Séminaire BOURBAKI Novembre 2003
56e année, 2003-2004, n$^{\text{o}}$ 925, p. 15 à 28

SLE ET INVARIANCE CONFORME
[d'après Lawler, Schramm et Werner]

par **Jean BERTOIN**

1. INTRODUCTION

La physique statistique s'intéresse à des systèmes macroscopiques définis à l'échelle microscopique sur un réseau par un grand nombre de données aléatoires, éventuellement corrélées. Le modèle microscopique est souvent facile à définir ; on s'attend à ce que le changement d'échelle du microscopique au macroscopique induise une limite en loi vers un modèle continu qui garde la trace des propriétés spécifiques du modèle discret.

Un exemple fondamental est la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}^d$: on considère une trajectoire aléatoire $S : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^d$, disons issue de $S_0 = 0$, telle que les accroissements $\xi_n = S_n - S_{n-1}$ soient des variables indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.), avec $\mathbb{P}(\xi_n = x) = 1/2d$, où x désigne l'un des $2d$ plus proches voisins de 0 sur $\mathbb{Z}^d$. Si l'on effectue le changement d'échelle

$$W_t^{(N)} = \sqrt{d/N}\, S_{[Nt]}, \quad t \geqslant 0,$$

alors le Théorème Central Limite implique que pour tous $0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_k$, le k-uplet $(W_{t_1}^{(N)}, \ldots, W_{t_k}^{(N)})$ converge en loi vers $(W_{t_1}^{(\infty)}, \ldots, W_{t_k}^{(\infty)})$, où $(W_t^{(\infty)}, t \geqslant 0)$ est un processus dont les accroissements sont indépendants et tels que pour $0 \leqslant s \leqslant t$, $W_t^{(\infty)} - W_s^{(\infty)}$ suive la loi de Gauss de moyenne nulle et de matrice de covariance $(t-s)\,\mathrm{Id}$. Par ailleurs, le fait que la marche aléatoire simple ne saute que sur ses plus proches voisins suggère que sa limite macroscopique devrait avoir des trajectoires continues, et il est naturel de chercher à construire directement une mesure de probabilité $\mathcal{W}$ sur $\mathcal{C}([0, \infty[, \mathbb{R}^d)$, dont les marginales fini-dimensionnelles sont celles de $W^{(\infty)}$. C'est ce qu'a accompli Norbert Wiener, la mesure $\mathcal{W}$ s'appelle la mesure de Wiener, et le processus correspondant est le mouvement brownien.

Pour de nombreux modèles discrets de la physique statistique en dimension 2, et pour la valeur critique du paramètre à laquelle se produit la transition de phase, les physiciens prédisent non seulement l'existence d'une limite continue, mais également que cette limite vérifie une propriété d'invariance conforme. Pour reprendre l'exemple du mouvement brownien dans $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$, donnons-nous deux domaines simplement connexes $D, D' \neq \mathbb{C}$ contenant l'origine et $f : D \to D'$ une application conforme qui met D et D' en bijection. Notons $\mathcal{W}_D$ (respectivement $\mathcal{W}_{D'}$) la loi sur l'espace des courbes continues à valeurs dans D (respectivement D') induite par la trajectoire brownienne arrêtée la première fois où elle quitte D (respectivement D'). Alors l'image de $\mathcal{W}_D$ par l'application qui transforme une courbe dans D en une courbe dans D' par l'application conforme f, est $\mathcal{W}_{D'}$. Cette propriété importante du mouvement brownien complexe a été observée par Paul Lévy ; il est intéressant de noter qu'elle est vérifiée pour la limite continue, mais pas pour le modèle discret, c'est-à-dire la marche aléatoire symétrique simple.

Penchons-nous maintenant sur un modèle voisin, celui de la marche aléatoire auto-évitante. Plus précisément, on se donne toujours un domaine simplement connexe $D \neq \mathbb{C}$, on considère la marche aléatoire simple symétrique sur le réseau $N^{-1}\mathbb{Z}^2$ que l'on arrête lorsqu'elle quitte D. La probabilité que cette marche ne visite jamais deux fois ou plus le même site est strictement positive. On peut donc la conditionner par cet événement et on obtient ainsi une marche auto-évitante dans D. D'après ce qui précède, on s'attend d'une part à l'existence d'une limite continue donnée par une mesure de probabilité sur les trajectoires auto-évitantes à valeurs dans D, et d'autre part à ce que cette limite continue vérifie la propriété d'invariance conforme. Pour l'instant, ceci est toujours un problème ouvert. On peut également chercher à construire directement un modèle continu qui satisfasse aux propriétés fondamentales qu'on attend. Une approche naïve consisterait à tenter de conditionner une trajectoire brownienne dans D à ne jamais se recouper, mais ce conditionnement ne peut être réalisé rigoureusement[(1)] car il est bien connu que presque sûrement, le mouvement brownien plan visite à nouveau des points par lesquels il est déjà passé, et ce pour des intervalles de temps arbitrairement petits.

Depuis quelques années, des avancées spectaculaires ont été réalisées dans ce domaine par Schramm, Lawler, Werner et Smirnov. Elles reposent de façon essentielle sur une famille à un paramètre de mesures de probabilités sur les courbes du plan complexe vérifiant une propriété d'invariance conforme, qui ont été construites par Oded Schramm. Il a été établi rigoureusement que certains modèles discrets en physique statistique admettent effectivement une limite continue qui peut être décrite par ces mesures (pour des valeurs adéquates du paramètre), et des conjectures très précises prédisent que c'est encore le cas pour d'autres modèles importants. En outre, ces mesures permettent de calculer rigoureusement des valeurs des exposants critiques

[(1)]Symanzik [18] a cherché à rendre rigoureux ce conditionnement, mais son programme conduit à une loi absolument continue par rapport à la mesure de Wiener, et donc pour laquelle les trajectoires ont toujours des points multiples.

pour le mouvement brownien plan ou la percolation (*cf.* [8, 9, 17]), et de vérifier ainsi les prédictions des physiciens (voir notamment [5] et [6]). Schramm a construit ces objets en introduisant l'aléa dans une méthode due à Loewner, qui, de façon informelle, permet de coder certaines familles croissantes de compacts du demi-plan à l'aide de courbes réelles. Il les a nommés *Stochastic Loewner Evolution* (SLE) ; il est désormais plus juste d'utiliser ces mêmes initiales pour *Schramm-Loewner Evolution.*

L'objet de cet exposé est de proposer une présentation succincte et non technique de ce thème, l'un des plus importants actuellement en théorie des probabilités. Nous renvoyons au papier de Lawler [7] pour une introduction plus détaillée à SLE, et aux excellentes notes de cours de Werner [19] et aux travaux qui y sont cités pour une présentation complète.

2. L'ÉQUATION DE LOEWNER ET SA VERSION STOCHASTIQUE

2.1. L'équation de Loewner

Notons $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ le demi-plan supérieur. Soit $K \subseteq \overline{\mathbb{H}}$ un compact tel que $H := \mathbb{H} \backslash K$ soit simplemement connexe ; on dira qu'un tel K est une *cosse* (hull en anglais). Le théorème de Riemann assure l'existence d'applications conformes $g_K : H \to \mathbb{H}$ avec $g_K(\infty) = \infty$. Le principe de réflection de Schwarz permet d'étendre analytiquement g_K à $\{z \in \mathbb{C} : z \notin K \text{ et } \overline{z} \notin K\}$. Le développement analytique de g_K au voisinage de ∞ (ce qui revient à développer $z \mapsto 1/g_K(1/z)$ au voisinage de $z = 0$) s'écrit alors sous la forme

$$g_K(z) = bz + a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots$$

avec $b > 0$ et $a_j \in \mathbb{R}$. Il y a une famille à 2 paramètres de telles applications conformes g_K (observer que pour tous $c > 0$ et $d \in \mathbb{R}$, l'application $z \mapsto g_K(cz) + d$ vérifie les mêmes propriétés), et on convient de choisir la normalisation, parfois dite hydrodynamique, pour laquelle $b = 1$ et $a_0 = 0$. Autrement dit, on a

$$g_K(z) = z + a_1/z + O(z^{-2}), \quad z \to \infty.$$

Le coefficient $a_1 := a(K)$ s'appelle la capacité de K, il a une interprétation probabiliste simple : considérons un mouvement brownien complexe W issu de iy, et notons τ le premier temps d'atteinte de $K \cup \mathbb{R}$. Alors il est facile de voir que

$$a(K) = \lim_{y\to\infty} y\mathbb{E}^{iy}(\operatorname{Im}(W_\tau)).$$

L'observation élémentaire suivante va jouer un rôle important dans la suite : si $J \subseteq K$ sont deux cosses, correspondant aux applications conformes normalisées g_J

et g_K, et si on note $L = \overline{g_J(K\backslash J)}$, alors il est facile de vérifier la formule dite de subordination

$$g_K = g_L \circ g_J. \tag{1}$$

En particulier, on en déduit l'identité entre capacités

$$a(K) = a(J) + a(L).$$

De façon informelle, ceci montre que la croissance des compacts de $\mathbb{H}$ est très naturellement liée à la composition des applications conformes.

Loewner s'est intéressé à la situation suivante. On se donne une courbe continue simple $\gamma : [0, \infty[\to \overline{\mathbb{H}}$ issue de $\gamma(0) = 0$, avec $\gamma(t) \in \mathbb{H}$ pour $t > 0$, et on prend $K_t := \gamma[0, t]$, de sorte que $(K_t, t \geqslant 0)$ est une famille de compacts simples de $\overline{\mathbb{H}}$ qui croît continûment. On suppose que $\lim_{t\to\infty} a(\gamma[0, t]) = \infty$, et pour simplifier, on se ramène au cas où la paramétrisation de γ est choisie de sorte que $a(K_t) = 2t$. Pour chaque $t \geqslant 0$, on posera $g_t := g_{K_t}$. Les applications conformes g_t permettent de transformer la courbe γ à valeurs dans $\mathbb{H}$ en une courbe $\omega : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\omega(t) := g_t(\gamma(t)), \quad t \geqslant 0.$$

Loewner a établi une relation très simple entre les applications conformes g_t et la courbe réelle ω (voir par exemple [1]).

Proposition 2.1. — *Pour tout $z \in \overline{\mathbb{H}}$, $g_t(z)$ vérifie l'équation différentielle*

$$\partial_t g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \omega(t)}, \quad g_0(z) = z. \tag{2}$$

Cette équation est satisfaite jusqu'au premier temps T_z en lequel $g_t(z) = 0$.

Il est également naturel de prendre un autre point de vue. Au lieu de partir d'une courbe simple γ dans $\overline{\mathbb{H}}$ et de construire la courbe réelle ω, on se donne une fonction $\omega : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ avec $\omega(0) = 0$, puis on construit pour chaque $z \in \overline{\mathbb{H}}$ une fonction $t \mapsto g_t(z)$ en résolvant l'équation (2). Cette dernière est bien définie jusqu'à ce que $g_t(z) - \omega(t)$ atteigne 0, temps que l'on note T_z. Introduisons encore

$$K_t = \left\{z \in \overline{\mathbb{H}} : T_z \leqslant t\right\}. \tag{3}$$

On appelle $(K_t, t \geqslant 0)$ la *chaîne de Loewner* associée à la fonction ω. On a alors le résultat suivant.

Proposition 2.2. — *Avec les notations et hypothèses précédentes, pour tout $t > 0$, g_t est la transformation conforme normalisée de $\mathbb{H}\backslash K_t$ vers $\mathbb{H}$.*

Remarque 2.3. — Lorsque la fonction ω est suffisamment régulière (plus précisément, hölderienne d'ordre 1/2 avec un coefficient de Hölder assez petit), la fonction réciproque g_t^{-1} se prolonge continûment à $\omega(t) \in \partial\mathbb{H}$ (voir [13]). On peut alors récupérer une courbe γ par l'identité $\gamma(t) = g_t^{-1}(\omega(t))$, de sorte que les compacts K_t sont donnés par des courbes simples $\gamma : [0, \infty[\to \overline{H}$. Mais en général, K_t n'est pas nécessairement donné par une courbe simple.

2.2. SLE cordal

Schramm [15] a introduit la notion d'évolution de Loewner stochastique en prenant pour la fonction ω dans les propositions 2.1–2.2, un mouvement brownien réel de variance $\kappa > 0$, *i.e.*

$$\omega(t) = W_t = \sqrt{\kappa} B_t,$$

où $(B_t, t \geqslant 0)$ est un mouvement brownien standard. Pour un probabiliste, ce choix est bien sûr très naturel, car les mouvements browniens sont les seuls processus aléatoires à trajectoires continues, qui vérifient une propriété d'invariance par changement d'échelle, et dont les accroissements sont indépendants.

Définition 2.4 (Schramm). — *Pour $\kappa > 0$, on appelle SLE_κ cordal la chaîne de Loewner associée à un mouvement brownien $(W_t, t \geqslant 0)$ de variance κ.*

Le qualificatif *cordal* fait référence au fait que la famille de compacts $(K_t, t \geqslant 0)$ croît entre deux points de la frontière $\partial\mathbb{H}$ du domaine, 0 et ∞. Schramm a construit également des processus SLE radiaux, *i.e.* pour lesquels les compacts croissent d'un point de la frontière jusqu'à atteindre un point intérieur donné. Dans cet exposé, nous nous concentrerons sur le cas cordal, à l'exception de la section 4.4.

Sans entrer dans les détails, ayant défini $(K_t, t \geqslant 0)$, SLE_κ cordal dans $\mathbb{H}$ croissant de 0 vers ∞, pour tout domaine simplement connexe $D \neq \mathbb{C}$, et A, B deux points distincts de la frontière de D, on construit SLE_κ dans D croissant de A vers B en considérant $(g(K_t), t \geqslant 0)$, où $g : \mathbb{H} \to D$ désigne une application conforme avec $g(0) = A$ et $g(\infty) = B$.

Les propriétés de base du mouvement brownien se traduisent aisément pour SLE :

– Le brownien est symétrique, *i.e.* W et $-W$ ont la même loi ; il en découle que si $\widetilde{K}$ désigne le symétrique de K par rapport à l'axe imaginaire, alors $(K_t, t \geqslant 0)$ et $(\widetilde{K}_t, t \geqslant 0)$ ont la même loi.

– Invariance par changement d'échelle, *i.e.* pour tout $c > 0$, $(W_t, t \geqslant 0)$ et $(c^{-1/2} W_{ct}, t \geqslant 0)$ ont la même loi. Il s'ensuit que $(K_{ct}, t \geqslant 0)$ et $(cK_t, t \geqslant 0)$ ont la même loi.

– Propriété de Markov : si T est un temps d'arrêt dans $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$, la filtration naturelle de W, alors $(W_{T+t} - W_T, t \geqslant 0)$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$. Il s'ensuit que le processus $(g_{T+t}(K_{T+t} \backslash K_T) - W_T, t \geqslant 0)$ est également indépendant de $\mathcal{F}_T$ et est encore un SLE_κ.

La propriété suivante, due à Rohde et Schramm [14], fait appel à des propriétés plus fines du brownien.

Proposition 2.5. — (i) *Pour $\kappa \in]0,4]$, SLE_κ est une courbe simple p.s.*

(ii) *Pour $\kappa > 4$, il existe une courbe aléatoire continue γ qui n'est pas simple, mais qui ne se croise pas elle-même, telle que pour tout $t \geqslant 0$, $\mathbb{H}\backslash K_t$ coïncide avec la composante connexe infinie de $\mathbb{H}\backslash\gamma[0,t]$. Autrement dit, K_t est la réunion de $\gamma[0,t]$ et de l'intérieur de ses boucles.*

Remarque 2.6. — Il est intéressant de rappeler que la trajectoire brownienne n'est pas hölderienne d'ordre 1/2 (mais presque : localement, elle est hölderienne d'ordre $1/2-\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$), et de comparer le résultat (i) avec la remarque qui suit la proposition 2.2.

On voit clairement dans cet énoncé à quel point le comportement de SLE dépend de la valeur du paramètre κ, ce qui peut paraître a priori assez surprenant. Dans cette direction, mentionnons un résultat récent de Beffara [2] qui a montré que la dimension de Hausdorff de la courbe γ permettant de représenter SLE_κ vaut $\min(2, 1+\kappa/8)$, presque sûrement (sauf peut-être pour $\kappa = 4$).

On va maintenant présenter des propriétés cruciales de SLE_κ pour des valeurs particulières de κ, propriétés qui auront un rôle essentiel dans l'analyse de la limite continue de certains modèles de physique statistique.

3. PROPRIÉTÉS DE LOCALITÉ ET DE RESTRICTION

3.1. Localité pour $\kappa = 6$

On s'intéresse tout d'abord à l'image de SLE_κ par des applications conformes. Considérons une cosse A qui ne contient pas l'origine. Rappelons que g_A désigne l'application conforme normalisée de $\mathbb{H}\backslash A$ sur $\mathbb{H}$, et posons

$$\widetilde{K}_t = g_A(K_t) \quad \text{ pour } t < T := \inf\{s : K_s \cap A \neq \varnothing\}.$$

On a défini ainsi une nouvelle famille croissante de compacts $(\widetilde{K}_t, t < T)$; il est important d'observer que la paramétrisation est donnée en fonction de la capacité de $K_t = g_A^{-1}(\widetilde{K}_t)$ et non pas directement de $\widetilde{K}_t$.

On peut montrer que la famille $(\widetilde{K}_t, t < T)$ est elle aussi, à un changement de temps près, une chaîne de Loewner, qu'on peut donc représenter sous la forme des propositions 2.1–2.2. Plus précisément, si on note $\widetilde{g}_t$ l'application conforme normalisée de $g_A(\mathbb{H}\backslash(A\cup K_t))$ dans $\mathbb{H}$, et si on note $\alpha(t) = a(A\cup K_t) = a(A) + a(\widetilde{K}_t)$, alors on obtient à partir de (2) l'équation différentielle

$$\partial\widetilde{g}_t(z) = \frac{\partial\alpha(t)}{\widetilde{g}_t(z) - \widetilde{W}_t},$$

où $\widetilde{W}_t = h_t(W_t)$ et h_t est l'application conforme normalisée de $g_t(\mathbb{H}\backslash(A\cup K_t))$ dans $\mathbb{H}$.

Bien sûr, $\widetilde{W}$ n'est plus un mouvement brownien, mais la formule d'Itô (*i.e.* la formule de changement de variables du calcul différentiel pour le mouvement brownien), permet de vérifier que $\widetilde{W}$ satisfait l'équation différentielle stochastique

$$d\widetilde{W}_t = h_t'(W_t)dW_t + \left(\frac{\kappa}{2} - 3\right) h_t''(W_t)dt.$$

On voit sur cette expression que quelque chose de remarquable se passe lorsque $\kappa = 6$, car alors le terme de dérive est identiquement nul, de sorte que

$$\widetilde{W}_t = \int_0^t h_s'(W_s)dW_s,$$

où le terme de droite est une intégrale stochastique d'Itô. On sait qu'une telle intégrale peut être représentée sous la forme d'un mouvement brownien changé de temps. Plus précisément, on pose $\langle \widetilde{W} \rangle_t = \int_0^t h_s'(W_s)^2 ds$, et on définit implicitement $\widehat{W}$ par $\widehat{W}_{\langle \widetilde{W} \rangle_t} = \widetilde{W}_t$. Alors $\widehat{W}$ est un mouvement brownien de variance κ $(= 6)$. Par ailleurs, on peut vérifier également que $\langle \widetilde{W} \rangle_t = \frac{1}{2}(\alpha(t) - \alpha(0))$, de sorte que, finalement, si on définit implicitement $\widehat{g}_t$ par $\widetilde{g}_t = \widehat{g}_{\alpha(t)/2}$, alors

$$\partial_t \widehat{g}_t(z) = \frac{2}{\widehat{g}_t(z) - \widehat{W}_t}.$$

On a donc le théorème suivant, dû à Lawler, Schramm et Werner [8, 12] :

THÉORÈME 3.1 (Propriété de localité). — *Désignons par $\widetilde{T}$ le premier temps en lequel K_t atteint $g_t(\partial A)$. Pour $\kappa = 6$, à un changement de temps près, les processus $(\widetilde{K}_t - g_A(0),\ t < T)$ et $(K_t, t < \widetilde{T})$ ont la même loi.*

3.2. Restriction pour $\kappa = 8/3$

Si on applique les mêmes techniques pour étudier $h_t'(W_t)$ au lieu de $h_t(W_t)$ comme précédemment, on obtient par application de la formule d'Itô que

$$dh_t'(W_t) = h_t''(W_t)dW_t + \left(\frac{h_t''(W_t)}{2h_t'(W_t)} + (\kappa/2 - 4/3)h_t'''(W_t)\right)dt.$$

Cette fois, c'est la valeur $\kappa = 8/3$ qui joue un rôle remarquable ; en effet, on voit qu'alors

$$d[h_t'(W_t)^{5/8}] = \frac{5h_t''(W_t)}{8h_t'(W_t)^{3/8}}dW_t,$$

de sorte que $h_t'(W_t)^{5/8}$ est une martingale locale. Ceci permet de calculer les probabilités d'atteinte pour $SLE_{8/3}$:

PROPOSITION 3.2. — *Soit $(K_t, t \geqslant 0)$ un $SLE_{8/3}$ cordal. Alors pour toute cosse A qui ne contient pas l'origine,*

$$\mathbb{P}\,(\forall\, t \geqslant 0, K_t \cap A = \varnothing) = g_A'(0)^{5/8},$$

où $g_A : \mathbb{H}\backslash A \to \mathbb{H}$ est l'application conforme normalisée.

Donnons juste l'esquisse de la preuve. Notons T le premier temps en lequel K_t atteint A ($T = \infty$ lorsque K_t n'atteint jamais A). On vérifie d'abord que $M_t := h_t'(W_t)^{5/8}$ reste compris entre 0 et 1 pour tout $t \in [0, T[$, et converge vers 1 sur l'événement $T = \infty$ (rappelons que la normalisation des applications conformes impose $h_t'(\infty) = 1$) ; par ailleurs, on montre que $\lim_{t\to T-} h'(W_t) = 0$ lorsque $T < \infty$. Le théorème d'arrêt pour les martingales donne alors

$$\mathbb{P}(T = \infty) = \mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0) = h_0'(0)^{5/8} = g_A'(0)^{5/8}.$$

Une conséquence importante de ce calcul explicite est la propriété dite de restriction, vérifiée pas $SLE_{8/3}$ (*cf.* [12]).

Théorème 3.3 (Propriété de restriction). — *Soit $A \subset \mathbb{H}$ une cosse qui ne contient pas* 0*, et $(K_t, t \geqslant 0)$ un $SLE_{8/3}$ cordal. Alors la loi conditionnelle de K_∞ sachant $K_\infty \cap A = \varnothing$ est la même que celle de $f_A^{-1}(K_\infty)$, où f_A^{-1} désigne la réciproque de l'application conforme $f_A : \mathbb{H}\backslash A \to \mathbb{H}$ donnée par $f_A(z) = g_A(z) - g_A(0)$.*

Donnons encore seulement l'esquisse de la preuve. Soit $B \subset \mathbb{H}$ une cosse qui ne contient pas l'origine. Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}\left(f_A(K_\infty) \cap B = \varnothing \mid K_\infty \cap A = \varnothing\right) = \frac{\mathbb{P}\left(K_\infty \cap \left(f_A^{-1}(B) \cup A\right) = \varnothing\right)}{\mathbb{P}(K_\infty \cap A = \varnothing)}.$$

Si on note $C = A \cup f(B)$, alors on sait d'après (1) que $f_C = f_B \circ f_A$, puisque $B = f_A(f_A^{-1}(B))$. On déduit de la proposition 3.2 que le quotient ci-dessus vaut

$$\left(\frac{f_C'(0)}{f_A'(0)}\right)^{5/8} = \left(\frac{f_A'(0) f_B'(f_A(0))}{f_A'(0)}\right)^{5/8} = f_B'(0)^{5/8}.$$

En appliquant à nouveau la proposition 3.2, on peut identifier cette dernière quantité comme $\mathbb{P}(K_\infty \cap B = \varnothing)$. Autrement dit, les probabilités d'atteinte pour $f_A(K_\infty)$ sachant que $K_\infty \cap A = \varnothing$ sont les mêmes que pour K_∞, ce qui entraîne aisément l'assertion.

On peut montrer par ailleurs que $SLE_{8/3}$ cordal est la seule mesure de probabilités sur les courbes continues simples de 0 à ∞ dans $\mathbb{H}$ pour laquelle cette propriété de restriction est vraie. Ceci est à mettre en rapport avec le fait que la propriété de restriction est vérifiée également par la courbe brownienne. Plus précisément, on considère un mouvement brownien β dans $\mathbb{H}$ de 0 à ∞ (ce qui est facile à définir rigoureusement), et une cosse $A \subset \mathbb{H}$ qui ne contient pas l'origine. On note $f_A : \mathbb{H}\backslash A \to \mathbb{H}$ l'application conforme avec $f_A(0) = 0$ et $f_A(z) \sim z$ lorsque $z \to \infty$, et f_A^{-1} son inverse. Alors $f_A^{-1}(\beta)$ a, à un changement de temps près, la même loi que β conditionné à éviter A. Bien sûr, la courbe brownienne n'est pas simple (elle a même presque sûrement des points de multiplicité infinie) ; on ne peut donc pas identifier la courbe de β et $SLE_{8/3}$. Cependant, de façon tout à fait informelle, si on conditionne β à ne pas avoir de points multiples, ce conditionnement devrait préserver la propriété de restriction, et donc on peut s'attendre à ce que la courbe brownienne dans $\mathbb{H}$ de 0 à ∞

et conditionnée à être simple, soit décrite par $SLE_{8/3}$. Toujours de façon informelle, la courbe brownienne conditionnée à être simple est sensée apparaître à la limite continue de la marche aléatoire auto-évitante (déjà mentionnée dans l'introduction). Autrement dit, il est naturel de faire la conjecture que la limite continue de la marche aléatoire auto-évitante existe et est décrite par $SLE_{8/3}$. Cette conjecture est toujours ouverte pour l'instant ; elle a été confirmée par des simulations numériques.

Dans la dernière partie de cet exposé, nous allons présenter rapidement des situations dans lesquelles il a été établi de façon rigoureuse que SLE permet de décrire des courbes aléatoires remarquables du plan.

4. *SLE* ET QUELQUES COURBES ALÉATOIRES REMARQUABLES

4.1. $SLE_{8/3}$ et excursions browniennes

Appelons excursion brownienne dans $\mathbb{H}$ un mouvement brownien complexe $Z = X + iY$ à valeurs dans $\mathbb{H}$, issu de $Z_0 = 0$, et conditionné à tendre vers ∞. Un tel conditionnement est seulement formel (car la probabilité qu'un mouvement brownien complexe reste dans $\mathbb{H}$ est nulle), mais il est aisé à rendre rigoureux. Plus précisément, les coordonnées X et Y sont deux processus indépendants, X est un mouvement brownien réel standard, et Y un processus de Bessel de dimension 3, c'est-à-dire la norme euclidienne d'un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$.

Soit $A \subset \overline{H}$ une cosse qui ne contient pas l'origine, et $g_A : \mathbb{H}\backslash A \to \mathbb{H}$ l'application conforme normalisée. On peut montrer que la probabilité que la trajectoire de Z n'atteigne jamais A est donnée par

$$\mathbb{P}\,(Z_t \notin A, \forall\, t \geqslant 0) = g_A'(0). \tag{4}$$

Esquissons la preuve de cette identité : Travaillons d'abord avec un mouvement brownien dans $\mathbb{H}$ issu de $z \in \mathbb{H}$, et conditionné à tendre vers ∞. La fonction $\operatorname{Im} g_A$ est harmonique dans $\mathbb{H}\backslash A$, et il en découle que le processus

$$\frac{\operatorname{Im} g_A(Z_t)}{Y_t}, \quad t < T_A := \inf\{t \geqslant 0, Z_t \in A\}$$

est une martingale. Cette martingale converge vers 1 sur l'événement $T_A = \infty$ (puisque $g_A(z) \sim z$ quand $z \to \infty$), et vers 0 quand $T_A < \infty$. Par application du théorème d'arrêt, on a donc

$$\mathbb{P}\,(T_A = \infty \mid Z_0 = z) = \frac{\operatorname{Im} g_A(z)}{\operatorname{Im} z},$$

et il ne reste alors qu'à faire tendre z vers 0.

La formule (4) est bien sûr à rapprocher de la proposition 3.2. On en tire immédiatement le résultat suivant (voir [12]).

Théorème 4.1. — *Soit $\mathcal{H}_8$ la frontière extérieure de l'union de 8 $SLE_{8/3}$ cordaux indépendants. Soit $\mathcal{B}_5$ la frontière extérieure de l'union de 5 excursions browniennes indépendantes. Alors $\mathcal{H}_8$ et $\mathcal{B}_5$ ont la même loi.*

En effet, les probabilités que ces différentes courbes ne rencontrent pas une cosse A sont les mêmes.

Ce théorème a plusieurs conséquences intéressantes. En particulier, si on le relie à la conjecture de la section précédente, qui énonce que $SLE_{8/3}$ est la limite continue de la marche aléatoire auto-évitante, on peut alors observer que localement, la frontière extérieure de la courbe brownienne dans le plan peut être vue comme la limite continue d'une marche aléatoire auto-évitante (propriété qui avait été énoncée de façon informelle par Mandelbrot).

4.2. SLE_6 et percolation critique

L'un des résultats mathématiques les plus remarquables obtenus récemment en ce qui concerne le comportement asymptotique de modèles discrets de la physique statistique est dû à Smirnov [16]. Il porte sur la *percolation sur le réseau triangulaire.*

Commençons par considérer un réseau régulier dans le plan (pas nécessairement le réseau triangulaire). On fixe un paramètre $p \in]0,1[$, et on décide d'ouvrir chaque site de ce réseau avec probabilité p, indépendamment les uns des autres. On s'intéresse aux composantes connexes (amas) formées par les sites ouverts. Il existe un paramètre critique p_c tel que, presque sûrement, pour $p \leqslant p_c$, il n'y a aucun amas de taille infinie, alors que pour $p > p_c$, il y a exactement un amas infini.

Le paramètre critique p_c dépend du réseau ; sa valeur exacte n'est pas connue en général. Il y a cependant une exception remarquable : dans le cas du réseau triangulaire, Kesten et Wierman ont montré que $p_c = 1/2$. De façon très informelle et rapide, disons que des arguments de renormalisation suggèrent que, quand on se place dans une grande échelle et pour la valeur critique du paramètre, ce qu'on observe de la percolation ne dépend pas du réseau. Par ailleurs, si on admet l'existence d'une limite continue de la percolation, cette limite doit nécessairement être invariante par changement d'échelle et par rotation (puisque la limite ne dépend pas du réseau). Ceci conduit naturellement à la conjecture plus forte que la percolation continue est invariante conforme, *i.e.* les connexions respectives dans des domaines simplement connexes devraient avoir la même loi à des transformations conformes près.

En particulier, la probabilité qu'il existe un amas permettant de traverser de gauche à droite un rectangle de longueur Na et de largeur Nb doit converger quand N tend vers l'infini, vers une limite $F(b/a)$ qui ne dépend que du rapport b/a, et où la fonction F est « universelle » (*i.e.* ne dépend pas du réseau). Cardy [3], à l'aide de considérations provenant de la théorie conforme des champs, a prédit très précisément ce que devait être cette fonction F. Par la suite Carleson a observé qu'on pouvait reformuler de façon beaucoup plus simple la conjecture de Cardy en considérant la percolation non pas dans un rectangle, mais dans un triangle équilatéral ABC. Plus précisément, si on considère un point $X \in [CA]$, la probabilité qu'il existe un amas pour la percolation critique dans le triangle ABC qui relie $[AB]$ à $[CX]$ vaut CX/AB.

Smirnov [16] a démontré ces conjectures (existence d'une limite continue, invariance conforme et formule de Cardy) pour la percolation critique sur le réseau triangulaire. De plus, SLE_6 permet de décrire l'amas de percolation de la façon suivante. Pour faciliter la présentation, il est commode de voir le réseau triangulaire comme le pavage du plan en « nid d'abeille », *i.e.* en identifiant chaque site du réseau avec un hexagone dont il est le centre. On se donne un domaine simplement connexe $D \neq \mathbb{C}$, et deux points distincts a et b sur la frontière. On fixe un petit paramètre $\delta > 0$, on considère D_δ une approximation simplement connexe de D obtenue par réunion de petits hexagones de taille δ, et on note respectivement a_δ et b_δ les points du réseau hexagonal sur la frontière de D_δ les plus proches de a et de b. Les cellules de la frontière de D_δ entre a_δ et b_δ sont coloriées en blanc, celles entre b_δ et a_δ en noir (avec l'orientation trigonométrique). On colorie ensuite chaque hexagone de l'intérieur de D_δ en blanc avec probabilité $1/2$, indépendamment les uns des autres, et on décide que les hexagones non coloriés sont noirs.

L'interface partant de a_δ et finissant en b_δ, qui sépare les cellules blanches des cellules noires, définit une courbe aléatoire γ_δ qui parcourt la frontière extérieure de l'amas de percolation contenant les points a et b. On l'appelle le processus d'exploration. Le théorème de Smirnov entraîne que quand $\delta \to 0+$, γ_δ converge en loi vers une courbe aléatoire dans $\overline{D}$ qui débute en a et finit en b. La propriété d'invariance conforme pour la percolation critique se transpose à la courbe limite ; plus précisément on montre que cette dernière vérifie la propriété de localité (*cf.* Théorème 3.1). Enfin, la formule de Cardy-Smirnov permet de calculer les probabilités d'atteinte de cosses, et de vérifier ainsi qu'elles coïncident avec celles pour SLE_6 cordal dans D, allant de a à b. Il est intéressant d'observer que la courbe limite γ n'est pas simple (*cf.* Proposition 2.5), et donc ne décrit pas seulement la frontière extérieure de l'amas de percolation, mais également une partie de la frontière intérieure qui affleure la frontière extérieure.

Pour conclure cette section, il convient de mentionner que SLE_6 permet également de décrire les points déconnectés de l'infini par la trajectoire d'un mouvement brownien réfléchi, disons dans $\mathbb{H}$, où l'angle de réflexion vaut $\pi/3$ sur la frontière $]0, \infty[$ et $2\pi/3$ sur $]-\infty, 0[$ (en particulier, la réflexion tend à éloigner de l'origine). Ceci permet de relier la frontière extérieure d'un amas de percolation à la frontière extérieure d'une trajectoire brownienne, et donc à $SLE_{8/3}$ d'après la section précédente.

4.3. SLE_8 et arbre couvrant aléatoire

Donnons-nous comme précédemment un domaine simplement connexe $D \neq \mathbb{C}$. Fixons un petit paramètre $\delta > 0$ et notons cette fois D_δ une approximation (connexe) de D par une portion du réseau $\delta\mathbb{Z}^2$. On appelle *arbre aléatoire couvrant* dans D_δ

un sous-graphe (donné par des sommets et des arêtes) connexe qui passe par tous les sommets de D_δ et qui ne contient pas de boucle. Donnons-nous deux points distincts a et b sur la frontière de D. Soient respectivement a_δ et b_δ les sommets de D_δ les plus proches de a et b. On s'intéresse aux arbres couvrants qui contiennent toutes les arêtes sur la frontière de D_δ entre a_d et b_δ (dans le sens trigonométrique). On peut coder de façon unique un tel arbre couvrant par une courbe de Peano (*i.e.* qui passe par tous les sommets du graphe) : on note η^d la courbe qui parcourt l'arbre en partant de a_δ et en suivant les branches dans l'ordre anti-trigonométrique jusqu'à atteindre b_δ (si on suit ensuite la frontière de D_δ de b_δ à a_δ toujours dans le sens anti-trigonométrique, on a ainsi entièrement parcouru l'arbre couvrant).

Lorsqu'on choisit l'arbre couvrant au hasard suivant la probabilité uniforme, la courbe de Peano η^δ est prise elle aussi au hasard suivant l'équiprobabilité sur l'ensemble des courbes de Peano dans D_δ partant de a_δ et finissant en b_δ. À l'aide d'arguments délicats, dont certains reposent sur l'algorithme de Wilson (qui permet de construire des arbres aléatoires couvrants à partir de trajectoires de marches aléatoires), Lawler, Schramm et Werner [10] ont établi le résultat suivant.

THÉORÈME 4.2. — *Quand $\delta \to 0$, la courbe de Peano discrète η^δ converge en loi vers une courbe de Peano aléatoire continue η, telle que, à un changement de temps près, $(\eta[0,t], t \geqslant 0)$ a la même loi que SLE_8 cordal dans D de a à b.*

4.4. SLE_2 radial et marche aléatoire à boucles effacées

Le dernier exemple que nous présenterons est très lié au précédent ; il fait intervenir un autre type de chaîne de Loewner, dite *radiale* (voir par exemple [4]), qui correspond à une famille de compacts croissant de la frontière vers un point intérieur du domaine.

Notons d'abord $\mathbb{U}$ le disque unité, et considérons une courbe continue simple $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{U}}$ avec $\gamma_0 = 1$, $\gamma_t \in \mathbb{U}$ pour tout $t > 0$ et $\lim_{t\to\infty} \gamma_t = 0$. Pour chaque $t \geqslant 0$, on note f_t l'application conforme de $U_t := \mathbb{U}\backslash\gamma[0,t]$ dans $\mathbb{U}$, normalisée par $f_t(0) = 0$ et $f_t(\gamma_t) = 1$. Pour simplifier, on supposera que la paramétrisation de γ est telle que $|f_t'(0)| = e^t$, ce qui n'induit pas de perte de généralité. Définissons ensuite

$$\zeta_t = \left(\frac{f_t'(0)}{|f_t'(0)|}\right)^{-1},$$

de sorte que ζ décrit une courbe sur le cercle $\partial\mathbb{U}$ telle que

$$g_t(z) := \zeta_t f_t(z)$$

soit l'application conforme de U_t dans $\mathbb{U}$ telle que $g_t(0) = 0$ et $g_t'(0) = e^t$. Noter également que $g_t(\gamma_t) = \zeta_t$.

Loewner a établi qu'on pouvait récupérer g_t à partir de ζ_t en résolvant l'équation différentielle

$$\partial g_t(z) = -g_t(z)\frac{g_t(z) + \zeta_t}{g_t(z) - \zeta_t} \tag{5}$$

tant que $z \in U_t$, puis γ_t par la formule $\gamma_t = g_t^{-1}(\zeta_t)$, au moins dès qu'elle a un sens.

Comme dans la section 2, on prend un point de vue différent en se donnant a priori une courbe ζ sur le cercle unité, et en construisant des applications conformes $z \mapsto g_t(z)$ en résolvant (5) jusqu'au temps $T(z)$ en lequel $g_t(z)$ atteint ζ_t. On définit ensuite la chaîne de Loewner radiale

$$K_t := \left\{ z \in \overline{\mathbb{U}} : T(z) \leqslant t \right\}.$$

Pour tout $\kappa > 0$, on appelle SLE_κ radial (croissant de 1 à 0) la chaîne de Loewner aléatoire obtenue lorsque ζ est un mouvement brownien sur le cercle de variance κ.

On va maintenant conclure cet exposé en présentant un dernier résultat de Lawler, Schramm et Werner [10] (voir également Schramm [15]) qui relie SLE_2 radial et la limite continue de la *marche aléatoire simple à boucles effacées*.

Pour cela, considérons un domaine simplement connexe $D \neq \mathbb{C}$ contenant 0, et fixons un petit paramètre δ. On introduit une marche aléatoire simple symétrique sur $\delta\mathbb{Z}^2$ jusqu'à ce qu'elle sorte de D, et on note η^δ la courbe dans D obtenue en effaçant les boucles de la marche dans l'ordre inverse de leur apparition (*i.e.* on retourne la marche quand elle sort de D, et on efface au fur et à mesure les boucles de marche retournée).

Soit encore $\Phi : \mathbb{U} \to D$ une application conforme avec $\Phi(0) = 0$ et η la valeur terminale d'un SLE_2 radial dans $\mathbb{U}$, partant d'un point uniformément distribué sur le cercle unité. Alors η^d converge en loi quand δ tend vers 0 vers $\Phi(\eta)$.

RÉFÉRENCES

[1] L.V. Ahlfors – *Conformal Invariants, Topics in Geometric Function Theory*, McGraw-Hill, 1973.

[2] V. Beffara – « The dimension of the SLE curves », Prépublication.

[3] J. Cardy – « Critical percolation in finite geometries », *J. Phys. A* (1992), p. L201–L206.

[4] J.B. Conway – *Functions of one complex variable. II*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[5] B. Duplantier & K.-H. Kwon – « Conformal invariance and intersections of random walks », *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988), p. 2514–2517.

[6] C. Itzykson & J.-M. Drouffe – *Statistical field theory vol. 2*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1989.

[7] G.F. Lawler – « An introduction to the Stochastic Loewner Evolution », in *Random walks and geometry*, Walter de Gruyter, Berlin, 2004, p. 261–293.

[8] G.F. Lawler, O. Schramm & W. Werner – « Values of Brownian intersection exponents I : Half-plane exponents et II : Plane exponents », *Acta Math.* **187** (2001), p. 237–273 & 275–308.

[9] ———, « Values of Brownian intersection exponents III : Two-sided exponents », *Ann. Inst. H. Poincaré. Probab. Statist.* **38** (2002), p. 109–123.

[10] ———, « Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees », *Ann. Probab.* **32** (2004), p. 939–995.

[11] ———, « On the scaling limit of self-avoiding walks », in *Fractal geometry and application, A jubilee of Benoît Mandelbrot*, Proc. Symp. Pure Math, American Mathematical Society, à paraître.

[12] ———, « Conformal restriction properties. The chordal case », *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), p. 917–955.

[13] D. Marshall & S. Rohde – « The Loewner differential equation and slit mappings », Prépublication.

[14] S. Rohde & O. Schramm – « Basic properties of SLE », *Ann. of Math.*, à paraître.

[15] O. Schramm – « Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees », *Israel J. Math.* **118** (2001), p. 221–288.

[16] S. Smirnov – « Critical percolation in the plane : conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333** (2001), p. 239–244.

[17] S. Smirnov & W. Werner – « Critical exponents for two-dimensional percolation », *Math. Res. Lett.* **8** (2001), p. 729–744.

[18] K. Symanzik – « Euclidean Quantum Field Theory », in *Local Quantum Theory, Proc. International School of Physics "Enrico Fermi" XLV* (L. Jost, éd.), Academic Press, New York, 1969, p. 152.

[19] W. Werner – « Random planar curves and Schramm-Loewner evolutions », in *Lectures on Probability Theory and Statistics, École d'été de probabilités de Saint-Flour 2002*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1840, Springer, 2004, p. 107–195.

Jean BERTOIN

Laboratoire de Probabilités
et Modèles Aléatoires
et
Institut universitaire de France
Université Pierre et Marie Curie
175, rue du Chevaleret
F-75013 Paris
E-mail : jbe@ccr.jussieu.fr