Séminaire BOURBAKI Novembre 2002
55^{e} année, 2002-2003, n^{o} 911, p. 63 à 75

EXEMPLES D'INSTABILITÉS POUR DES ÉQUATIONS D'ONDES NON LINÉAIRES [d'après G. Lebeau]

par **Guy MÉTIVIER**

1. INSTABILITÉ DES ÉQUATIONS D'ONDE SURCRITIQUES

Dans l'étude des équations hyperboliques non linéaires, l'équation d'onde

$$(\partial_t^2 - \Delta_x)u + |u|^{p-1}u = 0\,, \quad u_{|t=0} = u_0\,, \quad \partial_t u_{|t=0} = u_1\,, \tag{1}$$

est un modèle de base pour l'analyse mathématique. On s'intéresse ici au cas de la dimension trois ($x \in \mathbb{R}^3$) et, pour simplifier, on se limite au cas où p est un entier impair ($|u|^{p-1}u = u^p$). En multipliant l'équation par $\partial_t u$ et en intégrant par parties, on voit que, formellement, on a conservation de l'énergie $E(u(t)) := \mathcal{E}\big(u(t), \partial_t u(t)\big)$ avec :

$$\mathcal{E}(u_0, u_1) := \int_{\mathbb{R}^3} \Big(\frac{1}{2}|u_1|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_x u_0|^2 + \frac{u_0^{p+1}}{p+1}\Big)\,dx\,. \tag{2}$$

L'existence et l'unicité de solutions fortes du problème de Cauchy est bien connue dans le cas sous-critique $p \leqslant 3$ et dans le cas critique $p = 5$ (voir par exemple [13], [16], [6], [4], [15], [11], [1]). En particulier, le semi-groupe solution $S_t : (u(0), \partial_t u(0)) \mapsto (u(t), \partial_t u(t))$ est uniformément lipschitzien sur les bornés de $\dot{H}^1 \times L^2$.

Dans le cas surcritique ($p \geqslant 7$), on dispose simplement d'un théorème d'existence et d'unicité *locales* des solutions régulières et, pour des données de Cauchy dans l'espace d'énergie, d'un théorème d'existence globale *sans unicité* de solutions faibles bornées dans l'espace d'énergie, *i.e.* vérifiant $E(u(t)) \leqslant \mathcal{E}(u_0, u_1)$. Un corollaire du travail de G. Lebeau [10] est que le problème de Cauchy (1) surcritique ($p \geqslant 7$) est mal posé au sens de Hadamard. Compte tenu du théorème local d'existence et d'unicité, l'obstacle vient de l'évolution des singularités. G. Lebeau considère le cas le plus simple d'une singularité ponctuelle (à l'origine) et de solutions radiales, c'est-à-dire invariantes par rotation. Un corollaire du résultat de G. Lebeau est le suivant :

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 2004

Théorème 1.1. — *Si p est un entier impair supérieur ou égal à 7, il existe des familles de données initiales radiales $\underline{u}^\delta = (u_0^\delta, u_1^\delta)$ et $\underline{v}^\delta = (v_0^\delta, v_1^\delta)$, C^∞ en dehors de l'origine, d'énergie bornée par 1, dont la différence est asymptotiquement nulle dans l'espace des fonctions C^∞ plates à l'origine :*

$$\lim_{\delta \to 0} \big\| |x|^{-k} (\underline{u}^\delta - \underline{v}^\delta) \big\|_{H^s \times H^{s-1}} = 0\,, \qquad \forall\, k, s$$

telles que toutes les solutions faibles radiales u^δ, v^δ de (1) (il en existe) vérifient

$$\liminf_{\delta \to 0} \big\| u^\delta(t_\delta) - v^\delta(t_\delta) \big\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^3)} > 0\,, \tag{3}$$

où $t_\delta \to 0$ quand $\delta \to 0$.

Ce résultat d'instabilité montre que le problème de Cauchy (1) est mal posé au sens de Hadamard. En supposant que les opérateurs solutions S_t existent, pour tout $T > 0$ arbitrairement petit, la famille $\{S_t\}_{t \in [0,T]}$ n'est pas équi-uniformément continue sur les boules de l'espace d'énergie.

Pour les solutions radiales, en dimension trois, on pose $u(t,x) = rg(t,r)$, avec $r = |x|$. L'équation s'écrit

$$(\partial_t^2 - \partial_r^2) g + \frac{g^p}{r^{p-1}} = 0\,, \quad g_{|t=0} = g_0\,, \quad \partial_t g_{|t=0} = g_1\,. \tag{4}$$

Pour cette équation, tous les p sont sous-critiques (en dehors de $r = 0$) et par vitesse finie de propagation, pour des données initiales lisses dans $\{r > 0\}$, on a existence, unicité et régularité de solutions faibles (radiales) dans $\{t < r\}$ (sous le cône d'onde).

G. Lebeau construit ses solutions u^δ à l'aide de solutions de (4) dont les données initiales g_0 et g_1 sont à support compact, de classe C^∞ en dehors de l'origine, et vérifient

$$g_0(r) \sim r^\gamma \big(c_0 + c_1 r^\beta + \dots\big)\,, \qquad g_1(r) \sim r^{\gamma - 1 - \beta} \big(d_0 + d_1 r^\beta + \dots\big)\,. \tag{5}$$

Les paramètres β et γ sont tels que :

$$\frac{p-2}{p+1} < \gamma < \frac{p-3}{p-1}\,, \quad \beta = \frac{p-3}{2} - \gamma\,\frac{p-1}{2} > 0\,. \tag{6}$$

Ce choix assure en particulier que l'énergie initiale

$$\mathcal{E}(g_0, g_1) := \int_0^\infty \Big(\frac{1}{2} |g_1|^2 + \frac{1}{2} |\partial_r g_0|^2 + \frac{g_0^{p+1}}{p+1} \Big)\, dr$$

est finie. Étant donné les deux suites de coefficients $(c_0, c_1, \dots)$ et $(d_0, d_1, \dots)$ avec $(c_0, d_0) \neq (0,0)$, l'idée de G. Lebeau est de construire et contrôler sur un cône $t \leqslant cr$ (avec $c < 1$ petit) deux solutions g et g' associées à des données initiales (g_0, g_1) et (g_0', g_1') vérifiant toutes deux (5), mais qui diffèrent significativement sur une courbe $t = t(r) \ll r$. Plus précisément, on montre que

$$\int_{J_\delta} |(g - g')(t_\delta, r)|^{p+1} \frac{dr}{r^{p-1}} \geqslant c |J_\delta|\, \delta^{\gamma(p+1) - (p-1)}, \tag{7}$$

où J_δ est un certain intervalle centré en $\delta > 0$ et de longueur $\approx \delta^{2+\beta}/t_\delta \ll \delta$ et t_δ une suite tendant vers 0. On renvoie à [10] pour un énoncé précis.

Pour ce faire, on utilise un changement d'échelle. On introduit les nouvelles variables

$$t = \hbar s\,, \quad r = \hbar x \qquad g(t,r) = \hbar^\gamma f(s,x)\,. \tag{8}$$

Avec $h = \hbar^\beta$, l'équation devient

$$h^2(\partial_s^2 - \partial_x^2)f + \frac{f^{p+1}}{x^{p-1}} = 0 \quad f_{|s=0} = f_0\,, \quad \partial_s f_{|s=0} = f_1$$

et (5) devient

$$f_0(x) \sim x^\gamma \sum_{k\geqslant 0} h^k c_k x^{k\beta}\,, \qquad f_1(x) \sim x^{\gamma-1-\beta} \sum_{k\geqslant 0} h^k d_k x^{k\beta}$$

On se ramène alors à étudier des solutions de (9) dans un voisinage de $s = 0$, $x = 1$. Revenant à la notation habituelle t pour la variable de temps, on s'est donc ramené à étudier au voisinage de $t = 0$, $x = x_0 \neq 0$, un problème de la forme

$$h^2(\partial_t^2 - \partial_x^2)u + \frac{\partial F}{\partial u}(x,u) = 0 \quad u_{|t=0} = u_0\,, \quad \partial_t u_{|s=0} = u_1 \tag{9}$$

$$u_0(x) \sim \sum_{k\geqslant 0} h^k a_k(x)\,, \qquad u_1(x) \sim \sum_{k\geqslant 0} h^k b_k(x)\,, \tag{10}$$

avec $F(x,u) = u^{p+1}/(p+1)x^{p-1}$. L'objectif est de montrer l'instabilité du problème (9).

THÉORÈME 1.2. — *Il existe une fonction $t(h)$ qui tend vers zéro avec h et des familles de données initiales $\underline{u}^h = (\underline{u}_0^h, \underline{u}_1^h)$ et $\underline{v}^h = (v_0^h, v_1^h)$ bornées dans C^∞ sur l'intervalle $\{|x - x_0| \leqslant r\}$, telles que les solutions u^δ, v^δ de (9) sont définies sur $\Omega = \{|x - x_0| + t \leqslant r,\ 0 \leqslant t \leqslant t(h)\}$ et vérifient*

$$\underline{u}^h - \underline{v}^h = O(h^\infty) \qquad \text{et} \qquad \big\|(u^h - v^h)_{|t=t(h)}\big\|_{L^2} \geqslant c\,. \tag{11}$$

2. UN PEU D'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE FORTEMENT NON LINÉAIRE

Les résultats classiques sur le problème de Cauchy montrent que (9) possède une unique solution régulière sur un intervalle de longueur $\approx h$. L'objectif serait de construire des solutions sur les temps d'ordre $O(1)$. L'optique géométrique propose de chercher des solutions de la forme

$$u_h(t,x) = U\big(t, x, \frac{\varphi(t,x)}{h}\big)\,, \quad U(t,x,\theta) \sim \sum_{k\geqslant 0} h^k U_k(t,c,\theta), \tag{12}$$

où les $U_k(t,x,\theta)$ sont des fonctions régulières, 2π-périodiques en θ, et où la phase φ décrit les oscillations rapides dues au facteur $h^2\partial_t^2$ de l'équation. Comme il n'y a pas d'oscillations initiales on impose $\varphi(0,x)\equiv 0$.

Une littérature très abondante est consacrée aux calculs de développements de ce type pour des équations non linéaires et à leur justification (voir par exemple [17] [12], [8] et leur bibliographie). Le régime standard de l'optique géométrique dite *faiblement non linéaire* (*cf.* [7]) correspond à des solutions de la forme $u(t,x)=hU(t,x,\varphi/h)$ ou à des non linéarités de la forme $V(x)u+hF_1(x,u)$. Cette situation est maintenant bien comprise (*cf.* [8]). Dans le cas d'amplitudes supérieures ($u=h^\kappa U(t,x,\varphi/h)$, $\kappa<1$) la situation est plus délicate. L'existence de solutions formelles ne peut avoir lieu que sous certaines hypothèses de structure pour les équations (appelées *conditions de transparence* dans [9], et qui, pour les équations quasi-linéaires correspondent à des conditions de dégénérescence linéaire de la valeur propre, *cf.* [2]). Le point important est que les conditions d'existence de solutions BKW ne garantissent pas leur stabilité. En particulier, l'existence de solutions exactes ayant le développement formel trouvé n'est pas garantie (*cf.* [9], [2]). C'est exactement le phénomène observé par G. Lebeau pour les équations d'ondes (9). D'une part, il précise la construction de solutions formelles esquissée dans [17] et d'autre part il montre leur instabilité.

En reportant (12) dans (9), on obtient la suite d'équations

$$\sigma^2\partial_\theta^2 U_0 + F'_u(x,U_0)=0\,, \tag{13}$$

$$\sigma^2\partial_\theta^2 U_1 + F''_{u,u}(x,U_0)U_1 + T\partial_\theta U_0=0\,, \tag{14}$$

$$\sigma^2\partial_\theta^2 U_k + F''_{u,u}(x,U_0)U_k + T\partial_\theta U_{k-1} + \Box U_{k-2} + R_k(x,U_0,\dots,U_{k-1})=0\,. \tag{15}$$

avec $\Box=\partial_t^2-\partial_x^2$,

$$\sigma^2=(\partial_t\varphi)^2-(\partial_x\varphi)^2\,,\quad T:=2\varphi'_t\partial_t-2\varphi'_x\partial_x+\Box\varphi\,, \tag{16}$$

et R_k est une fonction lisse de ses arguments. On obtient de même les conditions initiales

$$U_k(0,x,0)=a_k(x)\,, \tag{17}$$

$$\varphi'_t(0,x)(\partial_\theta U_k)(0,x,0)+(\partial_t U_{k-1})(0,x,0)=b_k(x)\,. \tag{18}$$

(on a utilisé que $\varphi(0,x)=0$).

THÉORÈME 2.1. — *La suite d'équations* (13)–(18) *possède une unique solution formelle* (U,φ) *avec* $U=\sum h^kU_k$.

Pour la preuve, on renvoie à [10]. On esquisse ici le début de la construction, qui est la détermination de φ et U_0. La grande différence avec l'optique faiblement non linéaire est que l'équation « eikonale » pour φ est couplée à l'équation de transport pour U_0 (*cf.* aussi [14] dans le cas quasi linéaire).

1) Comme σ est indépendant de θ, l'équation (13) est une équation différentielle ordinaire en θ dépendant des paramètres σ et x. Pour σ et x fixés, les solutions dépendent de deux paramètres. Fixer la période élimine un paramètre. D'autre part, l'équation est invariante par translation en θ. Les solutions 2π-périodiques de (13) sont donc

$$U_0(t,x,\theta) = K\big(\sigma, x, \theta + \Theta(t,x)\big) \tag{19}$$

avec Θ une fonction déphasage arbitraire et $K(\sigma,x,\theta) = x\sigma^{2/(p-1)}G(\theta)$, où G est l'unique solution 2π-périodique de $G'' + G^p = 0$ vérifiant $G'(0) = 0$, $G(0) > 0$. Par ailleurs, les données initiales (17) (18) déterminent $\partial_t\varphi_{|t=0} = \sigma_{|t=0}$ et $\Theta_{|t=0}$.

Remarque 2.2. — Dans le cas linéaire (ou faiblement non linéaire) (*i.e.* $F'_u(x, U_0) = V(x)U_0$, avec $V > 0$), toutes les solutions de (13) (*i.e.* une famille à deux paramètres) ont la même période qui vaut 2π si φ vérifie l'équation eikonale $\sigma^2 = V$. Dans le cas fortement non linéaire, le paramétrage des solutions est radicalement différent : pour tout σ, il y a une famille à un paramètre de solutions de période fixée.

2) L'équation (14) est une équation différentielle linéaire en θ pour U_1 de la forme $\mathcal{L}U_1 = -T\partial_\theta U_0$ où $\mathcal{L}$ est le linéarisé de (13) en U_0. L'invariance par translation de (13) implique que $\mathcal{L}$ a un noyau. Plus précisément $\mathcal{L}$ est autoadjoint et a un noyau de dimension un engendré par $\partial_\theta K(\sigma, x, \cdot + \Theta)$. L'équation (14) admet donc une solution 2π-périodique si et seulement si le membre de droite

$$-T\partial_\theta U_0 = -(T + Z(\Theta)\partial_\theta)\partial_\theta K(\sigma, x, \cdot + \Theta)$$

est orthogonal au noyau. On a noté $Z = 2\varphi'_t\partial_t - 2\varphi'_x\partial_x$. Cela conduit à l'équation :

$$\int_0^{2\pi} \big(T\partial_\theta K + Z(\Theta)\partial_\theta^2 K\big)(\partial_\theta K)\, d\theta = 0$$

ou encore, en notant

$$J(t,x) := \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\partial_\theta K)^2 d\theta = \frac{1}{2}x^2\sigma^{4/(p-1)} \int_0^{2\pi} (\partial_\theta G(\theta))^2\, d\theta,$$

$$\partial_t\varphi\partial_t J - \partial_x\varphi\partial_x J + \Box\varphi J = 0\,. \tag{20}$$

Avec (16), on voit que φ est déterminée par les équations

$$\begin{cases} \partial_t q = \partial_x(\rho J) \\ \partial_t \rho = \partial_x(q/J) \end{cases}, \qquad \rho = \partial_x\varphi\,, \quad q = \partial_t\varphi J\,. \tag{21}$$

Comme on connaît $\varphi_{|t=0} = 0$ et $\partial_t\varphi_{|t=0}$ par l'étape 1, on voit que φ est maintenant bien déterminée.

Notant $\mathcal{L}_0$ l'opérateur $\mathcal{L}$ associé à $\Theta = 0$ et $\mathcal{L}_0^{-1}$ son inverse partiel sur $\ker \mathcal{L}_0^{\perp}$, on a donc $U_1(t,x,\theta) = V_1(t,x,\theta + \Theta(t,x))$ avec

$$V_1 = \lambda_1\partial_\theta K - \mathcal{L}_0^{-1}(T\partial_\theta K) - Z(\Theta)\mathcal{L}_0^{-1}(\partial_\theta^2 K) \tag{22}$$

et λ_1 une fonction arbitraire de (t,x).

Les conditions initiales (17) (18) avec $k = 1$ déterminent $\lambda_{1|t=0}$ et $\partial_t\Theta_{|t=0}$.

3) L'équation (15) pour $k=2$ est de la forme $\mathcal{L}U_2 = F_2(t,x,\theta+\Theta)$ où F_2 s'exprime à l'aide de K et V_1 et est quadratique en V_1. La condition de résolubilité

$$\int_0^{2\pi} F_2(t,x,\theta)\,\partial_\theta K(t,x,\theta)\,d\theta = 0$$

s'écrit a priori sous la forme

$$A\lambda_1^2 + B\lambda_1 + C = 0.$$

Proposition 2.3. — *On a $A\equiv 0$, $B\equiv 0$ et l'équation $C=0$ s'explicite comme une équation hyperbolique du second ordre pour Θ.*

La première identité n'utilise que l'invariance par translation de (13). La seconde exprime une *compatibilité* ou *condition de transparence* très forte des équations. Elle utilise que U_1 vérifie l'équation (14). Il est à peu près évident que C est un opérateur du second ordre en Θ. L'hyperbolicité se vérifie directement.

Connaissant les données initiales de Θ par les étapes 1) et 2), on en déduit Θ, et U_0 est maintenant complètement déterminé.

L'équation (15) pour $k=3$ détermine λ_1 donc U_1, puis les équations suivantes permettent de trouver tous les termes U_k par récurrence.

3. LE MÉCANISME DE L'INSTABILITÉ

Par le procédé de sommation de Borel, le Théorème 2.1 permet de construire au voisinage de $(0,x_0)$ des solutions *approchées* de (9), c'est-à-dire telles que

$$(23)\quad h^2(\partial_t^2-\partial_x^2)u_{\mathrm{app}} + \frac{\partial F}{\partial u}(x,u_{\mathrm{app}}) = O(h^\infty)\,,\quad u_{\mathrm{app}|t=0} = u_0\,,\quad \partial_t u_{\mathrm{app}|s=0} = u_1$$

dont les données initiales vérifient (10). Le problème est maintenant de construire des solutions *exactes* de (9), voisines de u_{app}. Les résultats standard de l'optique géométrique, ici les méthodes banales de perturbation, nous disent que cela est possible *pour des temps $t=O(h)$*. Le problème est donc d'étudier la stabilité des solutions approchées u_{app} pour des temps plus longs. L'optimum serait d'atteindre des temps $O(1)$. En fait, on va voir que pour des temps d'ordre $h|\ln h|$ des instabilités apparaissent.

Dans (9), effectuons le changement d'échelle $t=hs$, pour obtenir l'équation

$$(24)\qquad \partial_s^2 u + F'_u(x,u) = h^2\partial_x^2 u\,.$$

On obtient des solutions asymptotiques

$$(25)\qquad u \sim \sum_{k\geqslant 0} h^{2k} u_{2k}$$

en résolvant la cascade d'équations :

$$\partial_s^2 u_0 + F'_u(x, u_0) = 0\,, \tag{26}$$

$$\partial_s^2 u_1 + F''_{u,u}(x, u_0)u_1 = \partial_x^2 u_0\,, \tag{27}$$

etc.

(Le lecteur est invité à réfléchir aux liens existant entre ces solutions et les solutions données par le Théorème 2.1.) Les solutions de (26) sont globales et périodiques (ce qui justifie l'apparition d'oscillations en t/h ou φ/h pour les solutions de (9)). Par contre les solutions de (27) et des équations suivantes ont une croissance polynomiale en s, ce qui indique que le développement (25) n'a aucune chance d'être valable pour des $s = O(h^{-1})$ (d'où la nécessité d'introduire un ansatz sophistiqué comme en (12)). En regardant de près, on peut faire converger (25) pour des temps $s = O(h^{-\alpha})$ pour un $\alpha > 0$ dépendant de p. Mais les premiers phénomènes apparaissent en temps $s = O(|\ln h|)$. L'idée est la suivante. Les équations ci-dessus sont gouvernées par l'équation différentielle en s (26) et ses linéarisées. La variable x n'intervient que comme paramètre. Le terme $h^2\partial_x^2$ est considéré comme une perturbation. Tout cela n'a de sens que pour des données très régulières en x *et* h, *i.e.* des perturbations uniformément basse fréquence. Au contraire, les données initiales (10) permettent des perturbations d'amplitude $O(h^\infty)$ à haute fréquence $O(h^{-1})$. Si ces fréquences sont amplifiées exponentiellement, alors la perturbation est de l'ordre

$$O(h^\infty)e^{\mu s}$$

et si $\mu > 0$, la perturbation devient $O(1)$ en temps $s \gg |\ln h|$.

G. Lebeau étudie d'abord la stabilité linéaire des solutions approchées u_{app} construites par le Théorème 2.1. Le linéarisé de (9) autour de u_{app} est :

$$h^2(\partial_t^2 - \partial_x^2)\dot u - \partial_u^2 F(x, u_{\mathrm{app}})\dot u = \dot f, \quad \dot u_{|t=0} = \dot u_0\,, \quad \partial_t \dot u_{|t=0} = \dot u_1\,. \tag{28}$$

Compte tenu de (19), le potentiel $\partial_u^2 F(x, u_{\mathrm{app}})$ est une perturbation de $p\sigma^2 G^{p-1}(\varphi/h + \Theta)$. Après un changement de variables et de fonctions (prenant notamment φ comme nouvelle variable de temps), on se ramène dans [10] à une perturbation de

$$h^2(\partial_t^2 - \alpha\partial_x^2) + pG^{p-1}(t/h + \widetilde\Theta)\,. \tag{29}$$

On devrait arriver au même constat plus simplement. Puisqu'on va s'intéresser à des temps très courts, $t \ll h^{1-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, on n'a pas besoin de toute la finesse de la description des solutions asymptotiques du paragraphe 2. Les solutions approchées du type (25) existant sur des temps $|t| \leqslant h^{1-\varepsilon_0}$ pour un certain $\varepsilon_0 > 0$ devraient suffire. On considérerait alors le linéarisé de (24) qui est une perturbation de

$$\partial_s^2 - h^2\partial_x^2 + \partial_u^2 F(x, u_0)\,.$$

Explicitant la solution u_0 de (26), on obtient à nouveau un opérateur de la forme (29).

Pour donner une idée du mécanisme, considérons dans la variable $s = t/h$ l'opérateur (29) avec α et $\widetilde{\Theta}$ constants :

$$\mathcal{M} := \partial_s^2 - h^2\partial_x^2 + pG^{p-1}(s+s_0)\,. \tag{30}$$

On étudie le comportement en temps s grand des solutions de $\mathcal{M}\dot{u} = 0$. Après transformation de Fourier, on se ramène aux équations

$$\mathcal{M}_\lambda := \partial_s^2 + pG^{p-1}(s+s_0) + \lambda\,, \qquad \lambda = h^2\xi^2\,. \tag{31}$$

On note $E_\lambda(s)$ la matrice 2×2 donnant l'évolution des solutions de $\mathcal{M}_\lambda u = 0$:

$$E_\lambda(s)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(s) \\ u'(s) \end{pmatrix}$$

où u est la solution de $\mathcal{M}_\lambda u = 0$, $u(0) = a_0$, $u'(0) = a_1$. Le potentiel G^{p-1} est 2π-périodique (et même π-périodique puisque $p-1$ est pair et que $G(s+\pi) = -G(s)$). On a donc

$$E_\lambda(s) = E_\lambda(s')\big(E_\lambda(2\pi)\big)^k\,, \qquad s = s' + 2k\pi\,. \tag{32}$$

Le comportement en grand temps est donc donné par le comportement des itérés $\mathbb{M}_\lambda^k$, où $\mathbb{M}_\lambda := E_\lambda(2\pi)$. La Proposition 4.1 de [10] donne les informations cruciales sur le spectre des $\mathbb{M}_\lambda$. Retenons ici :

Proposition 3.1. — *Il existe $\mu_0 > 0$ et $\lambda_0 > 0$ tels que $e^{2\pi\mu_0}$ est valeur propre de $\mathbb{M}_{\lambda_0}$ et pour tout $\lambda \geqslant 0$ les valeurs propres de $\mathbb{M}_\lambda$ sont de partie réelle au plus égale à $e^{2\pi\mu_0}$.*

Notons $E(s)$ l'évolution de $(u, \partial_s u)$ par $\mathcal{M}$ et $\mathbb{M} = E(2\pi)$. Par le théorème de Plancherel, on a :

Proposition 3.2. — *Il existe une constante C et une norme sur $\mathcal{H} = H^1(\mathbb{R})\oplus L^2(\mathbb{R})$ équivalente à la norme usuelle telle que*

$$\|\mathbb{M}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = e^{2\pi\mu_0} \qquad \textit{et pour tout } s \geqslant 0 : \quad \|E(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant Ce^{s\mu_0}\,.$$

De plus, ces majorations sont essentiellement optimales pour des fonctions bien polarisées et à spectre très localisé autour de $\sqrt{\lambda_0}/h$. Soit $\underline{V} = {}^t(v_0, v_1)$ un vecteur propre de $\mathbb{M}_{\lambda_0}$ associé à la valeur propre (simple) $e^{2\pi\mu_0} > 1$. Soit $V(s) = E_{\lambda_0}(s)\underline{V}$. Alors

$$|V(s)| \geqslant ce^{s\mu_0}\,.$$

Soit ξ_0 tel que $\xi_0^2 = \lambda_0$. Considérons des données initiales

$${}^t(\dot{u}_0(x), \dot{u}_1(x)) = \chi(x)e^{i\xi_0 x/h}\underline{V} \tag{33}$$

où $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ est une fonction de localisation égale à un sur l'intervalle I. Soit $\dot{U}(s) = {}^t(\dot{u}, \partial_s\dot{u}) = E(s)\,{}^t(\dot{u}_0, \dot{u}_1)$. Par vitesse finie de propagation, on a

$$\dot{U}(s) = e^{ix\xi_0/h}V(s) \tag{34}$$

pour x dans un intervalle $I' \subset\subset I$ et $s \in [0, T/h]$, $T > 0$ ne dépendant que de I et I'. En particulier, il existe $T > 0$ et $c > 0$ tels que, pour $s \leqslant T/h$, on ait :

$$\|\dot{U}(s)\|_{\mathcal{H}} \geqslant ce^{s\mu_0} \tag{35}$$

On obtient bien sûr des solutions réelles en prenant la partie réelle des solutions que l'on vient de construire.

Une partie technique du travail de G. Lebeau consiste à montrer que l'étude esquissée ci-dessus, qui est assez claire dans le cas où les coefficients α et $\widetilde{\Theta}$ de (29) sont constants, s'étend au cas de coefficients variables. L'idée est que le calcul en x est de type semi-classique et donc que le figeage des coefficients donne une bonne approximation.

4. INSTABILITÉS NON LINÉAIRES

On trouve dans la littérature un certain nombre de résultats montrant que l'instabilité linéaire induit une instabilité non linéaire. Voir par exemple [3] pour un résultat assez général abstrait sous des hypothèses spectrales pour le générateur de l'évolution linéaire. On décrit ici le principe de l'analyse de [10] sans rentrer dans les détails des preuves. Des variantes de ce principe ont déjà été utilisées dans [5] et [9].

On part d'une solution approchée u_{app} de (9) et on cherche les solutions exactes sous la forme $u_{ex} = u_{\mathrm{app}} + u_{cor}$. On obtient pour $u = (u_{cor}, \partial_s u_{cor})$, dans les variables appropriées, une équation de la forme

$$\partial_s u - A_h u = N_h(u) + f_h \tag{36}$$

où A_h est un opérateur linéaire, N_h est la somme d'un terme linéaire petit en h et de termes au moins quadratiques, et l'erreur f_h est $O(h^\infty)$.

On considère différents jeux de données initiales pour u_{cor}. Typiquement, on choisit

$$u_{|s=0} = a_\kappa := \kappa\alpha(h)\underline{a}\,, \qquad \alpha(h) = O(h^\infty) \tag{37}$$

avec $\kappa = 0$ ou 1 et $\underline{a}$ un terme source de l'instabilité linéaire. Les deux données initiales vérifient donc $a_0 - a_1 = O(h^\infty)$ et on espère construire des solutions u_κ dont la différence est amplifiée exponentiellement :

$$\|u_0(s) - u_1(s)\| \geqslant c\alpha(h)e^{s\mu_0}\,, \qquad c > 0\,.$$

Si les solutions vivent assez longtemps pour que $\alpha(h)e^{s\mu_0} \geqslant c' > 0$, la différence $u_0 - u_1$ est effectivement d'ordre 1 et on a bien mis en évidence l'instabilité non linéaire annoncée.

On a vu au paragraphe 3 que la donnée instable $\underline{a}$ contient des oscillations en $e^{\pm ix\xi_0/h}$. Ces oscillations vont se propager aux solutions, et par non linéarité on doit considérer toutes leurs harmoniques. Cela conduit à introduire la variable rapide $X = x\xi_0/h$ et à chercher les solutions de (36) sous la forme

$$u(s,x) = \boldsymbol{u}(s,x,x\xi_0/h) \tag{38}$$

avec $\boldsymbol{u}(s,x,X)$ périodique en X.

Remarque 4.1. — La solution approchée est elle-même construite comme une fonction périodique de $s = t/h$ (ou plutôt chez Lebeau $s = \varphi/h$). Si bien que dans les variables originales, on est confronté à *des oscillations à deux phases* φ et $x\xi_0$. Si les développements à une phase φ ont une certaine consistance, il n'y a aucune raison a priori pour que les développements à deux phases soient stables. On retrouve là la problématique de [9].

Considérant f_h comme une fonction indépendante de X, il *suffit* de résoudre l'équation

$$\partial_s \boldsymbol{u} - \boldsymbol{A}_h \boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}_h(\boldsymbol{u}) + f_h\,, \qquad \boldsymbol{u}_{|s=0} = \boldsymbol{a}\,, \tag{39}$$

où $\boldsymbol{A}_h$ et $\boldsymbol{N}_h$ sont les extensions évidentes de A_h et N_h. On note $\boldsymbol{E}_h(s,s')$ le groupe d'évolution de $\partial_s - \boldsymbol{A}_h$, autrement dit $(\partial_s - \boldsymbol{A}_h)\boldsymbol{E}_h(s,s') = 0$ avec $\boldsymbol{E}_h(s,s) = \mathrm{Id}$. Supposons ici que l'on a (*cf.* Proposition 5.1 et Lemme 5.4 de [10])

Hypothèses. — *Il existe un espace* $\boldsymbol{H}$*, des constantes* $C_0, h_0 > 0$ *et* $\mu_0 > 0$ *telles que pour* $0 < h \leqslant h_0$ *on a :*

i) *pour* $0 \leqslant s' \leqslant s$ *et* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}$ *:*

$$\|\boldsymbol{E}_h(s,s')\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}} \leqslant C_0 e^{(s-s')\mu_0} \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}}, \tag{40}$$

ii) *pour* $\boldsymbol{f}$ *et* $\boldsymbol{g}$ *dans la boule unité de* $\boldsymbol{H}$ *on a*

$$\|\boldsymbol{N}_h(\boldsymbol{f})\|_{\boldsymbol{H}} \leqslant C_0\big(h\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}} + \|\boldsymbol{f}\|^2_{\boldsymbol{H}}\big)\,, \tag{41}$$

$$\|\boldsymbol{N}_h(\boldsymbol{f}) - \boldsymbol{N}_h(\boldsymbol{g})\|_{\boldsymbol{H}} \leqslant C_0 \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}\|_{\boldsymbol{H}} \left(h + \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}} + \|\boldsymbol{g}\|_{\boldsymbol{H}}\right), \tag{42}$$

iii) *il existe une donnée initiale* $\underline{\boldsymbol{a}}$ *dans* $\boldsymbol{H}$ *telle que*

$$\|\underline{\boldsymbol{a}}\| = 1 \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{E}_h(s,0)\underline{\boldsymbol{a}}\|_{\boldsymbol{H}} \geqslant \frac{1}{C_0} e^{s\mu_0}\,. \tag{43}$$

On considère le terme source f_h de (39) et on suppose que

$$\|f_h\|_{\boldsymbol{H}} = O(h^\infty)\,. \tag{44}$$

On peut alors choisir une fonction $s(h)$ telle que

$$|\ln h| = o(s(h)) \quad \text{et} \quad s(h) = o(h^{-\varepsilon}) \quad \forall\, \varepsilon > 0\,, \tag{45}$$

$$e^{s(h)\mu_0}\|f_h\|_{\boldsymbol{H}} = O(h^\infty)\,. \tag{46}$$

Remarque. — Les estimations (40) à (43) ne sont utiles que pour $s \leqslant s(h)$.

On résout (39) en cherchant $\boldsymbol{u}$ tel que

$$\boldsymbol{u} = \Phi(\boldsymbol{u}) := \boldsymbol{E}_h(s,0)\boldsymbol{a} + \int_0^s \boldsymbol{E}_h(s,s')\big(f_h(s') + \boldsymbol{N}_h(\boldsymbol{u}(s'))\big)ds' .$$

Les estimations ci-dessus permettent d'appliquer le Théorème du point fixe pour des données initiales $\boldsymbol{a}$ assez petites.

Proposition 4.2. — *Il existe C_1, C_2, $h_1 > 0$ et $\varepsilon_1 > 0$ tels que si $0 < h \leqslant h_1$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ et*

$$\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{H}} \leqslant \varepsilon e^{-s(h)\mu_0} \tag{47}$$

alors le problème de Cauchy (39) *admet une unique solution $\boldsymbol{u} \in C^0([0,s(h)];\boldsymbol{H})$ telle que*

$$\|\boldsymbol{u}(s)\|_{\boldsymbol{H}} \leqslant C_1(\varepsilon + h)e^{(s-s(h))\mu_0} , \tag{48}$$

$$\|\boldsymbol{u}(s) - \boldsymbol{E}_h(s,0)\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{H}} \leqslant C_2(h + \sqrt{h}\varepsilon + \varepsilon^2)e^{(s-s(h))\mu_0} . \tag{49}$$

Démonstration. — On montre que si $\boldsymbol{u}$ satisfait (48), alors il en est de même de $\Phi(\boldsymbol{u})$. La norme du premier terme de $\Phi(\boldsymbol{u})$ est en

$$C_0 e^{s\mu_0}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{H}} \leqslant C_0 \varepsilon e^{(s-s(h))\mu_0} \leqslant \frac{1}{4} C_1 \varepsilon e^{(s-s(h))\mu_0}$$

si $C_1 \geqslant 4C_0$. Avec (46), le second terme est en

$$\Big(\int_0^s C_0 e^{(s-s')\mu_0} ds'\Big) C h^2 e^{-s(h)\mu_0} \leqslant \frac{1}{\mu_0} C_0 C h^2 e^{(s-s(h))\mu_0} \leqslant \frac{1}{4} C_1 h e^{(s-s(h))\mu_0}$$

si h est assez petit. On note que, pour $s \leqslant s(h)$, (48) implique que $\|\boldsymbol{u}(s)\|_{\boldsymbol{H}} \leqslant 1$, pourvu que ε et h soient assez petits. Alors la norme du troisième terme de $\Phi(\boldsymbol{u})$ est en

$$\int_0^s C_0^2 e^{(s-s')\mu_0} h C_1(\varepsilon + h) e^{(s'-s(h))\mu_0} ds' + \int_0^s C_0^2 e^{(s-s')\mu_0} C_1^2 (\varepsilon + h)^2 e^{2(s'-s(h))\mu_0} ds' .$$

La première intégrale se majore pour h petit par

$$C_0^2 h s(h) C_1(\varepsilon + h) e^{(s-s(h))\mu_0} \leqslant \frac{1}{4} C_1(\varepsilon + h) e^{(s-s(h))\mu_0}$$

puisque $hs(h)$ tend vers zéro par (45). La seconde intégrale est majorée par

$$\frac{1}{\mu_0} C_0^2 C_1^2 (\varepsilon + h)^2 e^{2(s-s(h))\mu_0} \leqslant \frac{1}{4} C_1(\varepsilon + h) e^{(s-s(h))\mu_0}$$

pour ε et h assez petits.

On montre de même que l'application Φ est contractante, d'où l'existence de la solution $\boldsymbol{u}$. En reprenant les calculs ci-dessus, notamment en utilisant que $hs(h) = O(\sqrt{h})$, on obtient (49). □

On considère alors deux données de Cauchy,

$$\boldsymbol{a}_0 = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{a}_1 = \varepsilon e^{-s(h)\mu_0} \underline{\boldsymbol{a}}\,,$$

qui donnent naissance à deux solutions $\boldsymbol{u}_0$ et $\boldsymbol{u}_1$. La Proposition 4.2 et (43) impliquent que

$$\|u_0(s) - u_1(s)\|_{\boldsymbol{H}} \geqslant \frac{\varepsilon}{C_0} e^{(s-s(h))\mu_0} - 2C_2(h + \sqrt{h}\varepsilon + \varepsilon^2) e^{(s-s(h))\mu_0} \geqslant \frac{\varepsilon}{2C_0} e^{(s-s(h))\mu_0}$$

Proposition 4.3. — *Il existe $\varepsilon > 0$ et $c > 0$ tels que, pour h assez petit, les problèmes de Cauchy* (39) *avec les données initiales $\boldsymbol{a}_0$ et $\boldsymbol{a}_1$ ont des solutions $\boldsymbol{u}_0$ et $\boldsymbol{u}_1$ dans $C^0([0, s(h)]; \boldsymbol{H})$. En outre, on a lorsque h tend vers zéro :*

$$\|\boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{a}_1\|_{\boldsymbol{H}} = O(h^\infty) \qquad \textit{et} \qquad \|(\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}_1)_{|s=s(h)}\|_{\boldsymbol{H}} \geqslant c\,.$$

RÉFÉRENCES

[1] H. Bahouri & P. Gérard – « High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations », *Amer. J. Math.* **121** (1999), p. 131–175.

[2] C. Cheverry, O. Guès & G. Métivier – « Oscillations fortes sur un champ linéairement dégénéré », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4e *série* **36** (2003), p. 691–745.

[3] S. Friedlandler, W. Strauss & M. Vishik – « Nonlinear instability in an ideal fluid », *Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire* **14** (1997), no. 2, p. 187–209.

[4] J. Ginibre, A. Soffer & G. Velo – « The global Cauchy problem for the critical nonlinear wave equation », *J. Funct. Anal.* **110** (1992), p. 96–130.

[5] E. Grenier – « On the nonlinear instability of Euler and Prandtl equations », *Comm. Pure Appl. Math.* **53** (2000), no. 9, p. 1067–1091.

[6] M. Grillakis – « Regularity and asymptotic behaviour of the wave equation with a critical nonlinearity », *Ann. of Math.* **132** (1990), p. 485–509.

[7] J. Hunter, A. Majda & R. Rosales – « Resonantly interacting weakly nonlinear hyperbolic waves II : several space variables », *Stud. Appl. Math.* **75** (1986), p. 187–226.

[8] J.-L. Joly, G. Métivier & J. Rauch – « Recent results in non-linear geometric optics », in *Hyperbolic problems : theory, numerics, applications, Vol. II, (Zürich 1998)*, Internat. Ser. Numer. Math., vol. 130, Birkhäuser Verlag, Basel, 1999, p. 723–736.

[9] ______, « Transparent Nonlinear Geometric Optics and Maxwell-Bloch Equations », *J. Differential Equations* **166** (2000), p. 175–250.

[10] G. Lebeau – « Nonlinear optic and supercritical wave equation », preprint et « Optique non linéaire et ondes surcritiques », Séminaire EDP École Polytechnique, 1999.

[11] H. Lindblad & C. Sogge – « On existence and scattering with minimal regularity for semilinear wave equations », *J. Funct. Anal.* **130** (1995), p. 357–426.

[12] V. Maslov & G. Omel'yanov – *Geometric Asymptotics for Nonlinear PDE*, Trans. Mathematical Monographs, vol. 202, AMS, 2000.

[13] J. Rauch – « The u^5 Klein-Gordon equation. II. Anomalous singularities for semilinear wave equations », in *Nonlinear partial differential equations and their applications, Vol. I, Collège de France Seminar, Paris, 1978–1979*, Res. notes in math., Pitman (Advanced Publishing Program) Publ., 1981, p. 335–364.

[14] D. Serre – « Oscillations non linéaires des systèmes hyperboliques : méthodes et résultats qualitatifs », *Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire* **8** (1991), p. 351–417.

[15] J. Shatah & M. Struwe – « Well posedness in the energy estimate for semilinear wave equations with critical growth », *I.M.R.N.* (1994), p. 303–309.

[16] M. Struwe – « Globally regular solutions to the u^5 Klein-Gordon equation », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **15** (1988), p. 495–513.

[17] G.B. Whitham – *Linear and Nonlinear Waves*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley and Sons, 1974.

Guy MÉTIVIER

Université de Bordeaux 1
M.A.B.
Cours de la Libération
F–33405 Talence Cedex
E-mail : metivier@univ-bordeaux1.fr