Séminaire BOURBAKI Mars 2004
56^{e} année, 2003-2004, n^{o} 929, p. 115 à 145

MOTIFS DE DIMENSION FINIE
[d'après S.-I. Kimura, P. O'Sullivan,...]

par **Yves ANDRÉ**

Table des matières

1. INTRODUCTION : LES GROUPES DE CHOW SONT-ILS « DE DIMENSION FINIE » ?

1.1. Contre

Soit X une variété projective lisse connexe de dimension d sur un corps k algébriquement clos. Soit $Z^*(X)$ le groupe des cycles algébriques sur X (groupe abélien libre engendré par les sous-variétés irréductibles de X), gradué par la codimension. Le groupe de Chow $\mathrm{CH}^*(X)$ est le quotient de $Z^*(X)$ par l'équivalence rationnelle.

En codimension 1, sa structure est bien connue (le cas $d = 1$ et $k = \mathbb{C}$ remonte au XIX^e siècle) : on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{CH}^1(X)_0 \longrightarrow \mathrm{CH}^1(X) \longrightarrow \mathrm{NS}(X) \longrightarrow 0$$

où $\mathrm{NS}(X)$ est un groupe abélien de type fini (dit de Néron-Severi), ainsi qu'un isomorphisme (dit d'Abel-Jacobi)

$$\mathrm{AJ}^1_X : \mathrm{CH}^1(X)_0 \cong \mathrm{Pic}^0_X(k),$$

où Pic^0_X est la variété abélienne de Picard attachée à X.

En codimension > 1, l'espoir de comprendre ces groupes par dévissage en une partie discrète dénombrable et une partie continue contrôlée par les points d'une variété algébrique a donné naissance à la construction de théories de variétés de Picard et d'applications d'Abel-Jacobi intermédiaires.

À la fin des années 60, cet espoir s'est écroulé, même dans le cas le mieux compris après celui de la codimension 1, à savoir le cas de codimension maximale d. Dans ce cas, l'application d'Abel-Jacobi s'écrit

$$\mathrm{AJ}^d_X : \mathrm{CH}^d(X)_0 \longrightarrow \mathrm{Alb}_X(k),$$

où $\mathrm{CH}^d(X)_0$ est le groupe des 0-cycles de degré 0, et Alb_X la variété abélienne d'Albanese attachée à X. Cette application est surjective.

En 1969, D. Mumford [37] a démontré que si X est une surface sur $k = \mathbb{C}$, AJ^2_X n'est injective que si le genre géométrique $p_g(X)$ est nul (*i.e.* que si $H^2(X)$ est engendré par les classes de diviseurs). Par exemple, si X est le carré d'une courbe Y de genre $\geqslant 2$, (d'où $p_g(X) \neq 0$), et en notant δ_Y l'application diagonale de Y, le 0-cycle $[D \times D] - \deg D \cdot (\delta_Y)_*[D]$ sur X est dans le noyau de AJ^2_X pour tout diviseur D sur Y ; dans un article récent [13], M. Green et P. Griffiths montrent que ce 0-cycle n'est pas nul si D est « assez général ».

A. Roitman [42] a d'ailleurs démontré peu après Mumford que AJ^2_X induit un isomorphisme sur la torsion, et est injective si et seulement si l'application différence

$$S^n(X) \times S^n(X) \longrightarrow \mathrm{CH}^2(X)_0, \quad (\{x_1, \ldots, x_n\}, \{x'_1, \ldots, x'_n\}) \longmapsto \sum x_i - \sum x'_i$$

est surjective pour n assez grand (où $S^n(X)$ désigne la puissance symétrique n-ième de X, c'est-à-dire $X^n/\mathfrak{S}_n$). Ces résultats impliquent qu'en un sens convenable, $\mathrm{CH}^2(X)_0$ n'est pas contrôlé par une variété de dimension finie si $p_g(X) \neq 0$.

1.2. Pour

Dans l'article [26], qui remonte à plusieurs années, S.-I. Kimura introduit un point de vue tout à fait nouveau sur cette question de la « dimension finie » des groupes de Chow. Étant donnés $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}} := \mathrm{CH}^*(X) \otimes \mathbb{Q}$, on peut former leur produit $\alpha_1 \times \cdots \times \alpha_n \in \mathrm{CH}^*(X^n)_{\mathbb{Q}}$ et définir les produits alternés et symétriques par la recette usuelle

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{sgn(\sigma)}{n!} \alpha_{\sigma(1)} \times \cdots \times \alpha_{\sigma(n)}, \quad \beta_1 \bullet \cdots \bullet \beta_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{1}{n!} \beta_{\sigma(1)} \times \cdots \times \beta_{\sigma(n)}.$$

Kimura montre que lorsque X est le produit de deux courbes projectives lisses, *il existe un entier* n *tel que, pour tout* n*-uplet de cycles* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *dans le noyau de* $\mathrm{AJ}^2_X \otimes \mathbb{Q}$*, on ait* $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n = 0$.

Il montre par ailleurs que si X est une courbe, l'assertion analogue est vraie à condition de remplacer produits alternés par produits symétriques : *il existe un entier* n *tel que, pour tout* n*-uplet de cycles* $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *dans* $\mathrm{CH}^1(X)_0 \otimes \mathbb{Q}$*, on ait* $\beta_1 \bullet \cdots \bullet \beta_n = 0$.

Ces observations suggèrent que les groupes de Chow $\otimes\mathbb{Q}$ se comportent en un sens comme des *super-espaces vectoriels de dimension finie.*

S.-I. Kimura, et indépendamment P. O'Sullivan, ont avancé au milieu des années 90 l'idée audacieuse qu'il s'agirait d'un phénomène tout à fait général : ils conjecturent que, pour toute variété projective lisse X, *il existe une décomposition* (*en général non canonique*)

$$\mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{CH}^*(X)_+ \oplus \mathrm{CH}^*(X)_-$$

et un entier naturel n*, tels que pour tout* n*-uplet* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *d'éléments de* $\mathrm{CH}^*(X)_+$ *et tout* n*-uplet* $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *d'éléments de* $\mathrm{CH}^*(X)_-$*, on ait*

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n = \beta_1 \bullet \cdots \bullet \beta_n = 0.$$

L'exposé est consacré à l'analyse des tenants et aboutissants de cette conjecture.

Plan de l'exposé. — Le cadre naturel pour comprendre la nature de cette conjecture et ses implications est celui des motifs. Nous commencerons donc par rappeler la construction et diverses propriétés des motifs purs (pour une équivalence adéquate quelconque), notamment la semi-simplicité des motifs numériques conjecturée par A. Grothendieck et prouvée par U. Jannsen.

La forme générale de la conjecture de Kimura-O'Sullivan est que tout motif pour l'équivalence rationnelle est somme d'un motif pair (*i.e.* dont une puissance extérieure s'annule) et d'un motif impair (*i.e.* dont une puissance symétrique s'annule). C'est prouvé pour les motifs « de type abélien ». Nous indiquons aussi les liens entre cette conjecture et deux autres conjectures fondamentales sur les groupes de Chow (Voevodsky, Bloch-Beilinson).

Nous passons ensuite à l'étude générale de la notion catégorique d'objet pair et d'objet impair, puis à celle des catégories F-tensorielles dans lesquelles tout objet est somme d'un pair et d'un impair. Cet axiome tout simple s'avère extrêmement fécond, comme l'ont mis en lumière Kimura et surtout O'Sullivan. Nous verrons qu'une telle catégorie se décrit d'une part comme « extension » d'une catégorie F-tensorielle abélienne semi-simple par un « radical » localement nilpotent, et d'autre part comme catégorie de super-fibrés vectoriels équivariants.

Revenant aux motifs et aux groupes de Chow, nous tirons pour terminer les fruits de ces considérations catégoriques.

Remerciements. — Je remercie Bruno Kahn pour sa lecture critique attentive d'une première version de ce texte. Je remercie Shun-Ichi Kimura et Peter O'Sullivan d'avoir mis à ma disposition les versions les plus récentes de leurs papiers soumis, et d'avoir répondu diligemment à toutes mes questions concernant leurs travaux. Ce texte s'est nourri des nombreuses discussions que j'ai eues avec eux trois à propos des motifs de dimension finie.

Convention générale. — Dans tout le texte, F désigne un corps de caractéristique nulle. Nous dirons *catégorie F-tensorielle* pour « catégorie F-linéaire monoïdale symétrique $\mathcal{T}$, essentiellement petite[(1)], *rigide* (tout objet M a un dual $M^\vee$), *pseudo-abélienne* (tout endomorphisme idempotent a un noyau), et vérifiant $\operatorname{End}\mathbf{1} = F$ ($\mathbf{1}$ désignant l'objet unité) ».

Dans toute catégorie F-tensorielle, on a la notion de *trace d'un endomorphisme*, et de *rang* (ou dimension) d'un objet : $\operatorname{rg} M = \operatorname{tr}(\mathrm{id}_M) \in F$. Nous renvoyons à [43] pour les bases de la théorie des catégories monoïdales.

Étant donnés deux objets M, N, on note $\mathcal{T}(M, N)$ le F-espace des morphismes de M vers N. Les $\otimes$-foncteurs entre catégories F-tensorielles sont sous-entendus F-linéaires.

2. MOTIFS PURS

2.1. Définitions

La notion de motif pur a été introduite par Grothendieck dans les années soixante. Elle permet notamment de mettre en valeur les propriétés catégoriques du calcul des correspondances algébriques. Un exposé Bourbaki lui a été consacré il y a 35 ans [12]. La théorie s'étant beaucoup développée depuis une quinzaine d'années, un bref tour d'horizon s'impose.

(1) *i.e.* les classes d'isomorphisme d'objets, et les morphismes entre deux objets quelconques, forment des ensembles appartenant à un univers fixé.

Soit $\mathcal{P}(k)$ la catégorie des variétés projectives lisses sur un corps k. Pour tout $X \in \mathcal{P}(k)$, notons $\mathcal{Z}^*(X)_F$ le F-espace vectoriel engendré par les sous-variétés irréductibles de X, gradué par la codimension. On fixe une relation d'équivalence *adéquate* $\sim$ (en termes vagues, il s'agit d'une relation d'équivalence linéaire $\sim$ sur $\mathcal{Z}^*(X)_F$ pour tout $X \in \mathcal{P}(k)$, telle que modulo $\sim$, les images directes et inverses des cycles sont définies ainsi que le produit d'intersection[(2)]). Muni du produit d'intersection, le quotient $\mathcal{Z}^*_\sim(X)_F = \mathcal{Z}^*(X)_F/\sim$ acquiert alors une structure d'anneau gradué. Les éléments de $\mathcal{Z}^{\dim X+r}_\sim(X \times Y)_F$ s'appellent correspondances algébriques (modulo $\sim$) entre X et Y, de degré r. La formule

$$g \circ f = \mathrm{pr}^{XYZ}_{XZ*}(\mathrm{pr}^{XYZ*}_{XY}(f) \cdot \mathrm{pr}^{XYZ*}_{YZ}(g))$$

définit une loi de composition associative pour les correspondances modulo $\sim$ (les degrés s'additionnent). Les équivalences adéquates qui nous intéresseront sont les suivantes, de la plus fine à la plus grossière :

– l'équivalence rationnelle : $\alpha \sim_{\mathrm{rat}} 0$ dans $\mathcal{Z}^*(X)_F$ s'il existe $\beta \in \mathcal{Z}^*(X \times \mathbb{P}^1)_F$ tel que $\beta(0)$ et $\beta(\infty)$ soient bien définis et que $\alpha = \beta(0) - \beta(\infty)$; on écrit plutôt $\mathrm{CH}^*(X)_F$ que $\mathcal{Z}^*_{\mathrm{rat}}(X)_F$,

– l'équivalence homologique pour une cohomologie de Weil fixée H (à coefficients dans une extension K/F) : $\alpha \sim_{\mathrm{hom}} 0$ si sa classe fondamentale en cohomologie H est nulle,

– l'équivalence numérique : $\alpha \sim_{\mathrm{num}} 0$ dans $\mathcal{Z}^r(X)_F$ si pour tout cycle de dimension complémentaire β, le degré $\langle \alpha, \beta \rangle$ du 0-cycle $\alpha \cdot \beta$ est nul[(3)].

Définissons à présent la *catégorie* $M_\sim(k)_F$ *des motifs purs* à coefficients dans F sur le corps de base k, pour l'équivalence $\sim$.

Les objets sont les triplets (X, e, r), où $X \in \mathcal{P}(k)$, $r \in \mathbb{Z}$, et $e \in \mathcal{Z}^{\dim X+r}_\sim(X \times X)_F$ est une correspondance idempotente : $e^2 = e$. Il est suggestif de noter ce triplet $e\mathfrak{h}_\sim(X)(r)$ (ou simplement $e\mathfrak{h}(X)(r)$), en pensant au symbole $\mathfrak{h}$ comme à une cohomologie universelle.

Un morphisme $e\mathfrak{h}(X)(r) \to f\mathfrak{h}(Y)(s)$ est un élément de

$$f \circ \mathcal{Z}^{\dim X - r + s}_\sim(X \times Y)_F \circ e$$

(correspondance de degré $s - r$). La composition des morphismes est celle des correspondances.

On a un foncteur contravariant $\mathfrak{h}_\sim : \mathcal{P}(k) \to M_\sim(k)_F$ qui associe à X le motif $\mathfrak{h}_\sim(X) = \mathrm{id} \cdot \mathfrak{h}_\sim(X)(0)$ et à tout morphisme le transposé de son graphe.

(2) Voir [45] ou [2] pour plus de précisions.

(3) Une conjecture « standard » de Grothendieck prédit que l'équivalence homologique coïncide avec l'équivalence numérique.

Le produit cartésien des variétés (et des cycles) induit une structure monoïdale sur $M_\sim(k)_F$. On vérifie aisément que c'est une *catégorie F-tensorielle* (au sens de notre convention générale). L'unité est le motif du point $\mathbf{1} = \mathfrak{h}(\operatorname{Spec} k)$.

Pour $\sim_{\mathrm{rat}}$, on note plutôt $\mathrm{CHM}(k)_F$ que $M_{\mathrm{rat}}(k)_F$; c'est la catégorie des « motifs de Chow » à coefficients dans F. On a la formule

$$\mathrm{CH}^r(X)_F = \mathrm{CHM}(k)_F(\mathbf{1}, \mathfrak{h}(X)(r)),$$

ce qui suggère de poser

$$\mathrm{CH}^r(M) := \mathrm{CHM}(k)_F(\mathbf{1}, M(r))$$

pour un motif de Chow quelconque M à coefficients dans F.

Par ailleurs, si $\sim$ est au moins aussi fine que l'équivalence homologique, H définit un $\otimes$-foncteur

$$M_\sim(k)_F \longrightarrow sVec_K$$

vers la catégorie K-tensorielle des super-espaces vectoriels de dimension finie sur une extension K de F.

2.2. Exemples

Variétés abéliennes. — Soit X une variété abélienne de dimension d sur k. D'après A. Shermenev [46] (et d'autres auteurs après lui), il existe une décomposition canonique

$$\mathfrak{h}(X) = \bigoplus_0^{2d} \mathfrak{h}^n(X),$$

avec la propriété que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la correspondance diagonale $\mathfrak{h}(X^n) = \mathfrak{h}(X)^{\otimes n} \to \mathfrak{h}(X)$ induit un isomorphisme

$$S^n(\mathfrak{h}^1(X)) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{h}^n(X),$$

où S^n désigne la puissance symétrique n-ième[(4)]. Nous nous servirons du corollaire suivant :

Proposition 2.1. — *Pour $n > 2d$, $S^n(\mathfrak{h}^1(X)) = 0$.*

Il existe plusieurs preuves voisines de ce fait bien connu. Voici celle de O'Sullivan, dans le cas où X est la jacobienne d'une courbe projective lisse géométriquement connexe C munie d'un k-point x. On a $\mathfrak{h}^1(X) \cong \mathfrak{h}^1(C) = \pi_C^1 \mathfrak{h}(C)$ où $\pi_C^1 = [\Delta_C - \mathrm{pr}_1^* x - \mathrm{pr}_2^* x]$, qui s'écrit aussi $\pi_C^1 = (\iota, \iota)^*[P]$, où ι est le plongement de C dans X envoyant x sur l'origine, et P est le diviseur de Poincaré sur $X \times X$. En posant $P_{i,j} = (\mathrm{pr}_i, \mathrm{pr}_j)^*[P]$,

(4) Appliquant une cohomologie de Weil, on obtient la formule analogue $S^n H^1(X) = H^n(X)$ dans la catégorie tensorielle des super-espaces vectoriels de dimension finie (avec la contrainte de commutativité donnée par la règle des signes de Koszul). Dans la catégorie tensorielle des espaces vectoriels, compte tenu de ce que $H^1(X)$ est de degré impair 1, cela redonne l'isomorphisme canonique usuel pour la cohomologie de X : $\wedge^n H^1(X) = H^n(X)$.

on est donc ramené à prouver que $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} P_{1,\sigma(1)}\dots P_{n,\sigma(n)} = 0$ dans $\mathrm{CH}(X^n \times X^n)$ si $n > 2d$. Or on a $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} P_{1,\sigma(1)}\dots P_{n,\sigma(n)} = \sum_{I,J\subset[1,n]}(-1)^{|I|I|+|J|}(\sum_{i\in I,j\in J} P_{i,j})^n$, nul du fait que $[P]^n \in \mathrm{CH}^n(X^2) = 0$ si $n > 2d$.

On note $\mathrm{CHM}(k)_F^{\mathrm{ab}}$ la plus petite sous-catégorie F-tensorielle strictement pleine, stable par facteurs directs, de $\mathrm{CHM}(k)_F$ contenant les motifs des variétés abéliennes sur une extension finie séparable de k. Par exemple, le motif de toute variété projective lisse dominée par un produit de courbes projectives lisses est dans $\mathrm{CHM}(k)_F^{\mathrm{ab}}$.

Autre exemple : le motif de toute hypersurface de Fermat de degré N sur un corps k de caractéristique $\not| N$ est isomorphe à un motif découpé sur une variété abélienne [24].

Surfaces. — Soient X une surface projective lisse géométriquement connexe sur k, Pic^0_X sa variété de Picard, Alb_X sa variété d'Albanese. J. Murre [38] construit une décomposition

$$\mathfrak{h}(X) = \bigoplus_0^4 \mathfrak{h}^n(X)$$

avec $\mathfrak{h}^0(X) \cong \mathbf{1}$, $\quad \mathfrak{h}^1(X) \cong \mathfrak{h}^3(X)(1) \cong \mathfrak{h}^1(\mathrm{Pic}^0_X) \cong \mathfrak{h}^1(\mathrm{Alb}_X)$. En outre, $\mathfrak{h}^2(X)(1)$ se décompose en $\mathbf{1}^{\mathrm{rg}\,\mathrm{NS}(X)} \oplus \mathfrak{t}^2(X)(1)$ pour un $\mathfrak{t}^2(X)$ convenable (dont l'image par H est la « partie transcendante » de $H^2(X)$).

2.3. Équivalences adéquates et $\otimes$-idéaux

Un anneau n'est autre qu'une catégorie (pré-)additive avec un seul objet. Inversement, on peut considérer les catégorie additives (resp. F-linéaires) comme des anneaux (resp. F-algèbres) à plusieurs objets, ce qui permet d'importer en théorie des catégories nombre de concepts, voire d'énoncés, de l'algèbre non commutative. Exemple : un *idéal* $\mathcal{I}$ d'une catégorie F-linéaire $\mathcal{A}$ est la donnée pour tout couple d'objets (M,N) d'un sous-espace $\mathcal{I}(M,N)$ de $\mathcal{A}(M,N)$, cette famille de sous-espaces (lorsque M et N varient) étant stable par composition à gauche et à droite avec un morphisme arbitraire. On peut alors former la catégorie F-linéaire quotient $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. La somme $\mathcal{I}+\mathcal{J}$ et le produit $\mathcal{I}\cdot\mathcal{J}$ de deux idéaux sont définis comme d'habitude.

Si $\mathcal{T}$ est une catégorie F-tensorielle, on a aussi la notion de $\otimes$-idéal : idéal $\mathcal{I}$ stable par produit tensoriel avec tout morphisme. Le quotient $\mathcal{T}/\mathcal{I}$ hérite d'une structure monoïdale, et son enveloppe pseudo-abélienne $(\mathcal{T}/\mathcal{I})^\natural$ est une catégorie F-tensorielle.

Exemples 2.2

1) Un exemple d'idéal est le *radical* (de Kelly) $\mathcal{R}$, défini par $\mathcal{R}(M,N) = \{f \in \mathcal{T}(M,N) \mid \forall\, g \in \mathcal{T}(N,M), 1_M - gf \text{ est inversible}\}$. Ce n'est pas en général un $\otimes$-idéal (voir ci-dessous 3.5).

2) $\mathcal{T}$ admet un unique $\otimes$-*idéal maximal* (distinct de $\mathcal{T}$) noté $\mathcal{N}$ [4, 7.1] : il est défini par

$$\mathcal{N}(M,N) = \{f \in \mathcal{T}(M,N) \mid \forall\, g \in \mathcal{T}(N,M),\ \mathrm{tr}(gf) = 0\}.$$

Il coïncide avec $\mathcal{R}$ si et seulement si $\mathcal{R}$ est un $\otimes$-idéal.

3) Les morphismes dont une puissance tensorielle est nulle forment un $\otimes$-idéal $\sqrt[\otimes]{0}$, le $\otimes$-*nilradical* [4, 7.4]. C'est la réunion des $\otimes$-idéaux nilpotents(5). Il est contenu dans $\mathcal{R} \cap \mathcal{N}$. Le $\otimes$-foncteur $\mathcal{T} \to \mathcal{T}/\sqrt[\otimes]{0}$ est *conservatif*, *i.e.* reflète les isomorphismes.

4) Le noyau de tout foncteur (*i.e.* l'ensemble des flèches qu'il annule) est un idéal. Le noyau de tout $\otimes$-foncteur est un $\otimes$-idéal.

Comme $\sim_{\mathrm{rat}}$ est l'équivalence adéquate la plus fine, on a pour toute équivalence adéquate un foncteur plein $\mathrm{CHM}(k) \to M_\sim(k)$ dont on note $\mathcal{I}_\sim$ le noyau(6). On a (*cf.* [20, 1.7], [4, II.6.3].) :

Lemme 2.3. — *Tout $\otimes$-idéal $\mathcal{I}$ de* $\mathrm{CHM}(k)$ *est de la forme $\mathcal{I}_\sim$ pour une équivalence adéquate $\sim$ convenable. La catégorie $M_\sim(k)$ n'est alors autre que l'enveloppe pseudo-abélienne de* $\mathrm{CHM}(k)/\mathcal{I}$.

Exemples 2.4

1) Dans $\mathrm{CHM}(k)$, on a $\mathcal{N} = \mathcal{I}_{\mathrm{num}}$. En effet, $\mathcal{N}(\mathbf{1}, \mathfrak{h}(X)(r)) \subset \mathrm{CHM}(k)(\mathbf{1}, \mathfrak{h}(X)(r)) = \mathrm{CH}^r(X)$ est l'ensemble des cycles f tels que, pour tout cycle $g \in \mathrm{CHM}(k)(\mathfrak{h}(X)(r), \mathbf{1}) = \mathrm{CH}^{\dim X - r}(X)$, $\mathrm{tr}(fg) = 0$. Mais $\mathrm{tr}(fg)$ n'est autre que $\langle f, g\rangle$.

2) Dans $\mathrm{CHM}(k)$, l'équivalence adéquate associée à $\sqrt[\otimes]{0}$ est l'*équivalence de $\otimes$-nilpotence* : $\alpha \sim_{\otimes nil} 0$, si $\alpha^{\times n} \sim_{\mathrm{rat}} 0$ pour $n \gg 0$. Du fait que les $\sqrt[\otimes]{0}(M, M)$ sont des nil-idéaux, les idempotents se relèvent, et il suit que $M_{\otimes nil}(k) = \mathrm{CHM}(k)/\sqrt[\otimes]{0}$.

2.4. Le théorème de semi-simplicité de Jannsen

La théorie des motifs purs n'est vraiment sortie des limbes qu'avec le théorème de semi-simplicité de U. Jannsen [18], qui résout une conjecture de Grothendieck, appartenant au cercle des conjectures « standard » (l'état essentiellement conjectural de la théorie avant le théorème de Jannsen est résumé à la fin de [43]).

Théorème 2.5 (Jannsen). — *$M_{\mathrm{num}}(k)$ est abélienne semi-simple.*

Ce résultat n'utilise que l'existence d'un $\otimes$-foncteur H de $\mathrm{CHM}(k) \to sVec_K$ (un tel $\otimes$-foncteur est fourni par toute cohomologie de Weil à coefficients dans K). Modulo les remarques précédentes, il découle immédiatement du résultat général suivant appliqué à $\mathcal{T} = \mathrm{CHM}(k)$:

(5)La composition de n morphismes s'obtient à partir du produit tensoriel de ces morphismes en appliquant une permutation cyclique et une contraction. Il s'ensuit, comme l'ont remarqué plusieurs auteurs, que tout endomorphisme $\otimes$-nilpotent est nilpotent, et engendre même un idéal nilpotent, *cf. e.g.* [4, 7.4.2].

(6)On omet désormais l'indice F pour alléger.

Proposition 2.6. — *Soient $\mathcal{T}$ une catégorie F-tensorielle et $H : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ un $\otimes$-foncteur à valeurs dans une catégorie K-tensorielle (pour une extension K/F convenable) dans laquelle les* Hom *sont de dimension finie et les endomorphismes nilpotents sont de trace nulle. On pose $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T}/\mathcal{N}$. Alors pour tout couple d'objets (M, N), $\overline{\mathcal{T}}(M, N)$ est de dimension finie sur F, et $\overline{\mathcal{T}}$ est semi-simple.*

Dans le cas de $\mathrm{CHM}(k)$, la première assertion signifie que les espaces de cycles modulo équivalence numérique sont de dimension finie.

Prouvons 2.6. Comme le noyau de H est contenu dans $\mathcal{N}$, on peut remplacer $\mathcal{T}$ par $\mathcal{T}/\operatorname{Ker} H$, c'est-à-dire supposer H fidèle.

Commençons par le cas où $K = F$. Les espaces $\mathcal{T}(M, N)$ sont alors de dimension finie puisque par hypothèse il en est ainsi de leur image par H. Ceci implique que le radical de la F-algèbre $\mathcal{T}(M, M)$ est nilpotent, et que le quotient par ce radical est semi-simple. On est donc ramené à prouver que tout idéal nilpotent I de $\mathcal{T}(M, M)$ est contenu dans $\mathcal{N}(M, M)$. Or pour tout $f \in I$ et tout $g \in \mathcal{T}(M, M)$, gf est nilpotent, donc $H(gf)$ aussi, ce qui implique $\operatorname{tr} H(gf) = 0$ par hypothèse, d'où aussi $\operatorname{tr}(gf) = 0$, et finalement $f \in \mathcal{N}(M, M)$. Ainsi $\overline{\mathcal{T}}(M, M)$ est semi-simple pour tout M, donc $\overline{\mathcal{T}}$ est semi-simple (*cf. e.g.* [4, A.2.10]).

On ramène le cas général au cas où $F = K$ de la manière suivante. Soit $\mathcal{T}_K$ la catégorie K-tensorielle obtenue en étendant les scalaires de $\mathcal{T}$ de F à K et en passant au quotient par le noyau de H puis à l'enveloppe pseudo-abélienne. Alors H s'étend en un $\otimes$-foncteur fidèle sur la catégorie K-tensorielle $\mathcal{T}_K$. Il reste à voir que $\overline{\mathcal{T}}(M, N) \otimes_F K$ s'identifie à $\overline{\mathcal{T}}_K(M, N)$ (7). Soit V le sous-K-espace de $\operatorname{Hom}_K(H(M^\vee \otimes N), H(\mathbf{1}))$ engendré par $H(\mathcal{T}(M^\vee \otimes N, \mathbf{1}))$. On peut donc trouver des éléments $b_1, \ldots, b_n$ de $\mathcal{T}(M^\vee \otimes N, \mathbf{1})$, dont les images par H forment une base de V. Soit $a \in \mathcal{T}(M, N) \cong \mathcal{T}(\mathbf{1}, M^\vee \otimes N)$. Dire que $a \in \mathcal{N}(M, N) \cong \mathcal{N}(\mathbf{1}, M^\vee \otimes N)$, c'est dire que $b \circ a = 0$ dans $F = \operatorname{End} \mathbf{1}$ pour tout $b \in \mathcal{T}(M^\vee \otimes N, \mathbf{1})$, ou encore que $V \circ H(a) = 0 \in K$. On voit donc que $a \mapsto (b_i \circ a)_i$ définit un isomorphisme F-linéaire de $\overline{\mathcal{T}}(M, N) \cong \overline{\mathcal{T}}(\mathbf{1}, M^\vee \otimes N)$ sur F^n. On conclut en appliquant le même argument à $\mathcal{T}_K$, en remplaçant F par K.

Le théorème de Jannsen explicite la structure de la catégorie des motifs pour la plus grossière des équivalences adéquates. Au-delà, on aimerait comprendre la structure de la catégorie des motifs pour des équivalences plus fines, notamment les motifs de Chow (à coefficients dans $F = \mathbb{Q}$ pour fixer les idées). Nous allons énoncer trois conjectures fondamentales allant dans ce sens, en commençant par celle de Kimura-O'Sullivan.

(7) Dans le cas des motifs, il s'agit du fait que les cycles modulo équivalence numérique commutent à l'extension des coefficients, ce qui était connu depuis longtemps.

2.5. Motifs de dimension finie. La conjecture de Kimura-O'Sullivan

CONJECTURE 2.7 (Kimura, O'Sullivan). — *Tout motif de Chow M est somme d'un motif M_+ dont une puissance extérieure est nulle et d'un motif M_- dont une puissance symétrique est nulle.*

Appliquant ceci au motif $M = \mathfrak{h}(X)$, en posant $\mathrm{CH}(X)_+ = \mathrm{CH}(M_+)$, $\mathrm{CH}(X)_- = \mathrm{CH}(M_-)$, on obtient la décomposition $\mathrm{CH}(X)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{CH}(X)_+ \oplus \mathrm{CH}(X)_-$ dont il était question dans l'introduction.

THÉORÈME 2.8 (Shermenev, Kimura, O'Sullivan). — *La conjecture de Kimura-O'Sullivan est vraie pour les motifs de* $\mathrm{CHM}(k)^{\mathrm{ab}}$ *(cf. 2.2).*

Compte tenu de ce que $\mathrm{CHM}(k)^{\mathrm{ab}}$ est la plus petite sous-catégorie F-tensorielle strictement pleine, stable par facteurs directs, de $\mathrm{CHM}(k)_F$ contenant les $\mathfrak{h}^1$ des variétés abéliennes sur une extension finie séparable de k, cela découle de 2.1 (*via* 3.7 ci-dessous).

Cela fournit un réservoir assez abondant d'exemples illustrant la théorie(8).

2.6. La conjecture de nilpotence de Voevodsky

Dans une direction un peu différente, V. Voevodsky a proposé dans [49] une conjecture de nilpotence très forte pour les groupes de Chow. Notons $\mathrm{CH}^*(X)_0$ le sous-groupe de $\mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}}$ formé des cycles numériquement équivalents à 0.

CONJECTURE 2.9 (Voevodsky). — *Pour tout $\alpha \in \mathrm{CH}^*(X)_0$, sa puissance « cartésienne » n-ième $\alpha^{\times n} \in \mathrm{CH}^*(X^n)_{\mathbb{Q}}$ est nulle pour n assez grand.*

Traduisant en termes d'idéaux tensoriels (*cf.* 2), cela donne : $\sqrt[\otimes]{0} \stackrel{?}{=} \mathcal{N}$.

Un petit pas dans cette direction est le suivant, qui montre du moins que négliger la $\otimes$-nilpotence simplifie énormément la structure des groupes de cycles :

PROPOSITION 2.10. — *Les groupes de cycles modulo $\otimes$-nilpotence sont dénombrables. Ce sont des invariants géométriques : si k est algébriquement clos, leur formation commute à toute extension algébriquement close de k.*

En effet, Voevodsky montre dans [49] que les cycles algébriquement équivalents(9) à 0 sont $\otimes$-nilpotents, et la théorie des variétés de Chow montre que les espaces de cycles modulo équivalence algébrique ont les propriétés énoncées en 2.10 [28]. Il en est donc de même pour toute équivalence adéquate moins fine.

(8) Je ne connais en revanche aucun motif hors de $\mathrm{CHM}(k)^{\mathrm{ab}}$ pour lequel on sache démontrer la conjecture de Kimura-O'Sullivan.

(9) L'équivalence algébrique est définie comme l'équivalence rationnelle en remplaçant $\mathbf{P}^1$ par une courbe projective lisse quelconque.

Proposition 2.11. — *La conjecture de Voevodsky implique celle de Kimura-O'Sullivan.*

En effet, il est clair que 2.9 implique la conjecture standard selon laquelle $\sim_{\mathrm{hom}} = \sim_{\mathrm{num}}$ (M_{hom} est *via* H une sous-catégorie non pleine de $sVec_K$, et toute application linéaire dont une puissance tensorielle est nulle est nulle). Par le formalisme des conjectures standard (*cf.* [27], [2]), cela implique l'existence d'un idempotent dans $M_{\mathrm{hom}} = \mathrm{CHM}(k)/\sqrt[\otimes]{0}$ qui découpe la partie paire de la cohomologie $H(M)$. Comme $\sqrt[\otimes]{0}(M,M)$ est un nil-idéal, il se relève en un idempotent de $\mathrm{CHM}(k)(M,M)$. Notons $M_+ \oplus M_-$ la décomposition correspondante de M. Que $\wedge^n M_+ = S^n M_- = 0$ pour $n \gg 0$ se voit en appliquant H, compte tenu de ce que le $\otimes$-foncteur $\mathrm{CHM}(k) \to M_{\mathrm{hom}} = \mathrm{CHM}(k)/\sqrt[\otimes]{0}$ est conservatif.

La question de la réciproque sera considérée en 3.33.

2.7. Filtration sur les groupes de Chow. La conjecture de Bloch-Beilinson

L'existence de filtrations remarquables sur les groupes de Chow a été conjecturée par S. Bloch et A. Beilinson [7], [6] d'une part, et par J. Murre d'autre part [39] sous une forme différente (mais équivalente d'après Jannsen [19]). Bien que concernant les motifs purs, sa véritable justification se situe dans le cadre de la philosophie des motifs mixtes, *cf.* [6], [19], [20], [2, ch. 22].

Conjecture 2.12 (Bloch-Beilinson). — *On suppose que les projecteurs de Künneth π_X^i (relatifs à une cohomologie H fixée) sont algébriques. Il existe une filtration $F^* \mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}}$ d'anneau, décroissante,* finie*, exhaustive et séparée, respectée par l'action des correspondances algébriques, telle que F^1 soit l'idéal des cycles $\sim_{\mathrm{hom}} 0$ et*[10] *que π_X^i agisse sur le gradué $Gr^\nu \mathrm{CH}^r(X)_{\mathbb{Q}}$ par l'identité si $i = 2r - \nu$, par 0 sinon.*

On renvoie aux références ci-dessus ainsi qu'à [2, ch. 11] pour la discussion de cette conjecture et de ses implications, notamment l'existence d'une *filtration croissante par le poids* canonique dans $\mathrm{CHM}(k)_{\mathbb{Q}}$. Pour deux motifs de Chow M et N purement de poids respectifs m et n, la conjecture implique que $\mathrm{CHM}(k)(M,N) = M_{\mathrm{hom}}(M,N)$ si $m = n$, et $\mathrm{CHM}(k)(M,N) = 0$ si $m < n$.

Si la filtration de Bloch-Beilinson existe, chaque cran F^i de la filtration définit un $\otimes$-idéal de $\mathrm{CHM}(k)$ (donc une relation d'équivalence adéquate), encore noté F^i. On a $F^1 = \mathcal{I}_{\mathrm{hom}}$.

Théorème 2.13 (Jannsen [20]). — *Si la conjecture de Bloch-Beilinson est vraie, de même que la conjecture standard de type Lefschetz*[11]*, alors $F^i = (\mathcal{I}_{\mathrm{hom}})^i$.*

---

[10] Ces conditions impliquent que les correspondances algébriques modulo l'équivalence homologique agissent sur les gradués $Gr^\nu \mathrm{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}}$.

[11] La conjecture standard de type Lefschetz pour $X \in \mathcal{P}(k)$ de dimension d prédit que l'inverse de l'isomorphisme de Lefschetz $H^i(X) \cong H^{2d-i}(X)(d-i)$ (induit par le $(d-i)$-ème cup-produit itéré avec une polarisation de X) est induit par une correspondance algébrique.

Théorème 2.14 (O'Sullivan [40]). — *La conjecture de Bloch-Beilinson, jointe à la conjecture standard* $\sim_{\mathrm{hom}} = \sim_{\mathrm{num}}$, *implique la conjecture de nilpotence de Voevodsky.*

Voir aussi [2, 11.5].

Les liens entre ces conjectures, et ce qu'elles disent sur la structure de $\mathrm{CHM}(k)$, deviendront nettement plus transparents dans le formalisme de O'Sullivan, voir 4.5 ci-dessous. Auparavant, il nous faut toutefois effectuer un assez long périple au pays des catégories tensorielles et aborder l'étude générale de la notion d'objet pair et d'objet impair.

3. CATÉGORIES DE KIMURA-O'SULLIVAN

Commençons par quelques préliminaires sur les représentations du groupe symétrique (voir [33] et [11] pour plus de détails).

3.1. Foncteurs de Schur

Soit $\mathcal{T}$ une catégorie F-tensorielle. Pour tout objet M de $\mathcal{T}$ et tout $n \geqslant 1$, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit canoniquement sur $M^{\otimes n}$.

Par ailleurs les classes d'isomorphie V_λ de $\mathbb{Q}$-représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ sont en bijection canonique avec les partitions λ de n. On a donc $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n] = \prod_{\lambda, |\lambda|=n} \mathrm{End}_{\mathbb{Q}} V_\lambda$. Notons c_λ l'idempotent de $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ définissant V_λ. Le *foncteur de Schur* $S_\lambda : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ est défini par

$$S_\lambda(M) = c_\lambda(M^{\otimes n}).$$

Exemple 3.1. — $S_{(n)} = S^n$ (puissance symétrique), $S_{(1,1,\dots,1)} = \wedge^n$ (puissance extérieure).

Le diagramme de Young d'une partition λ de $n = |\lambda|$ est l'ensemble $[\lambda]$ des couples (i,j) d'entiers $\geqslant 1$ tels que $j \leqslant \lambda_i$.

Soient n_1 et n_2 deux entiers de somme n, et soient μ et ν des partitions de n_1 et n_2 respectivement. On définit le coefficient de Littlewood-Richardson $N_{\mu\nu\lambda} = [V_\lambda : V_\mu \otimes V_\nu]$ comme étant la multiplicité de $V_\mu \otimes V_\nu$ dans V_λ (vues comme représentations de $\mathfrak{S}_{n_1} \times \mathfrak{S}_{n_2} \subset \mathfrak{S}_n$). Ces nombres se calculent par une règle combinatoire bien connue [33, I9]. Le formulaire suivant, classique dans le cas où $\mathcal{T} = \mathit{Vec}_F$ (ou $s\mathit{Vec}_F$), s'étend formellement à toute catégorie F-tensorielle $\mathcal{T}$ ([11]) :

Formulaire 3.2

1) $S_\mu(M) \otimes S_\nu(M) \cong \bigoplus_{\lambda, |\lambda|=|\mu|+|\nu|} S_\lambda(M)^{N_{\mu\nu\lambda}}$,
2) $S_\lambda(M \oplus N) \cong \bigoplus_{\mu,\nu,|\lambda|=|\mu|+|\nu|} (S_\mu(M) \otimes S_\nu(M))^{N_{\mu\nu\lambda}}$,
3) $S_\lambda(M \otimes N) \cong \bigoplus_{\mu,\nu,|\lambda|=|\mu|=|\nu|} (S_\mu(M) \otimes S_\nu(M))^{[V_\mu \otimes V_\nu : V_\lambda]}$,
4) $S_\lambda(M^\vee) = S_\lambda(M)^\vee$,
5) si $[\lambda] \subset [\mu]$, $S_\lambda(M) = 0 \Rightarrow S_\mu(M) = 0$.

3.2. Objets pairs et objets impairs

Soit de nouveau $\mathcal{T}$ une catégorie F-tensorielle.

Définitions 3.3[12]

1) *Un objet M de $\mathcal{T}$ est dit* pair *(resp.* impair*) s'il existe n tel que $\wedge^n M = 0$ (resp. $S^n M = 0$).*

2) *Un objet M de $\mathcal{T}$ est dit* de dimension finie *au sens de Kimura-O'Sullivan s'il est somme d'un objet pair M_+ et d'un objet impair M_-.*

3) *$\mathcal{T}$ est dite* de Kimura-O'Sullivan *si tout objet est de dimension finie.*

Le modèle qui inspire la définition 2) est évidemment celui des super-espaces vectoriels de dimension finie sur F.

Exemples 3.4. — Outre cet exemple, et celui de $\mathrm{CHM}(k)^{\mathrm{ab}}$ que nous avons déjà rencontré, voici quelques autres exemples de catégories de Kimura-O'Sullivan (nous en verrons d'autres) :

1) la catégorie $Rep_F\, G$ des représentations (de dimension finie) d'un schéma en groupes affine sur F ; plus généralement, toute catégorie tannakienne. En fait, d'après [10], une catégorie F-tensorielle abélienne est tannakienne si et seulement si tout objet est pair,

2) la catégorie $s\,Rep_F\, G$ des super-représentations d'un F-schéma en groupes affine G ; plus généralement, si ε est un élément central de $G(k)$ d'ordre divisant 2, la catégorie $Rep_F(G, \varepsilon)$ des super-représentations pour lesquelles l'automorphisme de parité est induit par l'action de ε (*cf.* [11]),

3) la catégorie F-tensorielle des fibrés vectoriels sur une base X projective géométriquement connexe sur le corps F,

4) si G est un F-schéma en groupes affine, la catégorie F-tensorielle des (super-)fibrés vectoriels G-équivariants sur un (super-)G-schéma affine $X = \operatorname{Spec} A$ avec $A^G = F$.

Remarque 3.5. — Dans les exemples 2) et 4), il est essentiel que G soit un « vrai » schéma en groupes affine, et non un super-schéma en groupes affine. La catégorie des représentations du super-schéma en groupes affine $GL(1,1)$ (formé des matrices 2-2 de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & \varepsilon b \\ \varepsilon c & d \end{smallmatrix}\right)$ avec $\varepsilon^2 = 0$) n'est pas de Kimura-O'Sullivan [4, 10.1] :

---

[12] Nous nous écartons ici un peu tant de la terminologie de Kimura que de celle de O'Sullivan. Au lieu d'objet pair, Kimura parle d'objet pairement de dimension finie, tandis que O'Sullivan parle d'objet positif. O'Sullivan dit semi-positif plutôt que de dimension finie, et appelle catégorie semi-positive une catégorie dans laquelle tout objet est semi-positif. Par ailleurs, Kimura ne considère que le cas où $\mathcal{T}$ est la catégorie des motifs de Chow, mais ses arguments s'étendent au cas général, ainsi qu'il est montré dans [4, § 7, § 9].

la représentation irréductible standard $V = F[\varepsilon] \oplus \overline{F[\varepsilon]}$[13] est annulée par le foncteur de Schur $S_{(2,2)}$ mais n'est ni paire ni impaire[14].

C'est un exemple de catégorie super-tannakienne. D'après [11], une catégorie F-tensorielle abélienne est super-tannakienne si et seulement si tout objet est annulé par un foncteur de Schur.

Il résulte du point 5) du formulaire 3.2 que pour M pair (resp. impair), il existe un plus petit entier naturel $\operatorname{kim} M$ tel que pour tout $n > \operatorname{kim} M$, $\wedge^n M = 0$ (resp. $S^n M = 0$). Pour tout objet de dimension finie, notons $\operatorname{kim} M$ le minimum des $\operatorname{kim} M_+ + \operatorname{kim} M_-$ parmi les décompositions de M en objet pair et objet impair[15]. Il sera calculé en 3.20.

Lemme 3.6. — *Le rang* $\operatorname{rg} M$ *de tout objet de dimension finie est un entier, et* $|\operatorname{rg} M| \leqslant \operatorname{kim} M$.

Il suffit de traiter séparément les cas pair et impair. Supposons M pair, de sorte que $\wedge^n M = 0$ si et seulement si $n > \operatorname{kim} M$. On a $\operatorname{rg}(\wedge^n M) = \binom{\operatorname{rg} M}{n}$, qui ne s'annule que si $\operatorname{rg} M$ est un entier naturel $> n$. D'où $\operatorname{rg} M \leqslant \operatorname{kim} M$. Le cas d'un objet impair est analogue, en utilisant le fait que $\operatorname{rg}(S^n M) = \binom{\operatorname{rg} M + n - 1}{n}$.

Lemme 3.7

1) *La notion d'objet pair (resp. impair) est stable par somme, facteur direct, et passage au dual.*

2) *Le produit tensoriel de deux objets M, N de même parité (resp. parité différente) est pair (resp. impair), et en outre* $\operatorname{kim}(M \otimes N) \leqslant \operatorname{kim} M . \operatorname{kim} N$.

3) *La notion d'objet de dimension finie est stable par $\oplus, \otimes$, dualité [et facteur direct].*

Les points 1) et 2) se déduisent du formulaire 3.2, en s'aidant de la règle de Littlewood-Richardson (*cf. e.g.* [26, 5]). Le point 3) en découle immédiatement [excepté en ce qui concerne le passage aux facteurs directs (il n'est pas immédiat qu'une décomposition en pair et impair en induise une sur tout facteur direct), qui suivra du corollaire 3.11 ci-dessous].

On peut aussi se demander si ces notions sont stables par extension[16]. C'est le cas pour la notion d'objet pair (resp. impair) [35], [14]. Par là, C. Mazza et V. Guletskii

[13] La barre indique le changement de parité.

[14] Dans cet exemple, le radical de Kelly n'est pas un $\otimes$-idéal (il est distinct de $\mathcal{N}$) puisque le passage au quotient par $\mathcal{N}$ n'est pas conservatif.

[15] Nous verrons bientôt qu'en fait cette somme ne dépend pas de la décomposition, 3.10.

[16] En un sens convenable ; par exemple si $\mathcal{T}$ est abélienne ou triangulée.

prouvent indépendamment (et différemment) que le motif de toute courbe non nécessairement lisse ni projective, vu comme objet de la catégorie triangulée des motifs mixtes[17], à coefficients rationnels, est de dimension finie.

3.3. Propriétés de $\otimes$-nilpotence

Proposition 3.8 (Kimura, O'Sullivan). — *Tout morphisme entre objets M, N de parités différentes est $\otimes$-nilpotent (d'échelon $\leqslant \operatorname{kim} M \cdot \operatorname{kim} N + 1$).*

L'argument suivant est tiré de [4, 9.1.9]. La donnée d'un morphisme $f : M \to N$ équivaut à celle d'un morphisme $\mathbf{1} \to M^\vee \otimes N$, ce qui nous ramène au cas où $M = \mathbf{1}$ et N est impair. Le morphisme $f^{\otimes n} : \mathbf{1} \to N^{\otimes n}$ est alors invariant sous $\mathfrak{S}_n$, donc se factorise à travers $S^n N$. Pour $n = \operatorname{kim} N + 1$, on trouve 0.

Corollaire 3.9. — *Pour tout objet $\widetilde{M}$ de dimension finie dans $\mathcal{T}/\sqrt[\otimes]{0}$, la décomposition $\widetilde{M}_+ \oplus \widetilde{M}_-$ en pair et impair est unique.*

C'est immédiat.

Corollaire 3.10. — *Tout objet M dont l'image $\widetilde{M}$ dans $\mathcal{T}/\sqrt[\otimes]{0}$ est de dimension finie dans $\mathcal{T}/\sqrt[\otimes]{0}$ est lui-même de dimension finie. La décomposition $M_+ \oplus M_-$ en pair et impair n'est pas unique en général, mais les classes d'isomorphie de M_+ et de M_- respectivement sont uniques. En particulier, un objet à la fois pair et impair est nul.*

L'argument est le même que celui vu en 2.11. Cela découle du fait que $\sqrt[\otimes]{0}(M, M)$ est un nil-idéal. L'idempotent définissant la partie paire de $\widetilde{M}$ se relève en un idempotent de M. Que cet idempotent définisse « la » partie paire de M et que cette partie paire soit unique à isomorphisme près découle de ce que le $\otimes$-foncteur plein $\mathcal{T}_{\mathrm{kim}} \to (\mathcal{T}/\sqrt[\otimes]{0})_{\mathrm{kim}}$ est conservatif.

Corollaire 3.11 ([4], 9.2.1)

1) *Soit $\mathcal{T}_{\mathrm{kim}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}$ formée des objets de dimension finie. C'est une sous-catégorie F-tensorielle de Kimura-O'Sullivan.*

2) *Son image dans $\mathcal{T}/\sqrt[\otimes]{0}$ n'est autre que $(\mathcal{T}/\sqrt[\otimes]{0})_{\mathrm{kim}}$. Elle admet une $\mathbb{Z}/2$-graduation canonique, compatible à la structure monoïdale, qui induit la décomposition de chaque objet en pair et impair.*

3) *En changeant le signe de la contrainte de commutativité (tressage) de $(\mathcal{T}/\sqrt[\otimes]{0})_{\mathrm{kim}}$ suivant la règle de Koszul, on obtient une nouvelle catégorie F-tensorielle dont tout objet est pair.*

[17] Par exemple celle construite par V. Voevodsky.

Le lemme 3.7 montre que $\mathcal{T}_{\mathrm{kim}}$ et $(\mathcal{T}/\sqrt[\otimes]{0})_{\mathrm{kim}}$ ont toutes les propriétés d'une catégorie F-tensorielle, sauf peut-être la pseudo-abélianité non encore démontrée. Mais cette dernière ainsi que les autres assertions découlent aisément du corollaire précédent.

Exemple 3.12. — Pour $\mathcal{T} = M_{\mathrm{hom}}(k)$, $\mathcal{T}_{\mathrm{kim}}$ est formée des motifs M pour lesquels l'idempotent (de Künneth) π_M^+ de $H(M)$ d'image la partie paire de la cohomologie provient d'un endomorphisme de M. On note $M_{\mathrm{hom}}^{\pm}(k)$ cette catégorie de Kimura-O'Sullivan.

L'une des conjectures standard prédit que $M_{\mathrm{hom}}^{\pm}(k) = M_{\mathrm{hom}}(k)$. Par [25], on sait du moins que c'est le cas si H est la cohomologie ℓ-adique (ou cristalline) et si k est algébrique sur $\mathbf{F}_p$, $p \neq \ell$.

3.4. Propriétés de nilpotence

Soient $\mathcal{T}$ une catégorie F-tensorielle, $\mathcal{N}$ son $\otimes$-idéal maximal, et $\overline{\mathcal{T}}$ le quotient $\mathcal{T}/\mathcal{N}$. Pour tout objet M de $\mathcal{T}$, notons $\overline{M}$ son image dans $\overline{\mathcal{T}}$. Notons ι_M l'isomorphisme $\mathcal{T}(\mathbf{1}, M^\vee \otimes M) \cong \mathcal{T}(M, M)$ et ε_M l'évaluation $M \otimes M^\vee \to \mathbf{1}$.

LEMME 3.13. — *Soit M un objet pair ou impair. Alors pour tout $f \in \mathcal{N}(M, M)$, $f^{\mathrm{kim}\, M+1} = 0$* [18].

La preuve repose sur des calculs formels de traces dans $\mathcal{T}$. On a une formule du type suivant[19] :

$$\iota_M((\mathrm{id}_{M^\vee} \otimes \varepsilon_{M^{\otimes n-1}} \otimes \mathrm{id}_M) \circ (\iota_{M^{\otimes n}}^{-1}(S_\lambda f))) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} t_{\lambda,\sigma} f^{\ell(\sigma)},$$

où $\ell(\sigma)$ est la longueur du cycle de σ ayant 1 dans son support, et où $t_{\lambda,\sigma}$ est un nombre rationnel (explicite) si $\ell(\sigma) = n$, et un nombre rationnel multiplié par un produit de traces de puissances non nulles de f si $\ell(\sigma) < n$. Si $f \in \mathcal{N}(M, M)$, les traces en question sont nulles, et le second membre se réduit à $(\sum_{\sigma \text{ cyclique}} t_{\lambda,\sigma}) f^n$. Pour $\lambda = (1, 1, \ldots, 1)$ ou $\lambda = (n)$, il s'avère que le coefficient $\sum_{\sigma \text{ cyclique}} t_{\lambda,\sigma}$ est non nul (il vaut $(-1)^{n-1}/n$ et $1/n$ respectivement).

Prenons $\lambda = (1, 1, \ldots, 1)$ si M est pair, et $\lambda = (n)$ si M est impair, avec $n = \mathrm{kim}\, M + 1$. Alors $S_\lambda f = 0$, donc le membre de gauche de la formule s'annule, et l'on obtient $f^{\mathrm{kim}\, M+1} = 0$.

THÉORÈME 3.14 ([4]). — *Si M est de dimension finie, $\mathcal{N}(M, M)$ est un idéal nilpotent, d'échelon borné en fonction de* $\mathrm{kim}\, M$. *En outre, $\overline{\mathcal{T}}(\overline{M}, \overline{M})$ est une F-algèbre semi-simple de dimension finie*[20].

---

[18] On peut en fait remplacer $\mathrm{kim}\, M + 1$ par $\mathrm{kim}\, M$, comme l'ont remarqué Jannsen (*cf.* § 10 de la version récente de [26]) et O'Sullivan (*cf.* 3.22 ci-dessous).

[19] Dans le cas des motifs, cette formule apparaît dans [26], dans le langage des correspondances ; elle est prouvée en général dans [4, 7.2.6].

[20] Des énoncés similaires, un peu plus faibles, ont aussi été obtenus par Kimura (dans le cas des motifs) et par O'Sullivan.

Soit $M = M_+ \oplus M_-$ une décomposition en pair et impair. On décompose alors tout endomorphisme en $f = f_+ + f_- + f_\pm$, où f_+ est le terme préservant M_+, f_- le terme préservant M_-, $f_+f_- = f_-f_+ = 0$. Un monôme typique intervenant dans le développement de f^n est de la forme

$$m = f_{\varepsilon_1}^{k_1} \circ f_\pm \circ f_{\varepsilon_2}^{k_2} \circ f_\pm \circ \cdots \circ f_\pm \circ f_{\varepsilon_r}^{k_r}$$

avec $\varepsilon_i \in \{+,-\}$.

Supposons $f \in \mathcal{N}(M,M)$. D'après le lemme précédent, on a alors $m = 0$ dès que l'un des k_i dépasse $\operatorname{kim} M$. D'autre part, d'après la proposition 3.8, on a $f_\pm^{\otimes N} = 0$ dès que N dépasse $(\operatorname{kim} M)^2$, ce qui implique que $m = 0$ dès que le nombre de fois où $f_\pm$ apparaît est $> (\operatorname{kim} M)^2$.

Ceci montre que $\mathcal{N}(M,M)$ est un nil-idéal d'échelon borné en fonction de $\operatorname{kim} M$. Grâce à un théorème de Nagata-Higman ([17], voir aussi [4, 7.2.8]), il résulte de là que $\mathcal{N}(M,M)$ est un idéal nilpotent d'échelon borné en fonction de $\operatorname{kim} M$.

Pour voir que $\overline{\mathcal{T}}(\overline{M},\overline{M})$ est semi-simple de dimension finie sur F, iI est loisible de remplacer $\mathcal{T}$ par $\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{kim}}$, puis de changer le tressage comme en 3.11.3), ce qui nous ramène au cas pair. Soient $f_1,\dots,f_n$ des endomorphismes de M linéairement indépendants sur F. Compte tenu de l'hypothèse $\mathcal{N} = 0$, ils définissent un facteur direct $\mathbf{1}^n$ de $M^\vee \otimes M$. On en déduit que $n \leqslant \operatorname{rg} M^2$, d'où $\dim_F \mathcal{T}(M,M) \leqslant (\operatorname{rg} M)^2 < \infty$. Le radical $\mathcal{R}(M,M)$ est donc nilpotent, donc formé d'éléments de trace nulle ; ainsi $\mathcal{R}(M,M) \subseteq \mathcal{N}(M,M) = 0$, et $\mathcal{T}(M,M)$ est semi-simple.

Corollaire 3.15. — *Tout idempotent (resp. tout système orthogonal d'idempotents) de $\overline{M}$ se relève en un idempotent (resp. en un système orthogonal d'idempotents) de M.*

Corollaire 3.16

1) *$\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{kim}}$ est abélienne semi-simple et le foncteur plein $\mathcal{T}_{\mathrm{kim}} \to \overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{kim}}$ est conservatif.*

2) *Deux objets de $\mathcal{T}_{\mathrm{kim}}$ sont isomorphes si leurs images dans $\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{kim}}$ le sont. En particulier, $\mathcal{T}_{\mathrm{kim}}$ n'a pas d'*objet fantôme*, c'est-à-dire d'objet non nul qui devient nul dans $\mathcal{T}_{\mathrm{kim}} \to \overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{kim}}$.*

1) En effet, $\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{kim}}$ est semi-simple en vertu de 3.14 et pseudo-abélienne en vertu de 3.15, donc abélienne semi-simple. Pour la conservativité du foncteur plein $\mathcal{T}_{\mathrm{kim}} \to \overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{kim}}$, il suffit de vérifier que tout endomorphisme de M qui induit l'identité sur $\overline{M}$ est un automorphisme, ce qui est clair puisque $\mathcal{N}(M,M)$ est nilpotent.

2) résulte de ce que $\mathcal{T}_{\mathrm{kim}} \to \overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{kim}}$ est plein et conservatif.

Corollaire 3.17. — *Supposons M de dimension finie. Alors M est pair (resp. impair) si et seulement si $\overline{M}$ l'est dans $\overline{\mathcal{T}}$.*

Cela découle de ce que $M \in \mathcal{T}_{\mathrm{kim}}$ et de la conservativité de $\mathcal{T}_{\mathrm{kim}} \to \overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{kim}}$.

Corollaire 3.18. — *Tout objet M de $\mathcal{T}_{\mathrm{kim}}$ est somme d'objets indécomposables ; M est indécomposable si et seulement si son image $\overline{M}$ dans $\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{kim}}$ est irréductible.*

Corollaire 3.19. — *Supposons* $M \in \mathcal{T}$ *pair ou bien impair. Si* $\operatorname{rg} M = 0$, $M = 0$. *Si* $\operatorname{rg} M = 1$ *ou* -1, M *est inversible (eu égard à* $\otimes$*).*

Modulo $\mathcal{N}$, c'est clair. On remonte à M par nilpotence de $\mathcal{N}(M, M)$.

Corollaire 3.20. — *Pour tout objet* $M = M_+ \oplus M_-$ *de* $\mathcal{T}$, $\operatorname{kim} M = \operatorname{rg} M_+ - \operatorname{rg} M_-$.

L'inégalité $\geqslant$ résulte de 3.6 et 3.10. L'inégalité inverse dit que $\wedge^{\operatorname{rg} M_+} M_+ \otimes S^{\operatorname{rg} M_-} M_- \neq 0$. Or $\wedge^{\operatorname{rg} M_+} M_+$ (resp. $S^{\operatorname{rg} M_-} M_-$) est pair (resp. impair) de rang 1 (resp. -1), donc inversible d'après 3.19.

Corollaire 3.21 ([41]). — *Supposons* M *pair de dimension* m. *Alors il existe un* $\otimes$*-foncteur* $Rep_F\, GL(m) \to \mathcal{T}$ *qui envoie la représentation standard de* $GL(m)$ *sur* M.

(Il y a un énoncé correspondant pour les objets impairs, en remplaçant $Rep_F\, GL(m)$ par $Rep_F(GL(-m), -\operatorname{id})$.)

Cela suit de 3.19. Le point est que $Rep_F\, GL(m)$ est la catégorie F-tensorielle obtenue à partir de la catégorie monoïdale symétrique rigide librement engendrée par un objet V en passant à l'enveloppe pseudo-abélienne, en tuant $\wedge^{m+1} V$ et en inversant $\wedge^m V$ (la démonstration de ce fait se ramène au résultat classique selon lequel l'homomorphisme canonique $F[\mathfrak{S}_n] \to \operatorname{End}_{GL(m)}(V^{\otimes n})$ est bijectif pour $n \leqslant m$, et surjectif pour $n > m$ de noyau engendré par l'antisymétriseur $c_{(1,\dots,1)}$ (qui induit $\wedge^{m+1}$)).

Pour tout n et tout endomorphisme f d'un objet M de $\mathcal{T}$ (non nécessairement pair), on a la formule $\operatorname{tr}(\wedge^n(1_M + f)) = \sum_{i=0}^n \operatorname{tr}(\wedge^i f)$, d'où, en étendant les scalaires de F à $F(t)$:

$$\operatorname{tr}(\wedge^n(1_M - tf)) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \operatorname{tr}(\wedge^i f) t^i,$$

cf. [4, 7.2.5]. Pour M pair de rang m, $\wedge^m M$ est inversible d'après ce qui précède, donc $\wedge^m(1_M - tf)$ s'identifie à un polynôme $P_f(t)$, égal à $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{tr}(\wedge^i f) t^i \in F[t]$, et appelé *polynôme caractéristique* de f.

Corollaire 3.22 (Cayley-Hamilton-O'Sullivan). — *Pour tout endomorphisme* f *d'un objet pair, on a* $P_f(f) = 0$.

Par le corollaire précédent, cela résulte du théorème de Cayley-Hamilton usuel.

Le résultat suivant est un complément à 3.14 dans le « cas pair » :

Théorème 3.23 ([4], 8.2.4). — *Soit* $\mathcal{T}$ *une catégorie* F*-tensorielle. On suppose que la dimension de tout objet est un entier naturel. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *tout objet est pair,*

ii) $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ *est tannakienne semi-simple sur* F, *et pour tout* $M \in \mathcal{T}$, $\mathcal{N}(M, M)$ *est un idéal nilpotent,*

iii) $\mathcal{R} = \mathcal{N}$,

iv) *il n'y a pas d'objet fantôme dans* $\mathcal{T}$.

Remarque 3.24. — Dans l'exemple 3.5, aucune de ces conditions n'est vérifiée, bien que $\overline{\mathcal{T}} \cong Vec_F$. Que M soit annulé par un foncteur de Schur ne suffit donc pas à entraîner la nilpotence de $\mathcal{N}(M,M)$. Cette propriété met à part les puissances extérieures et symétriques parmi tous les foncteurs de Schur.

3.5. Le théorème de scindage

THÉORÈME 3.25 (André-Kahn). — *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie F-tensorielle. Supposons que, pour tout objet M de $\mathcal{T}$, $\mathcal{N}(M,M)$ soit un idéal nilpotent (ce qui est le cas notamment si $\mathcal{T}$ est de Kimura-O'Sullivan par 3.14), et que $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T}/\mathcal{N}$ soit semi-simple. Alors le $\otimes$-foncteur de projection $\pi : \mathcal{T} \to \overline{\mathcal{T}}$ admet une section σ (comme $\otimes$-foncteur), qui est unique à isomorphisme près.*

Ce résultat est un analogue $\otimes$-catégorique du théorème classique de Wedderburn-Malcev affirmant que pour toute F-algèbre associative A dont le radical est nilpotent et dont le quotient $\overline{A}$ par le radical est semi-simple (ce qui est le cas notamment si A est de dimension finie sur F), l'homomorphisme $A \to \overline{A}$ admet une section, unique à conjugaison près.

La preuve de [4] procède par approximations successives, partant d'une section « ensembliste », et la corrigeant petit à petit pour en faire 1) une section fonctorielle, puis 2) une section monoïdale ; enfin 3) on prouve que toute section monoïdale est compatible à la contrainte de commutativité (tressage).

Elle est très longue et nous ne pouvons en dire ici que quelques mots.

Le pas 1) s'inspire de la preuve de Hochschild du théorème de Wedderburn, basée sur le fait que le H^1 (de Hochschild) d'une F-algèbre semi-simple est nul (la cohomologie de Hochschild a été étendue aux catégories F-linéaires par B. Mitchell [36]). Ceci fournit une section fonctorielle σ. Pour le pas 2), on montre que dans des gradués convenables associés aux puissances du radical, $\sigma(f \otimes g) - \sigma(f) \otimes \sigma(g)$ a la propriété de 2-cocycle, puis que c'est un 2-cobord en utilisant le fait que le H^2 du monoïde libre sur les classes d'isomorphisme d'objets de $\mathcal{T}$ est nul. Ceci permet de corriger σ par approximations successives, et d'en faire une section monoïdale. Le pas 3) repose sur un calcul de cocycles similaire.

Ce théorème s'applique notamment à $\mathrm{CHM}(k)^{\mathrm{ab}}$, et fournit une section (fonctorielle monoïdale symétrique) de la projection $\mathrm{CHM}(k)^{\mathrm{ab}} \to M_{\mathrm{num}}^{\mathrm{ab}}$, unique à isomorphisme près. D'après O'Sullivan, elle est même unique à isomorphisme unique près[21].

3.6. La stratégie de O'Sullivan

Dans le cas où $\mathcal{T}$ est de Kimura-O'Sullivan, O'Sullivan a proposé indépendamment une démonstration complètement différente du théorème de scindage [40], [41]. L'intérêt majeur de cette preuve est qu'elle conduit à un théorème de structure pour les catégories de Kimura-O'Sullivan, comme nous le verrons au paragraphe suivant.

(21) Ceci est dû à la structure d'algèbre de Hopf du motif de Chow d'une variété abélienne.

En voici les grandes lignes, en supposant pour simplifier que tout objet est pair (*cf.* 3.11), de sorte que $\overline{\mathcal{T}}$ est tannakienne semi-simple, et qu'il existe un foncteur fibre à valeurs dans Vec_F, de sorte $\overline{\mathcal{T}} \cong Rep_F\, G_{\mathcal{T}}$ pour un certain groupe pro-réductif $G_{\mathcal{T}}$ sur F (c'est par exemple le cas si F est algébriquement clos).

Soit G un groupe pro-réductif sur F. Si A est une G-algèbre commutative (c'est-à-dire une algèbre commutative dans la $\otimes$-catégorie $REP_F\, G$ des Ind-objets de $Rep_F\, G$), on note $X = \operatorname{Spec} A$ le G-schéma affine sur F correspondant, et $Vec(G,X)$ la catégorie F-tensorielle des fibrés vectoriels équivariants sur X. On a un $\otimes$-foncteur évident $\mathcal{O}_X \otimes - : Rep_F\, G \to Vec(G,X)$. On peut démontrer que tout objet de $Vec(G,X)$ est facteur direct d'un objet dans l'image de ce foncteur.

Exemple 3.26. — Prenons $G = \mathbf{G}_m$, agissant sur $A = F[X,Y]$ de manière standard (X, Y en poids 1). Alors $Vec(\mathbf{G}_m, \mathbf{A}^2_F)$ est équivalente à la catégorie F-tensorielle $Vec(\mathbf{P}^1_F)$ des fibrés vectoriels sur $\mathbf{P}^1_F$. La représentation de dimension 1 et de poids i de $\mathbf{G}_m$ correspond à $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(i)$, et tout objet de $Vec(\mathbf{P}^1_F)$ est somme directe d'objets du type $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(i)$, $i \in \mathbb{Z}$ (Grothendieck).

La preuve de O'Sullivan repose sur les trois lemmes suivants.

Lemme 3.27. — *Soit $\Sigma : Rep_F\, G \to \mathcal{T}$ un $\otimes$-foncteur vers une catégorie F-tensorielle $\mathcal{T}$. Alors il existe un G-schéma affine $X = \operatorname{Spec} A$ sur F, et un $\otimes$-foncteur pleinement fidèle $S : Vec(G,X) \to \mathcal{T}$ tel que $\Sigma = S \circ (\mathcal{O}_X \otimes -)$. Le couple (X,S) est universel parmi ceux réalisant $\Sigma = S \circ (\mathcal{O}_X \otimes -)$.*

Par semi-simplicité de $Rep_F\, G$, Σ admet un Ind-adjoint à droite $\Theta : \mathcal{T} \to REP_F\, G$, et $A = \Theta(\mathbf{1})$ est automatiquement une G-algèbre, dont on note X le spectre. On définit alors S sur les objets en envoyant $\mathcal{O}_X \otimes M$ sur $\Sigma(M)$. Pour définir S sur les morphismes, on utilise les isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned} Vec(G,X)(\mathcal{O}_X \otimes M, \mathcal{O}_X \otimes N) &\cong REP_F\, G(M \otimes N^\vee, A) \\ &\cong \mathcal{T}(\Sigma(M \otimes N^\vee), \mathbf{1}) \cong \mathcal{T}(\Sigma(M), \Sigma(N)). \end{aligned}$$

L'universalité du couple (X,S) se vérifie sans difficulté.

On notera que $\mathcal{T}(\mathbf{1},\mathbf{1}) = F \Leftrightarrow Vec(G,X)(\mathbf{1},\mathbf{1}) = F \Leftrightarrow A^G = F$.

Lemme 3.28. — *On suppose $A^G = F$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $X = \operatorname{Spec} A$ *est un G-espace homogène,*
ii) X *n'a pas de sous-schéma fermé $\neq X$ stable sous G,*
iii) $Vec(G,X)$ *est semi-simple.*

L'équivalence de i) et ii) est due à A. Magid [34]. Prouvons ii) $\Leftrightarrow$ iii). L'hypothèse $A^G = F$ permet d'appliquer 3.23, qui montre que $\mathcal{R} = \mathcal{N}$ dans $Vec(G,X)$. Il suit que $Vec(G,X)$ est semi-simple si et seulement si tout morphisme non nul $M \to \mathbf{1} = \mathcal{O}_X$ dans $Vec(G,X)$ admet une section. Par ailleurs, ii) $\Leftrightarrow$ A est simple $\Leftrightarrow$ tout morphisme non nul $M \to \mathcal{O}_X$ dans $\mathit{Vec}(G,X)$ est un épimorphisme. Or tout tel épimorphisme admet une section : le morphisme canonique $\mathbf{1} = F \to A$ dans la catégorie Ind-semi-simple $\mathit{REP}_F\, G$ se relève en un morphisme $F \to M$, donc l'automorphisme identique de $\mathbf{1} = \mathcal{O}_X$ dans $\mathit{Vec}(G,X)$ se relève en un morphisme $\mathcal{O}_X \to M$.

Lemme 3.29. — *Soient $\iota : \overline{X} \hookrightarrow X$ une G-immersion fermée de G-schémas affines sur F, $\overline{X}$ étant homogène, et $X = \operatorname{Spec} A$ vérifiant $A^G = F$. Alors ι admet une G-rétraction.*

Ce lemme est une variante du théorème du « slice étale » de D. Luna [32, Cor. 2]. Une réduction assez délicate permet de se ramener au cas où G et l'algèbre A sont de type fini. On montre alors que A est complète vis-à-vis de l'idéal de $\overline{X}$ dans X, ce qui permet de se ramener ensuite au cas où cet idéal est de carré nul. Comme $\overline{X} = \operatorname{Spec} \overline{A}$ est homogène, donc lisse sur F, il existe des sections $\overline{A} \to A$ de la projection (non nécessairement G-équivariantes). De plus, il est clair que ces sections forment un espace affine sur lequel G agit. Comme G est réductif, son action a un point fixe, d'où l'existence d'une section équivariante.

Indiquons pour finir comment l'existence d'une section σ de $\pi : \mathcal{T} \to \overline{\mathcal{T}}$ découle de ces lemmes, sous l'hypothèse simplificatrice que tout objet de $\mathcal{T}$ est pair et que $\overline{\mathcal{T}} \cong \mathit{Rep}_F\, G_{\mathcal{T}}$. D'après 3.21, il existe un $\otimes$-foncteur essentiellement surjectif $\mathit{Rep}_F\, G \to \mathcal{T}$, où G est un produit de groupes linéaires. En appliquant 3.27 à cette situation, on obtient $X = \operatorname{Spec} A$ et une $\otimes$-équivalence $\mathit{Vec}(G,X) \cong \mathcal{T}$. Le quotient $\overline{A}$ de A par un G-idéal maximal est simple, donc $\overline{X}$ est homogène et $\mathit{Vec}(G,\overline{X})$ est semi-simple en vertu de 3.28 appliqué à $\overline{X} = \operatorname{Spec} \overline{A}$. Il suit que $\mathit{Vec}(G,X) \to \mathit{Vec}(G,\overline{X})$ induit $\overline{\mathcal{T}} \cong \mathit{Vec}(G,X)/\mathcal{N} \cong \mathit{Vec}(G,\overline{X})$. Toute G-rétraction de $\overline{X} \hookrightarrow X$ comme dans 3.29 induit une section de $\mathit{Vec}(G,X) \to \mathit{Vec}(G,\overline{X})$, d'où un quasi-inverse à droite de π, qu'on modifie en une vraie section σ.

3.7. Objets de dimension finie et super-fibrés vectoriels équivariants

Une fois connue l'existence d'une section $\overline{\mathcal{T}} \cong \mathit{Rep}_F\, G_{\mathcal{T}} \to \mathcal{T}$ de la projection π, on peut lui appliquer le lemme 3.27. On en déduit :

Théorème 3.30 (O'Sullivan [40]). — *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie F-tensorielle dans laquelle tout objet est pair. Supposons en outre $\overline{\mathcal{T}}$ neutre, c'est-à-dire l'existence d'une équivalence $\overline{S} : \mathit{Rep}_F\, G \cong \overline{\mathcal{T}}$ pour un groupe pro-réductif G.*

Alors il existe un G-schéma affine $X = \operatorname{Spec} A$ muni d'un F-point fixe x, avec $A^G = F$, et une équivalence $S : \mathit{Vec}(G,X) \cong \mathcal{T}$ telle que $\overline{S} \circ x^* = \pi \circ S$. Le triplet (X,x,S) est unique à isomorphisme près.

Exemple 3.31. — Même dans le cas classique où $\mathcal{T}$ est tannakienne neutre, cela conduit à une description tout à fait nouvelle de telles catégories. Par exemple, si $\mathcal{T} = \mathit{Rep}_F\, \mathbf{G}_a$, il découle du théorème de Jacobson-Morosov que $G = SL(2)$, et on vérifie que $\mathit{Rep}_F\,\mathbf{G}_a \cong \mathit{Vec}(SL(2), \mathbf{A}^2_F)$. Le $\otimes$-foncteur π correspond à prendre la fibre en $0 \in \mathbf{A}^2$.

Plus généralement, le théorème de scindage permet d'associer à tout F-schéma en groupes affine H son *enveloppe pro-réductive* $G = {}^p\mathit{Red}(H)$, qui est un groupe pro-réductif bien défini à conjugaison près tel que $(\mathit{Rep}_F\,H)/\mathcal{N} \cong \mathit{Rep}_F\,G$ [4], [40]. Les classes d'isomorphismes de représentations indécomposables de H sont en bijection avec les classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de G. Le théorème précédent montre de plus l'existence d'un G-schéma affine X pointé tel que $\mathit{Rep}_F\,H \cong \mathit{Vec}(G, X)$.

Il n'est pas difficile de généraliser 3.30 au cas où $\mathcal{T}$ est une catégorie de Kimura-O'Sullivan quelconque. Il suffit pour cela de remplacer A par une algèbre commutative dans $\operatorname{Ind}\overline{\mathcal{T}}$, et $\mathit{Vec}(G, \operatorname{Spec} A)$ par la catégorie Proj_A des A-modules projectifs sur les objets de $\overline{\mathcal{T}}$ (c'est-à-dire l'enveloppe pseudo-abélienne de la catégorie dont les objets sont ceux de $\overline{\mathcal{T}}$ et les morphismes entre deux objets M et N définis par $\operatorname{Hom}_A(A \otimes M, A \otimes N)$). C'est une catégorie F-tensorielle[(22)], et il y a un $\otimes$-foncteur évident $A \otimes - : \overline{\mathcal{T}} \to \mathit{Proj}_A$ qui est l'identité sur les objets. Tout homomorphisme $a : A \to B$ détermine un $\otimes$-foncteur $a_* : \mathit{Proj}_A \to \mathit{Proj}_B$.

On a alors la variante suivante du théorème précédent :

Variante 3.32. — *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie de Kimura-O'Sullivan. Alors il existe une algèbre commutative A dans $\operatorname{Ind}\overline{\mathcal{T}}$ munie d'une augmentation $a : A \to \mathbf{1}$, telle que $\operatorname{Ind}\overline{\mathcal{T}}(\mathbf{1}, A) = F$, et une équivalence $S : \mathit{Proj}_A \cong \mathcal{T}$ telle que $a_* = \pi \circ S$. Le triplet (A, a, S) est unique à isomorphisme près.*

Les propriétés de $\mathcal{T}$ sont fidèlement décrites en termes de A. O'Sullivan en a dressé un dictionnaire dont voici un extrait :

$\boxed{A}$	$\boxed{\mathcal{T} \cong \mathit{Proj}_A}$
idéal de A	$\otimes$-idéal de $\mathcal{T}$
l'idéal maximal de A (le noyau de a)	$\mathcal{N}$
$\sqrt{0}$ (nilradical de A)	$\sqrt[\otimes]{0}$
A est intègre	$\mathcal{T}$ admet un super-foncteur fibre, *i.e.* un $\otimes$- foncteur fidèle $\mathcal{T} \to s\mathit{Vec}_K$
$\sqrt{0} = \bigcap_{\mathfrak{P}\text{ premier}} \mathfrak{P}$	$\sqrt[\otimes]{0}$ est l'intersection des noyaux des $\otimes$-foncteurs $\mathcal{T} \to s\mathit{Vec}_K$ (pour diverses extensions K/F)

Revenons enfin aux motifs, et ne les quittons plus. O'Sullivan déduit du dernier article de ce dictionnaire la forme renforcée suivante de 2.11 :

(22) Si $\overline{\mathcal{T}} = \mathit{Rep}_F(G, \varepsilon)$, Proj_A n'est autre que la catégorie F-tensorielle des super-fibrés vectoriels sur $\operatorname{Spec} A$ équivariants sous G et tels que l'action de ε définisse la parité.

THÉORÈME 3.33 (O'Sullivan). — *La conjecture de Voevodsky équivaut à celle de Kimura-O'Sullivan jointe à la conjecture suivante : tout* $\otimes$*-foncteur* $\mathrm{CHM}(k)_{\mathbb{Q}} \to sVec_K$ *se factorise à travers l'équivalence numérique.*

Spécialisant au cas de la sous-catégorie $\mathrm{CHM}(k)_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$, cela montre que la conjecture de Voevodsky pour les variétés abéliennes équivaut à une version forte de la conjecture standard $\sim_{\mathrm{hom}} = \sim_{\mathrm{num}}$ (qui est connue sur les variétés abéliennes en caractéristique 0, pour une cohomologie classique [31]) : le noyau de *tout* $\otimes$-foncteur $\mathrm{CHM}(k)_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}} \to sVec_K$ est $\mathcal{I}_{\mathrm{num}}$, question ouverte.

4. APPLICATIONS

Il est temps de tirer les fruits de toutes ces considérations abstraites. Nous allons décliner divers résultats ou perspectives plus ou moins concrets qu'elles offrent en théorie des cycles algébriques.

4.1. Motifs de surfaces

Considérons à nouveau la décomposition de Murre du motif de Chow d'une surface projective lisse X (*cf.* 2.2) : $\mathfrak{h}(X) = \bigoplus_0^4 \mathfrak{h}^n(X)$, avec

$$\mathfrak{h}^0(X) \cong \mathbf{1}, \quad \mathfrak{h}^1(X) \cong \mathfrak{h}^3(X)(1) \cong \mathfrak{h}^1(\mathrm{Alb}_X), \ \mathfrak{h}^2(X) \cong (\mathbf{1}(-1))^{\mathrm{rg}\,\mathrm{NS}(X)} \oplus \mathfrak{t}^2(X).$$

On a $\mathrm{Ker}\,\mathrm{AJ}_X^2 \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{CH}^2(\mathfrak{h}^2(X)) = \mathrm{CH}^2(\mathfrak{t}^2(X))$.

Comme $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{hom}}(X)$ est un objet pair de $M_{\mathrm{hom}}(k)$, $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{num}}(X)$ est un objet pair de $\mathrm{CHM}(k)/\mathcal{N}$. Si $\mathfrak{h}^2(X)$ est de dimension finie (ce qui revient à dire que $\mathfrak{h}(M)$ l'est, compte tenu de 2.8), il suit de 3.17 que $\mathfrak{h}^2(X)$ est pair et de 3.20 que $\wedge^{t_2+1}\mathfrak{h}^2(X) = 0$, en notant $t_2 = b_2 - \mathrm{rg}\,\mathrm{NS}$ la dimension de la partie transcendante de $H^2(X)$. On en déduit comme dans 1.2 que pour tout n-uplet de cycles $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans le noyau de $\mathrm{AJ}_X^2 \otimes \mathbb{Q}$, on a $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n = 0$ dès que $n > t_2$.

Si $X = C_1 \times C_2$ est un produit de courbes de genres respectifs g_1 et g_2, on a $t_2 \leqslant 4g_1 \cdot g_2$, et on sait que $\mathfrak{t}^2(X) \subset \mathfrak{h}^1(C_1) \otimes \mathfrak{h}^1(C_2)$ est de dimension finie, d'où l'assertion de dimensionalité finie énoncée en 1.2[(23)].

Revenons à notre point de départ, le théorème de Mumford selon lequel, si X est une surface sur un corps k assez gros (par exemple $\mathbb{C}$), l'injectivité de AJ_X^2 implique que $H^2(X)$ est engendré par les classes de diviseurs.

S. Bloch *conjecture la réciproque, sur un corps k quelconque* [8], [9]. En termes motiviques, cette conjecture revient à dire que $t_2 = 0 \Rightarrow \mathrm{CH}^2(\mathfrak{t}^2(X)) = 0$.

Si $\mathfrak{h}(X)$ est de dimension finie, on a vu que $\mathfrak{t}^2(X)$ est alors pair, donc $t_2 = 0 \Rightarrow \mathfrak{t}^2(X) = 0$ (3.19), et a fortiori $\mathrm{CH}^2(\mathfrak{t}^2(X)) = 0$. La réciproque est d'ailleurs vraie [16] :

(23) Dans [26, 10.9], Kimura affine la borne de $4g_1g_2$ à g_1g_2.

THÉORÈME 4.1. — *Soit X une surface avec $b_2 = \operatorname{rg}\mathrm{NS}$. Alors X vérifie la conjecture de Bloch si et seulement si $\mathfrak{h}(X)$ est de dimension finie.*

Par cette voie, V. Guletskii et C. Pedrini [15] donnent une preuve uniforme de la conjecture de Bloch lorsque X n'est pas de type général (voir aussi [50, 23.1.4] pour un exemple de type général) : dans tous ces cas, $\mathfrak{h}(X) \in \mathrm{CHM}(k)^{\mathrm{ab}}$. Par ailleurs, M. Saito [44] montre, du moins sur $k = \mathbb{C}$, que les conditions de 4.1 équivalent aussi à $(\mathcal{N}(\mathfrak{h}(X), \mathfrak{h}(X)))^3 = 0$.

On trouvera dans [26] d'autres applications concrètes de ces idées aux groupes de Chow, dans la même veine.

Un cas ouvert particulièrement intéressant de la conjecture de Bloch est celui des *faux plans projectifs* : surfaces de type général dont le motif homologique est isomorphe à celui de $\mathbf{P}^2$. En est-il de même du motif de Chow ? Le fait qu'il s'agisse de surfaces de Shimura (*cf.* [23]), avec leur pléthore de correspondances de Hecke, pourrait s'avérer utile ici.

4.2. Motifs sur les corps finis

La catégorie $\mathbb{Q}$-tensorielle des motifs $M_\sim(\mathbf{F}_q)_\mathbb{Q}$ sur le *corps fini* $\mathbf{F}_q$ (pour une équivalence adéquate $\sim$ arbitraire) a la propriété remarquable de posséder un automorphisme non trivial du $\otimes$-foncteur identique : l'automorphisme de Frobenius Fr.

Soit $X \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q)$ une variété projective lisse sur $\mathbf{F}_q$. La conjecture de Tate pour X s'énonce de deux façons équivalentes [48] :

– pour tout entier r, l'ordre du pôle en q^{-r} de la fonction zêta $Z(X,T) \in \mathbb{Q}(T)$ est le rang de $\mathcal{Z}^r_{\mathrm{num}}(X)$,

– pour tout r, l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_q/\mathbf{F}_q) \cong \widehat{\mathbb{Z}}$ sur $H^r_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbf{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell(r))$ est semi-simple pour la valeur propre 1[(24)], et l'application classe de cycle ℓ-adique ($\ell \nmid q$)

$$c^r_{X,\ell} : \mathrm{CH}^r(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \big(H^{2r}_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbf{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell(r))\big)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_q/\mathbf{F}_q)}$$

est *surjective.*

D'autre part, une conjecture de Beilinson [6, 1.0] prédit que l'application classe de cycle est aussi *injective*, et qu'en fait $\mathrm{CH}(X)_\mathbb{Q} = \mathcal{Z}_{\mathrm{num}}(X)_\mathbb{Q}$.

THÉORÈME 4.2 (Kahn [21]). — *Si le motif de Chow $\mathfrak{h}(X)$ est de dimension finie, la conjecture de Tate pour X implique la conjecture de Beilinson pour X.*

La conjecture de Tate est connue pour les produits de coubes elliptiques [47] et pour certaines hypersurfaces de Fermat [48], [24], de même que la conjecture de Kimura-O'Sullivan par 2.8 ; on en déduit :

COROLLAIRE 4.3 ([21]). — *Sur tout produit de courbes elliptiques sur $\mathbf{F}_q$, $\sim_{\mathrm{rat}} = \sim_{\mathrm{num}}$. De même sur toute hypersurface de Fermat sur $\mathbf{F}_q$ dont le degré divise un nombre de la forme $q^m + 1$, $m \in \mathbb{N}$.*

(24) *i.e.* l'homomorphisme naturel des invariants vers les coinvariants est un isomorphisme.

Dans [21], B. Kahn va beaucoup plus loin et prouve la conjecture de Lichtenbaum [30] sur les valeurs spéciales de la fonction zêta de telles variétés.

Prouvons 4.2, c'est-à-dire que sous la conjecture de Tate pour X et en supposant $\mathfrak{h}(X) \in \mathrm{CHM}(\mathbf{F}_q)_{\mathrm{kim}}$, on a $\mathrm{CHM}(\mathbf{F}_q)(\mathbf{1}, \mathfrak{h}(X)(r)) = M_{\mathrm{num}}(\mathbf{F}_q)(\mathbf{1}, \mathfrak{h}(X)(r))$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. Par 3.18, on peut remplacer $\mathfrak{h}(X)(r)$ par un facteur direct $M \neq 0$ indécomposable ; le motif numérique $\overline{M}$ correspondant est alors irréductible. Si $M \cong \mathbf{1}$, la question est réglée puisque $\mathrm{End}\,\mathbf{1} = \mathbb{Q}$. Supposons donc $M \ncong \mathbf{1}$ et montrons que $\mathrm{CHM}(\mathbf{F}_q)(\mathbf{1}, M) = 0$. On a $\overline{M} \ncong \mathbf{1}$ (conservativité du foncteur de passage aux motifs numériques 3.16), et a fortiori le motif homologique M_{hom} attaché à M n'est pas isomorphe à $\mathbf{1}$. Par la conjecture de Tate, ceci entraîne que l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_q/\mathbf{F}_q)$ sur $H_{\text{ét}}(M)$ est non triviale (et semi-simple pour la valeur propre 1). Il est bien connu que l'inverse du Frobenius galoisien $\in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_q/\mathbf{F}_q)$ agit par $\mathrm{Fr}(M_{\mathrm{hom}})$. Ainsi $\mathrm{Fr}(M_{\mathrm{hom}})$ est semi-simple pour la valeur propre 1 et distinct de l'identité. Il suit que $\mathrm{Fr}(\overline{M})$ est distinct de l'identité, et comme $\overline{M}$ est irréductible, $\mathrm{Fr}(\overline{M}) - \mathrm{id}_{\overline{M}}$ est un automorphisme de $\overline{M}$. Par conservativité du passage aux motifs numériques, $\mathrm{Fr}(M) - \mathrm{id}_M$ est donc un automorphisme de M. Pour tout $f \in \mathrm{CHM}(\mathbf{F}_q)(\mathbf{1}, M)$, on a $\mathrm{Fr}(M)f = f\,\mathrm{Fr}(\mathbf{1}) = f$, et on conclut que $f = 0$.

Remarque 4.4. — Dans [3], il est démontré que la conjecture standard de type Lefschetz pour les espaces X fibrés en variétés abéliennes sur une courbe projective lisse sur $\overline{\mathbf{F}}_q$ implique la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes sur $\mathbf{F}_q$. Compte tenu de 4.2 et de 2.8, elle implique donc aussi la conjecture de Beilinson pour les variétés abéliennes sur $\mathbf{F}_q$.

Signalons aussi le résultat remarquable suivant, dont la preuve dépasse le cadre modeste de ces notes :

Théorème 4.5 (Kahn [21]). — *Les énoncés suivants sont équivalents :*

1) *la conjecture de Tate vaut pour tout $X \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q)$, et la conjecture de Kimura-O'Sullivan vaut pour* $\mathrm{CHM}(\mathbf{F}_q)$,

2) *la conjecture de Tate vaut pour toute variété abélienne sur $\mathbf{F}_q$, et* $\mathrm{CHM}(\mathbf{F}_q)^{\mathrm{ab}} = \mathrm{CHM}(\mathbf{F}_q)$,

3) *les groupes de* cohomologie de Lichtenbaum $H^i_W(X, \mathbb{Z}(n))$ *sont de type fini pour tout $X \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q)$ et tout $(i, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.*

(D'après le théorème précédent, ces énoncés impliquent aussi la conjecture de Beilinson.)

La cohomologie de Lichtenbaum (« Weil-étale cohomology ») se définit ainsi. Ses coefficients sont les faisceaux étales $\mathbb{Z}$-équivariants $\mathcal{F}$ sur $X_{\overline{\mathbf{F}}_q}$, l'action de $\mathbb{Z}$ étant donnée par le Frobenius galoisien (on n'exige pas la $\widehat{\mathbb{Z}}$-équivariance !). La cohomologie de Lichtenbaum est donnée par les foncteurs dérivés de $\mathcal{F} \to H^0_W(X, \mathcal{F}) := H^0_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbf{F}}_q}, \mathcal{F})^{\mathbb{Z}}$.

4.3. Rationalité de fonctions zêta motiviques

L'une des expressions de la fonction zêta $Z(X,T)$ est

$$Z(X,T) = 1 + |X(\mathbf{F}_q)|\,T + |S^2(X)(\mathbf{F}_q)|\,T^2 + \cdots$$

(où S^n désigne la puissance symétrique n-ième de X).

Dans [22], M. Kapranov a eu l'idée de considérer l'expression

$$1 + X\,T + S^2(X)\,T^2 + \cdots$$

pour une variété X quelconque (disons quasi projective pour que les puissances symétriques soient définies) sur un corps k non nécessairement fini. Pour donner un sens précis à cette expression, on se place dans le groupe $K_0(\mathit{Var}(k))$ quotient du groupe abélien libre sur les classes d'isomorphismes $[X]$ de k-variétés (non nécessairement projectives ni lisses) par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $[X]-[U]-[Z]$ si $X = U \coprod Z$ avec Z fermé dans X, et U l'ouvert complémentaire. Le produit des variétés en fait un anneau commutatif.

On vérifie alors que la formule précédente définit un homomorphisme $Z_{\mathrm{var}}(-,T)$ de $K_0(\mathit{Var}(k))$ vers le groupe abélien (multiplicatif) $1 + TK_0(\mathit{Var}(k))[[T]]$. Kapranov montre que pour toute courbe X, $Z_{\mathrm{var}}([X],T)$ est une fonction rationnelle ; si X est projective lisse de genre g, $(1-T)(1-[\mathbf{A}^1]T)Z_{\mathrm{var}}([X],T)$ est un polynôme de degré $2g$.

La question de la rationalité de $Z_{\mathrm{var}}([X],T)$ en général, conjecturée par Kapranov, a été tranchée négativement par M. Larsen et V. Lunts [29][25] : si X est un produit de deux courbes de genre non nul, $Z_{\mathrm{var}}([X],T)$ n'est pas rationnelle.

Plutôt que $K_0(\mathit{Var}(k))$, on peut prendre comme groupe de coefficients $K_0(M_\sim(k))$, quotient du groupe abélien libre sur les classes d'isomorphisme $[M]$ d'objets de $M_\sim(k)_\mathbb{Q}$ par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $[M]-[M']-[M'']$ avec $M \cong M' \oplus M''$. Le produit tensoriel des motifs en fait un anneau commutatif.

On obtient une variante motivique de la fonction zêta de Kapranov en montrant que l'expression

$$1 + [M]\,T + [S^2M]\,T^2 + \cdots$$

définit un homomorphisme $Z_{\mathrm{mot}}(-,T)$ de $K_0(M_\sim(k))$ vers le groupe abélien (multiplicatif) $1 + TK_0(M_\sim(k))[[T]]$, [2, ch. 13].

Proposition 4.6. — *Si le motif M est de dimension finie au sens de Kimura-O'Sullivan (par exemple si $M \in \mathrm{CHM}(k)^{\mathrm{ab}}$), alors $Z_{\mathrm{mot}}([M],T)$ est rationnelle.*

[25] La question de la rationalité reste ouverte si l'on localise $K_0(\mathit{Var}(k))$ en inversant $[\mathbf{A}^1]$ (qui est un diviseur de zéro !).

Supposons que $M = M_+ \oplus M_-$ avec $\wedge^m M_+ = S^m M_- = 0$. Il est clair que $Z_{\mathrm{mot}}([M_-], T)$ est de la forme $1 + TP_-(T)$ où P_- est un polynôme de degré $< m$. Pour $Z_{\mathrm{mot}}([M_+], T)$, on utilise la formule suivante :

$$\sum [S^n M_+] T^n = \frac{1}{\sum [\wedge^n M_+](-T)^n}$$

et le dénominateur est de la forme $1 - TP_+(T)$ où P_+ est un polynôme de degré $< m$.

Corollaire 4.7. — *La conjecture de Kimura-O'Sullivan implique la rationalité de $Z_{\mathrm{mot}}([M], T)$ pour tout motif de Chow M, et en outre l'égalité $K_0(\mathrm{CHM}(k)) = K_0(M_{\mathrm{num}}(k))$.*

(Pour la seconde assertion, utiliser la conservativité du passage aux motifs numériques.)

Pour plus de détails, notamment sur le lien entre $Z_{\mathrm{var}}(-, T)$ et $Z_{\mathrm{mot}}(-, T)$, voir [2, ch. 13].

Les deux derniers paragraphes sont consacrés à des applications du théorème de scindage 3.25, appliqué d'abord à des motifs homologiques, et ensuite à des motifs de Chow.

4.4. Construction inconditionnelle des groupes de Galois motiviques

Rappelons d'abord la construction de Grothendieck des groupes de Galois motiviques, en admettant la conjecture standard $\sim_{\mathrm{hom}} = \sim_{\mathrm{num}}$ (pour une cohomologie H fixée à coefficients dans une extension K/F). Cette conjecture entraîne l'algébricité des projecteurs de Künneth pairs π_X^+, ce qui permet de modifier le tressage selon la règle des signes de Koszul. Ceci fait, la catégorie $\mathbb{Q}$-tensorielle abélienne semi-simple $M_{\mathrm{hom}}(k) = M_{\mathrm{num}}(k)$ est munie d'un $\otimes$-foncteur fidèle exact vers Vec_K défini par la cohomologie (et encore noté H). Le groupe de Galois motivique $G_{\mathrm{mot},k}$ est le K-groupe pro-réductif $AutH$. Remplaçant $M_{\mathrm{num}}(k)$ par la sous-catégorie tannakienne engendré par un objet $\mathfrak{h}(X)$, on obtient un quotient $G_{\mathrm{mot}}(X)$ de $G_{\mathrm{mot},k}$, qui est un sous-groupe réductif de $GL(H(X))$.

Un certain nombre de problèmes géométriques faisant intervenir les correspondances algébriques modulo équivalence homologique se traduisent alors en des problèmes de représentations de groupes réductifs, traitables par la théorie classique des poids, *cf. e.g.* [2, ch. 5,6,7,10].

Pour définir les groupes de Galois motiviques sans avoir à admettre la conjecture standard, on peut utiliser le théorème de scindage monoïdal comme suit [5]. Considérons la catégorie $\mathbb{Q}$-tensorielle $M^{\pm}_{\mathrm{hom}}(k)$ introduite en 3.12 (sous-catégorie pleine de $M_{\mathrm{hom}}(k)$ formée des motifs dont le projecteur de Künneth pair est donné par un morphisme de $M_{\mathrm{hom}}(k)$). C'est une catégorie de Kimura-O'Sullivan. On peut modifier le tressage selon la règle de Koszul pour faire en sorte que $M^{\pm}_{\mathrm{hom}}(k)/\mathcal{N} = M^{\pm}_{\mathrm{num}}(k)$ soit tannakienne semi-simple. Ceci fait, on dispose du $\otimes$-foncteur fidèle exact H : $M^{\pm}_{\mathrm{hom}}(k) \to Vec_K$.

Le théorème de scindage fournit une $\otimes$-section σ de la projection $\pi : M^{\pm}_{\mathrm{hom}}(k) \to M^{\pm}_{\mathrm{num}}(k)$, unique à isomorphisme près. On définit alors $G^{\pm}_{\mathrm{mot},k}$ comme le K-groupe pro-réductif $Aut(H \circ \sigma)$. Remplaçant $M_{\mathrm{num}}(k)$ par la sous-catégorie tannakienne engendré par un objet $\mathfrak{h}(X)$, on obtient un quotient $G_{\mathrm{mot}}(X)$ de $G^{\pm}_{\mathrm{mot},k}$, qui est un sous-groupe réductif de $GL(H(X))$ [26].

Remarque 4.8. — Le composé $H \circ \sigma \circ \pi$ définit une nouvelle cohomologie[27], et l'équivalence homologique qui lui est associée n'est autre que l'équivalence numérique. Elle vérifie le théorème de Lefschetz fort si et seulement si la conjecture standard de type Lefschetz est vraie pour H.

4.5. Motifs de Chow vus comme super-fibrés vectoriels équivariants sous le groupe de Galois motivique. Hauteurs

Le théorème de structure 3.32 s'applique en particulier à toute catégorie F-tensorielle de motifs de Chow qui est Kimura-O'Sullivan. Plutôt que de nous limiter à des catégories telles $\mathrm{CHM}(k)^{\mathrm{ab}}_F$, nous prendrons ici le parti d'appliquer 3.32 à $\mathrm{CHM}(k)_F$ tout entière, en supposant la conjecture de Kimura-O'Sullivan vraie, de même (pour simplifier) que la conjecture standard $\sim_{\mathrm{hom}} = \sim_{\mathrm{num}}$. D'après 3.32, il existe une algèbre commutative A dans la catégorie F-tensorielle des Ind-motifs numériques, vérifiant $\mathrm{Ind}\, M_{\mathrm{num}}(k)_F(\mathbf{1}, A) = F$ et munie d'une augmentation $a : A \to \mathbf{1}$, ainsi qu'une équivalence $S : \mathit{Proj}_A \cong \mathrm{CHM}(k)_F$ telle que $a_* = \pi \circ S$. Le triplet (A, a, S) est unique à isomorphisme près. Les équivalences adéquates sont en bijection avec les idéaux de A.

Remarque 4.9. — S'il existe une cohomologie à coefficients dans F, on obtient une équivalence $\overline{S} : \mathit{Rep}_F(G_{\mathrm{mot},k}, -\mathrm{id}) \cong M_{\mathrm{num}}(k)_F$ (où $-\mathrm{id}$ désigne l'image de -1 par le cocaractère des poids). On est alors dans le « super-analogue » de la situation de 3.30 : il existe un super-$G_{\mathrm{mot},k}$-schéma affine X bien défini à isomorphisme près (sur lequel l'action de $-\mathrm{id}$ définit la parité) tel que $\mathrm{CHM}(k)_F$ s'identifie à la catégorie F-tensorielle des super-fibrés vectoriels sur X équivariants sous $G_{\mathrm{mot},k}$ (et sur lesquelles l'action de $-\mathrm{id}$ définit la parité). Le super-schéma X a un unique F-point fixe sous $G_{\mathrm{mot},k}$ qui correspond à l'équivalence numérique. Prendre la fibre d'un super-fibré vectoriel équivariant en ce point correspond au passage du motif de Chow au motif numérique associé.

Comprendre la structure de $\mathrm{CHM}(k)_F$ revient donc à comprendre celle de A. À cet égard, O'Sullivan [40] fait les observations suivantes :

– on a la graduation par le poids $A = \bigoplus_{-\infty}^{+\infty} A_i$, qui est une graduation d'algèbre,
– la conjecture de Voevodsky équivaut à dire que $\ker a$ est un nil-idéal,

[26] Changer σ change ce sous-groupe en un conjugué.
[27] Mêmes espaces de cohomologie, mais nouvelle application classe de cycles.

– la conjecture de Bloch-Beilinson équivaut à dire que la partie de poids strictement négative de A est nulle. Elle équivaut aussi (*via* 2.13) à dire que $A_0 = \mathbf{1}$ et A est engendrée par A_1,

– une version plus fine de la conjecture de Bloch-Beilinson implique que $\mathcal{I}^i_{\mathrm{hom}} = 0$ dès que i dépasse la dimension de Kronecker $d(k)$ de k. Ceci équivaut à $(A_1)^i = 0$ pour $i > d(k)$.

Pour un corps fini, cela donne $A = \mathbf{1}$, et on retrouve la conjecture de Beilinson mentionnée en 4.2.

Pour un corps de nombres, cela donne $A = \mathbf{1} \oplus A_1$. L'échelon de nilpotence dans la conjecture de Voevodsky serait donc 2 dans ce cas.

Par ailleurs, toujours pour k un corps de nombres, et prenant $F = \mathbb{R}$, O'Sullivan traduit l'existence des accouplements de hauteur de Beilinson en l'existence d'un accouplement symétrique $S^2 A_1 \to \mathbf{1}(-1)$ induisant sur chaque sous-objet de rang fini de A_1 une forme de Weil relativement à la polarisation canonique de $M_{\mathrm{num}}(k)_{\mathbb{R}}$.

RÉFÉRENCES

[1] Y. André – *Period mappings and differential equations. From $\mathbb{C}$ to $\mathbb{C}_p$*, MSJ Memoirs, vol. 12, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2003.

[2] ______, *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas & Synthèses, vol. 17, Société Mathématique de France, 2004.

[3] ______, « Cycles de Tate et cycles motivés sur les variétés abéliennes en caractéristique p », à paraître dans *J. Inst. Math. Jussieu*, 2005.

[4] Y. André & B. Kahn – « Nilpotence, radicaux et structures monoïdales », *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **108** (2002), p. 107–291, et erratum, **113** (2005).

[5] ______, « Construction inconditionnelle de groupes de Galois motiviques », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **331** (2002), p. 989–994.

[6] A. Beilinson – « Height pairing between algebraic cycles », in *K-theory, Arithmetic and Geometry*, Lect. Notes in Math., vol. 1289, Springer, 1987, p. 27–41.

[7] S. Bloch – « Some elementary theorems about algebraic cycles on Abelian varieties », *Invent. Math.* **37** (1976), no. 3, p. 215–228.

[8] ______, *Lectures on algebraic cycles*, Math. series, vol. IV, Duke Univ., 1980.

[9] S. Bloch, A. Kas & D. Lieberman – « Zero-cycles on surfaces with $p_g = 0$ », *Compositio Math.* **33** (1976), p. 135–145.

[10] P. Deligne – « Catégories tannakiennes », in *Grothendieck Festschrift, vol. II*, Progress in Math., vol. 87, Birkhäuser, 1990, p. 111–198.

[11] ______, « Catégories tensorielles », *Moscow Math. J.* **2** (2002), p. 227–248.

[12] M. Demazure – « Motifs des variétés algébriques », in *Séminaire Bourbaki (1969/70)*, Lect. Notes in Math., vol. 180, Springer, Paris, 1971, Exp. n$^{\mathrm{o}}$ 365, p. 11–38.

[13] M. Green & P. Griffiths – « An interesting 0-cycle », *Duke Math. J.* **119** (2003), p. 261–313.

[14] V. Guletskiĭ – « Finite dimensional objects in distinguished triangles », prépublication `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0637`.

[15] V. Guletskiĭ & C. Pedrini – « The Chow motive of the Godeaux surface », in *Algebraic Geometry (in memory of P. Francia)*, de Gruyter, 2002, p. 179–195.

[16] ______, « Finite dimensional motives and the conjectures of Beilinson and Murre », *K-Theory* **550** (2003), p. 1–21.

[17] G. Higman – « On a conjecture of Nagata », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **52** (1956), p. 1–4.

[18] U. Jannsen – « Motives, numerical equivalence and semi-simplicity », *Invent. Math.* **107** (1992), p. 447–452.

[19] ______, « Motivic sheaves and filtrations on Chow groups », in *Motives (Seattle, WA, 1991), vol. I*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, American Mathematical Society, 1994, p. 245–302.

[20] ______, « Equivalence relations on algebraic cycles », in *The arithmetic and Geometry of algebraic cycles, proc. NATO conference (Banff, 1998)*, NATO series, vol. 548, Kluwer, 2000, p. 225–260.

[21] B. Kahn – « Équivalences rationnelle et numérique sur certaines variétés de type abélien sur un corps fini », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4e *série* **36** (2003), no. 6, p. 977–1002.

[22] M. Kapranov – « The elliptic curve in the S-duality theory and Eisenstein series for Kac-Moody groups », prépub. ArXiv `AG/0001005`, 2000.

[23] F. Kato – « An overview of p-adic uniformization », in *Period mappings and differential equations. From $\mathbb{C}$ to $\mathbb{C}_p$* [1], appendice 2.

[24] T. Katsura & T. Shioda – « On Fermat varieties », *Tôhoku Math. J.* **31** (1979), p. 97–115.

[25] N. Katz & W. Messing – « Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields », *Invent. Math.* **23** (1974), p. 73–77.

[26] S.-I. Kimura – « Chow motives can be finite-dimensional, in some sense », *Math. Ann.* **331** (2005), p. 173–201.

[27] S. Kleiman – « Algebraic cycles and the Weil conjectures », in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North Holland, Masson, 1968, p. 359–386.

[28] ______, « Finiteness theorems for algebraic cycles », in *Actes Congrès intern. math. (Nice, 1970), tome 1*, Gauthier-Villars, 1970, p. 445–449.

[29] M. Larsen & V. Lunts – « Rationality criteria for motivic zeta-functions », prépub. ArXiv `AG/0212158`, 2002.

[30] S. Lichtenbaum – « Values of zeta functions at non-negative integers », Lect. Notes in Math., vol. 1068, Springer, 1984, p. 127–138.

[31] D. Lieberman – « Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds », *Amer. J. Math.* **90** (1968), p. 366–374.

[32] D. Luna – « Théorème du slice étale », in *Sur les groupes algébriques*, Mém. Soc. Math. France, vol. 33, Société Mathématique de France, 1973, p. 81–105.

[33] I. Macdonald – *Symmetric functions and Hall polynomials*, Clarendon Press, Oxford, 1979.
[34] A. Magid – « Equivariant completions of rings with reductive group action », *J. Pure Appl. Algebra* **49** (1987), p. 173–185.
[35] C. Mazza – « Schur functors and motives », Prépublication `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0641`.
[36] B. Mitchell – « Rings with several objects », *Adv. in Math.* **8** (1972), p. 1–161.
[37] D. Mumford – « Rational equivalence of zero-cycles on surfaces », *J. Math. Kyoto Univ.* **9** (1969), p. 195–204.
[38] J. Murre – « On the motive of an algebraic surface », *J. reine angew. Math.* **409** (1990), p. 190–204.
[39] ———, « On a conjectural filtration on the Chow groups of an algebraic variety I, II », *Indag. Math.* **4** (1993), p. 177–201.
[40] P. O'Sullivan – Papiers secrets. Deux lettres à Y. André et B. Kahn, 29/4/02, 12/5/02. Deux projets de notes aux CRAS.
[41] ———, « The structure of certain rigid tensor categories », soumis.
[42] A. Roitman – « Rational equivalence of zero-cycles », *Math. USSR-Sb.* **18** (1972), p. 571–588.
[43] N. Saavedra Rivano – *Catégories tannakiennes*, Lect. Notes in Math., vol. 265, Springer, 1972.
[44] M. Saito – « Bloch's conjecture and Chow motives », preprint RIMS, 2000.
[45] P. Samuel – « Relations d'équivalence en géométrie algébrique », in *Proc. Internat. Congress Math., 1958*, Cambridge Univ. Press, 1960, p. 470–487.
[46] A. Shermenev – « The motive of an abelian variety », *Functional Anal. Appl.* **8** (1974), p. 47–53.
[47] M. Spiess – « Proof of the Tate conjecture for products of elliptic curves over finite fields », *Math. Ann.* **314** (1999), p. 285–290.
[48] J. Tate – « Conjectures on algebraic cycles in ℓ-adic cohomology », in *Motives (Seattle, WA, 1991), vol. I*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, American Mathematical Society, 1994, p. 71–83.
[49] V. Voevodsky – « A nilpotence theorem for cycles algebraically equivalent to zero », *Internat. Math. Res. Notices* **4** (1995), p. 1–12.
[50] C. Voisin – *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours spécialisés, vol. 10, Société Mathématique de France, Paris, 2002.

Yves ANDRÉ
École Normale Supérieure
D.M.A.
UMR 8553 du CNRS
45 rue d'Ulm
F–75230 Paris Cedex 05
E-mail : `yves.andre@ens.fr`