Séminaire BOURBAKI Mars 2003
55e année, 2002-2003, n^o 915, p. 147 à 172

PROGRÈS RÉCENTS SUR L'HYPOTHÈSE DU CONTINU [d'après Woodin]

par **Patrick DEHORNOY**

Une profusion de résultats conceptuellement profonds et techniquement difficiles ont été accumulés en théorie des ensembles depuis l'introduction des méthodes de forcing et de structure fine dans les années 1960. Ce rapport est consacré aux travaux récents de Woodin, qui non seulement ont constitué des percées techniques remarquables, mais ont aussi renouvelé le cadre conceptuel en améliorant l'intelligibilité globale de la théorie et en soulignant son unité profonde. Pour la première fois apparaissent une explication autre qu'empirique de la hiérarchie des grands cardinaux et, surtout, une perspective réaliste de décider l'hypothèse du continu, en l'occurrence dans une direction négative :

Conjecture (Woodin, 1999). — *Toute théorie des ensembles compatible avec l'existence de grands cardinaux et rendant invariantes par forcing les propriétés des ensembles héréditairement de cardinal au plus* $\aleph_1$ *implique que l'hypothèse du continu soit fausse.*

Les travaux de Woodin arrivent très près de cette conjecture, qu'ils établissent pour une part substantielle de la hiérarchie des grands cardinaux. La question reste de savoir si cette part substantielle est en fait toute la hiérarchie des grands cardinaux. Dans tous les cas — et c'est ce qui légitime de parler de ces travaux maintenant, sans attendre une possible solution de la partie ouverte de la conjecture ci-dessus — les résultats de Woodin contribuent à montrer que le problème du continu et, plus généralement, la notion d'infini non dénombrable ne sont pas intrinsèquement vagues et inaccessibles à l'analyse, mais peuvent faire l'objet d'une véritable théorie conceptuelle allant bien au-delà de l'exploration formelle des conséquences d'axiomes plus ou moins arbitraires.

Le texte présent, qui doit beaucoup aux articles d'exposition [17, 19], s'efforce d'expliquer et de mettre en perspective les énoncés de quatre résultats de Woodin, apparaissant ici comme les théorèmes 5.10, 6.4, 6.7, et, surtout, 7.2 et son corollaire 7.6. Il semble hors de portée de donner une idée des démonstrations, dont la partie publiée occupe une bonne fraction des 900 pages de [16], et dont la partie la plus récente n'est décrite que dans [18].

Je remercie tous les théoriciens des ensembles qui m'ont apporté des commentaires et des suggestions, notamment Joan Bagaria, Matthew Foreman, Alexander Kechris, John Steel, Hugh Woodin, et, particulièrement, Stevo Todorcevic.

1. UNE AFFAIRE TERMINÉE ?

L'hypothèse du continu (**HC**) est l'affirmation « Tout sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$ est en bijection soit avec $\mathbb{N}$, soit avec $\mathbb{R}$ », et le problème du continu est la question, soulevée par Cantor vers 1890, « L'hypothèse du continu est-elle vraie ? ». Premier de la liste de Hilbert en 1900, le problème du continu a suscité des recherches tout au long du vingtième siècle. Une fois réuni un vaste consensus sur le système de Zermelo-Fraenkel (**ZF**, ou **ZFC** quand l'axiome du choix est inclus) comme point de départ axiomatique d'une théorie des ensembles, la *première* étape dans l'étude du problème du continu est la question « **HC**, ou sa négation $\neg$**HC**, est-elle prouvable à partir de **ZFC** ? ».

La réponse tient en deux résultats, tournants majeurs de la théorie des ensembles tant par leur importance propre que par les démonstrations qui ont permis de les établir :

THÉORÈME 1.1 (Gödel, 1938). — *Si* **ZFC** *est non contradictoire, il n'existe pas de preuve de* $\neg$**HC** *à partir de* **ZFC**.

THÉORÈME 1.2 (Cohen, 1963). — *Si* **ZFC** *est non contradictoire, il n'existe pas de preuve de* **HC** *à partir de* **ZFC**.

Il peut être tentant de retenir que le problème du continu ne peut être résolu et qu'à défaut d'être fermé, il est du moins sans intérêt, tout nouvel effort étant voué à l'échec. Cette conclusion est erronée. On peut certes juger le problème inopportun si on accorde peu d'intérêt aux objets qu'il met en jeu : sous-ensembles compliqués de $\mathbb{R}$, bons ordres dont l'existence relève de l'axiome du choix[(1)]. Par contre, on doit voir que la question, si elle n'est pas écartée *a priori*, n'est pas fermée mais ouverte par les résultats de Gödel et Cohen : ainsi que le démontre le corpus accumulé, le système **ZFC** n'épuise pas notre intuition des ensembles, et la conclusion ne doit pas être que l'hypothèse du continu n'est ni vraie, ni fausse[(2)], mais, simplement, que le système **ZFC** est incomplet, et qu'il s'agit de le compléter.

Des analogies sont évidentes : que l'axiome des parallèles ne soit pas conséquence des autres axiomes d'Euclide n'a pas clos la géométrie, mais, au contraire, a permis

[(1)] En fait, il existe aussi des versions plus effectives de **HC** ne portant que sur des objets *définissables*.
[(2)] voire est indécidable en quelque sens mystérieux

l'émergence des géométries non euclidiennes, et a ouvert la question de reconnaître, parmi toutes les géométries possibles, la plus pertinente pour décrire le monde physique. De même, les résultats de Gödel et de Cohen montrent que plusieurs univers sont possibles à partir de **ZFC**, et ouvrent donc l'étude des divers univers possibles — c'est-à-dire, de façon équivalente, des divers systèmes axiomatiques complétant **ZFC** — et la question de reconnaître, parmi ceux-ci, le(s) plus pertinent(s) pour décrire le monde mathématique.

Diverses questions préliminaires se posent, de ce que peut être un bon axiome, et, surtout, de ce que peut signifier *résoudre* un problème tel que le problème du continu sur la base d'axiomes additionnels(3). On reviendra sur ces questions dans la section 2 à la lueur du cas de l'arithmétique. Divers axiomes susceptibles de compléter **ZFC** interviendront dans la suite de cet exposé. Pour le moment, mentionnons simplement les axiomes de grands cardinaux, qui, intuitivement, sont les plus naturels, et dont le rôle est central. Ces axiomes affirment l'existence d'infinis d'ordre supérieur, dépassant les infinis qui les précèdent à la façon dont l'infini dépasse le fini. Ils constituent une itération du principe de départ de la théorie des ensembles qui est précisément de postuler l'existence d'ensembles infinis(4). L'une des raisons du succès des axiomes de grands cardinaux est leur efficacité pour décider un grand nombre d'énoncés non prouvables à partir de **ZFC**, *cf.* [9]. Le point important ici est qu'il semble raisonnable de tenir ces axiomes pour vrais, ou, au moins, de ne tenir pour plausibles que des axiomes **A** *compatibles* avec l'existence de grands cardinaux au sens où aucun axiome de grand cardinal ne contredit **A**.

2. ARITHMÉTIQUE, INCOMPLÉTUDE, ET FORCING

Notons V la collection de tous les ensembles(5). De même que le but ultime de l'arithmétique serait de déterminer tous les énoncés satisfaits dans la structure $(\mathbb{N}, +, \times)$, celui de la théorie des ensembles serait de déterminer tous les énoncés satisfaits dans la structure $(V, \in)$. Ce but étant inaccessible, une possibilité est de se restreindre à des structures plus simples du type $(H, \in)$, où H est un certain fragment de la collection des ensembles. La filtration par la cardinalité est alors naturelle :

(3) On se doute qu'ajouter simplement **HC** ou $\neg$**HC** aux axiomes ne serait pas une très bonne solution !

(4) Comme l'existence d'un grand cardinal entraîne toujours la non-contradiction de **ZFC**, le second théorème d'incomplétude interdit qu'une telle existence puisse être démontrée à partir de **ZFC**, et la poser comme hypothèse constitue donc toujours un axiome propre.

(5) en fait, la collection de tous les ensembles *purs*, définis comme ceux pouvant être obtenus à partir de l'ensemble vide en itérant les opérations de passage à l'ensemble des parties, à la réunion, et aux éléments. On sait que de tels ensembles suffisent à représenter tous les objets mathématiques.

Définition 2.1. — *Pour k entier, on note H_k l'ensemble de tous les ensembles A* héréditairement *de cardinal strictement plus petit que $\aleph_k$, au sens où A, les éléments de A, les élements des éléments de A, etc. sont tous de cardinal plus petit que $\aleph_k$*[6].

Considérons pour commencer la structure $(H_0, \in)$, c'est-à-dire le niveau des ensembles héréditairement finis. Notons $\mathsf{ZF}^{\mathrm{fini}}$ le système ZF privé de l'axiome de l'infini.

Lemme 2.2. — *À partir des axiomes de $\mathsf{ZF}^{\mathrm{fini}}$, on peut définir à l'intérieur de $(H_0, \in)$ une copie de $(\mathbb{N}, +, \times)$; inversement, à partir des axiomes de Peano, on peut définir à l'intérieur de $(\mathbb{N}, +, \times)$ une copie de $(H_0, \in)$* [7].

À un codage près, décrire $(H_0, \in)$ équivaut donc à décrire $(\mathbb{N}, +, \times)$: le niveau « héréditairement fini » de la théorie des ensembles coïncide avec l'arithmétique.

Une façon usuelle de décrire une structure S consiste à l'*axiomatiser*, c'est-à-dire à caractériser les énoncés satisfaits dans S comme ceux qui sont *prouvables* à partir d'un système d'axiomes suffisamment simple. Pour l'arithmétique, le système de Peano est bien connu, mais les théorèmes d'incomplétude de Gödel montrent que la description obtenue n'est pas complète : il existe des énoncés satisfaits dans $(\mathbb{N}, +, \times)$ mais non prouvables à partir des axiomes de Peano, et, de même, des énoncés satisfaits dans $(H_0, \in)$ mais non prouvables à partir de $\mathsf{ZF}^{\mathrm{fini}}$.

Se placer dans le cadre de la théorie des ensembles permet de démontrer davantage d'énoncés, donc de se rapprocher d'une description complète. Dans le cas d'un énoncé φ portant sur H_0, cela signifie non plus chercher si φ est prouvable à partir de $\mathsf{ZF}^{\mathrm{fini}}$, mais si l'énoncé « $(H_0, \in)$ satisfait φ » [8] est prouvable à partir de ZFC. De même, dans le cas d'un énoncé φ portant sur $\mathbb{N}$, il s'agit, au lieu de chercher si φ est prouvable à partir des axiomes de Peano, de chercher si « $(\mathbb{N}, +, \times)$ satisfait φ » [9] est prouvable à partir de ZFC.

---

[6] On rappelle que $\aleph_0, \aleph_1, \ldots$ est l'énumération croissante des cardinaux infinis, ceux-ci étant définis comme les ordinaux infinis qui ne sont en bijection avec aucun ordinal plus petit. Ainsi $\aleph_0$ (aussi noté ω), est le plus petit ordinal infini, donc aussi la limite supérieure des ordinaux finis, et $\aleph_1$ est le plus petit ordinal non dénombrable, donc la limite supérieure des ordinaux dénombrables. Alors $\aleph_0$ est le cardinal de $\mathbb{N}$, et, en notant 2^κ le cardinal de $\mathfrak{P}(\kappa)$ comme dans le cas fini, $2^{\aleph_0}$ est celui de $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$, donc aussi de $\mathbb{R}$, de sorte que l'hypothèse du continu s'écrit $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

[7] On obtient une copie $\underline{\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ à l'intérieur de H_0 en définissant récursivement une copie $\underline{i}$ de l'entier i par $\underline{0} = \varnothing$ et $\underline{i+1} = \underline{i} \cup \{\underline{i}\}$: c'est la représentation de von Neuman des entiers par des ensembles. Il est alors facile de construire des copies $\underline{+}$ et $\underline{\times}$ de $+$ et $\times$, et de montrer à partir de $\mathsf{ZF}^{\mathrm{fini}}$ que $(\underline{\mathbb{N}}, \underline{+}, \underline{\times})$ satisfait aux axiomes de Peano. À l'inverse, suivant Ackermann, on définit à l'intérieur de $(\mathbb{N}, +, \times)$ une relation $\underline{\in}$ en déclarant $p \mathrel{\underline{\in}} q$ vraie si le p-ième chiffre du développement binaire de q est 1, et on montre à partir des axiomes de Peano que $(\mathbb{N}, \underline{\in})$ satisfait aux axiomes de $\mathsf{ZF}^{\mathrm{fini}}$, et est isomorphe à $(H_0, \in)$.

[8] c'est-à-dire l'énoncé obtenu à partir de φ en ajoutant que toutes les variables prennent leurs valeurs dans l'ensemble définissable H_0, *cf.* note 14

[9] ou, plus exactement et avec les notations de la note 7, « $(\underline{\mathbb{N}}, \underline{+}, \underline{\times})$ satisfait φ »

Le théorème d'incomplétude s'applique derechef, et l'axiomatisation par **ZFC** ne donne toujours pas une description complète de $(H_0, \in)$ et de l'arithmétique. Pour autant, cette description est en pratique satisfaisante, en ce que la plupart des exemples d'énoncés vrais mais non prouvables sont des énoncés *ad hoc* plus ou moins directement issus de la logique[(10)]. De plus, et surtout, les manifestations de l'incomplétude de **ZFC** au niveau de l'arithmétique diffèrent fondamentalement de ses manifestations à des niveaux ultérieurs, par exemple dans le cas de l'hypothèse du continu.

Expliquer cette différence de nature requiert d'introduire la notion de *forcing* et, d'abord, celle de *modèle de* **ZFC**. Comme **ZFC** est une famille d'axiomes portant sur l'unique relation d'appartenance, on peut considérer de façon abstraite des structures (M, E) avec E relation binaire sur M telles que chacun des axiomes de **ZFC** soit satisfait lorsque E est prise comme valeur de l'appartenance : une telle structure est appelée *modèle* de **ZFC**. La validité des axiomes de **ZFC** s'exprime alors par le fait que la structure $(V, \in)$ constituée des *vrais* ensembles et de la *vraie* appartenance est un modèle de **ZFC** [(11)].

C'est le cadre conceptuel fourni par la notion de modèle de **ZFC** qui permet d'établir les théorèmes 1.1 et 1.2 : pour montrer que ¬**HC** (*resp.* **HC**) n'est pas prouvable à partir de **ZFC**, il suffit de construire un modèle de **ZFC** satisfaisant **HC** (*resp.* ¬**HC**), ce qu'on fait en partant d'un modèle (quelconque) M de **ZFC**, et en en construisant respectivement un sous-modèle L satisfaisant **HC** avec Gödel, et une extension $M[G]$ satisfaisant ¬**HC** avec Cohen[(12)]. La méthode de Cohen, ou méthode du *forcing*, consiste à ajouter à M un ensemble G dont les propriétés sont définies (« forcées ») depuis l'intérieur de M par un ensemble ordonné $\mathbb{P}$, dit de *forcing*, qui décrit les éléments de $M[G]$ [(13)]. Un modèle du type $M[G]$ est appelé extension *générique* de M.

L'existence du forcing introduit une variabilité essentielle dans la théorie des ensembles. Étant donné un modèle M, et un énoncé φ tel que ni φ, ni $\neg\varphi$ ne soient prouvables à partir de **ZFC**, il est fréquent qu'on puisse construire, à l'aide d'un premier ensemble de forcing $\mathbb{P}_1$, une extension générique $M[G_1]$ dans laquelle φ est satisfait, et, à l'aide d'un second ensemble de forcing $\mathbb{P}_2$, une autre extension générique $M[G_2]$ dans laquelle $\neg\varphi$ est satisfait, de sorte que privilégier φ ou $\neg\varphi$ semble

[(10)] Noter néanmoins les propriétés combinatoires isolées par H. Friedman [6], ou les résultats de Y. Matiyasevich sur l'existence d'équations diophantiennes dont la résolubilité est indémontrable [11].
[(11)] Cette description adopte un vocabulaire délibérément platonicien référant à un vrai monde de vrais ensembles : plus que d'une option philosophique, il s'agit d'une commodité de présentation, consistant à fixer un modèle de référence et à distinguer les modèles partageant la même relation d'appartenance.
[(12)] De même, pour montrer que les axiomes des groupes n'entraînent pas, disons, la commutativité, on pourrait partir d'un groupe G quelconque, et en construire respectivement un sous-groupe commutatif et une extension non commutative. La construction est plus délicate dans le second cas, car, rien n'excluant de partir avec $G = \{1\}$ ou $M = L$, le passage à une sous-structure ne saurait suffire.
[(13)] comme une extension de corps dont les éléments sont décrits par des polynômes du corps de base

difficile. Au demeurant, nous allons voir que cette situation ne peut pas se produire au niveau de l'arithmétique.

DÉFINITION 2.3. — *Soit H un ensemble définissable*[14]. *On dit que les propriétés de la structure $(H, \in)$ sont* invariantes par forcing *si, quels que soient l'énoncé φ, le modèle M, et l'extension générique $M[G]$ de M, l'énoncé « $(H, \in)$ satisfait φ » est satisfait dans M si, et seulement si, il l'est dans $M[G]$* [15].

PROPOSITION 2.4 (Shoenfield). — *Les propriétés de $(H_0, \in)$ et de $(\mathbb{N}, +, \times)$ sont invariantes par forcing*[16].

Les manifestations de l'incomplétude de **ZFC** au niveau de l'arithmétique ne sont donc pas liées à la variabilité due au forcing, et elle se réduisent à ce qu'on pourrait appeler une incomplétude résiduelle, dont on a dit qu'elle limite peu l'efficacité en pratique. Il est donc naturel de chercher à retrouver, par exemple pour les structures $(H_k, \in)$ avec $k \geqslant 1$, la situation de $(H_0, \in)$ et de l'arithmétique — si cela se peut. Ceci conduit à poser comme suit la question de la recherche de bons axiomes pour une structure $(H, \in)$:

PROBLÈME 2.5. — *Trouver un cadre axiomatique,* **ZFC** *ou* **ZFC** *complété d'axiome(s) compatible(s) avec l'existence de grands cardinaux, fournissant une description suffisamment complète de $(H, \in)$ et en rendant les propriétés invariantes par forcing.*

L'approche développée ici consiste à faire jouer le rôle principal au critère d'invariance par forcing. Obtenir l'invariance des propriétés de $(H, \in)$ par forcing, c'est neutraliser l'action du forcing au niveau de H, afin de limiter autant que faire se peut l'inévitable incomplétude de la description. L'invariance des propriétés par forcing est une contrainte forte, et il n'est pas clair *a priori* qu'elle puisse être réalisée au-delà de H_0 [17]. Par contre, l'éventuelle satisfaction de cette contrainte devrait apparaître comme un argument de poids en faveur du système axiomatique qui l'accomplit[18].

[14] c'est-à-dire que H est *défini* comme l'ensemble des x vérifiant une certaine formule $\psi(x)$ du langage de la théorie des ensembles. Par exemple, chacun des ensembles H_k est définissable.

[15] Il y a un aspect subtil ici : à supposer que H soit défini par une formule $\psi(x)$, on ne demande pas que les ensembles définis par $\psi(x)$ dans M et dans $M[G]$, c'est-à-dire « H calculé dans M » et « H calculé dans $M[G]$ », coïncident, on demande seulement que ces deux ensembles aient les mêmes propriétés.

[16] Le résultat ici est même plus fort : on a invariance non seulement par passage à une extension générique, mais aussi par passage à une extension quelconque, (M', E') étant appelé *extension* de (M, E) si M est inclus dans M', E est la restriction de E' à M, et les ordinaux de (M, E) et (M', E') coïncident.

[17] De fait, Woodin a montré qu'aucun résultat d'invariance par forcing n'est possible pour les propriétés de la structure $(V_{\aleph_0+2}, \in)$ (*cf.* note 28), donc, essentiellement, pour tout fragment contenant $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$.

[18] Il n'existe cependant pas d'unanimité. Une objection est de considérer la variabilité due au forcing comme un flou dans notre perception des ensembles. De ce point de vue, réclamer l'invariance des

Dans la suite, on appellera *solution* au problème 2.5 pour une structure $(H, \in)$ tout système axiomatique **ZFC** complété d'axiomes compatibles avec l'existence de grands cardinaux rendant les propriétés de $(H, \in)$ invariantes par forcing. Une solution sera dite *efficace* si, de plus, elle fournit une description empiriquement complète de $(H, \in)$, cette notion étant évidemment informelle. Avec ce vocabulaire, on peut énoncer ce qui précède sous la forme « **ZFC** est une solution efficace pour $(H_0, \in)$ », et on devine que l'enjeu va être l'éventuelle existence de solutions (efficaces) pour les structures $(H_k, \in)$ avec $k \geqslant 1$.

Dans ce contexte, on peut envisager une réponse à la question : « Que peut signifier établir φ lorsque ni φ, ni sa négation $\neg\varphi$ ne sont prouvables à partir de **ZFC** ? », typiquement lorsqu'on peut, par forcing, réaliser tout aussi bien φ que $\neg\varphi$. Si on accepte le cadre du problème 2.5, c'est-à-dire si on privilégie le critère d'invariance par forcing, la notion suivante devrait apparaître raisonnable :

DÉFINITION 2.6. — *Un énoncé φ portant sur une structure définissable $(H, \in)$ est dit* essentiellement vrai *si*

(i) *il existe au moins une solution au problème 2.5 pour $(H, \in)$* [19]*, et*

(ii) *toute telle solution implique que φ soit vrai.*

Autrement dit, on déclare φ essentiellement vrai si φ est vrai dans tout contexte cohérent où l'action du forcing est neutralisée [20].

Décider si la vérité essentielle de φ constitue un argument définitif établissant φ est affaire de jugement : à tout le moins, il s'agit d'une brisure forte de la symétrie introduite entre φ et $\neg\varphi$ par le forcing. En tout cas, c'est en de tels termes que le problème du continu, dont on verra qu'il s'exprime comme une propriété de H_2, est abordé par Woodin, et la question précise qu'il considère est : « L'hypothèse du continu est-elle essentiellement vraie, essentiellement fausse, ou ni l'un ni l'autre ? »

3. LE SECOND NIVEAU : LE DÉNOMBRABLE

La situation simple de H_0 ne se retrouve pas dès que des ensembles infinis entrent en jeu : le système **ZFC** ne rend pas les propriétés de H_1 invariantes par forcing, et laisse ouvertes beaucoup d'entre elles parmi les plus naturelles. Mais on va voir qu'à condition d'amender convenablement **ZFC**, il existe une excellente solution au

propriétés par forcing, c'est restreindre l'observation à des fragments de l'univers qui échappent au flou. Mais rien ne dit que la solution du problème du continu, par exemple, doive se trouver dans ces fragments-là.

(19) Ceci, afin de montrer que l'approche n'est pas irréaliste.

(20) En termes encore plus imagés : seul reste φ lorsque la température a été suffisamment abaissée pour que l'agitation thermique liée au forcing cesse de rendre φ et $\neg\varphi$ indistinguables...

problème 2.5 pour $(H_1, \in)$. La recherche de cette solution a été l'un des enjeux majeurs de la théorie des ensembles pour la période 1970–1985.

De la même façon qu'on passe de $(H_0, \in)$ à $(\mathbb{N}, +, \times)$, il est facile de passer de $(H_1, \in)$ à $(\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \times, \in)$ [21]. Déterminer les énoncés satisfaits dans $(\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \times, \in)$ revient à étudier les sous-ensembles de $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ qui y sont *définissables*, c'est-à-dire ont la forme

$$A = \{x \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})\,;\, (\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \times, \in) \text{ satisfait } \varphi(x, \vec{a})\}, \tag{3.1}$$

avec $\vec{a}$ suite finie d'éléments de $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$: typiquement, reconnaître si l'énoncé $\exists\, x \varphi(x, \vec{a})$ est satisfait équivaut à reconnaître si l'ensemble défini par (3.1) est non vide.

DÉFINITION 3.1 (Lusin). — *Soit X un espace Polonais. Un sous-ensemble de X^p est dit* projectif *s'il peut être obtenu à partir d'un borélien de X^{p+k} par un nombre fini de projections et de passages au complémentaire.*

Les sous-ensembles de $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ définissables dans $(\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \times, \in)$ sont exactement[22] les sous-ensembles projectifs de l'espace de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Comme les classes d'ensembles considérées incluent les boréliens, l'existence d'un isomorphisme borélien entre $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et la droite réelle permet de remplacer $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ par $\mathbb{R}$, et on conclut que l'étude de $(H_1, \in)$ est essentiellement celle des sous-ensembles projectifs de $\mathbb{R}$.

Dans l'optique du problème 2.5, le premier point est de savoir si l'axiomatisation par **ZFC** fournit une description suffisamment complète de $(H_1, \in)$, donc des sous-ensembles projectifs de $\mathbb{R}$. Ce n'est pas le cas : si nous appelons *PCA* un ensemble (projectif) qui est projection de complémentaire de projection de borélien, alors, si **ZFC** est non contradictoire, ni l'assertion « Tous les sous-ensembles PCA de $\mathbb{R}$ sont Lebesgue-mesurables », ni sa négation, ne sont prouvables à partir de **ZFC** [23].

Il s'agit alors de chercher si l'adjonction d'un nouvel axiome permettrait d'obtenir une solution au problème 2.5. Une longue accumulation de résultats profonds mène à la conclusion que l'*axiome de détermination projective* est un tel axiome.

---

[21] c'est-à-dire à l'*arithmétique du second ordre*, où sont considérés, outre les entiers, les ensembles d'entiers et l'appartenance associée

[22] Si φ est sans quantificateur, alors (3.1) définit un ouvert ; ajouter une quantification existentielle revient à effectuer une projection, tandis qu'ajouter une négation revient à passer au complémentaire.

[23] Comme évoqué plus haut, Gödel démontre que $\neg$**HC** (de même que la négation de l'axiome du choix) n'est pas prouvable à partir de **ZF** en construisant un certain sous-modèle L de V. Or L est équipé d'un bon ordre canonique (impliquant l'axiome du choix) dont la restriction aux réels est un ensemble PCA, qui, par le théorème de Fubini, ne peut être mesurable. Donc L satisfait « il existe un PCA non mesurable », et, par conséquent, il est impossible que **ZFC** prouve « tous les PCA sont mesurables ». Pour la négation, on utilise le forcing avec l'axiome de Martin **MA**, dont il sera question dans la section 4.

DÉFINITION 3.2. — *On dit qu'un sous-ensemble* A *de* $[0,1]$ *est* déterminé *si l'énoncé infini suivant, où les* ε_i *valent* 0 *ou* 1*, est satisfait :*

$$(\exists\,\varepsilon_1)(\forall\,\varepsilon_2)(\exists\,\varepsilon_3)\dots(\textstyle\sum_i \varepsilon_i 2^{-i} \in A) \text{ ou } (\forall\,\varepsilon_1)(\exists\,\varepsilon_2)(\forall\,\varepsilon_3)\dots(\textstyle\sum_i \varepsilon_i 2^{-i} \notin A)\ ^{(24)}.$$

Tous les ouverts sont déterminés, et un théorème de Martin (1975) affirme qu'il en est de même de tous les boréliens. Ce résultat est le plus fort possible dans **ZFC** [(25)], et, par conséquent, poser comme hypothèse que les ensembles d'une famille au-delà des boréliens sont déterminés constitue un axiome (propre) par rapport à **ZFC**.

DÉFINITION 3.3. — *On note* **DP** (détermination projective) *l'axiome : « Tout ensemble projectif est déterminé »* [(26)].

La propriété de détermination est un paradigme permettant d'exprimer de nombreuses propriétés d'analyse, et il en résulte que l'axiome **DP** fournit une description très complète des propriétés des ensembles projectifs. Des résultats typiques sont les suivants, *cf.* [13] :

THÉORÈME 3.4 (Banach–Mazur, Mycielski–Swierczkowski, Moschovakis)
Le système **ZFC** + **DP** *prouve que tous les ensembles projectifs sont Lebesgue-mesurables, ont la propriété de Baire, et ont la propriété d'uniformisation*[(27)].

Les phénomènes d'incomplétude liés au théorème de Gödel restent inévitables, mais on peut affirmer sans tricher que l'axiomatisation de H_1 par **ZFC** + **DP** a la même efficacité pratique que celle de H_0 par **ZFC**.

Dans l'optique du problème 2.5, le point suivant est la recherche de conditions éventuelles rendant les propriétés de H_1 invariantes par forcing. C'est précisément l'étude de ce point qui a conduit à isoler la notion de *cardinal de Woodin*[(28)] et a

[(24)] De façon équivalente, un des joueurs a une *stratégie gagnante* dans le jeu G_A où deux joueurs I et II construisent à tour de rôle une suite infinie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ de 0 et de 1, et où I (*resp.* II) est déclaré gagnant pour $\sum_i \varepsilon_i 2^{-i} \in A$ (*resp.* $\notin$).

[(25)] Dans le modèle L, il existe un ensemble non déterminé qui est projection de borélien.

[(26)] Notons **AD** l'axiome maximal « tout ensemble de réels est déterminé » ; Woodin a démontré en 1987 que les systèmes **ZFC**+« il existe une infinité de cardinaux de Woodin » (voir note 28) et **ZF**+**AD** sont équiconsistants ; s'il existe une infinité de cardinaux de Woodin plus un cardinal mesurable au-dessus d'eux dans V, alors **AD** est satisfait dans le sous-modèle minimal $L(\mathbb{R})$ de V contenant $\mathbb{R}$.

[(27)] c'est-à-dire : Si A est un sous-ensemble projectif de $\mathbb{R}^2$, alors il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de graphe projectif choisissant, pour tout x tel qu'il en existe, un élément y vérifiant $(x, y) \in A$; la propriété d'uniformisation n'est qu'un corollaire d'une certaine propriété d'*échelle* qui est cruciale.

[(28)] Comme de nombreux autres grands cardinaux, les cardinaux de Woodin se définissent par l'existence de plongements élémentaires, qui sont les homomorphismes entre modèles de **ZFC** préservant tout ce qui est définissable à partir de $\in$. Notons V_α l'ensemble des ensembles purs s'obtenant à partir de $\varnothing$ en utilisant au plus α fois l'opération $\mathfrak{P}$. Alors, un cardinal κ est *de Woodin* (dans V) si, pour toute fonction $f : \kappa \to \kappa$, il existe un sous-modèle M de V, un plongement élémentaire $j : V \to M$, et un ordinal $\alpha < \kappa$ tels que $\xi < \alpha$ entraîne $j(\xi) = \xi$ et $f(\xi) < \alpha$ et qu'on ait $j(\alpha) > \alpha$ et $V_{j(f)(\alpha)} \subseteq M$. Le principe est naturel : un cardinal est infini s'il possède une partie propre qui est en bijection avec lui, et il est « super-infini » s'il possède une partie propre qui non seulement mené en 1984, à partir du travail de Foreman, Magidor et Shelah mentionné dans la section 4, au résultat suivant :

THÉORÈME 3.5 (Woodin). — *Supposons qu'il existe une classe propre de cardinaux de Woodin*[29]*. Alors les propriétés de* $(H_1, \in)$ *sont invariantes par forcing.*

Ne reste alors qu'à établir la compatibilité de l'axiome **DP** avec l'existence de grands cardinaux — c'est-à-dire, en un sens, à prouver l'axiome **DP**. Woodin en a donné vers 1983 une démonstration à partir d'un axiome extrêmement fort, mais la mesure exacte de **DP** dans la hiérarchie des axiomes de grands cardinaux est venue en 1985, avec le remarquable résultat suivant, *cf.* [2] :

THÉORÈME 3.6 (Martin–Steel). — *Supposons qu'il existe une infinité de cardinaux de Woodin. Alors* **DP** *est vrai*[30].

Ainsi, le système formé par **ZFC**+**DP** fournit une bonne description de $(H_1, \in)$ [31], et le système légèrement plus fort formé par **ZFC** plus l'existence d'une classe propre de cardinaux de Woodin (une sorte de version délocalisée de **DP**) constitue une solution efficace au problème 2.5 pour H_1 : il permet de recouvrer pour H_1, c'est-à-dire pour le niveau de l'infini dénombrable, le même type de complétude empirique que **ZFC** garantit pour H_0, c'est-à-dire pour le niveau des ensembles finis et de l'arithmétique.

---

est en bijection avec lui, mais lui est isomorphe, ce qu'exprime ici le plongement élémentaire. La force de l'hypothèse est proportionnelle au degré de ressemblance requis entre le modèle de départ V et le modèle d'arrivée M, ici l'hypothèse $V_{j(f)(\alpha)} \subseteq M$. Si cette dernière est affaiblie en $V_\kappa \subseteq M$, on obtient essentiellement la définition d'un cardinal *mesurable*, une notion plus faible que celle de cardinal de Woodin en termes de consistance.

(29) c'est-à-dire : Pour chaque cardinal κ, il existe un cardinal de Woodin au-dessus de κ.

(30) Il est apparu ensuite que cette implication est, au niveau de la force logique, quasiment une équivalence : pour tout entier k, le système **ZFC** + **DP** prouve la consistance (c'est-à-dire la non-contradiction) du système **ZFC**+ « il existe k cardinaux de Woodin » ; encore d'autres liens sont apparus, par exemple que l'axiome de forcing **MM** (voir section 4) entraîne **DP** ; tout ceci illustre et explique l'ubiquité de **DP** et des cardinaux de Woodin dans la théorie récente.

(31) Un argument supplémentaire en faveur de **DP** est que non seulement cet axiome apporte des réponses sur H_1, mais qu'en outre il apporte *les* réponses heuristiquement satisfaisantes : ainsi, l'uniformisation permet d'éviter tout recours à l'axiome du choix dans l'étude des ensembles projectifs ; de même, la mesurabilité interdit l'existence de décompositions paradoxales de la sphère en pièces projectives. À l'opposé, l'axiomatisation par **ZFC** + **V=L** (la « structure fine » de Jensen) exprimant que l'univers coïncide avec le modèle minimal L de Gödel, fournit aussi une description assez complète (au demeurant incompatible avec l'existence de grands cardinaux et ne résistant pas au forcing) mais dont les réponses sont moins satisfaisantes que celles fournies par **DP** : par exemple, on a vu que **ZFC** + **V=L** prouve l'existence d'ensembles projectifs non mesurables.
Un autre point distinguant **DP** de **V=L** est que tout modèle de **ZFC** inclut L comme sous-modèle, et, donc, une théorie de L est toujours présente comme sous-théorie. Adopter **DP** ne rejette donc pas **V=L**, présente comme sous-théorie, alors qu'adopter **V=L** restreindrait l'étude, comme restreindre l'étude des groupes à celle des groupes commutatifs. C'est cet argument qui conduit à requérir que tout axiome pour V, donc pour les vrais ensembles, soit compatible avec les grands cardinaux.

4. LE TROISIÈME NIVEAU : LA CARDINALITÉ $\aleph_1$

Abordée surtout depuis les années 1980, l'étape suivante est celle de la structure $(H_2, \in)$, c'est-à-dire celle de la cardinalité $\aleph_1$. Au même sens que ci-dessus, H_2 est le niveau de $\mathfrak{P}(\aleph_1)$ [32], ou encore celui de l'ensemble des suites de réels de longueur $\aleph_1$. Un rôle important est joué par les sous-ensembles *stationnaires* de $\aleph_1$, qui proviennent de l'existence de points-limites dans la topologie de l'ordre, et n'ont pas de contre-partie dans $\aleph_0$.

DÉFINITION 4.1. — *Un sous-ensemble de $\aleph_1$ est dit* stationnaire *s'il rencontre tout sous-ensemble non borné de $\aleph_1$ fermé pour la topologie de l'ordre ; on note $\mathcal{I}_{NS}$ l'ensemble des parties non stationnaires de $\aleph_1$.*

Le niveau de H_2 est le premier où l'axiome du choix commence à se manifester de façon essentielle, et, notons-le tout de suite, celui où le problème du continu se pose[33] :

LEMME 4.2. — *Il existe un énoncé φ_{HC} tel que « $(H_2, \in)$ satisfait φ_{HC} » équivaille à* **HC**.

Le succès rencontré pour H_1 conduit à chercher un axiome[34] jouant pour H_2 le rôle joué pour H_1 par **DP** et par l'existence d'une classe propre de cardinaux de Woodin, c'est-à-dire résolvant le problème 2.5. La mauvaise nouvelle, annoncée par Levy et Solovay dès 1967, est qu'aucun axiome de grand cardinal ne peut convenir :

PROPOSITION 4.3. — *Aucun axiome de grand cardinal ne peut rendre les propriétés de $(H_2, \in)$ invariantes par forcing.*

Tout vient de la définissabilité du forcing à partir d'un ensemble du modèle de base. D'après le lemme 4.2, il suffit de montrer qu'un axiome de grand cardinal **A** ne peut pas imposer la valeur de **HC**. Or, pour briser **HC**, il suffit d'ajouter $\aleph_2$ sous-ensembles à $\mathbb{N}$, ce qui peut se faire avec un ensemble de forcing de cardinal $\aleph_2$; par construction, un tel *petit* forcing préserve les grands cardinaux. Donc, partant d'un modèle satisfaisant $\mathbf{A} + \mathbf{HC}$, on peut toujours en construire une extension générique satisfaisant $\mathbf{A} + \neg\mathbf{HC}$, et **A** ne peut rendre **HC** invariante par forcing.

---

(32) c'est-à-dire celui des ensembles d'ordinaux dénombrables, la construction des ordinaux étant faite de sorte que chaque ordinal coïncide avec l'ensemble des ordinaux plus petits : par exemple, $\aleph_1$ est l'ensemble des ordinaux dénombrables.

(33) Ceci n'est pas évident, puisqu'*a priori* **HC** met en jeu tout l'ensemble $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$, lequel n'appartient à H_2 que si **HC** est vraie ; le lemme indique qu'on peut toujours *coder* l'hypothèse du continu dans $(H_2, \in)$.

(34) Une fois pour toutes, nous parlons ici d'un axiome, mais il pourrait tout autant s'agir d'une famille finie d'axiomes, ou d'une famille infinie pourvu qu'elle soit suffisamment explicite, typiquement récursive.

Une éventuelle axiomatisation de $(H_2, \in)$ neutralisant l'action du forcing n'est donc pas à chercher parmi les axiomes de grands cardinaux. Depuis les années 1980, il est apparu que des candidats naturels se trouvent dans la famille des *axiomes de forcing*[35]. Ces axiomes sont des formes fortes du théorème de catégorie de Baire qui affirme que, si X est un espace localement compact, alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses de X est dense. La possibilité d'étendre le résultat aux intersections de cardinal $\aleph_1$ dépend de la cardinalité de X[36], et elle exige que certaines contraintes sur X, et plus précisément sur l'algèbre des ouverts réguliers de X, soient satisfaites. Ces contraintes sont motivées par la théorie du forcing, d'où le nom d'« axiomes de forcing ».

Le premier axiome de forcing a été introduit en 1970 pour résoudre le fameux problème de Souslin sur la caractérisation de la droite réelle. C'est l'*axiome de Martin* **MA** : « Si X est un espace localement compact où toute famille d'ouverts deux à deux disjoints est au plus dénombrable, alors toute intersection de $\aleph_1$ ouverts denses de X est dense ». Cet axiome exprime une forme faible d'invariance des propriétés entre V et les extensions génériques associées à un ensemble de forcing suffisamment petit.

La théorie du *forcing itéré* a conduit à l'introduction de toute une hiérarchie d'extensions de **MA**, *cf.* [14] (et son millier de pages !). Dans [5], Foreman, Magidor et Shelah ont identifié la classe maximale d'espaces localement compacts pour laquelle une forme forte du théorème de Baire n'est pas *a priori* contradictoire, à savoir les espaces X pour lesquels l'algèbre de Boole des ouverts réguliers de X *préserve la stationnarité*[37]. La forme la plus forte possible de l'axiome de Martin est donc :

DÉFINITION 4.4 (Foreman–Magidor–Shelah). — *L'*axiome de Martin maximum **MM** *est l'assertion : « Si X est un espace localement compact dont l'algèbre des ouverts réguliers préserve la stationnarité, alors toute intersection de $\aleph_1$ ouverts denses de X est dense ».*

Comme avec **DP**, la question se pose de la compatibilité de **MM** avec l'existence de grands cardinaux. La réponse est positive [5], et repose sur le forcing itéré de Shelah [14] et sur un argument de Baumgartner reliant celui-ci aux cardinaux supercompacts[38] :

(35) D'autres candidats pourraient être les axiomes de *grand cardinal générique* de [4].

(36) Si **HC** est vraie, alors l'intersection des $\aleph_1$ ouverts denses $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ pour a dans $\mathbb{R}$ est vide.

(37) On dit qu'un ensemble ordonné $\mathbb{P}$ *préserve la stationnarité* si tout sous-ensemble stationnaire de $\aleph_1$ dans V reste stationnaire dans l'extension générique associée à $\mathbb{P}$.

(38) Un cardinal κ est dit *supercompact* si, pour tout cardinal $\lambda \geqslant \kappa$, il existe une classe M et un plongement élémentaire $j : V \to M$ vérifiant $j(\kappa) \geqslant \lambda$ et tels que toute suite d'éléments de M de longueur λ (dans V) soit dans M. L'axiome « il existe un cardinal supercompact » est plus fort que l'axiome « il existe une infinité de cardinaux de Woodin », et donc que **DP**.

THÉORÈME 4.5 (Foreman, Magidor, Shelah). — *Supposons qu'il existe un cardinal supercompact. Alors l'axiome* **MM** *est satisfait dans une extension générique de V.*

Pour l'étude de H_2, il est naturel de considérer une variante faible de l'axiome **MM** appelée **MMB** (*Martin maximum borné*)[39], introduite par Goldstern et Shelah [8]. Appelons *bornée* toute formule ne contenant que des quantifications $\forall y{\in}z$ et $\exists y{\in}z$. L'intérêt de **MMB** pour H_2 apparaît dans une reformulation due à Bagaria [1], à savoir que **MMB** est équivalent à l'assertion « Tout énoncé $\exists x\psi(x,a)$ avec ψ bornée et a dans H_2 satisfait dans une extension générique de V préservant la stationnarité est déjà satisfait dans H_2 » [40]. Ainsi l'axiome **MMB** prouve toute propriété de H_2 pouvant être exprimée par un énoncé du type $\forall\ldots\exists\ldots\psi$ avec ψ bornée[41] et ne pouvant être mise en défaut par un forcing préservant la stationnarité. Ces propriétés sont donc invariantes par forcing préservant la stationnarité, et la question suivante est donc naturelle :

(Une variante du) système **ZFC**+**MMB** *est-elle solution au problème 2.5 pour H_2 ?* La question reste ouverte, car il manque une complétude non restreinte aux énoncés de type $\forall\exists$ et une invariance par forcing non conditionnelle.

C'est de ce point que partent les travaux de Woodin. L'idée est d'obtenir d'abord l'invariance par forcing, en partant d'une version du théorème 3.5 affirmant que, s'il existe une classe propre de cardinaux de Woodin, alors les propriétés de la structure $(L(\mathbb{R}),\in)$ sont invariantes par forcing. À partir de là, Woodin cherche essentiellement à réaliser l'axiome **MMB** dans une extension générique convenable du modèle $L(\mathbb{R})$. La construction met en jeu un certain forcing $\mathbb{P}_{max}$ d'un type nouveau et est très sophistiquée, les éléments de l'ensemble $\mathbb{P}_{max}$ étant eux-mêmes des modèles de **ZFC**. L'argument aboutit à l'extension de l'invariance par forcing des propriétés de $L(\mathbb{R})$ à celles du modèle construit. Ce dernier est $L(\mathfrak{P}(\aleph_1))$, et il inclut donc H_2 par construction. Il s'ensuit que les propriétés de H_2 sont capturées. Le résultat final met en jeu un nouvel axiome, noté ici **MMW** pour « Martin maximum de Woodin » [42], qui est la variante de (la reformulation par Bagaria de) l'axiome **MMB** dans laquelle les sous-ensembles stationnaires de $\aleph_1$ et un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ appartenant à $L(\mathbb{R})$ peuvent être pris comme paramètres :

---

[39] L'énoncé est le même que celui de **MM**, à ceci près qu'on se restreint aux intersections d'ouverts denses qui sont unions d'au plus $\aleph_1$ ouverts réguliers.

[40] Ce résultat est à rapprocher du théorème de Levy–Shoenfield (dont résulte la proposition 2.4) affirmant : « Tout énoncé $\exists x\psi(x,a)$ avec ψ bornée et a dans H_2 satisfait dans V est déjà satisfait dans H_2 ».

[41] Dans la suite, un tel énoncé (à une seule alternance de quantificateurs) sera dit *de type* $\forall\exists$.

[42] La forme originale, notée $(*)$ par Woodin, est « **AD** est satisfait dans $L(\mathbb{R})$ et $L(\mathfrak{P}(\aleph_1))$ est extension $\mathbb{P}_{max}$-générique de $L(\mathbb{R})$ » ; une reformulation plus aisément intelligible sera donnée dans la section 5.

THÉORÈME 4.6 (Woodin). — *Supposons qu'il existe une classe propre de cardinaux de Woodin. Alors* $\mathsf{ZFC} + \mathsf{MMW}$ *fournit une axiomatisation empiriquement complète*[43] *de la structure* $(H_2, \in)$ *et rend les propriétés de celle-ci invariantes par forcing.*

Le point manquant pour pouvoir affirmer que $\mathsf{ZFC} + \mathsf{MMW}$ est une solution, de surcroît efficace, pour H_2 est la compatibilité de l'axiome **MMW** avec l'existence de grands cardinaux, c'est-à-dire l'équivalent du théorème de Martin–Steel. Le théorème 4.5 garantit cette compatibilité dans le cas de **MM**, donc de **MMB**, mais la question reste ouverte pour **MMW**. Pour autant, on verra dans la suite que le théorème 4.6 semble proche d'une solution : s'il n'existe pas à ce jour de démonstration d'une compatibilité complète, à savoir qu'aucun axiome de grand cardinal ne peut réfuter **MMW**, du moins Woodin montre qu'aucun axiome de grand cardinal possédant un modèle canonique ne peut réfuter **MMW**. Nous y reviendrons dans la section 6.

5. LA Ω-LOGIQUE

Au cours des dernières années, Woodin a proposé un nouveau cadre conceptuel donnant des résultats précédents une formulation plus intelligible, et, surtout, ouvrant de nombreuses perspectives. L'idée est d'utiliser une logique spécifique intégrant directement l'invariance par forcing et donc, en quelque sorte, corrigeant le flou que celui-ci introduit dans notre perception des ensembles.

Jusqu'à présent, nous avons cherché à caractériser les énoncés satisfaits dans une structure $(H, \in)$ comme ceux qui peuvent être prouvés à partir d'axiomes convenables, au moyen de la notion usuelle de preuve (logique du premier ordre). En utilisant une relation de prouvabilité plus subtile[44], on peut espérer décrire de façon plus simple des objets qui ne le sont pas, et mettre à jour des phénomènes qui, sinon, resteraient cachés.

Comme toute logique formelle, la Ω-logique de Woodin peut être décrite à partir d'une notion (syntaxique) de prouvabilité (existence d'une preuve, c'est-à-dire d'un certificat garantissant une certaine propriété) et d'une notion sémantique de validité (satisfaction dans des structures de référence). Dans le cas présent, le rôle de preuve est joué non par des suites finies d'énoncés comme en logique usuelle, mais par des ensembles de réels d'un type particulier, à savoir des ensembles *universellement Baire* [3].

[43] au sens où elle prouve tout énoncé qui ne peut être réfuté par passage à une extension générique
[44] Attention ! Il ne s'agit d'utiliser une logique alternative qu'au niveau des *énoncés*, ce qui ne change rien aux *démonstrations* de ces énoncés : les théorèmes sont de *vrais* théorèmes...

DÉFINITION 5.1 (Feng–Magidor–Woodin). — *Un sous-ensemble B de $\mathbb{R}^p$ est dit* universellement Baire *si, pour toute fonction continue $f : K \to \mathbb{R}^p$ avec K compact, $f^{-1}(B)$ a la propriété de Baire dans K*[45].

Les boréliens sont universellement Baire ; s'il existe une classe propre de cardinaux de Woodin, il en est de même de tous les ensembles projectifs.

L'idée de Woodin est d'utiliser les ensembles universellement Baire comme témoins pour une nouvelle notion de prouvabilité. Si B est un sous-ensemble universellement Baire de $\mathbb{R}$, il peut s'écrire comme projection des branches infinies d'un arbre $\widetilde{B}$ sur $\lambda_B \times \aleph_0$, où λ_B est un ordinal convenable, et $\widetilde{B}$ joue le rôle d'un *code* pour B. Lorsqu'on passe de V à une extension générique $V[G]$, l'arbre $\widetilde{B}$ est préservé, mais l'ensemble de ses branches dans $V[G]$, qu'on notera B_G, peut inclure B strictement.

DÉFINITION 5.2. — *Soit $(M, \in)$ un modèle transitif*[46] *de* **ZFC**, *et B un sous-ensemble universellement Baire de $\mathbb{R}$. On dit que $(M, \in)$ est* B-clos *si, pour toute extension générique $V[G]$ de V, l'ensemble $B_G \cap M[G]$ appartient à $M[G]$.*

L'intuition doit être celle d'une propriété de clôture, à savoir que M contient les témoins nécessaires à établir le caractère universellement Baire de B. Si B est un borélien, tout modèle transitif dénombrable de **ZFC** est B-clos. Par contre, plus l'ensemble B est compliqué, et plus la condition d'être B-clos est exigeante.

DÉFINITION 5.3. — *Supposons qu'il existe une classe propre de cardinaux de Woodin*[47]. *On dit qu'un sous-ensemble universellement Baire B de $\mathbb{R}$ est une* Ω-preuve *pour un énoncé φ si φ est satisfait dans tout modèle transitif dénombrable de* **ZFC** *qui est B-clos. On dit qu'un énoncé φ est* Ω-prouvable *s'il admet au moins une Ω-preuve.*

Une Ω-preuve n'est pas une preuve au sens usuel, mais, comme une preuve, elle va être utilisée comme certifiant que l'énoncé considéré a une certaine propriété. Noter qu'une Ω-preuve ne met en jeu que des objets petits (mais néanmoins infinis, à la différence des preuves de la logique usuelle) : ensembles de réels, modèles dénombrables de **ZFC**.

Tout énoncé prouvable est Ω-prouvable : si φ est prouvable (en logique usuelle) à partir de **ZFC**, alors φ est satisfait dans tout modèle de **ZFC**, donc en particulier dans tout modèle transitif dénombrable, et φ admet donc comme Ω-preuve n'importe quel ensemble universellement Baire, par exemple l'ensemble vide. Mais il existe des énoncés Ω-prouvables dont les seules Ω-preuves sont plus compliquées que les boréliens

[45] c'est-à-dire qu'il existe un ouvert U tel que la différence symétrique entre $f^{-1}(B)$ et U soit maigre

[46] Ceci signifie que M est inclus dans V, a la même appartenance, et que $x \in y \in M$ entraîne $x \in M$.

[47] Ce contexte de grands cardinaux n'est pas indispensable, mais il permet une formulation plus simple.

et qui ne sont pas prouvables au sens usuel : la Ω-logique étend strictement la logique usuelle.

Les énoncés Ω-prouvables sont-ils vrais ? D'après le théorème de complétude de Gödel, si un énoncé φ est Ω-prouvable, mais non prouvable, il existe au moins un modèle (M, E) de **ZFC** dans lequel φ n'est pas satisfait. Néanmoins, on va voir que φ doit être satisfait dans tous les modèles suffisamment proches du modèle V des vrais ensembles — donc, en un sens, dans tous les modèles qui nous intéressent.

Pour α ordinal, on note V_α l'ensemble de tous les ensembles purs pouvant être obtenus à partir de $\varnothing$ en utilisant au plus α fois le passage à l'ensemble des parties. Les structures $(V_\alpha, \in)$ peuvent être vues comme des approximations de $(V, \in)$; en général, $(V_\alpha, \in)$ n'est pas un modèle de **ZFC**, mais c'est le cas dès que α est un cardinal *inaccessible*(48).

Proposition 5.4. — *Supposons qu'il existe une classe propre de cardinaux de Woodin. Alors tout énoncé Ω-prouvable est satisfait dans tout modèle de* **ZFC** *du type « $(V_\alpha, \in)$ calculé dans une extension générique (quelconque) de V ».*

Autrement dit, un énoncé Ω-prouvable ne peut être réfuté par forcing à partir du modèle V des vrais ensembles. Ceci nous mène au choix suivant pour la sémantique cohérente de la Ω-logique.

Définition 5.5. — *On dit qu'un énoncé φ est* Ω-valide *si φ est satisfait dans tout modèle de* **ZFC** *du type « $(V_\alpha, \in)$ calculé dans une extension générique (quelconque) de V ».*

De la sorte, nous obtenons une logique cohérente : ce qui est prouvable est vrai. Se pose alors naturellement la question de l'implication réciproque, c'est-à-dire la question de la complétude de la Ω-logique : tous les énoncés valides sont-ils prouvables ?

Conjecture 5.6 (Ω-conjecture, Woodin, 1999). — *Tout énoncé Ω-valide est Ω-prouvable* (49).

Essentiellement, la Ω-conjecture affirme que tous les énoncés non réfutables par passage à une extension générique ont une « preuve » dans la famille des ensembles universellement Baire. Cette conjecture admet des formes équivalentes sur lesquelles nous reviendrons.

(48) Un cardinal κ est dit *inaccessible* si κ est non dénombrable, $\lambda < \kappa$ implique $2^\lambda < \kappa$, et si la conjonction de $\lambda < \kappa$ et de $(\forall\, \alpha < \lambda)(\lambda_\alpha < \kappa)$ implique $\sup\{\lambda_\alpha ; \alpha < \lambda\} < \kappa$ — autrement dit si κ ne peut pas être atteint à partir d'objets plus petits par passage à l'ensemble des parties ou à la limite. Les cardinaux inaccessibles sont les plus petits des grands cardinaux.

(49) Cette formulation n'est adéquate que pour les énoncés de type $\forall\,\exists$; la formulation dans le cas général est légèrement plus compliquée.

Pour le moment, nous allons voir que le cadre fourni par la Ω-logique et la Ω-conjecture permet de reformuler simplement le problème 2.5 et les résultats de la section 4.

DÉFINITION 5.7. — *Supposons H définissable. On dit que* A *est un* axiome Ω-complet *pour la structure* $(H, \in)$ *si, pour tout* φ*, un et un seul des deux énoncés* $\mathsf{A} \Rightarrow$ « $(H, \in)$ *satisfait* φ », $\mathsf{A} \Rightarrow$ « $(H, \in)$ *satisfait* $\neg\varphi$ » *est* Ω*-prouvable.*

Ainsi, un axiome Ω-complet pour $(H, \in)$ « Ω-décide » chaque propriété de H. Ce qui rend à la fois intéressante et naturelle la recherche d'un tel axiome est le point suivant. Si A est un axiome Ω-complet pour $(H, \in)$, alors il peut certes exister des énoncés φ tels que $\mathsf{A} \Rightarrow$ « $(H, \in)$ satisfait φ » soit Ω-prouvable mais non prouvable, mais, dans ce cas, on est du moins assuré par la proposition 5.4 que φ ne peut pas être réfuté par passage à une extension générique à partir d'un modèle de $\mathsf{ZFC} + \mathsf{A}$. On n'a donc pas nécessairement une description complète de H, mais on retrouve le même type de complétude libérée du forcing qu'avec ZFC et l'arithmétique, et comme réclamé dans le problème 2.5.

PROPOSITION 5.8. — *Si la Ω-conjecture est vraie, alors* $\mathsf{ZFC} + \mathsf{A}$ *est une solution au problème 2.5 pour* $(H, \in)$ *si et seulement si* A *est un axiome* Ω*-complet pour* $(H, \in)$.

Démonstration (esquisse). — Supposons que A soit un axiome Ω-complet pour $(H, \in)$. On a vu ci-dessus que, par construction, les propriétés de H sont invariantes par forcing. Reste la question de la compatibilité de A avec l'existence de grands cardinaux. Dans le contexte de la Ω-logique, ceci revient à montrer que $\neg\mathsf{A}$ n'est pas Ω-valide. Or l'hypothèse que A est Ω-complet garantit que $\neg\mathsf{A}$ n'est pas Ω-prouvable. Si la Ω-conjecture est vraie, non-Ω-prouvabilité entraîne non-Ω-validité.

Inversement, supposons que $\mathsf{ZFC} + \mathsf{A}$ rend les propriétés de $(H, \in)$ invariantes par forcing. Alors, pour tout énoncé φ, un et un seul des deux énoncés $\mathsf{A} \Rightarrow$ « $(H, \in)$ satisfait φ », ou $\mathsf{A} \Rightarrow$ « $(H, \in)$ satisfait $\neg\varphi$ » est Ω-valide. Si la Ω-conjecture est vraie, cela implique que l'un au moins de ces énoncés est Ω-prouvable. De plus, la compatibilité de A avec l'existence de grands cardinaux entraîne que $\neg\mathsf{A}$ n'est pas Ω-valide, donc *a fortiori* pas Ω-prouvable, et A est par conséquent un axiome Ω-complet pour $(H, \in)$. $\square$

Revenons alors à la structure $(H_2, \in)$. D'abord, le contexte de la Ω-logique permet de donner de l'axiome MMW une formulation plus facilement intelligible.

PROPOSITION 5.9. — *Supposons qu'il existe une classe propre de cardinaux de Woodin. Alors* MMW *équivaut à : « Pour tout A inclus dans $\mathbb{R}$ appartenant à $L(\mathbb{R})$, tout énoncé de type $\forall\exists$ portant sur $(H_2, \mathcal{I}_{NS}, A, \in)$ dont la négation n'est pas Ω-prouvable est satisfait ».*

Ceci montre que **MMW** est un principe de maximalité pour $(H_2, \mathcal{I}_{NS}, \in)$ analogue à la propriété de clôture algébrique[50] : un corps K est algébriquement clos si tout système non contradictoire d'équations algébriques à paramètres dans K y a une solution, c'est-à-dire précisément si toute propriété $\forall\,\exists$ de la structure $(K, +, \times)$ compatible avec les axiomes des corps y est satisfaite[51]. Ainsi, dire que l'axiome **MMW** est vrai est analogue à affirmer que H_2 est, en un certain sens, algébriquement clos.

À partir du théorème 4.6, Woodin montre le résultat suivant, qui en apparaît comme le contenu véritable :

THÉORÈME 5.10 (Woodin). — *Supposons qu'il existe une classe propre de cardinaux de Woodin. Alors* **MMW** *est un axiome Ω-complet pour $(H_2, \in)$.*

En appliquant la proposition 5.9, et en intégrant la forme heuristique de complétude garantie par le théorème 4.6, on déduit :

COROLLAIRE 5.11. — *Si la Ω-conjecture est vraie, alors* **ZFC** + **MMW** *est une solution efficace au problème 2.5 pour $(H_2, \in)$.*

6. Ω-LOGIQUE ET GRANDS CARDINAUX

La Ω-logique est liée aux grands cardinaux : en un sens, c'est la logique des grands cardinaux — ou, tout au moins, des grands cardinaux admettant des modèles canoniques d'un certain type. La description de ce lien va permettre de donner un sens précis à l'affirmation suivant laquelle les résultats de Woodin parviennent près d'une démonstration de la Ω-conjecture. D'autre part, on va voir que la Ω-logique fournit une explication conceptuelle élégante à la constatation empirique que les axiomes de grand cardinaux s'organisent en une hiérarchie.

Il est facile de vérifier que tous les axiomes de grands cardinaux considérés à ce jour entrent dans le cadre abstrait suivant[52] :

DÉFINITION 6.1. — *On appelle* axiome de grand cardinal *tout énoncé $\exists\,\kappa\psi(\kappa)$ avec ψ de type $\exists\forall$ tel que, si $\psi(\kappa)$ est satisfait dans V, alors κ est un cardinal inaccessible, et, de plus, $\psi(\kappa)$ reste satisfait dans toute extension générique de V associée à un ensemble de forcing de cardinal moindre que κ. On dit alors que $\exists\,\kappa\psi(\kappa)$ est* accompli

(50) L'analogie est encore plus pertinente lorsqu'on restreint l'hypothèse à « A projectif » ; on obtient alors un axiome plus faible que **MMW**, mais qui a les mêmes propriétés vis-à-vis de l'axiomatisation de H_2. Une formulation semblable serait possible pour l'axiome **MMB** dont **MMW** est une variante.
(51) Dans ce cas, un énoncé de type $\forall\,\exists$ ne met en jeu que des combinaisons booléennes d'équations puisqu'il n'y a pas de relation dans la structure considérée.
(52) On ne prétend pas que tout énoncé du type suivant doive correspondre à une idée de grand cardinal.

si, pour tout ensemble X, il existe un modèle transitif $(M, \in)$ de **ZFC** *et un ordinal κ de M tels que X appartienne à $V_\kappa \cap M$ et que $(M, \in)$ satisfasse $\psi(\kappa)$.*

L'accomplissement de $\exists\,\kappa\psi(\kappa)$ signifie qu'il existe beaucoup de modèles de **ZFC** contenant au moins un cardinal ayant la propriété ψ. S'il existe une classe propre de cardinaux inaccessibles κ vérifiant $\psi(\kappa)$, alors $\exists\,\kappa\psi(\kappa)$ est accompli : avec les notations de la définition, il suffit de prendre $M = V_\lambda$ avec λ inaccessible assez grand.

Le résultat suivant montre que les énoncés Ω-prouvables sont ceux qui sont prouvables (en logique usuelle) à partir d'un axiome de grand cardinal accessible à la Ω-logique :

Proposition 6.2. — *Supposons qu'il existe une classe propre de cardinaux de Woodin. Alors un énoncé φ de type $\forall\exists$ est Ω-prouvable si, et seulement si, il existe un axiome de grand cardinal* **A** *tel que «* **A** *est accompli » soit Ω-prouvable et que φ soit prouvable (en logique usuelle) à partir de* **ZFC**+ *«* **A** *est accompli ».*

Corollaire 6.3. — *La Ω-conjecture équivaut à la condition : pour chaque axiome de grand cardinal* **A** *accompli dans V, l'assertion «* **A** *est accompli » est Ω-prouvable.*

On peut maintenant préciser dans quelle mesure la Ω-conjecture est approchée dans les travaux de Woodin. D'après le corollaire 6.3, le problème est de déterminer les axiomes de grand cardinalœ**A** tels que l'énoncé « **A** est accompli » soit Ω-prouvable. Or, il existe un programme de modèles canoniques qui, *grosso modo*, consiste à construire pour chaque axiome de grand cardinal **A** un modèle minimal où **A** soit satisfait, suivant le schéma du modèle de Gödel L [53]. Ce programme, qui repose sur une méthode dite de *comparaison*, atteint à l'heure actuelle le niveau de l'axiome « Il existe une infinité de cardinaux de Woodin » [12], mais pas (encore) celui de l'axiome « Il existe un cardinal supercompact ». Le résultat suivant repose sur une analyse fine d'une notion générale de modèle canonique :

Théorème 6.4 (Woodin). — *Pour tout axiome de grand cardinal* **A** *pour lequel un modèle canonique fondé sur la méthode de comparaison peut exister, l'énoncé «* **A** *est accompli » est Ω-prouvable* [54].

Comme le théorème 6.4 est essentiellement une équivalence, l'enjeu de la Ω-conjecture est la possibilité de pousser la méthode de comparaison à tout grand cardinal — on voit donc que cette conjecture pourrait être réfutée en montrant qu'un certain *très* grand cardinal restera définitivement inaccessible à toute notion de modèle canonique.

[53] Celui-ci correspond au cas de **ZFC**, c'est-à-dire au cas où aucun axiome de grand cardinal n'est ajouté.

[54] Il en résulte que la Ω-conjecture est vraie dans tout modèle canonique...

Passons au second point de cette section, à savoir l'explication conceptuelle apportée par la Ω-logique à la hiérarchie des grands cardinaux. Comme on l'a dit, on constate que tous les axiomes de grands cardinaux considérés à ce jour s'organisent en une hiérarchie linéaire : étant donnés deux tels axiomes, il apparaît toujours que l'un implique l'autre, ou, au moins, que la *consistance* de l'un (c'est-à-dire sa non-contradiction) implique la consistance de l'autre. On obtient ainsi une hiérarchie bien ordonnée liée à la consistance relative et calibrant la force logique des axiomes : par exemple, la consistance (de l'existence) d'un cardinal supercompact entraîne celle d'une infinité de cardinaux de Woodin, qui elle-même entraîne celle d'un cardinal de Woodin ; cette dernière entraîne la consistance (de l'existence) d'un cardinal mesurable, qui elle-même implique celle d'un cardinal inaccessible (et même de beaucoup).

Le point de départ est l'existence d'une échelle de complexité sur les ensembles universellement Baire, déduite de la notion de *réductibilité de Wadge*.

DÉFINITION 6.5. — *Pour $B, B' \subseteq \mathbb{K}$*[55]*, on dit que B est* réductible *(resp.* fortement réductible*) à B' si on a $B = f^{-1}(B')$ avec $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ continue (resp. 1/2-lipschitzienne).*

PROPOSITION 6.6. — *Supposons qu'il existe une classe propre de cardinaux de Woodin. Alors, quels que soient les sous-ensembles universellement Baire B, B' de $\mathbb{K}$, ou bien B est réductible à B', ou bien B' est fortement réductible à $\mathbb{K} \setminus B$.*

Comme aucun sous-ensemble de $\mathbb{K}$ ne peut être fortement réductible à son complémentaire, on déduit un préordre sur les ensembles universellement Baire en déclarant $B \prec B'$ vrai si à la fois B et $\mathbb{K} \setminus B$ sont fortement réductibles à B'. On montre alors que $\prec$ n'a pas de chaîne infinie descendante, ce qui permet d'attacher à chaque ensemble universellement Baire B un ordinal qu'on appellera sa *complexité*.

THÉORÈME 6.7 (Woodin). — *Pour $\mathbf{A}$ axiome de grand cardinal, notons $\rho(\mathbf{A})$ la complexité minimale d'une Ω-preuve de l'énoncé « $\mathbf{A}$ est accompli ». Alors, pour les niveaux où elles sont définies*[56]*, la hiérarchie de consistance des axiomes de grand cardinaux coïncide avec la hiérarchie définie par ρ.*

Ce résultat esthétique et profond est un argument fort en faveur de la Ω-logique. Si la Ω-conjecture est vraie, la hiérarchie définie par ρ recouvre tous les axiomes de grands cardinaux ; si elle est fausse, cette hiérarchie n'est que le début d'une hiérarchie plus étendue dont nous ne savons encore rien.

[55] Pour simplifier la formulation, on quitte $\mathbb{R}$ pour retourner à l'espace de Cantor $\mathbb{K} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
[56] c'est-à-dire pour les axiomes de grands cardinaux pour lesquels existent des modèles canoniques

7. LES RÉSULTATS SUR L'HYPOTHÈSE DU CONTINU

Un des aspects les plus spectaculaires des développements récents est la perspective nouvelle qu'ils ouvrent pour le problème du continu.

Avant de présenter cette avancée — et sans prétendre retracer l'historique des résultats sur le problème du continu depuis vingt ans — on mentionnera un résultat de Woodin (1984) soulignant le rôle critique de l'hypothèse du continu :

Proposition 7.1. — *Supposons qu'il existe une classe propre de cardinaux de Woodin mesurables. Alors deux extensions génériques de V satisfaisant* **HC** *satisfont nécessairement les mêmes énoncés existentiels*[57] *à paramètre $\mathbb{R}$.*

En d'autres termes, dès que deux extensions génériques sont d'accord sur **HC**, elles sont aussi d'accord sur toutes les propriétés de même complexité syntaxique que **HC**.

Par ailleurs, il a été noté depuis longtemps qu'il existe une dissymétrie entre **HC** et ¬**HC** et qu'au moins certaines variantes de ¬**HC** peuvent être prouvées alors que ce n'est pas le cas pour les variantes correspondantes de **HC**. En outre, plusieurs résultats remarquables (et généralement de démonstration difficile) ont établi que, dans des contextes divers où elle n'est *a priori* pas clairement déterminée par les hypothèses, la valeur du continu, c'est-à-dire de $2^{\aleph_0}$, se trouve être $\aleph_2$. Par exemple, Foreman, Magidor et Shelah ont montré dans [5] que **MM** entraîne $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, et Woodin a montré dans [16] qu'il en est de même de l'hypothèse que l'idéal $\mathcal{I}_{NS}$ a une certaine propriété combinatoire dite de $\aleph_2$-saturation. Dernièrement, Todorcevic a montré dans [15], par un argument combinatoire élégant et direct, que **MMB** entraîne une version effective forte de l'égalité $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, à savoir la possibilité de définir un bon ordre de longueur $\aleph_2$ sur $\mathbb{R}$ en utilisant comme seul paramètre une unique suite de réels de longueur $\aleph_1$ (donc un élément de H_2). Collectivement, tous ces résultats peuvent être vus comme une indication heuristique en défaveur de **HC**.

Venons-en au résultat récent de Woodin. Par le lemme 4.2, toute description suffisamment complète de H_2 doit inclure une solution de l'hypothèse du continu. Par exemple, il n'est pas très difficile de voir que, tout comme **MM** ou **MMB**, l'axiome **MMW** entraîne que **HC** est fausse et qu'en l'occurrence on a $2^{\aleph_0} = \aleph_2$. Mais ce résultat ne dit rien sur la situation de **HC** vis-à-vis d'autres axiomatisations possibles de $(H_2, \in)$. Établi en 2000, le dernier des théorèmes sur lequel on souhaite insister est le suivant :

Théorème 7.2 (Woodin). — *Supposons qu'il existe une classe propre de cardinaux de Woodin. Alors* tout *axiome Ω-complet pour $(H_2, \in)$ dont la négation n'est pas Ω-valide implique que l'hypothèse du continu soit fausse.*

[57] c'est-à-dire dont les seules quantifications non bornées sont de type $\exists$

La démonstration du théorème 7.2 — qui est un tour de force technique — repose sur une analyse des ensembles Ω-*récursifs*, qui jouent pour la Ω-logique le rôle des ensembles *récursifs* de la logique classique. Un sous-ensemble T de $\mathbb{N}$ est dit *récursif* s'il existe un algorithme (représentable à l'aide d'une machine de Turing) permettant de reconnaître ses éléments[58]. Parmi de nombreuses caractérisations équivalentes, les ensembles récursifs sont ceux qui peuvent être définis dans $(H_0, \in)$ à la fois par une formule existentielle et par la négation d'une formule existentielle. On note $L(B, \mathbb{R})$ le modèle de **ZFC** construit comme le modèle L de Gödel, mais en partant des ensembles B et $\mathbb{R}$.

Définition 7.3. — *Un sous-ensemble T de $\mathbb{N}$ est dit* Ω-récursif *s'il existe un sous-ensemble universellement Baire B de $\mathbb{R}$ tel que T puisse être défini dans $(L(B, \mathbb{R}), \in, \{\mathbb{R}\})$ à la fois par une formule existentielle et par la négation d'une formule existentielle.*

Comme H_0 est définissable dans $L(\mathbb{R})$, tout ensemble récursif est Ω-récursif, mais l'existence d'ensembles universellement Baire (beaucoup) plus compliqués que les boréliens entraîne que les ensembles Ω-récursifs peuvent être (beaucoup) plus compliqués que les ensembles récursifs.

Le point crucial consiste à étudier la définissabilité éventuelle des ensembles Ω-récursifs dans $(H_2, \in)$ — ou, plus généralement, dans l'ensemble des ensembles héréditairement de cardinal au plus celui de $\mathbb{R}$. Ceci requiert de nombreux développements mettant en jeu à la fois des outils de théorie descriptive des ensembles (étude des sous-ensembles de $\mathbb{R}$) et de la théorie des grands cardinaux et de la détermination. Une composante essentielle est l'adaptation aux axiomes de détermination des méthodes de construction de modèles canoniques élaborées par Mitchell et Steel [12] pour les axiomes de grands cardinaux, en particulier cardinaux de Woodin. Pour ce faire, Woodin introduit une famille complètement nouvelle de modèles canoniques notés $\mathrm{HOD}^{L(B,\mathbb{R})}$ et indexés par les ensembles universellement Baire. L'aboutissement de cette analyse techniquement très sophistiquée est

Proposition 7.4. — *Supposons qu'il existe une classe propre de cardinaux de Woodin, et que T est un sous-ensemble Ω-récursif de $\mathbb{N}$. Alors*

(i) *ou bien T est définissable dans $(H_2, \in)$,*

(ii) *ou bien il existe une surjection définissable de $\mathbb{R}$ sur $\aleph_2$.*

Le théorème 7.2 résulte de la proposition 7.4 par un argument de diagonalisation. En effet, si **A** est un axiome Ω-complet pour $(H_2, \in)$, alors l'ensemble des numéros

[58] Le caractère effectif des règles de la logique usuelle entraîne que l'ensemble des (numéros des) énoncés prouvables à partir de **ZFC** est la projection d'un ensemble récursif, alors que l'ensemble des (numéros des) énoncés satisfaits dans $(H_0, \in)$ ne l'est pas, ce qui entraîne que l'inclusion du premier dans le second est stricte, d'où le premier théorème d'incomplétude de Gödel.

des énoncés φ tels que $\mathsf{A} \Rightarrow$ « $(H_2, \in)$ satisfait φ » soit Ω-prouvable est un ensemble Ω-récursif (c'est facile). Or un résultat classique de Tarski affirme que l'ensemble des énoncés satisfaits dans une structure S ne peut jamais être définissable dans S. En particulier donc, l'ensemble des (numéros des) énoncés satisfaits dans $(H_2, \in)$ ne peut être définissable dans $(H_2, \in)$, et la seule possibilité au regard de la proposition 7.4 est le cas (ii), c'est-à-dire la fausseté (en un sens effectif fort) de l'hypothèse du continu.

Appliquant la proposition 5.9, on déduit :

COROLLAIRE 7.5. — *Si la Ω-conjecture est vraie, alors toute solution au problème 2.5 pour $(H_2, \in)$ implique que l'hypothèse du continu soit fausse* [59].

On obtient ainsi la version précise suivante de la conjecture de l'introduction : Si la Ω-conjecture est vraie, alors toute théorie des ensembles obtenue en ajoutant à **ZFC** un axiome compatible avec l'existence de grands cardinaux et rendant les propriétés de $(H_2, \in)$ invariantes par forcing implique que l'hypothèse du continu soit fausse.

Si la Ω-conjecture est vraie, on sait que le problème 2.5 pour $(H_2, \in)$ admet au moins une solution, à savoir **ZFC** + **MMW**. On peut alors déduire l'énoncé le plus spectaculaire :

THÉORÈME 7.6 (Woodin). — *Sous réserve que la Ω-conjecture soit vraie, l'hypothèse du continu est essentiellement fausse.*

Le lecteur sceptique ou pressé pourra retenir que la solution du problème du continu est reportée sur celle d'un nouveau problème tout aussi ouvert, et d'énoncé de surcroît obscur. Ce serait une courte vue, en particulier parce que la nature de la Ω-conjecture est très différente de celle de **HC** et qu'on peut raisonnablement en escompter une démonstration[60] ou une réfutation dans le futur. Un point remarquable est que la résolution puisse venir de domaines très divers de la théorie des ensembles, ce qui témoigne à la fois du caractère central de la conjecture et de l'unité profonde de la théorie des ensembles.

---

[59] Signalons également pour terminer une variante du résultat sur **HC**. Énumérons toutes les formules à une variable libre, et définissons $\underset{\sim}{0}^{\Omega}$ comme l'ensemble des couples (n, r) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ tels que $\varphi_n(r)$ soit Ω-prouvable. Woodin montre que, si l'ensemble $\underset{\sim}{0}^{\Omega}$ n'est pas universellement Baire, alors, essentiellement, toute solution au problème 2.5 pour H_2 implique que l'hypothèse du continu est fausse : autrement dit, l'hypothèse de pure analyse « $\underset{\sim}{0}^{\Omega}$ n'est pas universellement Baire » permet d'obtenir la même conclusion que la Ω-conjecture.

[60] En particulier, Woodin établit un lien entre les énoncés Ω-valides et les ensembles universellement Baire, qui n'est pas (encore) la Ω-prouvabilité, mais s'en rapproche. Dans [18], Woodin propose un programme susceptible de mener à une démonstration fondée sur de nouveaux modèles canoniques.

8. CONCLUSION

Deux conclusions devraient se dégager — et attester que l'histoire de la théorie des ensembles ne s'est pas arrêtée avec le théorème de Cohen.

La première est que l'axiome de détermination projective **DP** constitue, lorsqu'ajouté au système **ZFC**, la bonne axiomatisation de H_1, c'est-à-dire de l'analyse, à la façon dont **ZFC** constitue la bonne axiomatisation de H_0, c'est-à-dire de l'arithmétique. L'axiome **DP** mène à une théorie heuristiquement complète et satisfaisante pour H_1, c'est-à-dire pour le domaine des ensembles dénombrables. Ce succès constitue un argument de poids en faveur de la *vérité* de l'axiome **DP**. Il peut paraître étonnant d'identifier efficacité et vérité (61). Mais, faute d'évidence intuitive *a priori* (62), il est difficile d'imaginer d'autre critère de vérité que l'évidence empirique *a posteriori* née de l'efficacité. Que le lecteur réfléchisse à l'axiome affirmant l'existence d'ensembles infinis : son efficacité opératoire est telle que nul ne songe à le remettre en cause et à renoncer, par exemple, aux nombres réels. Pourtant, cet axiome ne possède aucune justification théorique intrinsèque, non plus qu'aucune évidence intuitive, sinon l'intériorisation d'une longue familiarité. La situation avec la détermination projective est similaire, et la familiarité acquise par les théoriciens des ensembles donne aujourd'hui à cette notion d'infini forte qu'est **DP** l'*évidence intuitive* qu'une familiarité semblable a donnée jadis à la notion d'infini simple(63).

La seconde conclusion est qu'il n'existe pour le moment pas de solution possédant le même degré d'évidence pour le niveau de H_2, c'est-à-dire celui des sous-ensembles de $\aleph_1$, mais qu'il existe au moins une solution globale à ce niveau, à savoir celle développée par Woodin à partir de l'axiome **MMW** et de la Ω-logique.

Même si la Ω-conjecture est établie un jour, la discussion sur la légitimité de l'invariance par forcing comme critère de base ne sera pas close(64), et il n'est pas certain que la Ω-logique soit le seul cadre raisonnable. C'est pourquoi il serait imprudent

(61) *A priori*, il serait étrange, ayant à étudier un corps K inconnu, de proclamer : « Les corps algébriquement clos ont une théorie satisfaisante, donc je vais supposer K algébriquement clos » ; en fait, le problème ne se pose pas exactement dans les termes d'étudier un corps K inconnu et possiblement quelconque, mais d'étudier « le monde des corps », auquel cas supposer qu'on vit dans un grand tout algébriquement clos est une hypothèse plus que raisonnable.

(62) Les expériences de pensée (« thought experiments ») parfois invoquées [10] ne vont pas loin...

(63) *cf.* Gödel [7] : « *There might exist axioms so abundant in their verifiable consequences, shedding so much light upon a whole discipline, and furnishing such powerful methods for solving given problems (and even solving them, as far as possible, in a constructivistic way) that quite irrespective of their intrinsic necessity they would have to be assumed at least in the same sense as any established physical theory.* »

(64) On a signalé notamment que l'invariance par forcing des propriétés ne peut être espérée beaucoup au-delà de H_2, *cf.* note 17, donc elle ne peut pas constituer un critère universel ; voir aussi la note 18.

d'affirmer que la solution du problème du continu proposée par Woodin est la seule possible.

Par contre, et même sans le poids plus décisif qu'apporteraient des idées de démonstrations, les résultats survolés ici devraient rendre irréfutable la possibilité d'une véritable théorie conceptuelle de l'infini non dénombrable, tenant debout d'elle-même, possédant une logique interne et une intuition propres. Aucun argument comparable ne peut être avancé par les opposants à une telle théorie, en particulier par ceux qui considèrent le problème du continu comme essentiellement irrésoluble[65].

Enfin et dans tous les cas, j'espère en avoir dit assez pour faire soupçonner que les travaux de Woodin constituent un remarquable morceau de mathématiques.

RÉFÉRENCES

[1] J. Bagaria – « Bounded forcing axioms as principles of generic absoluteness », *Arch. Math. Logic* **69** (2000), no. 6, p. 393–401.

[2] P. Dehornoy – « La détermination projective d'après Martin, Steel et Woodin », in *Sém. Bourbaki (1988/89)*, Astérisque, vol. 177-178, Société Mathématique de France, 1989, exp. n° 710, p. 261–276.

[3] M. Feng, M. Magidor & H. Woodin – « Universally Baire sets of reals », in *Set Theory of the Continuum* (H. Judah, W. Just & H. Woodin, éds.), MSRI Publ., vol. 26, Springer, 1992, p. 203–242.

[4] M. Foreman – « Generic large cardinals : new axioms for mathematics ? », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998)*.

[5] M. Foreman, M. Magidor & S. Shelah – « Martin's maximum, saturated ideals, and nonregular ultrafilters », *Ann. of Math.* **127** (1988), no. 1, p. 1–47.

[6] H. Friedman – « On the necessary use of abstract set theory », *Adv. in Math.* **41** (1981), p. 209–280.

[7] K. Gödel – « What is Cantor's Continuum Problem ? », *Amer. Math. Monthly* **54** (1947), p. 515–545.

[8] M. Goldstern & S. Shelah – « The bounded proper forcing axiom », *J. Symbolic Logic* **60** (1995), no. 1, p. 58–73.

[9] A. Kanamori – *The higher infinite*, Springer, Berlin, 1994.

[10] Yu. Manin – « Georg Cantor and his heritage », `arXiv:math.AG/0209244`, 2002.

[65] *cf.* Woodin [19] : *« There is a tendency to claim that the Continuum Hypothesis is inherently vague and that this is simply the end of the story. But any legitimate claim that CH is inherently vague must have a mathematical basis, at the very least a theorem or a collection of theorems. My own view is that the independence of CH from ZFC, and from ZFC together with large cardinal axioms, does not provide this basis. I would hope this is the minimum metamathematical assessment of the solution to CH that I have presented. Instead, for me, the independence results for CH simply show that CH is a difficult problem. »*

[11] Y. Matijasevich & J. Robinson – « Reduction of an arbitrary Diophantine equation in one in 13 unknowns », *Acta Arith.* **27** (1975), p. 521–553.

[12] W. Mitchell & J. Steel – *Fine structure and iteration trees*, Springer, Berlin, 1994.

[13] Y. Moschovakis – *Descriptive set theory*, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[14] S. Shelah – *Proper and improper forcing*, 2e éd., Perspectives in Math. Logic, Springer, Berlin, 1998.

[15] S. Todorcevic – « Generic absoluteness and the continuum », *Math. Res. Lett.* **9** (2002), p. 465–471.

[16] W.H. Woodin – *The Axiom of Determinacy, forcing axioms, and the nonstationary ideal*, Walter de Gruyter and co., Berlin, 1999.

[17] ———, « The Continuum Hypothesis, I and II », *Notices Amer. Math. Soc.* **48** (2001), no. 6, p. 567–576, & **8** (2001), no. 7, p. 681-690.

[18] ———, *The Continuum Hypothesis and the* Ω*-Conjecture*, Coxeter Lectures, Fields Institute, Toronto, novembre 2002, Notes disponibles à l'adresse `http://av.fields.utoronto.ca/slides/02-03/coxeter_lectures/woodin/`.

[19] ———, « The Continuum Hypothesis », in *Proceedings Logic Colloquium 2000, Paris*, à paraître.

Patrick DEHORNOY

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
CNRS UMR 6139
Université de Caen
B.P. 5186
F-14032 Caen
E-mail : `dehornoy@math.unicaen.fr`