+} \oplus \mathcal{B}^1_{\kappa,-},$$

est mesurablement isomorphe au cocycle de Kontsevich-Zorich (défini sur le fibré $\mathcal{H}^1_\kappa(M,\mathbb{R})$ de fibre $H^1(M_q,\mathbb{R})$) et il a donc le même spectre de Lyapunov. Les fibrés $\mathcal{B}^1_{\kappa,\pm}$ correspondent à $E^\pm_\kappa$.

– *L'exposant de Lyapunov du cocycle de Forni sur $\mathcal{E}^1_\kappa$ est zéro.*

9. DÉVIATIONS DES MOYENNES ERGODIQUES

9.1. Comment évaluer une moyenne ergodique

Considérons le cas où le champ de vecteurs X que l'on étudie est le champ S introduit précédemment. Pour une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ « régulière » on veut évaluer pour un $p \in M$ générique le comportement quand $t \to \infty$ de

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(\Phi^s_S(p))ds$$

où Φ_S est le flot associé à S. L'intégrale précédente se récrit

$$\int_0^t f(\Phi^s_S(p))ds = \int_{\gamma^t_+(p)} \alpha \tag{8}$$

où $\gamma^t_+(p)$ est le chemin (non fermé) $\Phi^s_S(p)$ pour $0 \leqslant s \leqslant t$ et α est la 1-forme (non fermée)

$$\alpha = f\eta_T.$$

Si on identifie $\gamma^t_+(p)$ à un courant on a

$$\int_0^t f(\Phi^s_S(p))ds = (\gamma^t_+(p) \wedge \alpha)(1)$$

Soit $I_{+q}(p)$ (resp. $I_{-q}(p)$) le segment vertical (resp. horizontal) centré en p et de longueur $l(q)$ où $l(q)$ est la longueur de la plus petite connexion géodésique entre deux singularités de q. Nous dirons que T est un *temps de retour horizontal (resp. vertical)* de p si $\Phi_q(p,T) \in I_{+q}(p)$ (resp. $\Phi_{-q}(p,T) \in I_{-q}(p)$) et le segment d'orbite $\gamma_q^T(p)$ (resp. $\gamma_{-q}^T(p)$) est appelé une trajectoire de retour horizontale (resp. verticale). Le *premier temps de retour* horizontal (resp. vertical) est défini comme le plus petit temps de retour horizontal (resp. vertical). Pour tout temps T (qui n'est pas forcément un temps de retour) on peut fermer la trajectoire horizontale (resp. verticale) $\gamma_q^T(p)$ (resp. $\gamma_{-q}^T(p)$) par le plus petit segment géodésique joignant les extrémités de $\gamma_{\pm}^T(q)$ et on note $\widehat{\gamma}_{\pm q}^T(p)$ le chemin fermé ainsi obtenu. Si T est un temps de retour, le segment qui fait la jonction est évidemment vertical (resp. horizontal).

Puisque

$$(\mathcal{F}_{q_t}, \mathcal{F}_{-q_t}) = (e^{-t}\mathcal{F}_q, e^t\mathcal{F}_{-q}),$$

toute trajectoire de retour horizontale pour $\mathcal{F}_{q_t}$ est une trajectoire de retour horizontale pour $\mathcal{F}_q$ (au moins pour $t < 0$, $|t|$ suffisamment grand).

9.2. Temps de retour principaux

Considérons une suite de temps négatifs $-t_k$ tels que q_{-t_k} soient très proches de q_0 dans $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$. L'ergodicité du flot de Teichmüller sur $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ pour $\mu_\kappa^{(1)}$ garantit l'existence d'une telle suite. Les propriétés métriques des q_{-t_k} sont donc essentiellemnt les mêmes que celles de q, en particulier les longueurs $l(q_{-t_k})$ des plus petits segments géodésiques entre les singularités de q_{-t_k} sont pratiquement les mêmes et par conséquent, puisque les longueurs des intervalles verticaux $I_{q_{-t_k}}(p)$ dans la métrique définie par q sont très petits, on a une suite décroissante d'intervalles emboîtés $I_q(p) \supset \cdots \supset I_{q_{-t_k}}(p) \supset I_{q_{-t_{k+1}}}(p)$. Si $T = T_{q_{-t_k}}^{(1)}(p)$ est un temps de premier retour pour q_{-t_k} alors Te^{t_k} est un temps de retour pour q (mais pas de premier retour). On dit que les

$$T_q^{(k)}(p) = Te^{t_k} = T_{q_{-t_k}}^{(1)}(p)e^{t_k} \tag{9}$$

sont des temps de retour principaux pour q (en p). Tels que nous les avons définis les temps de retour ne sont pas vraiment canoniques. Par contre près d'un q « générique » pour Oseledec (et pour d'autres propriétés) on peut choisir sur un petit bout d'hypersurface contenant q et transverse au flot géodésique un ensemble $\mathcal{P}$ de mesure positive (de densité proche de 1) et définir les $-t_k$ comme les temps de retour sur $\mathcal{P}$ de $G_t(q)$ $(t < 0)$.

Si on note $\gamma_q^{(k)}(p)$ la trajectoire de retour horizontale correspondant au temps $T_q^{(k)}(p)$ et $\widehat{\gamma}_q^{(p)}$ la trajectoire fermée associée on a

– en homologie

$$\widehat{\gamma}_q^{(k)}(p) = G_{t_k}^{KZ}(\widehat{\gamma}^{(1)}_{G^{KZ}_{-t_k}(q)}(p)),$$

(on a noté G^{KZ} le cocycle de Kontsevich-Zorich agissant en homologie) ;

– dans $\mathcal{Z}^1$ les courants tempérés fermés d'ordre 1

$$\widehat{\gamma}_q^{(k)}(p) = G_{t_k}^{F}(\widehat{\gamma}^{(1)}_{G^{F}_{-t_k}(q)}(p));$$

– et dans $\mathcal{H}^{-1}$ les courants tempérés d'ordre 1

$$\gamma_q^{(k)}(p) = G_{t_k}^F(\gamma^{(1)}_{G^F_{-t_k}(q)}(p)).$$

Comme nous avons besoin d'estimer des quantités de la forme (8) ce sont plutôt les deux dernières égalités qui sont importantes. Si on note $\Pi_q^{\pm i} : \mathcal{Z}_q^1 \to E_i^{\pm}$ la projection sur l'espace stable/instable (de dimension finie) correspondant à l'exposant de Lyapunov $\pm\lambda_i'$ on a par exemple une estimée de la forme

$$|\Pi_q^{\pm i}(\widehat{\gamma}_q^{(k)}(p))|_{-1} \leqslant \mathrm{cste}\cdot\exp(\lambda_i^{\pm}|t_k|) \tag{10}$$

pour tous $\lambda_i^+ > \lambda'{}_i > 0$, $-\lambda_i' < \lambda_i^- < 0$.

9.3. Découper une orbite en trajectoires de retour principales

Le lemme « arithmétique » suivant est pour cela crucial. C'est l'analogue du lemme fondamental de la preuve du théorème de Denjoy-Koksma (*cf.* aussi Zorich [19]).

Lemme 9.1. — *Sous les hypothèses précédentes, pour tout $T > 0$ il existe une suite finie de points $(p_j^{(k)})$ de l'orbite $\gamma_q^T(p)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m_k$ tels que les trajectoires de retour principales $\gamma_q^{(k)}(p_j^{(k)})$ ne s'intersectent pas et telles que*

$$\gamma_q^T(p) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_k}\gamma_q^{(k)}(p_j^{(k)}) + b_q^T(p), \tag{11}$$

avec

$$m_k \leqslant \mathrm{cste}\cdot\exp(|t_{k+1}| - t_k|), \tag{12}$$

et la longueur du reste vérifie

$$L(b_q^T(p)) \leqslant \mathrm{cste}\,. \tag{13}$$

Il n'est pas complètement évident, mais Forni le démontre, que l'inégalité (13) entraîne (pour q dans un compact $\mathcal{P}$)

$$|b_q^T(p)|_{-1} \leqslant \mathrm{cste}\,. \tag{14}$$

Voyons à présent comment on utilise les résultats précédents.

Déjà, puisque l'ensemble $\mathcal{P}$ de la section 9.2 est de mesure positive, disons μ, on a du fait de l'ergodicité du flot de Teichmüller sur $\mathcal{M}_\kappa$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|t_k|}{k} = \frac{1}{\mu},$$

ce qui donne $|t_{k+1}-t_k| \leqslant C_\varepsilon \varepsilon k$ pour tout $\varepsilon > 0$ et par conséquent d'après (10), (11), (12), (14) et le théorème 8.1 on obtient

$$\begin{aligned}
\limsup_{T\to\infty} \frac{\log|\Pi_q^{+i}(\gamma_q^T(p))|_{-1}}{\log T} &\leqslant \lambda_i',\\
\limsup_{T\to\infty} \frac{\log|\Pi_q^{-i}(\gamma_q^T(p))|_{-1}}{\log T} &= 0,\\
\limsup_{T\to\infty} \frac{\log|\Pi_q^{\mathcal{E}}(\gamma_q^T(p))|_{-1}}{\log T} &= 0.
\end{aligned}$$

On a utilisé en outre la définition (9) des temps de retour principaux et un résultat que démontre Forni qui dit qu'on peut choisir la section $\mathcal{P}$ (définie section 9.2) de façon que les temps de *premier* retour soient bornés.

Enfin notons que la première inégalité est une égalité pour presque tout p (mais il faut travailler un peu plus).

9.4. Moyennes ergodiques pour le champ de vecteurs S

Comme précédemment notons $E_i^+(q)$ le sous-espace de $\mathcal{B}_q^1(M)$ (l'ensemble des courants basiques tempérés d'ordre 1) associé à l'exposant $\lambda_i' > 0$ de multiplicité m_i (rappelons que c'est l'image de la projection Π_q^{+i}) et soit $C_{i,j}^+$, $1 \leqslant j \leqslant m_i$ une base de courants basiques tempérés d'ordre 1 de $E^i(q)$. Les distributions tempérées d'ordre 1

$$\mathcal{D}_{i,j}^S = C_{i,j}^+ \wedge \eta_T,$$

sont S-invariantes. De plus, pour toute fonction dans $H^1(M)$

$$\begin{aligned}
C_{i,j}^+ \wedge (f\eta_T) &= fC_{i,j} \wedge \eta_T\\
&= \mathcal{D}_{i,j}^S(f).
\end{aligned}$$

Par conséquent si on note $\mathcal{I}_S^1(\lambda_i')$ l'espace des distributions S-invariantes engendrées par les $\mathcal{D}_{i,j}$, $1 \leqslant j \leqslant m_i$, on a bien, en utilisant le résultat de la fin de la section précédente, que si f dans $H^1(M)$ est annulée par les distributions $\mathcal{D} \in \mathcal{I}_S^1(\lambda_1') \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}_S^1(\lambda_i')$ alors

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{\log|\int_0^T f(\Phi_S(p,\tau))d\tau|}{\log T} \leqslant \lambda_{i+1}'.$$

La démonstration de l'existence de distributions tempérées d'ordre 1, $\mathcal{D}_{i+1} \in \mathcal{I}_S^1(\lambda_{i+1})$, dont la non annulation par f assure l'égalité dans l'équation précédente est un peu plus délicate.

9.5. Le cas général

Supposons à présent que X soit un champ de vecteurs dont le flot est quasi-minimal avec des singularités de type selle d'indice ι_k aux points p_k, $k = 1, \dots, \sigma$, et préserve une forme volume ω (non singulière). On sait alors que l'on peut réaliser le feuilletage $\mathcal{F}_X$ en orbites de X par le feuilletage horizontal d'une différentielle quadratique q (qui est le carré d'une forme holomorphe) avec $\kappa = -2\iota$. Il existe alors une fonction W avec des zéros d'ordre fini aux points de Σ telle que $\omega = W^{-1}\omega_q$ et $X = WS$. On considère l'espace de Sobolev

$$H^1_W(M) = \{f,\ W^{-1}f \in H^1(M)\},$$

et on pose pour $f \in H^1_W(M)$

$$\mathcal{D}^X(f) = \mathcal{D}^S(W^{-1}f);$$

la distribution $\mathcal{D}^X \in H^{-1}_W(M)$ est X-invariante. Notons $\gamma^T_X(p)$ l'orbite de p du temps 0 au temps T sous l'action de X. Il existe un temps $\widetilde{T}(T)$ tel que

$$\gamma_S^{\widetilde{T}(T)}(p) = \gamma^T_X(p).$$

Pour toute fonction $f \in H^1_W(M)$ on a

$$\begin{aligned}\int_0^T f(\Phi_X(p,\tau))d\tau &= \int_{\gamma^T_X(p)} W^{-1} f\eta_T,\\ &= \int_{\gamma_S^{\widetilde{T}(T)}(p)} W^{-1} f\eta_T.\end{aligned}$$

Mais la moyenne $(1/T)\int_0^T W(\Phi_X(p,\tau))d\tau$ qui est égale à $(1/T)L_q(\gamma^T_X(p))$ (où $L_q(\cdot)$ est la q-longueur), c'est-à-dire $(\widetilde{T}(T)/T)$, converge d'après le théorème ergodique vers $\int_M W\omega = \int_M \omega_q = 1$. On obtient donc la conclusion du théorème.

RÉFÉRENCES

[1] P. Arnoux – « Ergodicité générique des billards polygonaux [d'après Kerchoff, Masur, Smillie] », in *Sém. Bourbaki (1987/88)*, Astérisque, vol. 161-162, Société Mathématique de France, 1988, p. 202–221.

[2] G. De Rham – *Variété différentiables, formes, courants, formes harmoniques*, Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 1222b, Hermann, Paris, 1973.

[3] A. Fathi, F. Laudenbach & V. Poénaru – *Travaux de Thurston sur les surfaces, Séminaire Orsay*, Astérisque, vol. 66-67, Société Mathématique de France, 1979.

[4] G. Forni – « Solution of the cohomological equation for area-preserving flows on compact surfaces of higher genus », *Ann. of Math.* **146** (1997), p. 295–344.

[5] ______, « Deviation of ergodic averages for area preserving flows on surfaces of higher genus », *Ann. of Math.* **155** (2002), p. 1–103.

[6] A. Katok – « Infinitesimal Lyapunov functions, invariant cones families and stochastic properties of smooth dynamical systems », *Ergodic Theory Dynamical Systems* **14** (1994), p. 757–785, with the collaboration of K. Burns.

[7] A. Katok & B. Hasselblat – *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[8] S. Kerchoff, H. Masur & J. Smillie – « Erodicity of Billard flows and Quadratic Differentials », *Ann. of Math.* **124** (1986), p. 293–311.

[9] M. Kontsevich – « Lyapunov exponents and Hodge Theory », in *The Mathematical Beauty of Physics (Saclay, 1996)*, Adv. Ser. Math. Phys., vol. 24, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997, p. 318–332.

[10] M. Kontsevich & A. Zorich – « Lyapunov exponents and Hodge Theory », arXiv : `hep-th/9701164v1`, 1997.

[11] S. Marmi, P. Moussa & J.-C. Yoccoz – « The cohomological equation for Roth type interval exchange map », preprint arXiv : `math.DS/0403518v1`, 30 mars 2004.

[12] H. Masur – « Interval exchange transformations and measured foliations », *Ann. of Math.* **115** (1982), p. 169–200.

[13] ———, « Logarithmic law for geodesics in moduli space », in *Mapping Class Groups and Moduli Spaces of Riemann Surfaces (Göttingen, 1991/ Seattle, WA, 1991)*, Contemp. Math., vol. 150, American Mathematical Society, Providence, RI, 1993, p. 229–245.

[14] L. Schwartz – *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[15] W.A. Veech – « Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps », *Ann. of Math.* **115** (1982), p. 201–242.

[16] ———, « The Teichmüller geodesic flow », *Ann. of Math.* **124** (1986), p. 441–530.

[17] M. Wojtkowski – « Invariant family of cones and Lyapunov exponents », *Ergodic Theory Dynamical Systems* **5** (1985), p. 145–161.

[18] A. Zorich – « Finite Gauss measure on the space of interval exchange transformations. Lyapunov exponents », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **46** (1996), p. 325–370.

[19] ———, « Deviation for interval exchange transformation », *Ergodic Theory Dynamical Systems* **17** (1997), p. 1477–1499.

Raphaël KRIKORIAN

Laboratoire de Probabilités
et Modèles Aléatoires
Université Pierre et Marie Curie
Boîte courrier 188
F-75252 Paris Cedex 05
E-mail : `krikoria@ccr.jussieu.fr`