Séminaire BOURBAKI Juin 2003
55e année, 2002-2003, n° 922, p. 363 à 402

SUR LA THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES GROUPES LIBRES [d'après Sela]

par **Frédéric PAULIN**

Étant donné un groupe G, on appelle *théorie élémentaire de* G l'ensemble $\mathbf{T}(G)$ des formules closes du langage des groupes (en logique du premier ordre) qui sont vérifiées dans G, et *théorie universelle de* G l'ensemble $\mathbf{T}_\forall(G)$ de ces formules en forme prénexe dont les quantificateurs sont tous $\forall$ (voir le chapitre 1). Deux groupes G, G' sont dits *élémentairement équivalents* si $\mathbf{T}(G) = \mathbf{T}(G')$ et *universellement équivalents* si $\mathbf{T}_\forall(G) = \mathbf{T}_\forall(G')$.

Dans une série de travaux peu lisibles, Sela [Sel1]-[Sel6] annonce(1) des résultats profonds sur la théorie élémentaire des groupes libres, répondant à des questions soulevées par Tarski vers 1945 (voir [Tar] dans un contexte plus large et [LS, page 51]). En attendant les arbitrages en cours (voir la note ajoutée sur épreuve), nous les énonçons encore sous forme de conjecture.

Conjecture 1. — *Deux groupes libres de type fini, non cycliques, sont élémentairement équivalents.*

Sela annonce la liste exacte des groupes de type fini, qui sont élémentairement équivalents à un groupe libre de type fini, non cyclique : ce sont les *tours hyperboliques* (voir le chapitre 6.1), construites par « recollements » successifs de groupes libres et de groupes fondamentaux de surface. On a en particulier l'énoncé frappant suivant.

Conjecture 2. — *Le groupe fondamental d'une surface compacte connexe de caractéristique d'Euler au plus -2 est élémentairement équivalent à un groupe libre de type fini, non cyclique.*

Le problème de Tarski de savoir quels sont les groupes élémentairement équivalents à un groupe donné, se pose pour d'autres beaux groupes, comme $SL_n(\mathbb{Z})$ et les réseaux des groupes de Lie connexes. Mais en tant qu'objets universels, les groupes libres sont

(1)Le premier résultat ci-dessus, ainsi que la décidabilité de la théorie élémentaire d'un groupe libre de type fini non cyclique, avaient été annoncés en 1998 par Kharlampovich-Myasnikov [KM0]. Avec le recul de cinq ans, il semble clair que les auteurs n'avaient pas de preuve écrite complète en 1998. Voir [KM1]-[KM5] pour l'état de leurs travaux.

fondamentaux et prioritaires. De plus, leur « flexibilité » fait que le problème est beaucoup plus difficile à résoudre pour eux que pour des groupes plus « rigides ». En utilisant les mêmes techniques que pour les groupes libres, Sela [Sel7] annonce aussi la caractérisation des groupes de type fini qui sont élémentairement équivalents à un groupe sans torsion hyperbolique (au sens de Gromov, voir [Ghy1]).

Cet article est consacré aux résultats structurels sur les *groupes limites*, *i.e.* les groupes de type fini universellement équivalents à un groupe libre de type fini. Nous avons suivi de près l'approche topologique de Champetier-Guirardel [CG]. Voir aussi [BF4].

Dans le chapitre 3, nous donnons diverses caractérisations simples, dues à Remeslennikov [Rem], Kharlampovich-Myasnikov [KM1, KM2], Sela [Sel1], Champetier-Guirardel [CG], des groupes limites (ce sont aussi les groupes « multi-résiduellement libres » de type fini, les sous-groupes de type fini d'un ultraproduit de groupe libre, les groupes « limites de groupes libres »), ainsi que leurs premières propriétés.

Dans le chapitre 5, nous donnons les théorèmes principaux de [KM2, Sel1] sur la structure des groupes limites. En particulier (voir [Sel1]), en prenant pour racine un groupe limite G donné, on construit naturellement un arbre fini enraciné de quotients stricts successifs, de sommets terminaux des groupes libres, appelé *diagramme de Makanin-Razborov*, qui permet de « décrire » l'ensemble de tous les morphismes de G dans un groupe libre.

Les outils principaux sont ceux des actions de groupes sur les arbres, au sens de [Ser], avec les contributions fondamentales de Rips-Sela [RS] sur les actions à stabilisateurs d'arêtes cycliques, que nous rappelons dans le chapitre 4. Nous en donnons des versions relatives, utiles pour gérer les contraintes sur les paramètres.

Donnons une justification à l'intérêt de l'étude des groupes limites pour résoudre le problème de Tarski pour les groupes libres (outre le fait qu'un groupe de type fini élémentairement équivalent à un groupe libre de type fini est bien sûr un groupe limite). La structure des formules (quantification sur des variables de combinaisons booléennes d'équations de groupes en ces variables) montre l'intérêt de l'étude des équations dans les groupes. De nombreux travaux portent sur ce sujet, dont ceux fondateurs de Lyndon [Lyn1, Lyn2]. Les plus frappants jusqu'ici étaient ceux de Makanin [Mak1, Mak2], qui montrent d'une part qu'il existe un algorithme pour décider si un système fini d'équations dans un groupe libre admet une solution, et d'autre part que les théories universelles et positives d'un groupe libre de type fini sont décidables, et ceux de Razborov [Raz], qui décrivent la structure de l'ensemble de toutes les solutions d'un système fini d'équations dans un groupe libre. Le lien avec le chapitre 5 est le suivant. Considérons un système fini d'équations $\underline{m}(\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_n, \underline{x}) = 1$ avec $\underline{x}$ un uplet d'inconnues, $\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_n$ des uplets de paramètres (nécessaires pour le traitement de la récurrence sur le nombre d'alternances de quantificateurs), et $\underline{m}$ un uplet de mots ès lettres de $\underline{x}, \underline{x}^{-1}, \underline{p_i}, \underline{p_i}^{-1}$. Les solutions de ce système dans un groupe libre F, lorsque les paramètres varient dans F soumis à certaines contraintes, sont en bijection avec les morphismes de groupes, à valeurs dans F, du groupe G de présentation $\langle \underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_n, \underline{x} \mid \underline{m}(\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_n, \underline{x}) = 1\rangle$, *marqué* par la suite génératrice (correspondant à) $(\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_n, \underline{x})$, avec contraintes sur les images des $\underline{p}_i$. Enfin, comprendre les morphismes d'un groupe de type fini dans un groupe libre se ramène à comprendre les morphismes d'un nombre fini de groupes limites dans les groupes libres (voir paragraphe 5.2). Mis à part Lyndon et Remeslennikov sous une forme différente, c'est sans doute Rips qui a eu le premier l'idée que l'on pourrait utiliser les techniques d'actions de groupes sur les arbres (pas forcément simpliciaux), en particulier à stabilisateurs d'arête cycliques, pour résoudre le problème de Tarski.

Nous concluons cette introduction en donnant un aperçu du schéma de la preuve de Sela de l'énoncé 1. Notons que Bestvina-Feighn annoncent d'autres preuves des résultats des articles [Sel3, Sel4].

Le cœur des travaux de Sela [Sel2]-[Sel5], dont nous ne parlerons malheureusement pas ici, et qui est sans doute incontournable pour une solution du problème de Tarski, est un procédé d'élimination des quantificateurs. Soient $\mathbb{L}_n, \mathbb{L}_m$ deux groupes libres de rang $n, m \geqslant 2$, dont on souhaite montrer qu'ils sont élémentairement équivalents, et a_1, a_2 les deux premiers éléments communs d'une partie génératrice libre de $\mathbb{L}_n, \mathbb{L}_m$. Par un résultat classique (voir [Sac] disant que $\mathbb{L}_n$ et $\mathbb{L}_m$ ont la même théorie universelle-existentielle, il suffit, par récurrence, de montrer que toute partie d'une puissance de $\mathbb{L}_n$, définissable par une formule $\exists\forall\exists$, est une combinaison booléenne de parties définissables par des formules $\forall\exists$, et ceci de manière indépendante de n. C'est ce que fait Sela dans [Sel5]. Avec un traitement nécessaire d'une partition en deux des variables libres, il s'agit de comprendre les parties des puissances de $\mathbb{L}_n$ définissables par une formule $\forall\exists$. Lorsque celle-ci est close et positive, disons $\forall\, \underline{y}\ \exists\, \underline{z}\ \ \underline{m}(\underline{y}, \underline{z}) = 1$, Merzliakov [Mer], dans sa preuve de l'égalité des théories positives de $\mathbb{L}_n$ et $\mathbb{L}_m$, introduit un procédé de « solutions formelles » : par des méthodes de « petite simplification » (comme dans [Sac] d'ailleurs), Merzliakov montre qu'il existe un uplet de mots $\underline{z}(\underline{y}, a_1, a_2)$ en $\underline{y}, ^{\pm}, a_i^{\pm}$, tels que la formule $\forall\, \underline{y}\ \exists\, \underline{z}\ \ \underline{m}(\underline{y}, \underline{z}) = 1$ est satisfaite dans $\mathbb{L}_n, \mathbb{L}_m$ si et seulement si $\forall\, \underline{y}\ \ \underline{m}(\underline{y}, \underline{z}(\underline{y}, a_1, a_2)) = 1$ l'est. Sela étend ces solutions formelles au cas où la formule $\forall\exists$ n'est plus positive [Sel2] (voir aussi [KM3a]) et possède des variables libres [Sel5]. C'est la partie la plus technique, qui amène Sela à introduire de nouvelles variables, ce qui l'oblige dans [Sel4] à un travail important pour assurer la finitude de ses procédés d'élimination de quantificateurs.

Remerciements. — Cet article doit beaucoup aux travaux [CG, Gui] de Christophe Champetier et Vincent Guirardel, et je les remercie pour leurs nombreuses conversations, suggestions et corrections. Je remercie aussi G. Baumslag, F. Dahmani, T. Delzant, O. Kharlampovich, G. Levitt, A. Myasnikov, P. Papasoglu, Z. Sela.

1. THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES GROUPES

1.1. Formules

Dans ce texte, nous appellerons *formule* toute expression logique de la forme

$$Q_1x_1Q_2x_2\dots Q_{n'}x_{n'} \quad \bigvee_{i=1}^{k}\Big(\bigwedge_{j=1}^{k_i} m_{ij}(x_1,\dots,x_n)=1\Big)\wedge\Big(\bigwedge_{j=1}^{k'_i} m'_{ij}(x_1,\dots,x_n)\neq 1\Big)$$

avec

– n, n', k, k_i, k'_i dans $\mathbb{N}$ tels que $n' \leqslant n$,
– Q_i l'un des quantificateurs $\forall\,,\exists\,$,
– $\vee, \wedge$ les connecteurs logiques « ou », « et »,
– x_i une variable, avec $x_1,\dots,x_{n'}$ les *variables liées* et $x_{n'+1},\dots,x_n$ les *variables libres*,
– m_{ij}, m'_{ij} des mots réduits dans les lettres $x_1,\dots,x_n$ et leurs inverses $x_1^{-1},\dots,x_n^{-1}$.

Toute formule en ce sens est une formule du langage des groupes et toute formule du langage des groupes est équivalente, modulo la théorie des groupes, à une formule en ce sens (voir par exemple [CK]).

Une formule est *sans quantificateur* si $n'=0$, *close* si $n'=n$, *universelle* si Q_i est $\forall$ pour tout i, *existentielle* si Q_i est $\exists$ pour tout i, *positive* si $k'_i=0$ pour $i=1,\dots,k$. Une *formule* $\forall\exists$ est une formule comme ci-dessus telle qu'il existe n'' dans $\mathbb{N}$ avec $0\leqslant n''\leqslant n'$ tel que Q_i est $\forall$ pour $1\leqslant i\leqslant n''$ et Q_i est $\exists$ pour $n''<i\leqslant n'$. On définit de même une *formule* $\exists\forall\exists$.

Si G est un groupe, on appelle *théorie élémentaire* (respectivement *universelle, existentielle, positive,* $\forall\exists$, $\exists\forall\exists$) de G l'ensemble des formules closes (respectivement closes universelles, closes existentielles, closes positives, closes $\forall\exists$, closes $\exists\forall\exists$) vérifiées dans G, et on la note $\mathbf{T}(G)$ (respectivement $\mathbf{T}_\forall(G)$, $\mathbf{T}_\exists(G)$, $\mathbf{T}_+(G)$, $\mathbf{T}_{\forall\exists}(G)$, $\mathbf{T}_{\exists\forall\exists}(G)$).

Un *plongement élémentaire* $f: G\to G'$ est un morphisme injectif de groupes tels que, pour toute formule $\varphi(\underline{x})$, de k-uplet de variables libres $\underline{x}$, et pour tout k-uplet $\underline{a}$ dans G, l'expression logique $\varphi(\underline{a})$ est vérifiée dans G si et seulement si $\varphi(f(\underline{a}))$ est vérifiée dans G'. Dans [Sel6], Sela annonce (voir aussi [KM5]) que le plongement standard $\mathbb{L}_n\to\mathbb{L}_m$ pour $n\leqslant m$ est un plongement élémentaire, ce qui, par restriction aux formules closes, implique la validité de la conjecture 1.

Remarques

(1) Il est facile de voir que $\mathbf{T}(\mathbb{Z}^n)=\mathbf{T}(\mathbb{Z}^m)$ si et seulement si $n=m$, et plus généralement qu'un groupe de type fini est élémentairement équivalent à $\mathbb{Z}^n$ si et seulement s'il lui est isomorphe.

(2) Deux groupes libres de type fini non cycliques sont universellement équivalents (*i.e.* $\mathbf{T}_\forall(\mathbb{L}_n)=\mathbf{T}_\forall(\mathbb{L}_m)$ pour tous $n,m\geqslant 2$), car ils se plongent l'un dans l'autre,

et toute formule close universelle vérifiée dans un groupe est aussi vérifiée dans un sous-groupe.

(3) Un résultat classique (voir [Sac]) dit que $\mathbf{T}_{\forall\exists}(\mathbb{L}_n) = \mathbf{T}_{\forall\exists}(\mathbb{L}_m)$ pour tous $n, m \geqslant 2$. Merzlyakov [Mer] a démontré que $\mathbf{T}_+(\mathbb{L}_n) = \mathbf{T}_+(\mathbb{L}_m)$ pour tous $n, m \geqslant 2$.

1.2. Des propriétés élémentaires des groupes libres

Pour illustrer la notion de formule, voici quelques propriétés vérifiées par un groupe G élémentairement équivalent à un groupe libre non cyclique F, ainsi qu'une famille de formules closes vérifiées dans F, dont la validité dans G entraîne ces propriétés.

(1) G est non abélien

$$\exists\, xy \;\; [x, y] \neq 1.$$

(2) G est sans torsion

$$\{\; \forall\, x \;\; (x = 1) \vee (x^n \neq 1) \;\}_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}.$$

(3) G est *commutatif-transitif*

$$\forall\, xyz \;\; y = 1 \vee [x, y] \neq 1 \vee [y, z] \neq 1 \vee [x, z] = 1.$$

(4) Tout sous-groupe abélien maximal A de G est *malnormal* (*i.e.* si $gAg^{-1} \cap A$ est non trivial, alors g appartient à A)

$$\begin{aligned} \{\; &\forall\, xyz \;\; y = 1 \;\vee\; [x, y] \neq 1 \;\vee\; [y, z] \neq 1 \;\vee\; [x, z] = 1, \\ &\forall\, xy \;\; x = 1 \;\vee\; y = 1 \;\vee\; [x, yxy^{-1}] \neq 1 \;\vee\; [x, y] = 1 \;\; \}. \end{aligned}$$

(5) Si G est commutatif-transitif et si tout sous-groupe abélien est abélien libre de type fini, alors tout sous-groupe abélien de G est cyclique

$$\begin{aligned} \forall\, xy \;\; \exists\, u \;\; &[x, y] \neq 1 \;\vee\; (xu^2 = 1 \;\wedge\; [u, x] = 1) \\ &\vee\; (yu^2 = 1 \;\wedge\; [u, y] = 1) \;\vee\; (xyu^2 = 1 \;\wedge\; [u, xy] = 1). \end{aligned}$$

Les formules closes (2) (3) (4) sont des formules universelles, la première est une formule existentielle, la dernière une formule $\forall\exists$. Remarquons que si G est commutatif-transitif, alors le centralisateur de tout élément non trivial est abélien, donc tout sous-groupe abélien non trivial est contenu dans un unique sous-groupe abélien maximal. Notons que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$ sont élémentairement équivalents, comme me l'a fait remarquer T. Coulbois.

Par contre, l'expression logique suivante (tout sous-groupe abélien de G est cyclique), n'est pas du premier ordre, car on y quantifie sur les parties (ou sur les entiers).

$$\forall\, P \subset G,\; (\forall\, xy \in P,\; xy^{-1} \in P \;\wedge\; [x, y] = 1) \Rightarrow (\exists\, x \in G,\; \forall\, y \in P,\; \exists\, n \in \mathbb{N},\;\; y = x^n).$$

Cette propriété est vérifiée dans un groupe de type fini élémentairement équivalent à un groupe libre (voir corollaire 5.4). Mais il n'existe pas d'ensemble de formules du premier ordre la définissant, comme me l'a fait remarquer F. Point.

1.3. Ultrafiltres

Soit I un ensemble non vide. Un *filtre* sur I est une partie non vide ω de $\mathbf{P}(I)$ telle que

(1) $\varnothing \notin \omega$,
(2) si X, Y appartiennent à ω, alors $X \cap Y$ aussi,
(3) si X appartient à ω et si X est contenue dans Y, alors Y appartient à ω.

Un filtre ω est un *ultrafiltre* s'il est maximal (pour l'inclusion). Un ultrafiltre est *non principal* s'il est différent de $\{J \subset I \ / \ a \in J\}$ pour tout a dans I. Par le théorème de Zorn, tout ensemble infini admet un ultrafiltre non principal. Sur un ensemble infini, un ultrafiltre est non principal si et seulement s'il contient le filtre de Fréchet des complémentaires des parties finies.

Les deux propriétés suivantes seront utilisées par la suite (voir [Bou]).

Remarques

(1) Si ω est un ultrafiltre et si J est une partie de I, alors ou bien J appartient à ω, ou bien son complémentaire $I - J$ appartient à ω. L'application $\mathbf{P}(I) \to \{0,1\}$, définie par $J \mapsto 1$ si et seulement si J appartient à ω, est donc une mesure finiment additive, que l'on note encore ω.

(2) Si X est un espace topologique, et $\{x_i\}_{i\in I}$ une famille relativement compacte dans X, alors il existe un unique point x_ω dans l'adhérence de cette famille, tel que, pour tout voisinage V de x_ω, le point x_i appartienne à V pour ω-presque tout i. On note $\lim_\omega x_i$ ce point, qui vérifie les propriétés usuelles des limites.

Si X est un ensemble et ω un ultrafiltre sur I, on note ${}^\omega X$ (et parfois ${}^*X$ lorsque ω est sous-entendu), et on appelle *ultraproduit* de X (pour ω), le quotient $X^I/\sim$ avec $\sim$ la relation d'équivalence définie par $(x_i)_{i\in I} \sim (y_i)_{i\in I}$ si et seulement si $x_i = y_i$ pour ω-presque tout i. On note $[x_i]_\omega$ l'image dans ${}^\omega X$ d'une famille $(x_i)_{i\in I}$. Si G est un groupe, la loi de groupe produit sur G^I passe au quotient en une loi de groupe, dont on munit l'ultraproduit ${}^\omega G$. On définit de même l'ultraproduit d'un anneau ou d'un corps.

Terminons ce chapitre en citant deux théorèmes qui justifient l'utilité des ultrafiltres pour le problème de trouver les groupes élémentairement équivalents à un groupe libre (voir [CK] pour une preuve).

Théorème 1.1

(1) (Shelah) *Deux groupes G et H sont élémentairement équivalents si et seulement s'il existe un ensemble I muni d'un ultrafiltre ω tel que les groupes ${}^\omega G$ et ${}^\omega H$ sont isomorphes.*

(2) (Łoś) *L'application $G \to {}^\omega G$ définie par $g \mapsto [(g)_{i\in I}]_\omega$ est un plongement élémentaire.* □

2. GROUPES MARQUÉS

Le contenu de cette partie, prérequis pour caractériser les groupes universellement équivalents à un groupe libre comme « limites de groupes libres », est repris de l'article de Champetier-Guirardel [CG] (voir aussi [Ghy2], où l'espace **GM** est évoqué).

On note $\mathbb{L}$ le groupe libre sur $\mathbb{N}$, identifié à l'ensemble des mots (finis) réduits dans $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^{-1}$. Pour éviter toute confusion, on note $\overline{s}_j$ l'élément de $\mathbb{L}$ correspondant à l'élément j de $\mathbb{N}$. Pour n dans $\mathbb{N}$, on note $\mathbb{L}_n$ le sous-groupe de $\mathbb{L}$ engendré par $\overline{s}_1, \ldots, \overline{s}_n$.

On définit la catégorie des groupes marqués de la manière suivante. Un *marquage* d'un groupe G est un morphisme de groupes surjectif $\mathbb{L} \to G$ tel que $\overline{s}_j \mapsto 1$ pour tout j assez grand. Le groupe trivial admet un unique marquage. Un *groupe marqué* est un groupe G muni d'un marquage. Un *morphisme* de groupes marqués est un morphisme de groupes commutant avec les marquages. Remarquons que, dans cette catégorie, il existe au plus un morphisme entre deux objets, et que tout morphisme est un épimorphisme.

Un marquage $\mathbb{L} \to G$ étant uniquement déterminé par la donnée d'une famille ordonnée $S = \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, engendrant G, avec $s_n = 1$ pour n assez grand (par $\overline{s}_j \mapsto s_j$), on notera (G, S) le groupe marqué correspondant, et par abus $S = (s_1, \ldots, s_k)$, étant entendu que $s_j = 1$ pour $j > k$. Si $m(\overline{s}_1, \ldots, \overline{s}_p)$ est un élément de $\mathbb{L}$ (en sous-entendant que seules les lettres $\overline{s}_1, \ldots, \overline{s}_p$ et leurs inverses peuvent apparaître dans ce mot), on notera $m(s_1, \ldots, s_p)$ l'élément de G correspondant par le marquage.

Si G est un groupe et S un marquage de G, tout morphisme surjectif de groupes $\varphi : G \to G'$ induit un morphisme de groupes marqués $\varphi : (G, S) \to (G', \varphi(S))$.

On note **GM** l'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes marqués, qui est gradué $\mathbf{GM} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{GM}_n$, avec $\mathbf{GM}_k$ l'ensemble des groupes marqués (G, S) tels que $s_j = 1$ pour $j > k$. Cet espace a été introduit par Grigorchuk [Gri] et Champetier [Cham, CG].

L'ensemble **GM** est muni d'une topologie uniforme naturelle, dont une base d'entourages est $\{V_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$, avec V_n l'ensemble des couples de groupes marqués $((G, S), (G', S'))$ tels que, pour tout mot $m(\overline{s}_1, \ldots, \overline{s}_k)$ dans $\mathbb{L}$ de longueur au plus n, on a $m(s_1, \ldots, s_k) = 1$ si et seulement si $m(s'_1, \ldots, s'_k) = 1$, avec les notations évidentes.

Cette topologie est métrisable (par $d(x, y) = 2^{-\sup\{n\in\mathbb{N} \ / \ (x,y)\in V_n\}}$), totalement discontinue (car la distance d est ultramétrique), et localement compacte (car $\mathbf{GM}_k$ est compact par extraction diagonale, et est ouvert-fermé (car égal à son $\frac{1}{2}$-voisinage ouvert)).

Remarques. — Faisons quelques remarques culturelles sur ces définitions.

(1) Un groupe marqué est pointé en son élément neutre (noté 1). Un groupe marqué (G,S) est muni d'une distance invariante par translation à gauche, la *distance des mots*, qui est la distance maximale sur G telle que $d(1,s_j)=1$ si $s_j \neq 1$. Un groupe marqué (G,S) est muni d'une action du groupe libre $\mathbb{L}$, composée du marquage de G et de l'action par translation à gauche de G sur lui-même.

Tout ensemble d'espaces métriques pointés munis d'une action isométrique d'un groupe fixé admet une topologie naturelle, la topologie de Gromov équivariante (voir [Pau1]), deux éléments sont proches si les boules de grand rayon dans chacun d'eux sont presques isométriques, de manière presque équivariante pour une grande partie finie du groupe.

Il est immédiat de voir que la topologie de **GM** coïncide avec la topologie de Gromov équivariante sur **GM**.

(2) Un autre système fondamental d'entourages de **GM** est $\{V'_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ avec V'_n l'ensemble des couples de groupes marqués (G,G') tels qu'il existe une bijection (donc une isométrie) de la boule $B_G(1,n)$ (de centre l'élément neutre et de rayon n pour la distance des mots dans G) sur la boule $B_{G'}(1,n)$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& B_{\mathbb{L}}(1,n) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
B_G(1,n) \arrow[rr] & & B_{G'}(1,n).
\end{tikzcd}$$

(3) Pour un groupe marqué (G,S), demander que G soit de présentation finie équivaut à demander que G soit de présentation finie sur la famille génératrice finie S (en enlevant les 1), par un théorème de B. H. Neumann [Bau, page 52]. Tout groupe marqué (G',S') suffisamment proche d'un groupe marqué (G,S) de présentation finie est un quotient de (G,S). En effet, si $\{m_i(\overline{s}_1,\ldots,\overline{s}_k)\}_{i\in I}$ est une famille finie engendrant normalement le noyau du marquage $\mathbb{L}\to G$, et si (G',S') est suffisamment proche de (G,S), alors les relations $m_i(s'_1,\ldots,s'_k)=1$ sont vérifiées par $S'=\{s'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, et donc l'unique application ordonnée $S\to S'$ induit un morphisme $(G,S)\to(G',S')$.

(4) De la même manière, le sous-espace des groupes abéliens marqués de **GM** est fermé, car la propriété pour un groupe d'être commutatif est équivalente au fait que les éléments d'une partie génératrice donnée du groupe commutent.

(5) À tout système fini d'équations

$$(\mathbf{S}) \qquad \left\{ w(\overline{a},\overline{x},\overline{p}_1,\ldots,\overline{p}_n)=1 \right.$$

avec $\overline{x}$ un uplet d'inconnues (ou variables liées), $\overline{a}$ un uplet de coefficients (ou constantes), $\overline{p}_1,\ldots,\overline{p}_n$ des uplets de paramètres (ou variables libres), et w un uplet de mots réduits dans $\overline{a}^{\,\pm},\overline{x}^{\,\pm},\overline{p}_1^{\,\pm},\ldots,\overline{p}_n^{\,\pm}$, on associe le groupe $G_{(\mathbf{S})}=L(\overline{a},\overline{x},\overline{p}_1,\ldots,\overline{p}_n)/\mathbf{N}(\{w\})$, où $\mathbf{N}(\{w\})$ est le sous-groupe distingué engendré par les éléments de w. On note $S_{(\mathbf{S})}$ le marquage de $G_{(\mathbf{S})}$ par l'image

$(a, x, p_1, \ldots, p_n)$ dans $G_{\mathbf{S}}$ de $(\overline{a}, \overline{x}, \overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_n)$. Soit G un groupe muni d'un uplet d'éléments a' (autant que dans a) et d'une famille de sous-groupes $(G_i)_{i=1,\ldots,n}$. On a une bijection entre d'une part l'ensemble des solutions de $(\mathbf{S})$ dans G avec coefficients $\overline{a}$ évalués en a' et un choix de valeurs des paramètres $\overline{p}_i$ dans G_i, et d'autre part l'ensemble des morphismes de groupes de $G_{(\mathbf{S})}$ dans G qui envoient (en préservant l'ordre) a sur a' et les p_i dans G_i. Cette bijection associe, à un uplet de telles solutions s de $(\mathbf{S})$, l'unique tel morphisme de $G_{(\mathbf{S})}$ dans G envoyant (en préservant l'ordre) x sur s, a sur a' et les p_i sur les valeurs choisies dans G_i.

3. PREMIÈRES PROPRIÉTÉS ET CARACTÉRISATIONS DES GROUPES LIMITES

Le résultat suivant est une concaténation de résultats de Remeslennikov [Rem], Kharlampovich-Myasnikov [KM1, KM2], Sela [Sel1], Champetier-Guirardel [CG]. Nous avons largement suivi la présentation faite dans cette dernière référence.

Rappelons qu'un groupe G est *multi-résiduellement libre* si pour toute partie finie P de G, il existe un morphisme de G dans un groupe libre, dont la restriction à P est injective, ou de manière équivalente si G est de type fini, si pour tout k dans $\mathbb{N}$, et tous $g_1, \ldots, g_k$ dans $G - \{1\}$, il existe un morphisme $\varphi : G \to \mathbb{L}_2$ non trivial sur chaque g_j.

Théorème 3.1. — *Soit G un groupe de type fini (respectivement de type fini non abélien). Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *le groupe G, muni de n'importe quel marquage, est limite de groupes libres de type fini (respectivement de type fini non abéliens) marqués ;*

(2) *il existe un marquage S de G tel que (G, S) est limite de groupes libres de type fini (respectivement de type fini non abéliens) marqués ;*

(3) *pour tout ultrafiltre ω non principal sur $\mathbb{N}$, le groupe G se plonge dans ${}^{\omega}\mathbb{L}_2$;*

(4) *il existe un ultrafiltre ω non principal sur $\mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$ tel que G se plonge dans ${}^{\omega}\mathbb{L}_n$;*

(5) *le groupe G est multi-résiduellement libre ;*

(6) *le groupe G a la même théorie universelle qu'un groupe libre de type fini (respectivement de type fini non abélien) ;*

(7) *le groupe G a la même théorie existentielle qu'un groupe libre de type fini (respectivement de type fini non abélien).*

Un groupe vérifiant l'une de ces conditions équivalentes sera appelé un *groupe limite*.

Démonstration. — Nous supposerons que G est non abélien, en laissant l'autre cas au lecteur.

(1) $\Rightarrow$ (2) : C'est clair.

(2) $\Rightarrow$ (3) : On suppose que $(G,S)=\lim_{i\to\infty}(G_i,S_i)$ avec G_i un groupe libre de type fini, donc que l'on peut considérer comme contenu dans $\mathbb{L}_2$, et $S_i=(s_{1,i},\dots,s_{k,i})$ et $S=(s_1,\dots,s_k)$. Alors il est facile de voir que l'application $G\to{}^{\omega}\mathbb{L}_2$, définie par $g\mapsto[m(s_{1,i},\dots,s_{j,i})]_\omega$ si $g=m(s_1,\dots,s_j)$ pour $m(\overline{s}_1,\dots,\overline{s}_j)$ un élément de $\mathbb{L}$, est bien définie, et est un morphisme injectif de groupes.

(3) $\Rightarrow$ (4) : C'est clair.

(4) $\Rightarrow$ (1) : Soit $\rho: G\to{}^{\omega}\mathbb{L}_n$ un plongement de G, et $S=(s_1,\dots,s_k)$ un marquage de G. Si $\rho(s_j)=[s_{j,i}]_\omega$, on pose $S_i=(s_{1,i},\dots,s_{k,i})$, et G_i le sous-groupe (libre) de $\mathbb{L}_n$ engendré par S_i. Alors il est facile de voir que $(G,S)=\lim_\omega(G_i,S_i)$.

(4) $\Rightarrow$ (5) [Rem] : Il est bien connu que le groupe $\Gamma_3=\ker(SL_2(\mathbb{Z})\to SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}))$ est libre de type fini et non cyclique, donc le groupe $\mathbb{L}_n$ se plonge dans Γ_3. Si G se plonge dans ${}^{\omega}\mathbb{L}_n$, alors il se plonge dans ${}^{\omega}\Gamma_3=\ker(SL_2({}^{\omega}\mathbb{Z})\to SL_2({}^{\omega}\mathbb{Z}/3\,{}^{\omega}\mathbb{Z}))$, et on identifie G avec son image. Soit $E=\{g_1,\dots,g_k\}$ une partie finie de $G-\{1\}$, montrons qu'il existe un morphisme de G dans le groupe libre Γ_3 (qui se plonge dans $\mathbb{L}_2$), qui est non trivial sur chaque g_j. On peut supposer que E est génératrice. Soient $a_1,\dots,a_p$ dans ${}^{\omega}\mathbb{Z}$ les coefficients non nuls des matrices g_j-id. Il suffit de montrer qu'il existe un morphisme d'anneaux $\rho:\mathbb{Z}[a_1,\dots,a_p]\to\mathbb{Z}$ non nul sur chaque a_j, car alors ρ induira un morphisme de groupes de G dans Γ_3 non trivial sur chaque g_j.

Soient $P_1,\dots,P_q$ des polynômes engendrant l'idéal J de l'anneau (noethérien) des polynômes $\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_p]$ tel que $\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_p]/J=\mathbb{Z}[a_1,\dots,a_p]$. Posons $a_j=[a_{j,i}]_\omega$. Alors pour ω-presque tout i, on a $P_\ell(a_{1,i},\dots,a_{p,i})=0$, donc le morphisme d'anneaux ρ défini par $a_j\mapsto a_{j,i}$ convient, pour ω-presque tout i.

(5) $\Rightarrow$ (4) : Si $\rho_i: G\to\mathbb{L}_n$ est un morphisme injectif sur la boule de centre l'élément neutre et de rayon i dans G (pour n'importe quelle métrique des mots), alors le morphisme $G\to{}^{\omega}\mathbb{L}_n$ défini par $g\mapsto[\rho_i(g)]_\omega$ est injectif.

(1) $\Rightarrow$ (6) : Si l'assertion (1) est vraie, alors $\mathbf{T}_\forall(\mathbb{L}_2)$ est contenue dans $\mathbf{T}_\forall(G)$, car le fait de vérifier une formule close universelle donnée est clairement une propriété fermée dans **GM** (voir la remarque (3) précédente, en utilisant le fait que si $m(\overline{s}_1,\dots,\overline{s}_\ell)$ est un mot ès $\overline{s}_j^{\,\pm1}$, et si $m_1,\dots,m_\ell$ sont des mots ès $\overline{s}_j^{\,\pm1}$, alors $m(m_1,\dots,m_\ell)$ est un mot ès $\overline{s}_j^{\,\pm1}$).

Si l'assertion (1) est vraie, montrons que $\mathbb{L}_2$ se plonge dans G, ce qui implique que $\mathbf{T}_\forall(G)$ est contenue dans $\mathbf{T}_\forall(\mathbb{L}_2)$. Soient a,b dans G ne commutant pas, montrons que le sous-groupe $\langle a,b\rangle$ de G engendré par a,b est libre sur a,b. Comme (1) implique (3), le groupe G se plonge dans ${}^{\omega}\mathbb{L}_2$, et il en est de même de $\langle a,b\rangle$. Comme (4) implique (1), il existe une suite de groupes marqués libres (G_i,S_i) avec $S_i=(a_i,b_i)$ convergeant vers $(\langle a,b\rangle,(a,b))$. Comme une limite de groupes abéliens marqués est encore un groupe abélien marqué, pour i suffisamment grand, a_i,b_i ne commutent pas, donc engendrent un groupe libre sur S_i. Donc par passage à la limite, a et b ne vérifient pas de relation (réduite) non triviale, et $\langle a, b\rangle$ est libre sur (a, b).

(6) $\Rightarrow$ (7) : C'est clair par négation.

(7) $\Rightarrow$ (1) : Soit $S = (s_1, \dots, s_k)$ un marquage de G. Soit N dans $\mathbb{N}$. Notons $m_1(\overline{s}_1, \dots, \overline{s}_k), \dots, m_p(\overline{s}_1, \dots, \overline{s}_k)$ les mots réduits de longueur au plus N dans $\{\overline{s}_1, \dots, \overline{s}_k, \overline{s}_1^{\,-1}, \dots, \overline{s}_k^{\,-1}\}$. Considérons le système fini Σ_N d'équations et d'inéquations $\bigwedge_{i=1}^{p} \mathrm{eqn}_i$ en les variables $x_1, \dots, x_k$, avec eqn_i l'équation $m_i(x_1, \dots, x_k) = 1$ si $m_i(s_1, \dots, s_k) = 1$ dans G, et eqn_i l'inéquation $m_i(x_1, \dots, x_k) \neq 1$ sinon. La formule existentielle $\exists\, x_1 \dots x_k\ \Sigma_N$ étant vérifiée dans G, supposé existentiellement équivalent à un groupe libre F, il existe une solution $S_N = (s'_1, \dots, s'_k)$ dans F au système Σ_N. Si F_N est le sous-groupe (qui est libre) de F engendré par S_N, alors il est immédiat que la suite des (F_N, S_N) converge vers (G, S). Comme G n'est pas abélien, le groupe F_N n'est pas abélien pour N assez grand. $\square$

Remarquons qu'un groupe existentiellement équivalent à un groupe libre non abélien est non abélien, et qu'un groupe qui, muni d'un marquage, est limite de groupes libres non abéliens marqués, est non abélien.

En utilisant respectivement les assertions (1), (4), (2), (6), (6), (6), et la preuve de l'implication (1) $\Rightarrow$ (6) du théorème précédant, le corollaire suivant est alors immédiat.

Corollaire 3.2

(1) *L'ensemble des groupes limites marqués est un fermé de* $\mathbf{GM}$ *(donc son intersection avec* $\mathbf{GM}_n$ *est compacte).*

(2) *Tout sous-groupe de type fini d'un groupe limite est un groupe limite.*

(3) *Un produit libre (fini) de groupes de type fini est un groupe limite si et seulement si chaque facteur est un groupe limite.*

(4) *Un groupe limite est sans torsion.*

(5) *Un groupe limite est commutatif-transitif.*

(6) *Les sous-groupes abéliens maximaux d'un groupe limite sont malnormaux.*

(7) *Un sous-groupe d'un groupe limite engendré par deux éléments est libre sur ces deux éléments ou abélien.* $\square$

Nous terminons ce chapitre en donnant des exemples explicites de groupes limites. Par une *surface* nous entendrons (sauf mention contraire) une surface réelle compacte connexe à bord (éventuellement vide), qui est de classe C^∞ ou munie d'une structure de CW-complexe. Une surface est *fermée* si son bord est vide. Un *groupe de surface* est un groupe isomorphe au groupe fondamental d'une surface.

Proposition 3.3. — *Tout groupe de surface, sauf celui du plan projectif, de la bouteille de Klein, et de la somme connexe de trois plans projectifs, est un groupe limite.*

Démonstration. — Si le bord d'une surface Σ est non vide, alors le groupe fondamental de Σ est libre, donc un groupe limite. Le groupe fondamental du tore est $\mathbb{Z}^2$, qui, muni de sa partie génératrice standard, est la limite de la suite de groupes libres marqués $(\mathbb{Z}, (1, n))$.

Si $\Sigma_{2,+}$ est la somme connexe de deux tores, alors une présentation du groupe fondamental de $\Sigma_{2,+}$ est $\langle a, b, x, y \mid [a, b] = [x, y]\rangle$. Notons $x_n = [a, b]^n a[a, b]^{-n}$ et $y_n = [a, b]^n b[a, b]^{-n}$, qui sont deux éléments du groupe F libre sur a, b, et $S_n = (a, b, x_n, y_n)$, qui est une partie génératrice de F. Alors il est facile de voir que la suite de groupes marqués (F, S_n) converge vers $(\pi_1\Sigma_{2,+}, (a, b, x, y))$. De même, le groupe fondamental de la somme connexe de quatre plans projectifs $\Sigma_{4,-}$, dont une présentation est $\langle a, b, x, y \mid a^2b^2 = x^2y^2\rangle$, marqué par la partie génératrice (a, b, x, y), est limite de la suite de groupes libres marqués $(F, (a, b, (a^2b^2)^n a(a^2b^2)^{-n}, (a^2b^2)^n b(a^2b^2)^{-n}))$.

Toute surface fermée de caractéristique d'Euler au plus -2 est un revêtement de $\Sigma_{2,+}$ ou de $\Sigma_{4,-}$. Les surfaces fermées de caractéristique d'Euler au moins -1 sont les sommes connexes d'au plus trois plans projectifs, ainsi que la sphère et le tore. Tout sous-groupe d'un groupe limite est un groupe limite. Ceci montre le résultat.

Le groupe fondamental du plan projectif n'est pas un groupe limite, car il n'est pas sans torsion. Le groupe fondamental de la bouteille de Klein, dont une présentation est $\langle a, b | a^2b^{-2} = 1\rangle$, n'est pas commutatif-transitif (car a et b commutent avec $a^2 = b^2$), donc n'est pas un groupe limite. Il est montré dans [Lyn1] que l'équation $a^2b^2c^2 = 1$ dans un groupe libre implique la commutativité de a, b, c, donc le groupe fondamental de la somme connexe de trois plans projectifs, dont une présentation est $\langle a, b, c \mid a^2b^2c^2 = 1\rangle$, n'est pas un groupe limite. □

4. ACTIONS DE GROUPES SUR DES ARBRES À STABILISATEURS D'ARÊTES ABÉLIENS

4.1. Vocabulaire

Soit G un groupe muni d'une famille de sous-groupes $(\check{G}_j)_{j\in J}$. Une action (toujours supposée simpliciale, sans inversion) du groupe G sur un arbre simplicial est dite *minimale* s'il n'existe pas de sous-arbre invariant non vide propre, et *cofinie* si le graphe quotient est fini. Un sous-groupe d'un groupe agissant sur un arbre simplicial est dit *elliptique* (pour cette action) s'il fixe un sommet. Une action minimale cofinie est dite *cyclique* si le fixateur de chaque arête est infini cyclique, et *relative* si chacun des $\check{G}_j$ est elliptique. Deux actions d'un groupe G sur des arbres simpliciaux T, T' sont dites *isomorphes* s'il existe un isomorphisme d'arbres G-équivariant de T dans T'.

Un automorphisme de G est dit *relatif* s'il agit par une conjugaison sur chaque $\check{G}_j$. Le groupe des automorphismes relatifs de G agit par précomposition sur les actions relatives de G sur des arbres simpliciaux. Une action relative de G sur un arbre simplicial est dite *invariante par automorphismes* si elle est isomorphe à sa précomposition par tout automorphisme relatif de G.

Une action relative de G sur un arbre T est dite obtenue par *raffinement* d'une action relative de G sur un arbre T' au-dessus d'un ensemble E' de sommets de T' s'il existe une application $f : T \to T'$ simpliciale et G-équivariante, qui est une bijection de $T - f^{-1}(GE')$ sur $T' - GE'$ (ce qui implique que $f^{-1}(v')$ est connexe pour tout v' dans E').

Un sommet v d'une action cyclique relative de G sur un arbre T est dit *de type surface relatif* s'il existe une surface à bord simplement connexe $\widetilde{\Sigma}$, munie de

– une action de G_v propre et libre, de quotient compact et différent de la sphère, du plan projectif, du disque, de l'anneau, du ruban de Möbius, du pantalon et du ruban de Möbius troué,

– une bijection ([RS, DS] demandent seulement une application, mais cela ne change pas le théorème 4.1) G_v-équivariante $e \mapsto f(e)$ entre l'ensemble des arêtes e issues de v et l'ensemble des composantes connexes du bord de $\widetilde{\Sigma}$ telle que le fixateur de e dans T coïncide avec le stabilisateur de $f(e)$ dans $\widetilde{\Sigma}$, et l'intersection avec G_v de tout conjugué de $\check{G}_j$ préserve une composante connexe du bord de $\widetilde{\Sigma}$.

Un sous-groupe H de G est dit *de type surface relatif* s'il existe un sommet v de type surface relatif d'une action cyclique relative de G sur un arbre tel que $H = G_v$.

Un sous-groupe H de G est dit *relativement librement indécomposable* si H est elliptique dans toute action relative de G sur un arbre simplicial à stabilisateurs d'arêtes triviaux. Lorsque $H = G$, on dit que G est relativement librement indécomposable. On omet le qualificatif de « relatif » lorsque J est vide. Notons qu'un groupe libre non trivial, y compris le groupe $\mathbb{Z}$, n'est pas librement indécomposable.

Nous renvoyons à [Ser] (voir aussi [Pau2]) pour la correspondance entre actions de groupes sur les arbres simpliciaux et graphes de groupes. Les définitions ci-dessus se transportent en des définitions correspondantes pour les graphes de groupes. Pour rappeler les notations, si un groupe G agit sur un arbre T, nous noterons $G\backslash\backslash T$ un graphe de groupes quotient, bien défini à isomorphisme près (voir [Bas]). Si $(X, G_\bullet)$ est un graphe de groupes, nous noterons VX l'ensemble de ses sommets ; EX l'ensemble de ses arêtes ; $o(e)$ le sommet origine, $t(e)$ le sommet terminal et $\overline{e}$ l'arête opposée d'une arête e ; G_v le groupe du sommet v ; $G_e = G_{\overline{e}}$ le groupe d'une arête e et $\rho_e : G_e \to G_{t(e)}$ le morphisme injectif associé à une arête e ; et $\pi_1(X, G_\bullet; v_*)$ le groupe fondamental de $(X, G_\bullet)$ de sommet de base v_*, formé, outre de l'identité, des éléments non triviaux (dits *en forme réduite*) $g_0 t_{e_1} g_1 t_{e_2} g_2 \dots t_{e_n} g_n$ avec $(e_1, \dots, e_n)$ un chemin d'arêtes dans X d'origine et d'extrémité v_*, g_0 dans G_{v_*}, g_i dans $G_{t(e_i)}$ pour $i = 1, \dots, n$, $g_0 \neq 1$ si $n = 0$, et $g_i \notin G_{e_i}$ si $e_{i+1} = \overline{e_i}$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$.

Soit $(X, G_\bullet)$ un graphe de groupes, de groupes d'arête abéliens, et v_* un sommet fixé de X. On définit un sous-groupe $\mathrm{Twi}(X, G_\bullet)$ de $\mathrm{Aut}\, \pi_1(X, G_\bullet; v_*)$, appelé *groupe des twists de Dehn* de $(X, G_\bullet)$, de la manière suivante.

Notons $Z_{(X,G_\bullet)}$ le groupe abélien $(\prod_{e\in EX} G_e)/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par $(c_e)_{e\in EX} \sim (d_e)_{e\in EX}$ si $d_{\overline{e}} = {c_e}^{-1}$ pour tout e dans EX. On note $[c_e]$ la classe d'équivalence de $(c_e)_{e\in EX}$. Si $g = g_0 t_{e_1} g_1 t_{e_2} g_2 \dots t_{e_n} g_n$ est un élément du sous-groupe $\pi_1(X, G_\bullet; v_*)$ de $\pi(X, G_\bullet)$ en forme réduite, alors

$$[c_e]\cdot g = g_0\ t_{e_1}\ \ \rho_{e_1}(c_{e_1})g_1\ \ t_{e_2}\ \ \rho_{e_2}(c_{e_2})g_2\ \dots\ t_{e_n}\ \ \rho_{e_n}(c_{e_n})g_n$$

est encore la forme réduite d'un élément de $\pi_1(X, G_\bullet; v_*)$. On vérifie facilement que ceci définit une action de $Z_{(X,G_\bullet)}$ par automorphismes sur $\pi_1(X, G_\bullet; v_*)$. On note alors $\mathrm{Twi}(X, G_\bullet)$ l'image de $Z_{(X,G_\bullet)}$ dans $\mathrm{Aut}\ \pi_1(X, G_\bullet; v_*)$.

Pour tout sommet v de X de type surface ou tel que G_v est abélien, notons $\mathrm{Aut}(G_v, \partial)$ le sous-groupe du groupe des automorphismes φ de G_v qui induisent sur le sous-groupe $\rho_e(G_e)$, pour toute arête e d'extrémité v, une conjugaison par un certain élément γ_e de G_v, avec $\gamma_e = 1$ si G_v est abélien. Pour $v' \neq v$ et e' toute arête d'extrémité v', posons $\varphi = id : G_{v'} \to G_{v'}$ et $\gamma_{e'} = 1$. D'après [Lev], tout élément de $\mathrm{Aut}(G_v, \partial)$ s'étend en un automorphisme de $\pi_1(X, G_\bullet; v_*)$, en posant, en utilisant les formes réduites,

$$g_0 t_{e_1} g_1 t_{e_2} g_2 \dots t_{e_n} g_n \longmapsto \varphi(g_0)\gamma_{\overline{e}_1}\ t_{e_1}\ \gamma_{e_1}^{-1}\varphi(g_1)\gamma_{\overline{e}_2}\ t_{e_2}\ \gamma_{e_2}^{-1}\varphi(g_2)\ \dots\ t_{e_n}\ \gamma_{e_n}^{-1}\varphi(g_n).$$

Cette extension dépend du choix des γ_e, mais deux choix donnent deux extensions qui diffèrent par un twist de Dehn (en utilisant le fait que, si v est un sommet de type surface, alors le centralisateur dans G_v d'un groupe d'arête $\rho_e(G_e)$ d'extrémité v est réduit à $\rho_e(G_e)$). Voir [Lev] pour des compléments.

4.2. Décomposition de Grushko relative

Soit G un groupe de type fini, muni d'une famille de sous-groupes $(\check{G}_j)_{j\in J}$. Il est bien connu lorsque J est vide, et la preuve s'adapte facilement si J est non vide (voir [LS]), qu'il existe p dans $\mathbb{N}$, des sous-groupes de type fini $G_1, \dots, G_p$ de G non triviaux, relativement librement indécomposables dans G, bien définis modulo permutation et conjugaison, et un sous-groupe libre de type fini F de G, bien défini à isomorphisme près, tels que

(1) tout $\check{G}_j$ est conjugué à un sous-groupe d'un G_i,

(2) si G_i est libre, alors G_i contient un conjugué d'un $\check{G}_j$ non trivial,

(3) le morphisme naturel du produit libre $G_1 * \cdots * G_p * F$ dans G est un isomorphisme.

Nous appellerons cet isomorphisme une *décomposition de Grushko relative* de G, et les G_i et F ses *facteurs de Grushko relatifs*. On omet le terme relatif lorsque J est vide.

Une décomposition de Grushko d'un groupe G permet de décrire toutes les décompositions en produit libre de G : si $A_1, \dots, A_q$ sont des sous-groupes de G tels que le morphisme $A_1 * \cdots * A_q \to G$ soit un isomorphisme, alors il existe des éléments $g_1, \dots, g_p$ dans G, des sous-groupes libres $F_1, \dots, F_q$ de G, et une partition $\coprod_{j=1}^{q} I_j$

de $\{1, \ldots, p\}$ tels que l'application canonique de $F_j * (*_{i \in I_j}\ g_i G_i g_i^{-1})$ dans G ait pour image A_j.

Une décomposition de Grushko permet de ramener l'étude des morphismes d'un groupe de type fini G dans un groupe donné H à l'étude des morphismes d'un groupe de type fini librement indécomposable dans H : si $G_1 * \cdots * G_p * G_{p+1}$ est une décomposition de Grushko de G (avec G_{p+1} libre), alors, par la propriété universelle des produits libres, l'application

$$\mathrm{Hom}(G, H) \longrightarrow \prod_{j=1}^{p+1} \mathrm{Hom}(G_j, H)$$

définie par $\varphi \mapsto (\varphi_{|G_j})_{j=1,\ldots,p+1}$ est un isomorphisme de groupes (l'inverse est donné par $(\varphi_j)_{j=1,\ldots,p+1} \mapsto \varphi$ avec $\varphi(g_{i_1} \ldots g_{i_k}) = \varphi_{i_1}(g_{i_1}) \ldots \varphi_{i_k}(g_{i_k})$ pour tous $g_{i_1} \in G_{i_1}, \ldots, g_{i_k} \in G_{i_k}$). Nous noterons $\varphi = \varphi_1 * \cdots * \varphi_{p+1}$ dans la suite.

Les groupes libres jouent un rôle particulier, car ils admettent (sauf le cas trivial ou infini cyclique) « beaucoup » de décompositions en produit libre de facteurs non triviaux.

Voici un moyen, indiqué par T. Delzant, de fixer un choix de décomposition de Grushko. Si (G, S) est un groupe marqué et φ un automorphisme de G, appelons *dilatation* de φ l'entier

$$\max\{||\varphi^{\varepsilon}(s)||_S \ / \ s \in S \cup S^{-1}, \varepsilon = \pm\},$$

avec $||g||_S$ la longueur minimale d'une écriture de g comme mot dans $S \cup S^{-1}$. Rappelons (voir [LS, page 121]) que pour toute décomposition en produit libre $G = A_1 * \cdots * A_p$ de G, il existe au moins un automorphisme φ du groupe libre sur S tel que la suite $\varphi(S)$ admette des sous-suites disjointes $S_1, \ldots, S_p$ telles que (l'image dans G de) S_i soit contenue dans A_i et engendre A_i pour $i = 1, \ldots, p$. On définit la complexité d'une telle décomposition comme la borne inférieure des dilatations des tels φ. Une décomposition de Grushko de G est dite *S-minimale* si sa complexité est minimale parmi toutes les décompositions de Grushko de G. L'ensemble des décompositions de Grushko S-minimales de G est fini.

4.3. Décomposition JSJ cyclique relative

Rips et Sela [RS] (voir aussi [Sel1, Bow, DS, FP]) ont associé à chaque groupe de type fini G, muni d'une famille finie de sous-groupes $(\check{G}_j)_{j \in J}$, une action cyclique de G sur un arbre, qui, pour les actions cycliques relatives, joue le rôle de la décomposition de Grushko relative pour les actions relatives à stabilisateurs d'arête triviaux. Pour des motivations venant de la topologie de petite dimension (voir [JS, Joh]), elle porte, ainsi que son graphe de groupes quotient, le nom de *décomposition JSJ cyclique relative.* Elle permet de décrire toutes les décompositions cycliques relatives de G et, dans les bons cas, est unique à isomorphisme près et invariante par les automorphismes relatifs de G. On omet le terme relatif si J est vide. Ces bons cas incluent celui des groupes hyperboliques ([Bow]), mais voir [For] pour des phénomènes de non unicité.

De la même manière que les groupes libres pour les décompositions en produit libre, les groupes de surface jouent un rôle particulier pour les décompositions cycliques (car ils admettent de « nombreuses » actions cycliques lorsque la caractéristique d'Euler de la surface est grande en valeur absolue). On peut en fait décrire de manière géométrique toutes les actions cycliques d'un groupe de surface de la manière suivante.

Soit Σ une surface (au sens du paragraphe précédant la proposition 3.3). Soit $\widetilde{\Sigma} \to \Sigma$ un revêtement universel de Σ, soit Γ son groupe de revêtement, muni de la famille $(\Gamma_j)_{j\in J}$ des stabilisateurs dans Γ des composantes connexes du bord de $\widetilde{\Sigma}$ (finie modulo conjugaison).

Une *courbe décomposante* de Σ est une courbe fermée simple c contenue dans l'intérieur de Σ, localement séparante (*i.e.* séparant en deux composantes connexes un (tout) voisinage tubulaire), non homotope à zéro, et non parallèle au bord (*i.e.* aucune adhérence de composante connexe de $\Sigma - c$ n'est un anneau). Un *système de courbes décomposantes* de Σ est une famille finie de courbes décomposantes, deux à deux disjointes et non homotopes. Si $(c_i)_{i\in I}$ est un système de courbes décomposantes, alors on appelle *arbre dual* de $(c_i)_{i\in I}$ le graphe simplicial d'ensemble de sommets l'ensemble des composantes connexes de $\widetilde{\Sigma}$ privé des relevés des c_i, d'ensemble d'arêtes les composantes connexes des relevés des c_i, les deux extrémités d'une arête étant les deux sommets dont l'adhérence contient l'arête. Ce graphe est un arbre, muni d'une action induite de Γ. Cette action de Γ est minimale, cofinie, car par exemple Card $I \leqslant 3|\chi(S)|+1$, cyclique et relative. Le *groupe modulaire* de Γ est le sous-groupe du groupe des automorphismes de Γ engendré par les conjugaisons intérieures et les groupes des twists de Dehn de ces telles décompositions cycliques. Son image dans $Out(\Gamma)$ est plus connue sous le nom de « mapping class group » (relatif), voir par exemple [ZVC].

Un résultat classique (voir [ZVC, HS]) dit que toute action minimale cyclique et relative de Γ est isomorphe à celle sur l'arbre dual d'un système de courbes décomposantes. En particulier, les seules surfaces Σ telles que Γ n'admette pas d'action minimale cyclique relative non triviale sont la sphère, le plan projectif, le disque, l'anneau, le ruban de Möbius, le pantalon et le ruban de Möbius troué. C'est pour cela que ces surfaces sont exclues dans la définition de sommet de type surface.

THÉORÈME 4.1 (Rips-Sela [RS]). — *Soit G un groupe de présentation finie, sans torsion, muni d'une famille de sous-groupes $(\breve{G}_j)_{j\in J}$, relativement librement indécomposable. Il existe au moins une action cyclique relative de G sur un arbre simplicial T de sommets colorés en blanc ou noir, appelée* une décomposition JSJ cyclique relative, *telle que :*

(1) *chaque $\breve{G}_j$ fixe un sommet blanc de T,*
(2) *tout sommet noir est de type surface relatif dans T,*

(3) *le stabilisateur de tout sommet blanc est elliptique dans toute action cyclique relative de G,*

(4) *tout sous-groupe de type surface relatif de G fixe un sommet noir dans T,*

(5) *pour toute action cyclique relative de G sur un arbre T'', il existe un raffinement T' de T en des groupes de sommet noir et une application (simpliciale) G-équivariante d'une subdivision de T' dans T''.* □

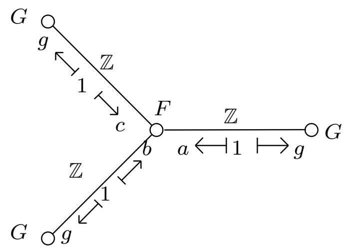
Pour préciser la relation avec les références, l'arbre T défini dans [RS], ainsi que dans [Sel1], vérifie des conditions supplémentaires, non nécessaires pour ce qui suit. L'extension au cas relatif, non traité dans [RS], est immédiat. L'hypothèse de présentation finie est nécessaire [Dun], celle sans torsion facile à contourner (voir par exemple [DS]), et le théorème admet une version en remplaçant cyclique par virtuellement abélien (voir par exemple [DS]). L'une des étapes de la preuve, trop longue pour être rappelée ici, est un théorème de finitude pour la complexité des actions cycliques sur les arbres d'un groupe de présentation finie donné, voir [BF1].

Exemples. 1) Si G est un groupe de surface fermée, alors sa décomposition JSJ cyclique est réduite à un point, car sauf pour la sphère et le plan projectif, G est un sous-groupe de type surface de G. Si G est un groupe abélien libre de type fini, alors sa décomposition JSJ cyclique est réduite à un point, car s'il n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ (qui est un groupe de surface fermée), alors toute action cyclique de G sur un arbre admet un point fixe global.

2) Si un groupe G, muni d'une famille de sous-groupes $(\check{G}_j)_{j\in J}$, a la propriété (FA) relative de Serre (*i.e.* toute action relative de G sur un arbre simplicial admet un point fixe), alors sa décomposition JSJ cyclique relative est réduite à un point. Cette hypothèse est par exemple vérifiée si G est un groupe de Kazhdan relatif (*i.e.* si toute action isométrique affine de G sur un espace de Hilbert, telle que chaque $\check{G}_j$ a un point fixe, admet un point fixe global), comme le montre une simple adaptation au cas relatif de la preuve de [HV].

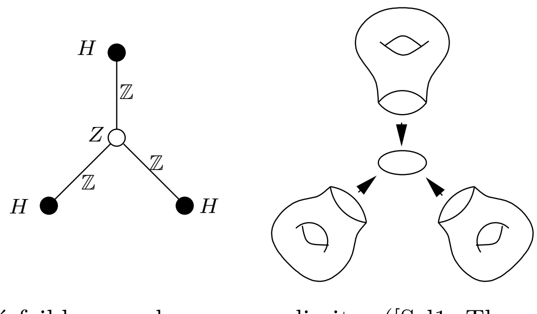
3) Soit $H = SL_3(\mathbb{Z})$, g un élément d'ordre infini de H, et F le groupe de présentation $\langle a, b, c \mid abc = 1\rangle$, qui est isomorphe au groupe libre $\mathbb{L}_2$, et au groupe fondamental du pantalon.

Alors le graphe de groupes ci-contre est une décomposition JSJ cyclique de son groupe fondamental G, mais le sous-groupe F de G est un groupe de sommet blanc (et pas noir) : on a exclu les groupes de pantalon dans la définition de « sommet de type surface relatif », car ils ne contiennent pas de courbe décomposante.



4) Soit H le groupe fondamental du tore troué, et $\{a, b\}$ une partie génératrice libre de H, de sorte que le groupe fondamental du bord soit engendré par le commutateur

$[a, b]$. Soit $Z = \mathbb{Z}$, on considère les morphismes $\mathbb{Z} \to H$ envoyant 1 sur $[a, b]$ et le morphisme identité $\mathbb{Z} \to Z$ (ou plus généralement n'importe quel morphisme injectif). Le graphe de groupes ci-contre est une décomposition JSJ cyclique de son groupe fondamental G. Pour $\mathbb{Z} \to Z$ l'identité, le graphe de groupes obtenu en écrasant l'une des trois arêtes est aussi une décomposition JSJ cyclique au sens du théorème précédent, non invariante par automorphismes.



Sela obtient un résultat d'unicité faible pour les groupes limites ([Sel1, Theorem 2.7, 3.9]), mais des techniques de Guirardel-Levitt permettent d'obtenir une unicité forte.

Proposition 4.2 (Guirardel-Levitt). — *Soit G un groupe de présentation finie, sans torsion, commutatif-transitif, dans lequel tout sous-groupe abélien est abélien libre, et dont les sous-groupes abéliens maximaux sont malnormaux. On suppose que G est muni d'une famille de sous-groupes $(\breve{G}_j)_{j \in J}$, et qu'il est relativement librement indécomposable. Alors G admet une décomposition cyclique relative, notée $T_{\rm can}$, telle que*

– *$T_{\rm can}$ est invariante par automorphismes,*

– *deux sommets de stabilisateurs abéliens ne sont pas reliés par une arête,*

– *tout stabilisateur de sommet abélien est abélien maximal,*

– *le centralisateur du stabilisateur d'une arête est contenu dans le groupe de l'un des deux sommets de cette arête,*

– *$T_{\rm can}$ est une décomposition JSJ cyclique relative, après avoir remplacé chaque groupe de sommet non isolé isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ et dont les groupes d'arête incidents sont contenus dans un facteur infini cyclique, par un lacet de groupes, de groupe de sommet $\mathbb{Z}$ et de groupe d'arête se surjectant sur ce groupe de sommet des deux côtés.*

Remarque. — Nous verrons dans le chapitre suivant (corollaire 5.4) qu'un groupe limite, qui est commutatif-transitif, sans torsion, et dont les sous-groupes abéliens maximaux sont malnormaux par le corollaire 3.2, est de présentation finie, et que tout sous-groupe abélien d'un groupe limite est abélien libre. Ces propriétés sont aussi vérifiées par les groupes hyperboliques sans torsion. Il existe des groupes hyperboliques sans torsion qui ne sont pas des groupes limites, par exemple ceux (sauf le groupe trivial) qui ont la propriété (T) de Kazhdan, comme les réseaux uniformes de $Sp(n, 1)$.

Démonstration. — Notons qu'un sous-groupe de type surface relatif n'est pas abélien (sauf si G est égal à $\mathbb{Z}^2$, auquel cas $T_{\rm can}$ réduit à un point convient). Les conditions (3) et (4) du théorème 4.1 impliquent donc que la famille $(H_i)_{i \in V}$ des sous-groupes de G

qui sont les groupes de sommet non abéliens d'une décomposition JSJ cyclique relative T, est indépendante de celle-ci. Comme les automorphismes relatifs de G préservent l'ensemble des décompositions JSJ cycliques relatives, cette famille est invariante par automorphismes relatifs. Soit V' l'ensemble des sous-groupes abéliens maximaux de G tels que, pour tout Z dans V', il existe $i \neq j$ tel que $H_i \cap Z$ et $H_j \cap Z$ sont non triviaux. Soit T' le graphe bipartie de sommets $V \coprod V'$, avec une arête entre $i \in V$ et $Z \in V'$ si et seulement si $H_i \cap Z$ est non trivial. Alors T' est connexe, car T l'est et G est commutatif-transitif, en particulier tout sous-groupe abélien non trivial est contenu dans un unique sous-groupe abélien maximal. Le graphe T' est naturellement muni d'une action de G. Comme les sous-groupes abéliens maximaux de G sont malnormaux, ils sont égaux à leurs normalisateurs, donc le stabilisateur d'un sommet Z dans V' est Z. Donc les stabilisateurs d'arête sont abéliens. Comme H_i est le fixateur d'un unique sommet de T, il est aussi égal à son normalisateur dans G, donc, pour tout i dans V, le fixateur dans G du sommet i de T est H_i.

De plus T' est un arbre. En effet, par l'absurde, supposons qu'il existe un cycle réduit minimal dans T', de sommets $i_1, Z_1, \dots, i_n, Z_n$ avec Z_j dans V'. Alors $n \geqslant 2$ et, avec v_{i_j} le sommet de T stabilisé par H_{i_j}, et K le sous-arbre fini de T qui est l'enveloppe convexe des v_{i_j}, on peut supposer que v_{i_2} est un sommet terminal de K. Soient $a \in H_{i_1} \cap Z_1 - \{1\}, b \in H_{i_2} \cap Z_1 - \{1\}, c \in H_{i_2} \cap Z_2 - \{1\}$ et $d \in H_{i_3} \cap Z_2 - \{1\}$ (où $i_3 = i_1$ si $n = 2$), et e l'arête de T d'origine v_{i_2} commune aux segments $[v_{i_1}, v_{i_2}]$ et $[v_{i_2}, v_{i_3}]$. Comme a fixe v_{i_1}, b fixe v_{i_2} et a, b commutent, le segment $[v_{i_1}, v_{i_2}]$ est contenu dans $\mathrm{Fix}(a) \cup \mathrm{Fix}(b)$. Donc l'arête e est fixée par a ou par b, qui appartiennent à Z_1, et de même, par c ou par b, qui appartiennent à Z_2. Comme le stabilisateur de e est infini cyclique, il existe x dans $Z_1 - \{1\}$ et y dans $Z_2 - \{1\}$ qui ont une puissance égale (différente de 1). Comme G est commutatif-transitif, on a donc $Z_1 = Z_2$, ce qui contredit la minimalité.

Pour tout sommet Z dans V', montrons qu'il existe au plus une arête issue de Z dans T' dont le stabilisateur n'est pas infini cyclique. Sinon, soient $i \neq i'$ dans V des sommets joints par une arête à Z, et a, b dans $Z \cap H_i$ n'appartenant pas à un même sous-groupe infini cyclique de G, et de même pour a', b' dans $Z \cap H_{i'}$. Ceci est possible, car les sous-groupes abéliens de G sont abéliens libres. Comme a, b fixent v_i, a', b' fixent $v_{i'}$ et a, b, a', b' commutent, le segment non trivial $[v_i, v_{i'}]$ est contenu dans $\mathrm{Fix}(a) \cup \mathrm{Fix}(a'), \mathrm{Fix}(a) \cup \mathrm{Fix}(b'), \mathrm{Fix}(b) \cup \mathrm{Fix}(a')$ et $\mathrm{Fix}(b) \cup \mathrm{Fix}(b')$. Ceci implique que a, b fixent l'arête de $[v_i, v_{i'}]$ d'origine v_i ou que a', b' fixent l'arête de $[v_i, v_{i'}]$ d'origine $v_{i'}$. Comme l'action de G sur T est cyclique, ceci est une contradiction.

On considère maintenant l'arbre T_{can} obtenu en écrasant, pour tout sommet Z dans V' dont part une arête e de stabilisateur non infini cyclique, cette arête en un point. Notons que si i est l'extrémité de e, alors Z est contenu dans H_i, car un automorphisme d'un arbre, qui commute avec un groupe d'automorphismes ayant un point fixe unique, fixe aussi ce point.

Si H_i est de type surface dans T, alors il est encore de type surface dans T_{can}. Il est facile de voir que T_{can} vérifie les conditions voulues. $\square$

Soit G un groupe, muni d'une famille de sous-groupes $(\check{G}_j)_{j\in J}$, qui est un groupe fondamental d'un graphe de groupes $(X, G_\bullet)$, tel que chaque $\check{G}_j$ est conjugué à un sous-groupe d'un groupe de sommet. Nous noterons $\mathrm{Mod}(X, G_\bullet)$ le sous-groupe du groupe des automorphismes de G engendré par les éléments valant une conjugaison sur chaque $\check{G}_j$ parmi les suivants (en utilisant les notations et définitions du paragraphe 4.1) :

– les conjugaisons intérieures $\tau_g : h \mapsto ghg^{-1}$,

– les twists de Dehn sur les arêtes du graphe de groupes $(X, G_\bullet)$,

– pour tout sommet v de type surface de $(X, G_\bullet)$, par l'extension à G des éléments de $\mathrm{Aut}(G_v, \partial)$,

– pour tout groupe de sommet G_v abélien de $(X, G_\bullet)$, par l'extension à G des éléments de $\mathrm{Aut}(G_v, \partial)$.

Soit G un groupe limite, muni d'une famille de sous-groupes $(\check{G}_j)_{j\in J}$, relativement librement indécomposable, et T_{can} la décomposition cyclique relative de G donnée par la proposition 4.2. Nous noterons $\mathrm{Mod}(G)$, et nous appellerons *groupe modulaire relatif de* G, le sous-groupe $\mathrm{Mod}(G\backslash\backslash T_{\mathrm{can}})$ du groupe des automorphismes de G (qui coïncide avec celui de la décomposition JSJ cyclique relative associée à T_{can}). Il découle du fait que le groupe fondamental d'un graphe de groupes est indépendant « à conjugaison près » des points bases, du fait qu'un graphe de groupes quotient est bien défini à isomorphisme de graphes de groupes près et de la proposition 4.2, que le groupe modulaire relatif de G est bien défini dans $\mathrm{Aut}(G)$. On omet le terme « relatif » si $J = \varnothing$. Le groupe modulaire peut être réduit aux automorphismes intérieurs (par exemple si T_{can} est réduit à un point et G n'est ni abélien ni un groupe de surface). Par exemple, si H est un groupe de surface fermée, alors $\mathrm{Mod}(H)$ correspond au groupe modulaire de H défini avant le théorème 4.1.

5. DIAGRAMME ET RÉSOLUTIONS DE MAKANIN-RAZBOROV D'UN GROUPE LIMITE

5.1. Présentation finie des groupes limites

Le but de ce paragraphe est de montrer qu'un groupe limite est de présentation finie. Ce résultat est dû à Kharlampovich-Myasnikov [KM2, Corollary 3] et à Sela [Sel1, Corollary 4.4], mais nous utiliserons l'approche de Gross [Gro] et de Guirardel [Gui] par les actions de groupes sur les $\mathbb{R}^n$-arbres, en reprenant essentiellement la présentation de cette dernière référence. Bien que non nécessaire pour la construction du diagramme de Makanin-Razborov (voir la remarque suivant la proposition 5.5), nous l'énonçons en premier, car sa preuve permet aussi d'expliciter la structure des sous-groupes abéliens des groupes limites, ce qui sera utile par la suite.

Soit Λ un groupe abélien ordonné muni de sa valeur absolue $|x| = \sup\{x, -x\}$. Par exemple, $(\mathbb{R}^n, +)$ avec l'ordre lexicographique, ou le groupe ultraproduit ${}^{\omega}\Lambda'$ d'un groupe abélien ordonné Λ', muni de l'ordre $[x_i]_\omega \leqslant [y_i]_\omega$ si et seulement si $x_i \leqslant y_i$ pour ω-presque tout i, sont des groupes abéliens ordonnés. Notons que la définition d'une distance n'utilise que les axiomes de groupe abélien ordonné du but.

Un Λ-*arbre* est un ensemble T muni d'une distance d à valeurs dans Λ telle que

(1) pour tous x, y dans T, il existe a, b dans Λ et $i : [a, b] \to T$ une isométrie telle que $i(a) = x, i(b) = y$; on note $[x, y]$ l'image d'un tel i, que l'on appelle un *segment* d'extrémités x, y ;

(2) l'intersection de deux segments ayant une extrémité commune est un segment ;

(3) si deux segments se rencontrent exactement en une extrémité, alors leur réunion est un segment.

La seconde condition implique l'unicité d'un segment entre deux points. Par exemple, les $\mathbb{Z}$-arbres sont les ensembles des sommets d'arbres simpliciaux, munis de la distance maximale telle que la distance entre deux sommets d'une arête est 1. L'ensemble ultraproduit ${}^{\omega}T$ d'un Λ-arbre T est naturellement muni d'une structure de ${}^{\omega}\Lambda$-arbre, par $d([x_i]_\omega, [y_i]_\omega) = [d(x_i, y_i)]_\omega$. Voir par exemple [Chi] pour d'autres informations.

En utilisant que le groupe libre $\mathbb{L}_2$ se plonge dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ en agissant librement sur le $\mathbb{Z}$-arbre de Bruhat-Tits T de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$, qu'un groupe limite se plonge dans ${}^{\omega}\mathbb{L}_2$, donc dans $\mathrm{SL}_2({}^{\omega}\mathbb{Q}_p)$ en agissant librement sur ${}^{\omega}T$, qui est un ${}^{\omega}\mathbb{Z}$-arbre, et en utilisant le fait que G est de type fini pour montrer qu'il existe un sous-$\mathbb{R}^n$-arbre invariant, on obtient le résultat suivant.

Proposition 5.1 (Remeslennikov [Rem], voir aussi Guirardel [Gui])

Pour tout groupe limite G, il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que G agisse librement sur un $\mathbb{R}^n$-arbre. □

Si $n = 1$, alors la structure de G est bien comprise, par le théorème de Rips suivant (voir [GLP, BF3, Pau2]).

Théorème 5.2 (Rips). — *Un groupe de type fini agissant librement sur un $\mathbb{R}$-arbre est un produit libre de groupes de surface et de groupes abéliens libres.* □

Le résultat suivant permet de dévisser la structure des groupes limites par récurrence sur n.

Théorème 5.3 (Gross [Gro], Guirardel [Gui]). — *Soit G un groupe de type fini, librement indécomposable, agissant librement sur un $\mathbb{R}^n$-arbre, avec $n \geqslant 2$. Alors G admet une action cyclique sur un arbre simplicial, dont les groupes de sommet sont de type fini et agissent librement sur un $\mathbb{R}^{n-1}$-arbre, et telle que tout sous-groupe abélien non cyclique de G fixe un sommet.* □

Corollaire 5.4 (Kharlampovich-Myasnikov [KM2], Sela [Sel1])

(1) *Tout groupe limite est de présentation finie.*

(2) *Tout sous-groupe abélien d'un groupe limite est abélien libre de type fini. En particulier, tout élément non trivial d'un groupe limite est puissance d'un élément qui n'est pas une puissance non triviale. Le nombre des classes de conjugaison des sous-groupes abéliens non cycliques maximaux d'un groupe limite est fini.*

(3) *Si un groupe limite n'a pas de sous-groupe abélien libre non cyclique, alors il est hyperbolique au sens de Gromov.*

(4) *Si un groupe limite est librement indécomposable, non abélien, non isomorphe à un groupe de surface, alors toute décomposition JSJ cyclique de ce groupe est non triviale.*

Démonstration. — Ceci se montre par récurrence, en utilisant, respectivement, le fait que le groupe fondamental d'un graphe fini de groupes de présentation finie est de présentation finie, le fait qu'un sous-groupe abélien non cyclique d'un produit libre est conjugué dans un facteur, le théorème de combinaison de Bestvina-Feighn [BF2], et le fait qu'une décomposition JSJ cyclique d'un groupe librement indécomposable, non isomorphe à un groupe de surface, qui admet une action cyclique non triviale, n'est pas réduite à un sommet. □

5.2. Un ordre sur les groupes marqués

Nous suivons [CG] dans cette partie. On ordonne **GM** par $(G,S) \geqslant (G',S')$ s'il existe un morphisme de groupes marqués de (G,S) dans (G',S'). L'unicité des morphismes montre que cette relation est bien antisymétrique. De manière équivalente, on a $(G,S) \geqslant (G',S')$ si et seulement si les éléments de S' vérifient dans G' toutes les relations vérifiées par S dans G : pour tout élément $m(\overline{s}_1,\dots,\overline{s}_k)$ de $\mathbb{L}$, si le mot $m(s_1,\dots,s_k)$ dans $S\cup S^{-1}$ vaut 1 dans G, alors le mot $m(s'_1,\dots,{s'}_k)$ dans $S'\cup {S'}^{-1}$ vaut 1 dans G'.

Proposition 5.5. — *Soit K un compact de* **GM**, *formé de groupes limites marqués. Alors il existe une partie finie F de K, non vide si K l'est, telle que, pour tout (G',S') dans K, il existe (G,S) dans F tel que $(G',S') \leqslant (G,S)$.*

Démonstration. — Un groupe limite est de présentation finie par le corollaire 5.4 (1). Tout groupe de présentation finie marqué (G,S) admet un voisinage formé d'éléments inférieurs ou égaux à (G,S) (par la remarque (3) du chapitre 2). □

Si (G,S) est un groupe marqué, on note $\mathbf{GM}(G,S)$ le sous-espace de **GM** formé des groupes marqués inférieurs ou égaux à (G,S). Il est compact (car fermé et contenu dans $\mathbf{GM}_k$ si $S=\{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ avec $s_i=1$ pour $i>k$), et ouvert si G est de présentation finie.

Proposition 5.6. — *Toute suite décroissante de groupes limites marqués est stationnaire.*

Démonstration. — Une valeur d'adhérence de cette suite est un groupe limite marqué, inférieur ou égal à tout élément de la suite, et admettant un voisinage formé d'éléments qui lui sont inférieurs ou égaux. □

Corollaire 5.7. — *Tout groupe limite G est hopfien (i.e. tout morphisme surjectif de G dans lui-même est injectif).*

Démonstration. — Soit $f : G \to G$ un morphisme surjectif non injectif, de noyau N. Soit $\psi : G \to G$ la composition de la projection canonique $G \to G/N$ et de l'isomorphisme $G/N \to G$ induit par f. Alors $G \xrightarrow{\psi} G \xrightarrow{\psi} G \to \ldots$ est une suite décroissante non stationnaire de groupes limites. □

Nous renvoyons à [Chat, CG], pour une preuve simple des deux propositions précédentes, évitant d'utiliser le fait qu'un groupe limite est de présentation finie.

Nous renvoyons aussi à [BMR, KM1, KM2] pour de très jolis résultats de finitude analogues aux précédents (ainsi qu'au corollaire suivant). Si F est un groupe libre, et X un n-uplet de variables, alors l'ensemble des parties $V(\Sigma)$ de F^p qui sont les ensembles de solutions de systèmes (Σ) (finis ou infinis) d'équations de la forme $m(x_1, \ldots, x_p, g_1, \ldots, g_q) = 1$ avec x_i dans X, g_i dans F et m un mot ès $x_i^{\pm}, g_i^{\pm}$, est l'ensemble des fermés d'une topologie noethérienne. Si $N_{(\Sigma)}$ est le sous-groupe (qui est distingué) de $F * \mathbb{L}(X)$ engendré par les éléments m tels que l'équation $m = 1$ soit conséquence de (Σ), alors le fermé $V(\Sigma)$ est irréductible (*i.e.* non réunion de fermés propres) si et seulement si le groupe $F * \mathbb{L}(X)/N_{(\Sigma)}$ est un groupe limite (voir [BMR]).

Soit (GS) un groupe marqué. L'ensemble $\mathbf{L}(G, S)$ des groupes limites marqués inférieurs ou égaux à (G, S) est compact. Il est réduit au groupe trivial si et seulement si G ne se surjecte pas sur $\mathbb{Z}$ (par exemple si G est fini, ou est un groupe de Kazhdan). Le résultat suivant découle de la proposition 5.5.

Corollaire 5.8. — *Pour tout groupe marqué (G, S), l'ensemble $\mathbf{L}_{\max}(G, S)$ des groupes limites, inférieurs à (G, S), maximaux pour ces propriétés, est fini, non vide.* □

L'ensemble $\mathbf{GM}(G, S)$ s'identifie avec l'ensemble $\mathrm{Epi}(G, \cdot)$ des classes d'équivalence de morphismes de groupes surjectifs $f : G \to H$, pour la relation d'équivalence

$$(f : G \longrightarrow H) \sim (f' : G \longrightarrow H')$$

s'il existe un isomorphisme de groupes $g : H \to H'$ tel que $g \circ f = f'$, via l'application qui au morphisme surjectif $f : G \to H$ associe le groupe marqué $(H, f(S))$. Nous noterons de même une classe et un de ses représentants.

En particulier, $\mathrm{Epi}(G, \cdot)$ hérite d'une topologie métrisable compacte, indépendante de S : une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f si et seulement si, pour toute partie finie P

de G, il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, et g dans P, on a $f(g) = 1$ si et seulement si $f_n(g) = 1$. L'application $\mathrm{Epi}(G, \cdot) \to \mathrm{Epi}(G', \cdot)$ obtenue en précomposant par un morphisme surjectif donné de G' dans G est continue. Il découle du chapitre 3 qu'un groupe G est un groupe limite si et seulement s'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathrm{Epi}(G, \cdot)$, d'image un groupe libre, convergeant vers l'identité. De plus, s'il existe une suite de morphismes d'un groupe de type fini G dans un groupe limite qui converge vers l'identité, alors G est un groupe limite.

Le groupe (muni de la topologie discrète) $\mathrm{Aut}(G)$ des automorphismes du groupe G agit continuement sur $\mathrm{Epi}(G, \cdot)$ par précomposition.

Fixons (G, S) un groupe limite librement indécomposable marqué. Si F est un groupe libre de type fini, et E une famille d'éléments de F, on note $|||E|||$ la borne inférieure, sur toutes les parties génératrices libres A de F du maximum des longueurs des écritures réduites dans $A \cup A^{-1}$ des éléments de E. Un élément $f : G \to F$ de $\mathrm{Epi}(G, \cdot)$ (et son élément correspondant de $\mathbf{GM}(G, S)$) est dit (G, S)-*court* si F est un groupe libre, et si

$$|||f(S)||| = \min_{\varphi\in \mathrm{Mod}(G)} |||f \circ \varphi(S)|||.$$

Ceci dépend de S, mais ne dépend pas de la classe d'isomorphisme de f dans $\mathrm{Epi}(G, \cdot)$. Un *quotient raccourcissant* de (G, S) est un groupe marqué, limite de groupes marqués (G, S)-courts.

Par exemple, soit G le groupe fondamental de la surface connexe fermée orientable de genre $g \geqslant 2$, muni de sa présentation usuelle $\langle a_1, b_1, \ldots , a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g]\rangle$, marqué par $S = (a_1, b_1, \ldots , a_g, b_g)$. Soit $\mathbb{L}_g$ le groupe libre sur $(\overline{s}_1, \ldots , \overline{s}_g)$, marqué par $S' = (\overline{s}_1, 1, \overline{s}_2, 1, \ldots , \overline{s}_g, 1)$. Alors $(\mathbb{L}_g, S')$ est un quotient raccourcissant de (G, S), car (G, S)-court.

L'ensemble $\mathbf{SQ}(G, S)$ des quotients raccourcissants de (G, S) est un compact de $\mathbf{GM}(G, S)$ (car fermé), non vide (car il contient le groupe trivial marqué), et formé de groupes limites. Le résultat suivant découle alors de la proposition 5.5.

Corollaire 5.9. — *L'ensemble* $\mathbf{SQ}_{\max}(G, S)$ *des quotients raccourcissants maximaux d'un groupe limite librement indécomposable marqué* (G, S) *est fini, non vide.* □

Le résultat fondamental sur les quotients raccourcissants est le suivant.

Théorème 5.10 (Claim 5.3 [Sel1]). — *Tout quotient raccourcissant d'un groupe limite librement indécomposable non trivial marqué* (G, S) *est un quotient strict de* (G, S). □

L'idée consiste à considérer une suite de morphismes surjectifs $f_n : G \to F$ qui sont (G, S)-courts et convergent vers un quotient raccourcissant $f : G \to G'$ (on peut bien supposer que les groupes libres images des f_n sont constants), et une action libre de F sur un arbre simplicial. On montre que la suite d'actions de G sur T obtenue par précomposition par f_n converge (pour la topologie de Gromov équivariante) vers une action de G sur un arbre réel, qui factorise par G'. On utilise alors la structure fine des actions de groupes sur les arbres (voir par exemple [BF3, Pau2]) pour empêcher que f ne vaille l'identité.

5.3. Diagramme de Makanin-Razborov d'un groupe marqué

Dans un arbre enraciné $\mathbf{T}$, toute arête e sera orientée avec son origine $o(e)$ plus proche de la racine que son extrémité $t(e)$. On notera v_* la racine, et si v est sommet, on notera $\mathbf{T}(v)$ l'ensemble des extrémités des arêtes d'origine v.

Un *arbre enraciné de groupes marqués* $(\mathbf{T}, G_\bullet, S_\bullet)$ est la donnée d'un arbre enraciné $\mathbf{T}$, pour tout sommet v de $\mathbf{T}$, d'un groupe marqué (G_v, S_v), et pour toute arête e, d'un morphisme de groupes marqués $(G_{o(e)}, S_{o(e)}) \to (G_{t(e)}, S_{t(e)})$.

Un *diagramme de Makanin-Razborov* d'un groupe marqué (G, S) est l'arbre enraciné de groupes marqués $(\mathbf{T}, G_\bullet, S_\bullet)$, défini récursivement ainsi :

- le groupe marqué de v_* est (G, S),
- l'ensemble $\mathbf{T}(v_*)$ est $\mathbf{L}_{\max}(G, S)$ si (G, S) n'est pas un groupe limite marqué,
- pour tout sommet v de $\mathbf{T}$ si (G, S) est un groupe limite marqué, et tout sommet v de $\mathbf{T} - \{v_*\}$ sinon,
  - si G_v est un groupe libre, alors le sommet v est terminal,
  - si G_v n'est pas libre et n'est pas librement indécomposable, alors $\mathbf{T}(v)$ est l'ensemble des facteurs de Grushko des décompositions de Grushko S_v-minimales de G_v, marqués par l'image de S_v par la surjection de G_v (voir le paragraphe 4.2),
  - si G_v est librement indécomposable et non trivial, alors $\mathbf{T}(v)$ est $\mathbf{SQ}_{\max}(G_v, S_v)$;

de plus, le groupe marqué associé à un sommet v dans $\mathbf{T} - \{v_*\}$ est v, le morphisme associé à chaque arête est l'unique morphisme entre les groupes marqués des sommets de l'arête.

Par exemple, le diagramme de Makanin-Razborov d'un groupe libre marqué est réduit à un seul sommet. Le diagramme de Makanin-Razborov d'un groupe non trivial marqué ne se surjectant pas sur $\mathbb{Z}$ est réduit à une arête, et le groupe marqué du sommet non racine est trivial. Par construction, le sous-arbre enraciné de groupes marqués en dessous (au sens évident) d'un sommet v d'un diagramme de Makanin-Razborov est un diagramme de Makanin-Razborov de (G_v, S_v). Un diagramme de Makanin-Razborov d'un groupe marqué dépend en général du marquage.

PROPOSITION 5.11. — *Un diagramme de Makanin-Razborov d'un groupe limite a un nombre fini de sommets.*

Démonstration. — Les corollaires 5.8, 5.9 et le paragraphe 4.2 montrent que l'arbre enraciné de Makanin-Razborov est localement fini. Le théorème 5.10 et le corollaire 5.6 montrent qu'il n'a pas de rayon infini partant de la racine. $\square$

Un diagramme de Makanin-Razborov $(\mathbf{T}, G_\bullet, S_\bullet)$ d'un groupe marqué (G_0, S_0) permet de « décrire » tous les morphismes de groupes de G_0 dans un groupe libre F_0, de manière « indépendante » de ce groupe libre, au sens suivant.

Notons que l'ensemble des morphismes d'un groupe libre de type fini F dans un autre F' est facile à comprendre, un tel morphisme étant défini, de manière unique, par une famille $(y_j)_{j=1,\dots,k}$ dans F' si $(x_j)_{j=1,\dots,k}$ est une base de F, par $x_j \mapsto y_j$. Comme tout sous-groupe d'un groupe libre est libre, l'étude des morphismes à valeurs dans un groupe libre se ramène à l'étude des morphismes surjectifs à valeurs dans un groupe libre.

Considérons la donnée $(\mathbf{T}', (f_v), (\varphi_v))$ suivante. Soit $\mathbf{T}'$ un sous-arbre enraciné de $\mathbf{T}$ (contenant la racine de $\mathbf{T}$) tel que, pour tout sommet v non terminal (donc non trivial et non libre) de $\mathbf{T}'$, si G_v est un groupe limite non librement indécomposable, alors $\mathbf{T}'(v) = \{v_1, \dots, v_p\}$ avec $G_v = G_{v_1} * \cdots * G_{v_p}$ une décomposition de Grushko S_v-minimale de G_v, et si G_v n'est pas un groupe limite, ou est librement indécomposable, alors $\mathbf{T}'(v)$ contient exactement un sommet v_+ de $\mathbf{T}(v)$. Pour tout sommet v de $\mathbf{T}'$ tel que G_v est librement indécomposable non trivial, soit φ_v dans $\mathrm{Mod}(G_v)$. Pour tout sommet v terminal dans $\mathbf{T}'$ (donc dans $\mathbf{T}$, donc G_v est libre), soit $f_v : G_v \to F_0$ un morphisme de groupes.

Construisons par récurrence inverse un morphisme de groupes $f_v : G_v \to F_0$ pour tout sommet v de $\mathbf{T}'$. Si v est un sommet terminal, alors f_v est donné. Si v n'est pas un sommet terminal, alors

- si G_v est un groupe limite non librement indécomposable et si $\mathbf{T}'(v) = \{v_1, \dots, v_p\}$, alors on pose $f_v = f_{v_1} * \cdots * f_{v_p}$ (avec les notations du paragraphe 4.2),
- si G_v est un groupe limite librement indécomposable, en notant par $\pi_{v_+} : (G_v, S_v) \to (G_{v_+}, S_{v_+})$ le morphisme du diagramme de Makanin-Razborov, alors on définit $f_v = f_{v_+} \circ \pi_{v_+} \circ \varphi_v^{-1}$ de sorte que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} G_v \arrow[d, "\pi_{v_+}"'] \arrow[dr, "f_v \circ \varphi_v"] & \\ G_{v_+} \arrow[r, "f_{v_+}"'] & F_0 \end{tikzcd}$$

- si G_v n'est pas un groupe limite, et si $\pi_{v_+} : (G_v, S_v) \to (G_{v_+}, S_{v_+})$ est le morphisme du diagramme de Makanin-Razborov, alors on pose $f_v = f_{v_+} \circ \pi_{v_+}$

Posons $f(\mathbf{T}', (f_v), (\varphi_v)) = f_{v_*}$, qui est un morphisme de groupes de G_0 dans F_0.

Proposition 5.12. — *Soit* (G_0, S_0) *un groupe marqué, de diagramme de Makanin-Razborov* $(\mathbf{T}, G_\bullet, S_\bullet)$. *Si* f *est un morphisme de groupes de* G_0 *dans un groupe libre* F_0, *alors il existe une donnée* $(\mathbf{T}', (f_v), (\varphi_v))$ *telle que* $f = f(\mathbf{T}', (f_v), (\varphi_v))$.

Démonstration. — Par récurrence, on construit une donnée $(\mathbf{T}', (f_v), (\varphi_v))$, ainsi qu'un morphisme de groupes $f_v : G_v \to F_0$ pour tout sommet v de $\mathbf{T}'$. On demande que la racine de $\mathbf{T}$ appartienne à $\mathbf{T}'$, et on pose $f_{v_*} = f$. Supposons construit un sommet v de $\mathbf{T}'$, et le morphisme $f_v : G_v \to F_0$.

Si v est terminal dans $\mathbf{T}$, alors on dit qu'il est terminal dans $\mathbf{T}'$, et on prend $f_v : G_v \to F_0$ pour la donnée. Supposons donc que v n'est pas terminal (en particulier G_v n'est pas libre).

Supposons que G_v soit un groupe limite, non librement indécomposable. On choisit une décomposition de Grushko S_v-minimale $G_v = G_{v_1} * \cdots * G_{v_p}$ de G_v. On pose alors $\mathbf{T}'(v) = \{v_1, \ldots, v_p\}$, on note f_{v_j} la restriction de f_v à G_{v_j} pour $j = 1, \ldots, p$. D'après le paragraphe 4.2, on a $f_v = f_{v_1} * \cdots * f_{v_p}$.

Supposons que G_v soit un groupe limite librement indécomposable. Soit φ_v dans $\mathrm{Mod}(G_v)$ tel que

$$|||f_v \circ \varphi_v(S_v)||| = \min_{\psi \in \mathrm{Mod}(G_v)} |||f_v \circ \psi(S_v)|||.$$

Alors le groupe marqué $(F_0, f_v(\varphi_v(S_v)))$ est (G_v, S_v)-court, donc est un quotient raccourcissant de (G_v, S_v). Il existe donc v_+ dans $\mathbf{T}(v) = \mathbf{SQ}_{\max}(G_v, S_v)$ tel que $(G_{v_+}, S_{v_+}) \geqslant (F_0, f_v(\varphi_v(S_v)))$. On note alors $\mathbf{T}'(v) = \{v_+\}$, et $f_{v_+} : (G_{v_+}, S_{v_+}) \to (F_0, f_v(\varphi_v(S_v)))$ l'unique morphisme, qui vérifie $f_v \circ \varphi_v = f_{v_+} \circ \pi_{v_+}$.

Supposons que G_v ne soit pas un groupe limite (alors $v = v_*$). Comme $(F_0, f_v(G_v))$ est un groupe libre (donc limite) marqué inférieur à (G_v, S_v), il existe v_+ dans $\mathbf{T}(v) = \mathbf{L}_{\max}(G_v, S_v)$ tel que $(G_{v_+}, S_{v_+}) \geqslant (F_0, f_v(G_v))$. On note donc $\mathbf{T}'(v) = \{v_+\}$, et $f_{v_+} : (G_{v_+}, S_{v_+}) \to (F_0, f_v(G_v))$ l'unique morphisme, qui vérifie $f_v = f_{v_+} \circ \pi_{v_+}$.

Par définition, on a bien $f = f_{v_*} = f(\mathbf{T}', (f_v), (\varphi_v))$. □

6. RÉSOLUTION DE MAKANIN-RAZBOROV DE GROUPE LIMITE

Le contenu de cette partie est essentiellement repris de l'article de Champetier-Guirardel [CG], et fournit des preuves détaillées de la seconde moitié du chapitre 5 de [Sel1]. Il s'agit de donner une caractérisation des groupes limites par « dévissages » successifs à partir des groupes libres. Voir aussi [KM2] et surtout les excellentes notes [BF4].

Si G_v est le stabilisateur d'un sommet d'une action cyclique d'un groupe G sur un arbre, appelons *voisinage abélien* de G_v le sous-groupe de G engendré par G_v et par les centralisateurs dans G des groupes d'arête d'origine v. Un morphisme de groupes $f : G \to G'$ est une *résolution de Makanin-Razborov élémentaire* s'il existe une décomposition cyclique en graphe de groupes de G, telle que

(1) chaque groupe d'arête est abélien maximal dans au moins l'un des groupes de sommet de l'arête ;

(2) le morphisme f est injectif sur chaque groupe d'arête, et le centralisateur dans G de chaque groupe d'arête est égal au centralisateur de l'une de ses deux images dans ses groupes de sommet ;

(3) l'image par f de chaque groupe de sommet de type surface est non abélienne ;

(4) tout groupe de sommet abélien G_v est abélien libre de type fini, et f est injective sur le sous-groupe G'_v de G_v engendré par les groupes d'arête d'origine ce sommet ;

(5) pour tout groupe de sommet G_v qui est non abélien et non de type surface, le morphisme f est injectif sur le voisinage abélien de G_v dans le graphe de groupes obtenu en remplaçant chaque groupe de sommet abélien par son sous-groupe engendré par les groupes d'arête d'origine ce sommet.

Si G est un groupe de type fini, une *résolution de Makanin-Razborov* est une suite de morphismes

$$G_0 \xrightarrow{f_1} G_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} G_n$$

avec $G_0 = G$ et G_n un groupe libre, telle qu'il existe, pour $i = 1, \dots, n$, des décompositions en produit libres $G_{i-1} = G'_1 * \cdots * G'_p * F$ et $G_i = G''_1 * \cdots * G''_p$, avec p dans $\mathbb{N}$ et F un groupe libre, telles que pour tout $j = 1, \dots, p$, on a $f_i(G'_j) = G''_j$ et $f_i : G'_j \longrightarrow G''_j$ est une résolution de Makanin-Razborov élémentaire. Cette définition est une version légèrement corrigée de la notion de « strict MR resolution » dans [Sel1]), car le théorème 5.2 de [Sel1] est légèrement erroné, voir [CG].

THÉORÈME 6.1 (Sela [Sel1] Theorem 5.12). — *Un groupe de type fini G est un groupe limite si et seulement s'il admet une résolution de Makanin-Razborov.*

Démonstration. — Supposons tout d'abord que le groupe G admette une résolution de Makanin-Razborov. Par récurrence sur la longueur, comme un groupe libre est un groupe limite, comme un sous-groupe de type fini d'un groupe limite et un produit libre d'un nombre fini de groupes limites sont des groupes limites, il suffit de montrer que si L est un groupe limite et $f : G \to L$ est une résolution de Makanin-Razborov élémentaire, alors G est un groupe limite. On se fixe une décomposition en graphe de groupes de G comme dans la définition, avec (X, G_*) son graphe de groupes.

Le résultat suivant servira dans plusieurs étapes de la preuve.

LEMME 6.2 (Baumslag). — *Soit G' un groupe limite, n un entier non nul, $a_0, a_1, \dots, a_n$ des éléments de G' et c un élément de G' ne commutant avec aucun des éléments $a_1, \dots, a_{n-1}$. Alors il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que pour tous $k_1, \dots, k_n$ dans $\mathbb{Z}$ avec $|k_i| \geqslant N$, l'élément $a_0 c^{k_1} a_1 c^{k_2} a_2 \dots c^{k_n} a_n$ est non trivial dans G'.*

Démonstration. — C'est un exercice si G' est un groupe libre (voir par exemple [Bau1, Prop. 1]), et on se ramène à ce cas en considérant une suite de morphismes de G' dans un groupe libre convergeant vers l'identité. $\square$

Étape 1. — La première étape est de se ramener au cas où les groupes de sommet abéliens de (X, G_*) sont engendrés par les groupes d'arête d'origine ce sommet.

Un groupe G' est obtenu par *extension libre de centralisateurs* à partir d'un groupe G'' s'il existe un groupe abélien libre de type fini A et un élément g de G'' de centralisateur Z dans G'', tels que G' est (à isomorphisme près) le produit amalgamé $G'' *_Z (Z \times A)$ pour les morphismes $x \mapsto x$ de Z dans G'' et $z \mapsto (z, 0)$ de Z dans $Z \times A$.

Proposition 6.3 (Baumslag). — *Une extension libre de centralisateurs d'un groupe limite est un groupe limite. De plus, avec les notations précédentes, le centralisateur de g dans G' est $Z \times A$.*

Démonstration. — Soit $f : G' \to G''$ le morphisme surjectif valant l'identité sur G'' et trivial sur A (en identifiant G'' et A avec leurs images dans G'). Montrons qu'il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'automorphismes de groupes de $Z \times A$, valant l'identité sur le premier facteur, ce qui permet de l'étendre (par l'identité sur G'') à G', telle que $f \circ \varphi_n$ converge vers l'identité. Ceci entraînera que G' est un groupe limite. En effet, on peut supposer g non trivial, et il suffit de prendre, avec $(a_1, \dots, a_p)$ une base de A, l'automorphisme $\varphi_n(x, a_1^{k_1} \dots a_p^{k_p}) = (xg^{n(k_1+\cdots+k_p)}, a_1^{k_1} \dots a_p^{k_p})$. Pour vérifier que $f \circ \varphi_n$ converge vers l'identité, on peut supposer par récurrence $p = 1$, et on applique le lemme 6.2.

Une autre manière de montrer le résultat est de dire, en supposant A infini cyclique engendré par a, que si S est une partie génératrice finie de G'', alors $S_n = S \cup \{g^n\}$ aussi, et la suite de groupes marqués (G'', S_n) converge vers le groupe marqué $(G', S \cup \{a\})$ si $g \neq 1$, par le lemme 6.2. $\square$

Remarque. — Cette notion a été beaucoup étudiée (voir les travaux de Lyndon, Baumslag, Kharlampovich, Myasnikov, Remeslennikov). Il est montré dans [KM2] (voir aussi [CG]) qu'un groupe de type fini est un groupe limite si et seulement s'il est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe obtenu par un nombre fini d'extensions libres de centralisateurs à partir d'un groupe libre (la proposition ci-dessus montrant le sens réciproque).

La première étape découle par application d'un nombre fini de fois cette proposition, car les conditions (1)-(5) de la définition de résolution de Makanin-Razborov élémentaire sont préservées si on remplace chaque groupe de sommet abélien par son sous-groupe engendré par les groupes d'arête d'origine ce sommet, et $f : G \to L$ par sa restriction au groupe fondamental du graphe de groupes obtenu par ces remplacements.

Nous supposons donc dans la suite que f est injective sur les groupes de sommet abéliens.

Étape 2. — La seconde étape consiste à montrer que, quitte à admettre les pantalons et les rubans de Möbius troués dans la définition de « sommet de type surface d'une décomposition cyclique » (voir partie 4.1), alors on peut supposer que, pour tout sommet v de type surface de (X, G_*), le morphisme f est injectif sur le voisinage abélien de G_v (et toujours f injective sur les groupes de sommet abéliens).

Le résultat se déduit des deux lemmes suivants, qui découlent essentiellement de la structure des sous-groupes à deux générateurs d'un groupe limite (voir corollaire 3.2 (7)).

Lemme 6.4 (Sela [Sel1] Lemma 5.13). — *Soit H le groupe fondamental d'une surface S compacte connexe à bord (éventuellement vide), de caractéristique d'Euler au plus -1. Soit L un groupe limite, et $f : H \to L$ un morphisme de groupes d'image non abélienne, injective en restriction au groupe fondamental de chaque composante connexe du bord de S. Alors il existe une famille finie de courbes fermées simples disjointes de S, telle que chaque composante connexe C du complémentaire soit un pantalon ou un ruban de Möbius troué, et telle que la restriction de f au groupe fondamental de C soit injective.* □

Lemme 6.5 (Champetier-Guirardel [CG] Claim 4.5). — *Si H est un groupe obtenu par extension libre de centralisateurs des groupes fondamentaux d'au plus deux composantes connexes du bord d'un pantalon ou d'au plus une composante connexe du bord d'un ruban de Möbius troué, et si $f : H \to L$ est un morphisme de groupes d'image un groupe limite non abélien, injectif sur les centralisateurs des groupes fondamentaux des composantes connexes du bord, alors f est injective.* □

Étape 3. — Montrons qu'il existe un groupe limite L, un morphisme de groupes $f : G \to L$ et un graphe de groupes $(X', G'_\bullet)$ de groupe fondamental G, dont les groupes de sommet abéliens et les groupes d'arête sont non triviaux, et égaux à leurs centralisateurs dans G, avec f injective sur les groupes de sommet. Ceci implique que les groupes d'arête sont abéliens maximaux dans les deux groupes de sommet, et que f est injective sur les voisinages abéliens des groupes de sommet.

Soient (X, G_*) et $f : G \to L$ vérifiant le résultat de l'étape 2. On construit un graphe de groupes (X', G'_*), avec $X' = X$, de la manière suivante. On remplace chaque groupe de sommet G_v par le sous-groupe G'_v de G engendré par G_v et par les centralisateurs dans G des groupes d'arête d'origine v. On remplace chaque groupe d'arête G_e par son centralisateur dans G. Les morphismes des groupes de sommet dans les groupes d'arête sont ceux qui sont évidents.

Comme f est injective sur les groupes de sommet de (X, G_*) par l'étape 2 et la propriété (5), ceux-ci sont des groupes limites. Par la propriété (2), les groupes d'arête de (X', G'_*) sont des centralisateurs d'éléments non triviaux dans des groupes de sommet de (X, G_*), donc sont abéliens non triviaux. Ils sont égaux à leurs centralisateurs dans G, car $Z_G(Z_G(H)) = Z_G(H)$ si H et $Z_G(H)$ sont abéliens.

Soit v un sommet de X de groupe G_v. Montrons que G'_v est égal à son centralisateur dans G si G'_v est abélien, et que f est injective sur G'_v. Si G_v n'est pas abélien, alors G'_v non plus et ceci découle de l'étape (2) et de la propriété (5). Supposons donc G_v abélien.

S'il existait une arête e qui est une boucle en un sommet v de groupe abélien, alors par la propriété (1), le groupe G_v serait infini cyclique, égal par exemple à $\rho_e(G_e)$. Mais s'il existe un morphisme φ d'un groupe de présentation $\langle a, t \mid tat^{-1} = a^m \rangle$ dans un groupe limite, tel que $\varphi(a) \neq 1$, alors $m = 1$, car l'image doit être abélienne sans torsion (par le corollaire 3.2 (7) et (4)). Donc $\rho_e(G_e)$ ne serait pas égal à son centralisateur dans G, ce qui contredit (2).

Supposons tout d'abord que pour toute arête e d'origine v, on a $Z_G(G_e) = Z_{G_v}(\rho_{\overline{e}}(G_e))$. En particulier, par définition, G'_v est égal à G_v. Si $g \in Z_G(G_v)$, alors $g \in Z_G(G_e)$, donc $g \in G_v$. Donc $G'_v = G_v$ est égal à son centralisateur dans G, et f est injective sur $G'_v = G_v$ par l'étape (2).

Sinon, il existe une arête e d'origine v telle que $Z_G(G_e) \neq Z_{G_v}(\rho_{\overline{e}}(G_e))$. Par les propriétés (2) et (1), on a alors $Z_G(G_e) = Z_{G_{t(e)}}(\rho_e(G_e))$, ce groupe contient proprement $\rho_e(G_e)$ et $G_v = \rho_{\overline{e}}(G_e)$.

Supposons qu'il existe une autre arête e' d'origine v telle que $Z_G(G_{e'}) \neq Z_{G_v}(\rho_{\overline{e'}}(G_{e'}))$. Identifions G_e et $G_{e'}$ avec G_v par $\rho_{\overline{e}}$ et $\rho_{\overline{e'}}$, et G_e avec un sous-groupe de $G_{t(e)}$ par ρ_e. Si $t(e) = t(e')$, alors $G_{e'}$ s'envoie par $\rho_{e'}$ sur un sous-groupe uG_vu^{-1} de $G_{t(e)}$ pour un u dans $G - G_{t(e)}$. Si $t(e) \neq t(e')$, alors on identifie G_e avec un sous-groupe de $G_{t(e')}$ par $\rho_{e'}$. Dans ce second cas, la propriété (2) entraîne l'égalité des centralisateurs $Z_{G_{t(e)}}(G_v)$ et $Z_{G_{t(e')}}(G_v)$, qui contiennent strictement G_v. Il existerait alors un élément de $G - G_v$ fixant v dans un revêtement universel de (X, G_*) où on a relevé $e \cup e'$, ce qui est impossible. Dans le premier cas, on aurait $Z_{G_{t(e)}}(G_v) = uZ_{G_{t(e)}}(G_v)u^{-1}$. Pour a dans $G_v - \{1\}$, l'élément uau^{-1} commute avec a, donc leurs images par f commutent. Par la structure des sous-groupes à deux générateurs d'un groupe limite, $f(u)$ et $f(a)$ commutent, donc $f(uau^{-1}) = f(a)$. Comme f est injective sur $G_{t(e)}$, on en déduit que u appartient au centralisateur de G_v dans G, qui est contenu dans $G_{t(e)}$, ce qui est une contradiction.

Donc pour toute arête e' d'origine v, différente de e, le centralisateur $Z_G(G_{e'})$ est contenu dans G_v, ce qui montre par définition que $G'_v = Z_G(G_e) = Z_{G_{t(e)}}(G_e)$. En particulier, G'_v est égal à son centralisateur dans G. Si $G_{t(e)}$ n'est pas abélien, alors par l'étape (2), le morphisme f est injectif sur G'_v. Si $G_{t(e)}$ est abélien, alors $G'_v = G_{t(e)}$, et f est aussi injective sur G'_v par l'étape (1).

Étape 4. — Montrons que si G est un groupe de type fini, L un groupe limite, $f : G \to L$ un morphisme de groupes et $(X', G'_\bullet)$ un graphe de groupes de groupe fondamental G, à groupes d'arête abéliens non triviaux et égaux à leurs centralisateurs dans G (donc abéliens maximaux dans les deux groupes de sommet), avec f injective sur les voisinages abéliens des groupes de sommet, et dont les groupes de sommet abéliens sont égaux à leurs centralisateurs dans G, alors il existe une suite de twists de Dehn φ_n sur $(X', G'_\bullet)$ telle que $f \circ \varphi_n$ converge vers l'identité.

On procède par récurrence sur le nombre n d'arêtes de X' (que l'on peut supposer non nul). Si $n = 1$, alors G est un produit amalgamé $A *_C B$ ou une extension HNN $A*_C$. Soit c un élément non trivial de C.

Supposons tout d'abord que $G = A *_C B$ avec $C = A \cap B$. Notons φ_n le twist de Dehn qui est la conjugaison par c^n sur A et l'identité sur B. Soit g un élément non trivial de G, que l'on peut supposer n'appartenant pas à B, car φ_n est l'identité sur B et f injective sur B. Considérons son écriture réduite $g = a_1 b_1 \dots a_p b_p$ avec $p \geqslant 1$, a_i dans $A - C$ et b_i dans $B - C$ (sauf peut-être $a_1 = 1$ auquel cas $p \geqslant 2$, ainsi que $b_p = 1$). Pour n assez grand, l'élément $f \circ \varphi_n(g) = f(c)^n f(a_1) f(c)^{-n} f(b_1) \dots f(c)^n f(a_p) f(c)^{-n} f(b_p)$ du groupe limite L est non trivial par le lemme 6.2. En effet, si $f(c)$ et $f(a_i)$ commutent, comme f est injective sur A, alors a_i et c commutent, ce qui contredit le fait que a_i n'appartient pas à C, qui est le centralisateur de c dans le groupe limite A, car abélien maximal. De même, $f(c)$ et $f(b_i)$ ne commutent pas.

Supposons maintenant $G = \langle A, t \mid tct^{-1} = \theta(c),\ c \in C\rangle$, avec $C \subset A$ et $\theta : C \to A$ un morphisme injectif. S'il existe a dans A tel que $f(at)$ commute avec $f(c)$, alors $f(a^{-1}ca) = f(tct^{-1})$, donc par injectivité de $f\mid_A$, comme tct^{-1} est dans A, on a $(at)^{-1}cat = c$. Donc $f(at)^{-1}f(C)f(at) \cap f(C)$ est non trivial, et comme L est un groupe limite (voir le corollaire 3.2 (6)), l'élément $f(at)$ commute avec tout $f(C)$, et donc comme ci-dessus, at commute avec C. Comme un groupe de sommet abélien est égal à son centralisateur, le groupe A est non abélien. Donc f est injective sur le sous-groupe engendré par A et par at, donc est injectif sur G, et $\varphi_n = id$ convient (notons pour usage ultérieur que G est une extension libre de centralisateurs de A). Supposons donc qu'il n'existe pas de a dans A tel que $f(at)$ commute avec $f(c)$ (et de même pas de a dans A tel que $f(t^{-1}a)$ commute avec $f(c)$). Notons φ_n le twist de Dehn qui vaut l'identité sur A et envoie t sur tc^n. Soit g dans $G - A$ (car si g est dans $A - \{1\}$, alors $f \circ \varphi_n(g) = f(g) \neq 1$), d'écriture réduite (voir [LS, page 181]) $g = a_0 t^{\varepsilon_1} a_1 t^{\varepsilon_2} a_2 \dots t^{\varepsilon_p} a_p$ avec $p \geqslant 1$, a_i dans A, et pour $i = 1, \dots, n-1$, $a_i \notin C$ si $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1} = 1$, et $a_i \notin \theta(C)$ si $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1} = -1$. Alors pour n assez grand, l'élément $f \circ \varphi_n(g) = f(a_0) f(tc^n)^{\varepsilon_1} f(a_1) f(tc^n)^{\varepsilon_2} f(a_2) \dots f(tc^n)^{\varepsilon_p} f(a_p)$ du groupe limite L est non trivial par le lemme 6.2. En effet, $f(c)$ ne commute pas avec $f(a_i t), f(t^{-1}a_i)$, ni avec $f(a_i)$ si $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1} = 1$ (car C est abélien maximal dans A), ni avec $f(t^{-1}a_i t)$ si $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1} = -1$ (car $\theta(C)$ est abélien maximal dans A).

Supposons maintenant $n \geqslant 2$. Soit e une arête de X', qui induit une décomposition en produit amalgamé $A *_{G'_e} B$ de G si e sépare X', et une décomposition en extension HNN $A*_{G'_e}$ de G' sinon. Par récurrence, il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de twists de Dehn sur les arêtes de $X - \{e, \overline{e}\}$ telle que $f \circ \varphi_n \,|_A$ et $f \circ \varphi_n \,|_B$ convergent vers l'identité. Par compacité, quitte à extraire, $f \circ \varphi_n$ converge vers un morphisme f' de G dans un groupe limite. Ce morphisme f' est injectif sur les groupes de sommet du produit amalgamé ou de l'extension HNN, qui coïncident avec leurs voisinages abéliens. Si e sépare, on peut supposer que les injections de G'_e dans A et B sont propres, donc que ni A ni B ne sont abéliens. Si e ne sépare pas, et si A est abélien, alors G a pour présentation $\langle A, t \mid tat^{-1} = \varphi(a)\ \forall\, a \in A\rangle$, avec $\varphi : A \to A$ un isomorphisme. Par un argument déjà vu, comme $f'(tat^{-1})$ et $f'(a)$ commutent, $f'(t)$ et $f'(a)$ commutent, et comme f' est injective sur A, l'isomorphisme φ est l'identité. Donc t centralise A, ce qui contredit le fait que A est égal à son centralisateur dans G. On conclut alors par le cas $n = 1$: si φ'_n est une suite de twists de Dehn sur e telle que $f' \circ \varphi'_n$ converge vers l'identité, alors $f \circ \varphi_n \circ \varphi'_n$ aussi.

L'étape 4 implique que G est un groupe limite et conclut la preuve de la partie directe du théorème 6.1.

Montrons maintenant la partie réciproque du théorème 6.1. Soit G_0 un groupe limite, et S_0 une partie génératrice fixée de G_0. Montrons que G_0 admet une résolution de Makanin-Razborov. En utilisant des décompositions de Grushko et le résultat de finitude 5.6 en conjonction avec le théorème 5.10, il suffit donc de montrer que si (G, S) est un groupe limite marqué librement indécomposable, alors il existe un quotient raccourcissant maximal (G'', S'') de (G, S) tel que le morphisme de groupes $G \to G''$ est une résolution de Makanin-Razborov élémentaire.

On utilise l'identification $\mathbf{GM}(G, S) = \mathrm{Epi}(G, \cdot)$, voir la partie 5.2. Soit F un groupe libre et $(f_n : G \to F)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de morphismes surjectifs qui converge vers l'identité (qui existe comme G est un groupe limite). Pour tout n dans $\mathbb{N}$, soit φ_n dans $\mathrm{Mod}(G)$ tel que $f_n \circ \varphi_n$ est (G, S)-court. Alors, quitte à extraire, la suite $f_n \circ \varphi_n$ converge vers un quotient raccourcissant $f' : G \to G'$. Celui-ci factorise à travers un quotient raccourcissant maximal $f'' : G \to G''$. Montrons que f'' est une résolution de Makanin-Razborov élémentaire, en vérifiant les propriétés (1)-(5) de leur définition. Remarquons que si φ_n vaut une conjugaison sur un élément h non trivial de G pour tout n, alors $f_n(h) \neq 1$ pour n assez grand, donc $f_n \circ \varphi_n(h) \neq 1$, et donc $f'(h) \neq 1$, d'où $f''(h) \neq 1$.

Soit (X, G_*) la décomposition cyclique de G donnée par la proposition 4.2, qui vérifie que le centralisateur dans G d'un groupe d'arête est contenu dans l'un de ses groupes de sommet. Comme G est commutatif-transitif (corollaire 3.2), la propriété (1) est vérifiée. Comme φ_n vaut une conjugaison sur chaque groupe d'arête H, sur chaque groupe de sommet H non abélien, non de type surface, ainsi que sur chaque sous-groupe H de groupe de sommet abélien engendré par les stabilisateurs d'arêtes d'origine ce sommet, le morphisme f'' est injectif sur ces groupes H, et les propriétés (2) et (4) sont vérifiées.

Soit G_v un groupe de sommet non abélien, non de type surface, et e une arête d'origine v. Soit h_n dans G tel que φ_n agit par la conjugaison par h_n sur G_v. Notons (X', G'_*) le graphe de groupes obtenu en remplaçant chaque groupe de sommet abélien par son sous-groupe engendré par les groupes d'arête d'origine ce sommet, et G' son groupe fondamental (d'origine v). Montrons que φ_n agit aussi par la conjugaison par h_n sur le centralisateur Z_e dans $G'_{t(e)}$ de $\rho_e(G_e)$. On peut supposer que le centralisateur de $\rho_{\overline{e}}(G_e)$ dans G n'est pas contenu dans G_v, donc par les propriétés (1) et (2), on a $Z_G(G_e) = Z_{G_{t(e)}}(\rho_e(G_e))$. Si $G_{t(e)}$ est de type surface, alors $Z_{G_{t(e)}}(\rho_e(G_e))$ est réduit à $\rho_e(G_e)$, donc il n'y a rien à montrer. Si $G_{t(e)}$ est abélien, alors $Z_e = G'_{t(e)}$, et φ_n agit par la conjugaison par un élément h'_n sur Z_e. De même, si $G_{t(e)}$ n'est ni abélien, ni de type surface, alors φ_n agit par la conjugaison par un élément h'_n sur $G_{t(e)}$, donc sur Z_e (que e soit une boucle en v ou non). Maintenant, si a est un élément non trivial de G_e, alors $h_n^{-1}h'_n$ centralise a, donc appartient à $G_{t(e)}$. Donc φ_n agit aussi par la conjugaison par h_n sur Z_e, et ceci étant vrai pour tout e, φ_n agit par la conjugaison par h_n sur le voisinage abélien de G_v dans (X', G'_*). Ceci montre que f'' est injectif sur ce voisinage abélien.

Par définition, un groupe de sommet de type surface est non abélien, sauf s'il y a un unique sommet dans X de groupe $\mathbb{Z}^2$, auquel cas le résultat est clair. Comme une limite de groupes marqués non abéliens est non abélien, l'image par f' (donc par f'') d'un groupe de sommet de type surface est non abélien, ce qui montre l'assertion (3). $\square$

Les résultats suivants découlent alors de la preuve du théorème 6.1.

Corollaire 6.6 (Kharlampovich-Myasnikov-Remeslennikov [KM2] Theorem 6)

Un groupe est un groupe limite si et seulement s'il appartient à la collection $\mathbf{C}$ *de groupes définie récursivement par*

– *un groupe libre de type fini est dans* $\mathbf{C}$ *;*

– *un produit libre de deux groupes dans* $\mathbf{C}$ *est dans* $\mathbf{C}$ *;*

– *une extension libre de centralisateurs d'un élément de* $\mathbf{C}$ *est dans* $\mathbf{C}$ *;*

– *un produit amalgamé de deux groupes dans* $\mathbf{C}$*, au-dessus d'un groupe cyclique qui est abélien maximal dans au moins l'un de ces deux groupes, muni d'un morphisme à valeurs dans un élément de* $\mathbf{C}$*, injectif sur le voisinage abélien des groupes de sommet, est dans* $\mathbf{C}$ *;*

– *une extension HNN acylindrique (i.e. de la forme* $A*_C$ *avec* $a\rho_e(C)a^{-1} \cap \rho_{\overline{e}}(C) = \{1\}$ *pour tout* a *dans* A*), d'un groupe* A *dans* $\mathbf{C}$ *au-dessus d'un groupe abélien dont l'une des deux images dans* A *est abélienne maximale, munie d'un morphisme à valeurs dans un élément de* $\mathbf{C}$*, injectif sur le voisinage abélien du groupe de sommet, est dans* $\mathbf{C}$. $\square$

Corollaire 6.7. — *Pour tout groupe limite librement indécomposable marqué* (G, S)*, il existe un quotient raccourcissant* $f : (G, S) \to (G', S')$ *et une suite* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $\mathrm{Mod}(G)$ *telle que* $f \circ \varphi_n$ *converge vers l'identité.*

6.1. Tour multi-résiduellement libre hyperbolique

Rappelons que si X, Y sont des CW-complexes, A un sous-CW-complexe de X, et $f : A \to Y$ une application cellulaire, on appelle *recollement de X sur Y par f* le CW-complexe quotient $X \amalg_f Y = (X \amalg Y)/\sim$, avec $\sim$ la relation d'équivalence engendrée par $x \sim f(x)$ pour tout x dans A. La projection canonique $Y \to X \amalg_f Y$ est un homéomorphisme sur son image, et on identifie Y avec celle-ci (voir par exemple [Hat]). On parle de *somme pointée* de X et Y lorsque A est un singleton.

Un CW-complexe X est dit *multi-résiduellement libre de niveau $\leqslant n$* si $n = 0$ et X est un point, ou si $n \geqslant 1$ et si X est un CW-complexe obtenu, à partir d'un CW-complexe Y multi-résiduellement libre de niveau $\leqslant n-1$, par l'une des opérations suivantes :

(1) (extension libre) X est une somme pointée de Y et d'un bouquet de cercles ;

(2) (extension de type surface) X est un recollement $S \amalg_f Y$ sur Y d'une surface S compacte connexe à bord non vide, de caractéristique d'Euler au plus -2 ou égale au tore troué ou à la bouteille de Klein trouée, avec $f : \partial S \to Y$ une application cellulaire, envoyant chaque composante connexe de ∂S sur un lacet non homotope à zéro, et telle qu'il existe une rétraction de X sur Y, dont l'application induite sur les groupes fondamentaux envoie $\pi_1 S$ sur un groupe non abélien ;

(3) (extension abélienne) X est un recollement $(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^m) \amalg_f Y$, avec $\mathbb{T}^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ le tore de dimension k, ayant 0 pour sommet, et $f : \{0\} \times \mathbb{T}^m \to Y$ une application cellulaire, induisant sur les groupes fondamentaux un isomorphisme sur un sous-groupe abélien maximal de $\pi_1 Y$.

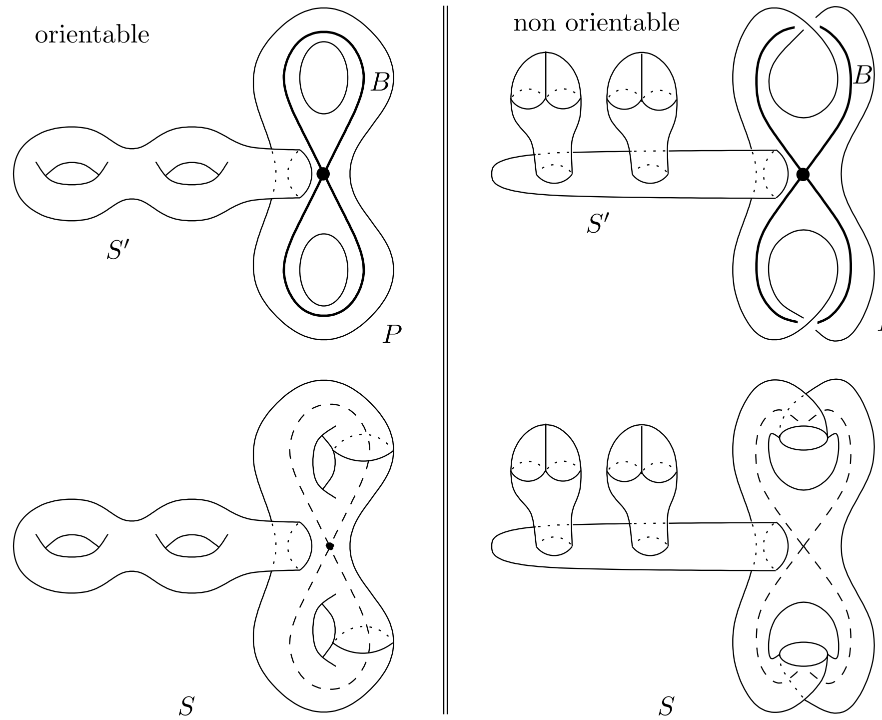
Un CW-complexe X est dit *multi-résiduellement libre* s'il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que X est multi-résiduellement libre de niveau $\leqslant n$. Une *tour de Sela* est le groupe fondamental d'un CW-complexe multi-résiduellement libre.

Il est facile de voir qu'une tour de Sela admet une résolution de Makanin-Razborov, donc est un groupe limite (voir le théorème 6.1). Une tour de Sela est *hyperbolique* si elle est construite sans aucune extension abélienne, ou, de manière équivalente, si elle n'a pas de sous-groupe abélien non cyclique. Une tour de Sela hyperbolique est hyperbolique au sens de Gromov (voir le corollaire 5.4). Voir les « regular NTQ groups » de [KM1]-[KM5].

Par exemple, un groupe de surface, non homéomorphe à la somme connexe de $1, 2$ ou 3 plans projectifs, est une tour hyperbolique. En effet, soit S une surface compacte connexe de genre g, avec $g \geqslant 2$ si S est orientable, et $g \geqslant 4$ sinon. On considère une surface compacte connexe S' qui est

- orientable de genre $g - 2$ si S est orientable,
- une sphère si S est non orientable et $g = 4$,
- non orientable de genre $g - 4$ sinon.

Soit P un pantalon si S est orientable, et la bouteille de Klein trouée sinon. Soit S'' la somme connexe $S'\#P$. Alors il existe une rétraction $f : S'' \to B$ dans le bouquet de deux cercles B, plongé dans P. L'espace topologique X recollement de S'' sur B par la restriction de f au bord de S'', admet une structure de CW-complexe multi-résiduellement libre de niveau $\leqslant 2$ (extension de type surface d'une extension libre), et X est homéomorphe à S. La rétraction f de S'' sur B induit par passage au quotient une rétraction r de X sur B. Au niveau des groupes fondamentaux, l'application r induit une surjection de $\pi_1 S''$ sur $\pi_1 B$, qui est un groupe libre de rang 2 (voir dessin ci-dessous).



Dans le cas orientable, on peut aussi considérer, pour tout entier $g \geqslant 2$, une surface compacte connexe planaire P' de caractéristique d'Euler $1-g$ (*i.e.* homéomorphe à un disque avec g disques ouverts enlevés). Alors P' se rétracte sur un bouquet B' de g cercles plongé dans P'. Le double de P' le long de son bord est une surface compacte connexe orientable de genre g, qui se rétracte évidemment sur le bouquet de cercles B' contenu dans l'une des deux copies de P'.

La partie facile suivante de la caractérisation des groupes de type fini élémentairement équivalents à un groupe libre de type fini non cyclique découle des techniques utilisées dans la construction des résolutions de Makanin-Razborov. En effet, un groupe de type fini G élémentairement équivalent à un groupe libre de type fini non cyclique est en particulier un groupe limite, donc admet une résolution de Makanin-Razborov. En utilisant des formules closes $\forall\exists$, il n'est pas très difficile d'améliorer une telle résolution en une tour hyperbolique, voir [Sel6].

THÉORÈME 6.8 (Sela [Sel6] Prop. 6). — *Soit G un groupe de type fini élémentairement équivalent à un groupe libre de type fini non cyclique. Alors G est isomorphe à une tour de Sela hyperbolique.* □

Mais la réciproque (qui contient la solution du problème de Tarski) est beaucoup plus difficile, et nécessite de nombreux autres outils.

Note ajoutée sur épreuve. — Les articles [Sel1]–[Sel6] sont maintenant acceptés pour publication. Les prépublications [KM3a] et [KM4a] sont respectivement contenues dans les articles [KM3b] et [KM4b]. Les articles [KM3a]–[KM5] devraient être contenus dans un livre à paraître (CRM monograph series, American Mathematical Society).

RÉFÉRENCES

[Bas] H. BASS – « Covering theory for graphs of groups », *J. Pure Appl. Math.* **89** (1993), p. 3–47.

[Bau1] G. BAUMSLAG – « On generalized free products », *Math. Z.* **78** (1962), p. 423–438.

[Bau] ———, *Topics in combinatorial group theory*, Lect. in Math., Birkhäuser, 1993.

[BMR] G. BAUMSLAG, A. MYASNIKOV & V.N. REMESLENNIKOV – « Algebraic geometry over groups I. Algebraic sets and ideal theory », *J. Algebra* **219** (1999), p. 16–79.

[BF1] M. BESTVINA & M. FEIGHN – « Bounding the complexity of simplicial group actions on trees », *Invent. Math.* **103** (1991), p. 449–469.

[BF2] ———, « A combination theorem for negatively curved groups », *J. Differential Geom.* **35** (1992), p. 85–101, Addendum, **43** (1996), p. 783-788.

[BF3] ———, « Stable actions of groups on real trees », *Invent. Math.* **121** (1995), p. 287–321.

[BF4] ———, « Notes on Sela's work : limit groups and Makanin-Razborov diagrams », prépublication, Univ. Utah, oct. 2003.

[Bou] N. BOURBAKI – *Topologie générale, chap. 1 à 4*, Hermann, Paris, 1971.

[Bow] B. BOWDITCH – « Cut points and canonical splittings of hyperbolic groups », *Acta Math.* **180** (1998), p. 145–186.

[Cham] C. CHAMPETIER – « L'espace des groupes de type fini », *Topology* **39** (2000), p. 657–680.

[CG] C. CHAMPETIER & V. GUIRARDEL – « Limit groups as limits of free groups : compactifying the set of free groups », à paraître dans *Israel J. Math.*

[CK] C.C. Chang & H.J. Keisler – *Model theory*, Studia Logica, vol. 73, North-Holand, 1973.

[Chat] Z. Chatzidakis – « Limit groups, viewed by a logician », Notes d'exposés, `http://www.logique.jussieu.fr/~zoe`, 2001.

[Chi] I. Chiswell – *Introduction to* Λ*-trees*, World Scientific, 2001.

[Dun] M.J. Dunwoody – « Groups acting on protrees », *J. London Math. Soc. (2)* **56** (1997), p. 125–136.

[DS] M.J. Dunwoody & M.E. Sageev – « JSJ-splittings for finitely presented groups over slender groups », *Invent. Math.* **135** (1999), p. 25–44.

[For] M. Forester – « On uniqueness of JSJ decompositions of finitely generated groups », *Comm. Math. Helv* **78** (2003), p. 740–751.

[FP] K. Fujiwara & P. Papasoglu – « JSJ-splittings and complexes of groups », prépublication Orsay, 1998.

[GLP] D. Gaboriau, G. Levitt & F. Paulin – « Pseudogroups of isometries of $\mathbb{R}$ and Rips' theorem on free actions on $\mathbb{R}$-trees », *Israel J. Math.* **87** (1994), p. 403–428.

[Ghy1] É. Ghys – « Les groupes hyperboliques », in *Sém. Bourbaki (1989/90)*, Astérisque, vol. 189-190, Société Mathématique de France, 1990, exp. n° 722, p. 203–238.

[Ghy2] ———, « Les groupes aléatoires [d'après Misha Gromov,...] », in *Sém. Bourbaki (2002/03)*, Astérisque, Société Mathématique de France, 2004, exp. n° 916, ce volume.

[Gri] R.I. Grigorchuk – « Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **48** (1984), p. 939–985.

[Gro] S. Gross – PhD Thesis, The Hebrew University, 2001.

[Gui] V. Guirardel – « Limit groups and groups acting on $\mathbb{R}^n$-trees », prépublication Univ. Toulouse, 2003.

[HV] P. de la Harpe & A. Valette – *La propriété T de Kazhdan pour les groupes localement compacts*, Astérisque, vol. 175, Société Mathématique de France, 1989.

[Hat] A. Hatcher – *Algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, 2002, `http://www.math.cornell.edu/~hatcher`.

[HS] H. Hendriks & A. Shastri – « A splitting theorem for surfaces », in *Topological structures, II, Proc. Symp. Topo. Geom. (Amsterdam, 1978), Part 1*, Math. Centre Tracts, vol. 115, Math. Centrum, Amsterdam, 1979, p. 117–121.

[JS] W.H. Jaco & P.B. Shalen – *Seifert fibered spaces in* 3*-manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 220, American Mathematical Society, 1979.

[Joh] K. Johannson – *Homotopy equivalences of* 3*-manifolds with boundaries*, Lect. Notes in Math., vol. 761, Springer Verlag, 1979.

[KM0] O. Kharlampovich & A. Myasnikov – « Tarski's problem about the elementary theory of free groups has a positive solution », *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* **4** (1998), p. 101–108.

[KM1] ———, « Irreducible affine varieties over a free group. I. Irreducibility of quadratic equations and Nullstellensatz », *J. Algebra* **200** (1998), p. 472–516.

[KM2] ———, « Irreducible affine varieties over a free group. II. Systems in triangular quasi-quadratic form and description of residually free groups », *J. Algebra* **200** (1998), p. 517–570.

[KM3a] ———, « Implicit function theorem over free groups », prépublication, révisée 2003, `http://www.math.mcgill.ca/~olga`, 1999.

[KM3b] ———, « Algebraic geometry over free groups : lifting solutions into generic points », in *Group theory : algorithms, language, logic* (A. Borovik, éd.), Contemp. Math., American Mathematical Society, à paraître.

[KM4a] ———, « Equations over fully residually free groups », prépublication, révisée 2003, `http://www.math.mcgill.ca/~olga`, 1999.

[KM4b] ———, « Effective JSJ decompositions », in *Group theory : algorithms, language, logic* (A. Borovik, éd.), Contemp. Math., American Mathematical Society, à paraître.

[KM5] ———, « Elementary theory of free nonabelian groups », prépublication, révisée 2003, `http://www.math.mcgill.ca/~olga`, 1999.

[Lev] G. Levitt – « Automorphisms of hyperbolic groups and graphs of groups », prépublication Univ. Toulouse, Oct. 2002.

[Lyn1] R.C. Lyndon – « The equation $a^2b^2 = c^2$ in free groups », *Michigan Math. J.* **6** (1959), p. 89–95.

[Lyn2] ———, « Equations in free groups », *Trans. Amer. Math. Soc.* **96** (1960), p. 445–457.

[LS] R.C. Lyndon & P.E. Schupp – *Combinatorial group theory*, Ergeb. Math. Grenz., vol. 89, Springer Verlag, 1977.

[Mak1] G.S. Makanin – « Equations in a free group », *Math. USSR-Izv.* **21** (1983), p. 449–469.

[Mak2] ———, « Decidability of the universal and positive theories of a free group », *Math. USSR-Izv.* **25** (1985), p. 75–88.

[Mer] Yu.I. Merzlyakov – « Positive formula on free groups », *Algebra i Logika* **5** (1966), p. 25–42.

[Pau1] F. Paulin – « Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels », *Invent. Math.* **94** (1988), p. 53–80.

[Pau2] ———, « Actions de groupes sur les arbres », in *Sém. Bourbaki (1995/96)*, Astérisque, vol. 241, Société Mathématique de France, 1997, exp. n° 808, p. 97–137.

[Raz] A.A. Razborov – « On systems of equations in a free group », *Math. USSR-Izv.* **25** (1985), p. 115–162.

[Rem] V.N. Remeslennikov – « $\exists$-free groups », *Siberian Math. J.* **30** (1989), p. 998–1001.

[RS] E. Rips & Z. Sela – « Cyclic splittings of finitely presented groups and the canonical JSJ decomposition », *Ann. of Math.* **146** (1997), p. 53–104.

[Sac] G.S. Sacerdote – « Elementary properties of free groups », *Trans. Amer. Math. Soc.* **178** (1973), p. 127–138.

[Sel1] Z. Sela – « Diophantine geometry over groups I : Makanin-Razborov diagrams », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **93** (2001), p. 31–105.

[Sel2] ———, « Diophantine geometry over groups II : completions, closures and formal solutions », *Israel J. Math.* **134** (2003), p. 173–254.

[Sel3] ———, « Diophantine geometry over groups III : rigid and solid solutions », prépublication, 49 pages, `http://www.ma.huji.ac.il/~zlil`, 2001 à paraître dans *Israel J. Math.*

[Sel4] ———, « Diophantine geometry over groups IV : an iterative procedure for validation of a sentence », prépublication, 106 pages, `http://www.ma.huji.ac.il/~zlil`, Juil. 2001 à paraître dans *Israel J. Math.*

[Sel5] ———, « Diophantine geometry over groups V : quantifier elimination », prépublication, 223 pages, `http://www.ma.huji.ac.il/~zlil`, Oct. 2001 à paraître, partie I dans *Israel J. Math.*, partie II dans *Geom. Funct. Anal.*

[Sel6] ———, « Diophantine geometry over groups VI : the elementary theory of a free group », prépublication, 14 pages, `http://www.ma.huji.ac.il/~zlil`, Oct. 2001 à paraître dans *Geom. Funct. Anal.*

[Sel7] ———, « Diophantine geometry over groups VII : the elementary theory of a hyperbolic group », prépublication, 65 pages, `http://www.ma.huji.ac.il/~zlil`, Mars 2002.

[Ser] J.-P. Serre – *Arbres, amalgames, SL_2*, Astérisque, vol. 46, Société Mathématique de France, 1983.

[Tar] A. Tarski – « Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics », in *Proc. I.C.M. (Cambridge, 1950), vol. 1*, American Mathematical Society, 1952, p. 705–720.

[ZVC] H. Zieschang, E. Vogt & H. Coldewey – *Surfaces and planar discontinuous groups*, Lect. Notes in Math., vol. 835, Springer Verlag, 1980.

Frédéric PAULIN

DMA, UMR 8553 CNRS
École Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
F-75230 Paris Cedex 05
E-mail : `Frederic.Paulin@ens.fr`