Séminaire BOURBAKI Mars 2003
55e année, 2002-2003, n$^{\text{o}}$ 914, p. 125 à 146

POINTS RATIONNELS ET GROUPES FONDAMENTAUX : APPLICATIONS DE LA COHOMOLOGIE p-ADIQUE [d'après P. Berthelot, T. Ekedahl, H. Esnault, etc.]

par **Antoine CHAMBERT-LOIR**

Dans cet exposé, je présente trois résultats concernant les variétés algébriques en caractéristique positive :

a) *Deux variétés propres et lisses sur* $\mathbf{F}_q$ *qui sont birationnelles ont même nombre de points rationnels modulo* q (*cf.* T. Ekedahl, [25]).

b) *Sur un corps fini, une variété propre et lisse qui est de Fano, ou bien géométriquement faiblement unirationnelle, ou plus généralement rationnellement connexe par chaînes, a un point rationnel* (H. Esnault, [26]).

c) *Sur un corps algébriquement clos de caractéristique* $p > 0$, *le groupe fondamental d'une variété propre et lisse qui est de Fano, ou bien géométriquement faiblement unirationnelle, ou plus généralement rationnellement connexe par chaînes, est un groupe fini d'ordre premier à* p (*cf.* T. Ekedahl, [25]).

Le point commun des démonstrations est un contrôle des valuations p-adiques des valeurs propres de Frobenius. Elles gagnent donc à être présentées dans le cadre d'une théorie cohomologique p-adique. La cohomologie rigide, développée par P. Berthelot, fournit l'outil idéal pour cela. Elle a connu récemment des progrès importants et je décris le formalisme auquel elle donne lieu. Les énoncés ci-dessus s'obtiennent en contrôlant les *pentes* des F-isocristaux que fournit la cohomologie rigide.

Je voudrais remercier P. Berthelot, J.-L. Colliot-Thélène, O. Debarre, P. Deligne, H. Esnault, B. Kahn, Y. Laszlo, D. Petrequin et J-P. Serre pour leurs conseils, suggestions ou corrections.

1. AUTOUR DU THÉORÈME DE CHEVALLEY-WARNING

Je commence cet exposé par un énoncé élémentaire et assez ancien, dû à C. Chevalley et E. Warning [69].

Théorème 1.1. — *Soit* $\mathbf{F}$ *un corps fini, notons* q *son cardinal et* p *sa caractéristique. Soient* $F_1, \ldots, F_r$ *des polynômes en* $x_1, \ldots, x_n$*, à coefficients dans* $\mathbf{F}$ *et de degrés* $d_1, \ldots, d_r$*. Si* $n > d_1 + \cdots + d_r$*, le nombre de solutions dans* $\mathbf{F}^n$ *du système*

$$F_1(x_1, \ldots, x_n) = \cdots = F_r(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{1.2}$$

est multiple de p.

La démonstration classique est très simple et repose sur le fait que pour $x \in \mathbf{F}$, x^{q-1} vaut 1 si $x \neq 0$ et 0 sinon. Ainsi, le nombre de solutions du système est congru modulo p à l'expression

$$\sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{F}^n} \prod_{i=1}^{r} (1 - F_i(\mathbf{x})^{q-1}).$$

Le produit

$$\prod_{i=1}^{r} (1 - F_i(\mathbf{x})^{q-1})$$

est un polynôme de degré $\leqslant (q-1) \sum d_i$. Soit

$$c_{\mathbf{m}} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$$

un de ses monômes non nuls. On a donc $m_1 + \cdots + m_n \leqslant (q-1) \sum d_i < n(q-1)$ si bien que nécessairement, l'un des entiers m_i est strictement inférieur à $q-1$ et

$$\sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{F}^n} c_{\mathbf{m}} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} = c_{\mathbf{m}} \prod_{i=1}^{n} \sum_{t \in \mathbf{F}} t^{m_i} = 0$$

puisque

$$\sum_{t \in \mathbf{F}} t^m = \begin{cases} -1 & \text{si } (q-1) \text{ divise } m \text{ et } m \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce théorème a été généralisé par J. Ax [1] et N. Katz [40] :

Théorème 1.3. — *Si* b *désigne le plus petit entier tel que*

$$b \geqslant \frac{n - \sum d_i}{\max d_i},$$

le nombre de solutions du système (1.2) *est divisible par* q^b.

Leurs démonstrations sont assez savantes. Celle qu'a proposée récemment D. Wan dans [68] lorsque $\mathbf{F} = \mathbf{F}_p$ est en revanche élémentaire et tout à fait dans l'esprit de celle du théorème 1.1. Commençons par introduire l'anneau $\mathbf{Z}_p$ des entiers p-adiques. C'est un anneau de valuation discrète complet, de caractéristique 0, de corps résiduel $\mathbf{F}_p$; son idéal maximal est engendré par p ; il contient les p racines de l'équation $x^p - x = 0$ (notons S cet ensemble). L'idée de base est maintenant que, pour $x \in \mathbf{Z}_p$,

$x^{p^n(p-1)}$ est congru modulo p^n à 1 si $x \not\equiv 0 \pmod p$, et à 0 si $x \equiv 0 \pmod p$. Le nombre de solutions du système (1.2) est ainsi congru modulo p^n à l'expression

$$\sum_{\mathbf{x}\in S^n} \prod_{i=1}^{r} \bigl(1 - F_i(\mathbf{x})^{p^n(p-1)}\bigr).$$

Par récurrence sur r, il suffit de montrer que

$$\sum_{\mathbf{x}\in S^n} \prod_{i=1}^{r} F_i(\mathbf{x})^{p^n(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^b},$$

ce que fait Wan en développant $F_i^{p^n(p-1)}$ puis en constatant que la valuation des divers symboles du multinôme et celle de la somme de puissances qui apparaissent s'ajoutent pour dépasser b. (C'est tout de même assez délicat.)

Lorsque $\mathbf{F}$ n'est pas le corps à p éléments, on peut suivant C. Moreno et O. Moreno [59] effectuer une réduction des scalaires (à la Weil) de $\mathbf{F}$ à $\mathbf{F}_p$: si on fixe une base de $\mathbf{F}$ sur $\mathbf{F}_p$, de cardinal a, on se ramène à un système de ar équations en nr variables de degrés $d_1, \dots, d_r$ (a fois). La nouvelle quantité $(n - \sum d_i)/\max(d_i)$ est égale à a fois l'ancienne. À cause de la partie entière, on en déduit une divisibilité un peu plus faible que celle affirmée par le théorème 1.3.

2. FONCTIONS ZÊTA ET COHOMOLOGIES DE WEIL

Soit $\mathbf{F}$ un corps fini, notons q son cardinal. Dans [70], A. Weil avait introduit pour tout système d'équations polynomiales à coefficients dans $\mathbf{F}$, voire tout $\mathbf{F}$-schéma V de type fini, la série génératrice

$$Z_V(t) = \exp\Biggl(\sum_{a\geqslant 0} |V(\mathbf{F}^{(a)})| \frac{t^a}{a}\Biggr)$$

où $\mathbf{F}^{(a)}$ désigne l'unique extension de $\mathbf{F}$ de degré a. B. Dwork [24] a démontré que c'est une fraction rationnelle (première conjecture de Weil). Les inverses de ses zéros et ses pôles sont nécessairement des entiers algébriques. En fait, la congruence du théorème 1.3 implique qu'ils sont divisibles par q^b dans l'anneau des entiers algébriques (*cf.* [1], p. 256).

Les deux autres conjectures de Weil ont été démontrées par A. Grothendieck (rationalité et équation fonctionnelle) dans SGA 5 et P. Deligne (analogue de l'hypothèse de Riemann, [23]), grâce à l'introduction de la cohomologie (étale) ℓ-adique, où ℓ est un nombre premier *distinct* de p. L'utilité d'une telle théorie cohomologique avait déjà été pressentie dans l'article de Weil. En effet, V dispose d'un endomorphisme de Frobenius F et l'ensemble $V(\mathbf{F}^{(a)})$ n'est autre que le lieu des points fixes de F^a ; il faudrait pouvoir disposer alors d'une formule des traces de Lefschetz. Les conditions nécessaires sur une telle cohomologie ont été rapidement formalisées sous le nom de *cohomologie de Weil* : la théorie cohomologique doit vérifier la formule de Künneth, la dualité de Poincaré, fournie par une classe fondamentale, et les sous-variétés (non nécessairement lisses) doivent posséder une classe de cohomologie, de manière compatible au produit d'intersection et à la classe fondamentale. Tout ceci est exposé en détail dans [48], en lien avec les théorèmes de Lefschetz faible et difficile, les conjectures « standard » et la conjecture de Hodge.

Lorsque $\ell \neq p$, la cohomologie étale ℓ-adique est effectivement une cohomologie de Weil. Lorsque $\ell = p$, ce n'est pas vrai : $H^i(X, \mathbf{Q}_p)$ est nul dès que $i > \dim X$ ce qui viole la dualité de Poincaré.

Finalement, par voie ℓ-adique, on sait que la fonction zêta d'un $\mathbf{F}$-schéma géométriquement connexe, propre, lisse de dimension d, est de la forme suivante :

$$Z_X(t) = \frac{P_1(t) \dots P_{2d-1}(t)}{P_0(t) \dots P_{2d}(t)},$$

où $P_i(t) \in \mathbf{Z}[t]$, avec $P_0(t) = 1 - t$, $P_{2d}(t) = 1 - q^{2d}t$; si $P_i(t) = \prod_{j=1}^{b_i}(1 - a_{ij}t)$, on sait aussi que les a_{ij} sont des entiers algébriques de valeur absolue archimédienne $q^{i/2}$ (hypothèse de Riemann) et, si $\ell \neq p$, de valeur absolue ℓ-adique nulle.

L'interprétation des valuations p-adiques des a_{ij}, et notamment de congruences du type fourni par les théorèmes 1.1 et 1.3 justifie la recherche d'une théorie cohomologique de Weil qui soit p-adique.

Il y a un autre intérêt — sur lequel insiste Kedlaya — des cohomologies p-adiques que je vais décrire maintenant : elles sont par nature plus calculables que ne l'est la cohomologie étale. Il est par exemple remarquable que soient apparus récemment trois *algorithmes* efficaces (Satoh [63], Kedlaya [44], Lauder-Wan [51]) pour calculer le nombre de points de certaines variétés algébriques sur un corps fini, et tous trois sont de nature p-adique. Celui de Kedlaya repose sur l'explicitation de la cohomologie de Monsky-Washnitzer, celui de Lauder-Wan est inspiré de la démonstration par Dwork de la rationalité de la fonction zêta. De même, c'est par des techniques p-adiques que Bombieri [12] a étudié le degré des numérateurs et dénominateurs de fonctions rationnelles associées à des sommes d'exponentielles.

3. COHOMOLOGIES p-ADIQUES

Mais avant cela, il faut peut-être dire pourquoi il n'existe pas de cohomologie de Weil sur la catégorie des variétés algébriques projectives lisses sur un corps algébriquement clos de caractéristique positive à valeur dans la catégorie des $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels de dimension finie. Pour toute cohomologie de Weil à valeurs dans les K-vectoriels (K est un corps commutatif), le H^1 d'une courbe elliptique E est de dimension 2. De plus, pour tout endomorphisme non nul α de E, l'endomorphisme $\alpha^*\colon H^1(E) \to H^1(E)$ est injectif, d'où une injection de l'anneau (opposé à celui) des endomorphismes de E

dans l'anneau des matrices 2×2 à coefficients dans K. En caractéristique 0, tout irait bien (d'ailleurs, la cohomologie singulière est une cohomologie de Weil), mais en caractéristique finie, il existe des courbes elliptiques *supersingulières* dont l'anneau des endomorphismes est plus gros que prévu : c'est une algèbre de quaternions sur $\mathbf{Q}$. Comme une telle algèbre ne se plonge pas dans $M_2(\mathbf{Q})$, il n'y a pas de cohomologie de Weil à coefficients dans $\mathbf{Q}$. M. Deuring a même montré que l'algèbre de quaternions $\mathrm{End}(E) \otimes \mathbf{Q}$ est ramifiée en p et l'infini, c'est-à-dire que $\mathrm{End}(E) \otimes \mathbf{Q}_p$ et $\mathrm{End}(E) \otimes \mathbf{R}$ sont des corps gauches. Cela empêche aussi $K = \mathbf{Q}_p$ ou $K = \mathbf{R}$. (Cet argument est dû à J-P. Serre, *cf.* [32].)

La théorie que nous utiliserons dans cet exposé est la *cohomologie rigide*, construite par P. Berthelot. Elle unifie deux théories disjointes qui sont la cohomologie de Monsky-Washnitzer [58], valable pour les variétés affines et lisses, et la cohomologie cristalline [32, 2], qui a de bonnes propriétés pour les variétés propres et lisses. Cette théorie est encore éparpillée dans la littérature, et un petit guide de lecture ne sera peut-être pas inutile. Il faudrait aussi citer les travaux de Y. André, F. Baldassarri, P. Berthelot, B. Chiarellotto, G. Christol, R. Crew, B. Dwork, Z. Mebkhout, P. Robba, N. Tsuzuki...

Je trouve l'introduction que propose Berthelot dans [3] très agréable à lire ; le gros article [4] fournit des détails importants dans la construction (les fameux « théorèmes de fibrations »). L'article [6] est très important : outre la démonstration du fait que la cohomologie rigide d'une variété lisse est de dimension finie, on y trouve les théorèmes de comparaison avec les théories de Monsky-Washnitzer et cristalline. Concernant ce théorème de finitude, citons aussi l'article [56] de Z. Mebkhout qui propose une démonstration de la finitude de la cohomologie de Monsky-Washnitzer indépendante des théorèmes de de Jong sur l'existence d'altérations. Notons que la finitude de la cohomologie de Monsky-Washnitzer n'était pas connue avant ces deux articles, à l'exception du H^0 et du H^1 par P. Monsky. La finitude de la cohomologie rigide dans le cas général est démontrée (indépendamment) dans l'article [31] de E. Grosse-Klönne et dans celui [67] de N. Tsuzuki dans lequel il établit un théorème de descente cohomologique propre.

La dualité de Poincaré et la formule de Künneth sont établies dans la note [5] de Berthelot. Enfin, l'existence de classes de Chern est démontrée par D. Petrequin [61].

Qu'est-ce que la cohomologie rigide ? Disons tout d'abord que c'est une sorte de cohomologie de de Rham. Fixons quelques notations : soit k un corps de caractéristique $p > 0$, fixons alors un anneau de valuation discrète complet $\mathscr{V}$ de corps résiduel k, dont nous noterons K le corps des fractions, supposé de caractéristique zéro, et π un générateur de l'idéal maximal de $\mathscr{V}$. Nous supposerons que $\mathscr{V}$ admet un endomorphisme σ qui se réduit modulo π en l'automorphisme de Frobenius $\sigma\colon x \mapsto x^p$ de k ; alors, σ s'étend en un endomorphisme de K. Dans tout ce qui va suivre, on peut se limiter au cas important où le corps k est supposé parfait et où $\mathscr{V}$ est l'anneau des vecteurs de Witt de k.

Soit X un k-schéma et essayons de définir la cohomologie rigide de k. Ce seront des K-espaces vectoriels. Le cas idéal est celui où X est la *réduction* modulo p d'un V-schéma propre et lisse $\mathscr{X}$. Dans ce cas, $\mathscr{X}$ dispose d'une cohomologie de de Rham définie algébriquement : l'hypercohomologie du complexe des formes différentielles sur $\widetilde{X}$; ce sont des $\mathscr{V}$-modules de type fini. Un point crucial, déjà à la base de l'existence de la cohomologie de Monsky–Washnitzer, est que ces modules ne dépendent pas du choix de $\mathscr{X}$ — autrement dit, si $\mathscr{X}'$ est un autre $\mathscr{V}$-schéma propre et lisse de même réduction modulo p, on a un isomorphisme canonique $H^*_{\mathrm{DR}}(\mathscr{X}) \simeq H^*_{\mathrm{DR}}(\mathscr{X}')$.

Du point de vue topologique, une variété plongée dans un espace lisse est rétracte par déformation d'un voisinage tubulaire assez petit, et il est possible de définir sa cohomologie à l'aide de celle de ces voisinages. En caractéristique zéro, Hartshorne [35] avait étudié une cohomologie de de Rham pour des variétés singulières définie suivant ces lignes ; le rôle du voisinage tubulaire y est joué par le complété formel de l'espace ambiant le long de la variété dont il s'agit de définir la cohomologie.

La définition de la cohomologie rigide « naïve » suit cette approche si ce n'est qu'il faut plonger et relever. Supposons donc que X est un sous-schéma d'un schéma propre et lisse P, réduction d'un $\mathscr{V}$-schéma $\mathscr{P}$; l'exemple important est bien entendu l'espace projectif. À $\mathscr{P}$ est associée une variété analytique *rigide*, notée P — c'est une structure plus riche que la structure analytique p-adique naïve sur $\mathscr{P} \otimes K$ qui donne lieu à une théorie des faisceaux non triviale (penser que la topologie de K est totalement discontinue !).

Un point de P se *spécialise* en un point de P : dans le cas de l'espace projectif, il suffit de chasser les dénominateurs pour qu'un point soit à coordonnées homogènes dans $\mathscr{V}$, non toutes multiples de π, puis de réduire modulo π ces coordonnées homogènes. Dans P, on peut alors définir le *tube* de X comme l'ensemble des points de P qui se réduisent en un point de X. Ce tube, noté usuellement $]X[$, est une variété analytique rigide (pas forcément quasi compacte). Par exemple, si $X = \{0\}$ et $\mathscr{P} = \mathbf{P}^1$, $]X[$ s'identifie au « disque unité ouvert », formé des x tels que $|x| < 1$. Si $X = \mathbf{A}^1$ et $\mathscr{P} = \mathbf{P}^1$, $]X[$ est alors le « disque unité fermé », formé des x tels que $|x| \leqslant 1$.

La cohomologie rigide naïve de X est la cohomologie de de Rham du tube de X. D'après un théorème de fibration, elle ne dépend pas du choix de $\mathscr{P}$. Si l'on peut prendre $P = X$, c'est-à-dire si X est propre, lisse et relevable, la cohomologie définie n'est autre que la cohomologie de de Rham tensorisée par K. Si X est propre et lisse, on retrouve la cohomologie cristalline de X tensorisée par K. Ce sont en particulier des K-espaces vectoriels de dimension finie.

En revanche, si X n'est pas propre, cela ne suffit pas. Prenons l'exemple de la droite affine $X = \mathbf{A}^1$ et de son tube $]X[= \{x\ ;\ |x| \leqslant 1\}$. Le complexe de de Rham dont la cohomologie rigide naïve est la cohomologie est donné par

$$K\{x\} \longrightarrow K\{x\}, \quad f = \sum a_n x^n \longmapsto f' = \sum n a_n x^{n-1},$$

où $K\{x\}$ est l'anneau des séries entières à coefficients dans K dont les coefficients tendent vers 0 (de sorte qu'elles convergent sur le disque fermé). On a bien $H^0_{\text{naïf}}(\mathbf{A}^1) = K$, mais $H^1_{\text{naïf}}(\mathbf{A}^1)$ n'est pas nul puisque la série $f = \sum p^n x^{p^n-1}$ n'a pas de primitive dans $K\{x\}$. En fait, $H^1_{\text{naïf}}(\mathbf{A}^1)$ est même de dimension infinie.

Monsky et Washnitzer ont remarqué que la situation s'arrange notablement si l'on remplace l'anneau $K\{x\}$ par celui des fonctions qui convergent dans un disque un peu plus gros que le disque unité (on dit qu'elles *surconvergent*). Notons $K\langle x\rangle^\dagger$ cet anneau : il est formé des séries $\sum a_n x^n$ telles que $\limsup \log|a_n|/\log n < 0$. Le complexe de de Rham surconvergent de la droite affine a alors la cohomologie attendue car si $f = \sum a_n x^n$ converge sur le disque $|x| \leqslant \lambda$, avec $\lambda > 1$, ses primitives convergent sur le disque ouvert $|x| < \lambda$, donc sur tout disque fermé $|x| \leqslant \lambda'$ avec $1 < \lambda' < \lambda$.

Pour définir la cohomologie rigide en général, il faut ainsi introduire ce que Berthelot appelle des *voisinages stricts* du tube (analogues des disques fermés $|x| \leqslant \lambda$ pour le disque unité) et la cohomologie du complexe de de Rham formé des formes différentielles surconvergentes, c'est-à-dire qui convergent dans un voisinage strict non précisé de $]X[$.

Outre la cohomologie rigide $H^i_{\text{rig}}(X/K)$, Berthelot définit aussi une cohomologie à support $H^*_{\text{rig},Z}(X/K)$ (pour $Z \subset X$) et une cohomologie à support propre $H^*_{\text{rig,c}}(X/K)$. Ils sont de dimension finie (voir les références plus haut). Ce sont les analogues algébriques de la cohomologie d'une paire et de la cohomologie à support propre.

Ces espaces de cohomologie sont compatibles à l'extension des scalaires : si K' est une extension isométrique de K, d'anneau de valuation $\mathscr{V}'$, de corps résiduel k', il existe un isomorphisme canonique

$$K' \otimes_K H^*_{\text{rig}}(X/K) \xrightarrow{\sim} H^*_{\text{rig}}(X'/K'),$$

où $X' = k' \otimes_k X$. (Voir [6], prop. 1.8, pour le cas d'une extension finie ; le cas général est plus difficile et est affirmé à la fin de [5].)

Disons un mot des fonctorialités dont disposent ces cohomologies. La cohomologie rigide est naturellement contravariante pour les morphismes de k-schémas. La cohomologie à support propre n'est contravariante que pour les morphismes propres, et est covariante pour les immersions ouvertes. Sur la cohomologie rigide des variétés lisses, la dualité de Poincaré permet d'en déduire une fonctorialité covariante (avec un décalage de deux fois la dimension) pour les morphismes propres (« morphismes de Gysin »).

Le morphisme de Frobenius F_X n'est pas un morphisme de k-schémas, sauf si $k = \mathbf{F}_p$, mais il se factorise en

$$X \xrightarrow{F_{X/k}} k \otimes_\sigma X \longrightarrow X$$

où le premier morphisme est k-linéaire et le second est le morphisme de changement de base par le Frobenius σ de k. Grâce à la compatibilité des scalaires, si σ est un endomorphisme de $\mathscr{V}$ qui induit le Frobenius modulo π, on en déduit un endomorphisme σ-linéaire de la cohomologie rigide :

$$F\colon H^*_{\mathrm{rig}}(X/K) \longrightarrow H^*_{\mathrm{rig}}(X/K), \quad F(ax) = \sigma(a)F(x),$$

et de même pour les cohomologies à support et à support propre.

Les espaces de cohomologie rigide s'insèrent dans des suites exactes d'excision familières : si U est un ouvert de X et Z le fermé complémentaire, on a des suites exactes

$$H^i_{\mathrm{rig,c}}(U/K) \longrightarrow H^i_{\mathrm{rig,c}}(X/K) \longrightarrow H^i_{\mathrm{rig,c}}(Z/K) \xrightarrow{[+1]}$$

et

$$H^i_{\mathrm{rig},Z}(X/K) \longrightarrow H^i_{\mathrm{rig}}(X) \longrightarrow H^i_{\mathrm{rig}}(U) \xrightarrow{[+1]} .$$

Celles-ci sont d'ailleurs équivariantes pour les divers morphismes de Frobenius (voir [15], th. 2.4).

Dans tout ceci, je n'ai en fait parlé que des « coefficients constants ». L'analogue des faisceaux localement constants est fourni par les F-cristaux surconvergents : ce sont des fibrés vectoriels sur un voisinage strict du tube munis d'une connexion intégrable et d'une structure de Frobenius. La cohomologie à support propre d'un F-isocristal surconvergent et la formule des traces de type Lefschetz sont étudiées dans les articles [27, 28] d'Étesse et Le Stum. La finitude de la cohomologie rigide d'un F-isocristal surconvergent, la dualité de Poincaré et la formule de Künneth sont démontrées dans la prépublication [45] de K. Kedlaya.

La théorie des $\mathscr{D}$-modules arithmétiques de Berthelot est censée fournir une catégorie de coefficients stable par les six opérations de Grothendieck, mais à ma connaissance, ceci n'est pas encore démontré.

4. F-ISOCRISTAUX

(Pour ce paragraphe, l'article [42] de Katz est un *must.*) Supposons pour simplifier que k est un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $\mathscr{V}$ l'anneau des vecteurs de Witt de k et K son corps des fractions. Soit σ l'automorphisme de $\mathscr{V}$ qui relève l'automorphisme de Frobenius de k ; il s'étend à K.

Définition 4.1. — *Un F-isocristal sur K est un K-espace vectoriel de dimension finie muni d'un endomorphisme σ-linéaire injectif.*

Par exemple, soit $\alpha \in \mathbf{Q}^*$ un rationnel non nul, notons $\alpha = r/d$ avec $(r, d) = 1$ et $d > 0$, et soit $M_\alpha = K^d$, de base $(e_1, \dots, e_d)$, muni de l'endomorphisme σ-linéaire F donné par

$$F(e_1) = e_2, \dots, \quad F(e_{d-1}) = e_d, \quad F(e_d) = p^r e_1.$$

De même, les espaces de cohomologie rigide d'un schéma de type fini sont naturellement des F-isocristaux (l'injectivité n'est pas évidente et sera établie au paragraphe suivant).

Si (M, F) est un F-isocristal, on peut exprimer F dans une K-base de M à l'aide d'une matrice $A \in M_n(K)$ ($n = \dim_K M$). Il y a aussi une notion évidente de somme directe, de produit tensoriel, extérieur, symétrique, d'homomorphisme de F-isocristaux.

Si le corps k est algébriquement clos, la catégorie des F-isocristaux a été élucidée par J. Dieudonné et Yu. Manin [52] : tout F-isocristal est somme directe de F-isocristaux (simples) du type M_α. Cela permet de définir les *pentes* d'un F-isocristal M : ce sont les rationnels α tels que M_α soit un sous-objet de M. Si $M \simeq \bigoplus M_\alpha^{n_\alpha}$, la mutiplicité de la pente α dans M est par définition égale à $n_\alpha \dim M_\alpha$.

Si le corps k n'est pas algébriquement clos, les pentes d'un F-isocristal sont celles du F-isocristal obtenu après tensorisation par le corps des fractions de $W(\overline{\mathbf{F}_p})$.

Quel que soit le corps k, pour tout rationnel α, on peut définir facilement le plus grand sous-F-isocristal $M^{\geqslant \alpha}$ de M dont les pentes sont $\geqslant \alpha$. Fixons une base de M, d'où on déduit une norme ultramétrique $\|\cdot\|$ sur M. L'ensemble $M^{\geqslant \alpha}$ des $x \in M$ tels que la suite $(\|F^n(x)\| p^{\alpha n})_n$ soit bornée est un sous-K-espace vectoriel de M, stable par F ; il ne dépend pas de la base choisie. Cela définit une filtration décroissante de M par des sous-F-isocristaux, exhaustive (si les coefficients d'une matrice de F sont de valuation $\geqslant r$, $M = M^{\geqslant r}$, plus un raisonnement analogue pour F^{-1}).

Pour synthétiser les pentes d'un F-isocristal, il est commode de définir son *polygone de Newton.* Si les pentes de (M, F) sont les rationnels $\alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n$, comptés avec multiplicités (donc $\dim M = n$), c'est par définition l'unique fonction $\mathrm{Nwt}_M : [0; n] \to \mathbf{R}$ qui est affine par morceaux, continue, vérifie $\mathrm{Nwt}_M(0) = 0$ et est de pente α_j sur l'intervalle $[j; j+1]$.

Lorsque le corps k est fini, on a une autre caractérisation des pentes. Supposons pour simplifier que σ^a soit l'identité, ce qui est vérifié dans le cas important où $k = \mathbf{F}_{p^a}$ et $\mathscr{V} = W(k)$. L'application F^a est alors K-linéaire et la décomposition de Jordan fournit une autre caractérisation des pentes :

Proposition 4.2. — *Soit M un F-isocristal et supposons que $\sigma^a = \mathrm{id}$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de l'application K-linéaire F^a. Les pentes de M sont les* $\mathrm{ord}_p(\lambda_i)/a$.

Combinons cette proposition avec la formule des traces de Lefschetz en cohomologie rigide : En effet, si X est un schéma séparé de type fini sur un corps fini $\mathbf{F}_q$, avec $q = p^a$, on a pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$|X(\mathbf{F}_{q^n})| = \sum_{i=0}^{2\dim X} (-1)^i \operatorname{Tr}(F^{an} | H^i_{\mathrm{rig,c}}(X/K)).$$

Ainsi, on constate que *minorer* les pentes de la cohomologie rigide à support propre fournit des congruences p-adiques pour sa fonction zêta. Précisément : contrôler la partie de pente 0 implique des congruences modulo p pour $|X(\mathbf{F}_q)|$, contrôler la partie de pentes < 1 des congruences modulo q.

Dans cette veine, il faut citer un résultat fondamental, dû à Mazur [54, 55] moyennant des hypothèses restrictives, et Ogus [7, chap. 8] en général. Soit X un k-schéma propre et lisse ; sa cohomologie rigide (cristalline en fait) fournit un F-isocristal $H^m_{\mathrm{cris}}(X/W(k)) \otimes \operatorname{Frac} W(k)$ dont nous noterons $\mathrm{Nwt}^{(m)}_X$ le polygone de Newton. Par ailleurs, X a des nombres de Hodge $h_i = \dim_k H^{m-i}(X, \Omega^i_{X/k})$. Définissons le m-ième polygone de Hodge de X, $\mathrm{Hdg}^{(m)}_X$, comme la fonction continue affine par morceaux qui vaut 0 en 0, est de pente 0 sur l'intervalle $[0; h_0]$, de pente 1 sur l'intervalle $[h_0; h_0 + h_1]$, etc.

Théorème 4.3. — *On a l'inégalité* $\mathrm{Nwt}^{(m)}_X \geqslant \mathrm{Hdg}^{(m)}_X$.

On en déduit des théorèmes de type Chevalley-Warning et notamment une autre démonstration du théorème 1.3 de Ax-Katz *dans le cas lisse et homogène.*

Corollaire 4.4 (à la Chevalley–Warning). — *Soit X une intersection complète lisse de dimension d dans $\mathbf{P}^{n-1}$, définie sur le corps fini $\mathbf{F}_q$. Alors, le nombre de points de $X(\mathbf{F}_{q^s})$ est égal au nombre de points de $\mathbf{P}^d(\mathbf{F}_{q^s})$ modulo q^{bs} où b est le plus petit entier $i \geqslant 0$ tel que* $\dim H^{d-i}(\Omega^i) \neq 0$. (Si $d_1, \dots, d_r$ sont les degrés des hypersurfaces qui définissent X, l'entier b est égal au plus petit entier supérieur ou égal à $(n - \sum d_i)/\max(d_i)$.)

5. PENTES DE LA COHOMOLOGIE RIGIDE

Je donne dans ce paragraphe deux résultats généraux concernant les pentes de la cohomologie rigide à support propre. Le premier décrit la partie de pente 0, le second précise les pentes possibles.

Théorème 5.1. — *Pour tout schéma X, séparé et de type fini sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, on a un isomorphisme canonique*

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_p) \otimes K \simeq H^i_{\mathrm{rig,c}}(X/K)^0,$$

où l'exposant 0 signifie qu'on considère la partie de pente 0 dans le F-isocristal donné par la cohomologie rigide.

Lorsque X est propre et lisse, ce théorème est dû à Bloch (lorsque p est assez grand) et Illusie (pour tout p, [36], II, 5.4). Dans le cas général, c'est un résultat d'Étesse et Le Stum ([28], prop. 6.3).

Dans le premier cas, il se déduit des propriétés du complexe de de Rham-Witt via une généralisation de la suite exacte d'Artin-Schreier

$$0 \longrightarrow (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_X \longrightarrow \mathscr{O}_X \xrightarrow{1-F} \mathscr{O}_X \longrightarrow 0$$

(suite exacte de faisceaux étales sur X). Plus généralement, si $W_n\mathscr{O}_X$ désigne le faisceau des vecteurs de Witt de longueur n sur X, on a une suite exacte de faisceaux étales sur X :

$$0 \longrightarrow (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})_X \longrightarrow W_n\mathscr{O}_X \xrightarrow{1-F} W_n\mathscr{O}_X \to 0$$

qui induit par passage à la cohomologie, puis passage à la limite, une suite exacte en cohomologie étale :

$$0 \longrightarrow H^i_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}_p) \longrightarrow H^i(X, W\mathscr{O}_X) \xrightarrow{1-F} H^i(X, W\mathscr{O}_X) \longrightarrow 0$$

qui identifie $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_p) \otimes K$ au plus grand sous-F-isocristal de pente 0 dans le F-isocristal $H^i(X, W\mathscr{O}_X) \otimes_{W(k)} K$. (Compte tenu du fait que $H^i(X, W\mathscr{O}_X)$ est pour tout entier i un $W(k)$-module de type fini, la surjectivité de $1-F$ est une propriété générale des F-cristaux, *cf.* par exemple [36], II, 5.3.) La théorie du complexe de de Rham-Witt de Bloch et Illusie, et en particulier la dégénérescence de la suite spectrale des pentes ([36], II, 3.5), implique que ce dernier espace vectoriel est le plus grand sous-F-isocristal de pentes $[0;1[$ dans $H^i_{\text{rig}}(X/K)$. Le résultat s'ensuit si X est propre et lisse.

Dans le cas général, Étesse et Le Stum combinent des suites exactes d'Artin-Schreier, le calcul syntomique de la cohomologie cristalline (initié par Fontaine et Messing dans [29]), la cohomologie cristalline « de niveau variable » et un théorème de Berthelot selon lequel cette dernière permet de calculer la cohomologie rigide.

THÉORÈME 5.2. — *Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$ et soit X un k-schéma de type fini de dimension d.*

a) *pour tout i, $H^i_{\text{rig,c}}(X/K)$ est un F-isocristal dont les pentes appartiennent à l'intervalle* $[\max(0, i-d), \min(i, d)]$ *;*

b) *si X est lisse, c'est encore vrai de $H^i_{\text{rig}}(X/K)$.*

Le b) est conséquence du a) compte tenu de la dualité de Poincaré en cohomologie rigide : il existe un morphisme trace

$$H^{2d}_{\text{rig,c}}(X/K) \xrightarrow{\text{Tr}} K$$

tel que $\text{Tr} \circ F = p^d F$ qui induit par *cup-produit* des isomorphismes (X est lisse)

$$H^i_{\text{rig}}(X/K) \simeq H^{2d-i}_{\text{rig,c}}(X/K)^\vee(-d)$$

où le *twist* $(-d)$ signifie que le Frobenius est multiplié par p^d. Notons au passage que cela implique l'injectivité des Frobenius sur la cohomologie rigide (*resp.* la cohomologie rigide à support propre).

Avant de montrer le a), faisons quelques remarques.

1) On peut supposer que le corps k est algébriquement clos et que X est réduit. On peut aussi supposer que X est connexe car la cohomologie rigide d'une réunion disjointe est la somme directe des cohomologies rigides.

2) Si X est projective et lisse, le théorème de comparaison entre cohomologies rigide et cristalline implique que $H^i_{\mathrm{rig}}(X/K)$ est un F-isocristal à pentes positives ou nulles. Par dualité de Poincaré, elles sont donc $\leqslant d$. Le théorème de Lefschetz faible en cohomologie cristalline implique alors que les pentes appartiennent à l'intervalle $[0;i]$, donc à l'intervalle $[i-d;i]$ via la dualité de Poincaré.

3) Si U est un ouvert dense de X et Z le fermé complémentaire, la suite exacte longue d'excision

$$\longrightarrow H^{i-1}_{\mathrm{rig,c}}(Z/K) \longrightarrow H^i_{\mathrm{rig,c}}(U/K) \longrightarrow H^i_{\mathrm{rig,c}}(X/K) \longrightarrow$$

et l'hypothèse que l'assertion a) est vérifiée en dimension $< \dim X$ montrent qu'il est équivalent de démontrer l'énoncé a) pour X et pour U.

4) Si $U' \to U$ est un revêtement étale de k-variétés lisses, la cohomologie rigide à support propre de U' admet celle de U comme facteur direct, si bien qu'il suffit de démontrer l'assertion a) pour U'.

Démontrons maintenant a) par récurrence sur la dimension de X. D'après le théorème d'altération de de Jong ([37], th. 4.1), il existe un ouvert dense $U \subset X$, une k-variété projective et lisse X', un ouvert $U' \subset X'$ et un revêtement étale $U' \to U$.

D'après 2), l'assertion a) est vraie pour X'. D'après 3), elle est donc vraie pour U' et la remarque 4) entraîne sa véracité pour U, donc aussi pour X grâce à 3).

Remarque 5.3 (Références bibliographiques). — La démonstration est celle suggérée par Berthelot dans [6], remarque 3.9 et se trouve aussi dans l'article [17] de B. Chiarellotto et B. Le Stum. En suivant cette approche, ces auteurs ont aussi élucidé la structure des poids (c'est-à-dire des valeurs absolues archimédiennes des valeurs propres de Frobenius) sur la cohomologie rigide à support propre d'une variété sur un corps fini (cf. [15] et [16]). Ils doivent faire usage du théorème de Katz-Messing : dans [43], ces derniers déduisent des conjectures de Weil et du théorème de Lefschetz difficile en cohomologie ℓ-adique les théorèmes correspondants en cohomologie cristalline. Signalons aussi que Kedlaya a récemment adapté à la cohomologie rigide (voir [46]) la démonstration par Laumon des conjectures de Weil.

On peut en fait démontrer un analogue de ce théorème sur un corps fini, via la cohomologie étale ℓ-adique, et c'est ainsi que procède Ekedahl dans [25]. Cela nécessite de montrer au préalable que les valeurs propres de Frobenius sur la cohomologie ℓ-adique à support propre sont des entiers algébriques, ce qui est fait par Deligne (§ 5 de l'exposé [41]). On peut alors, par un dévissage analogue, étudier leurs valuations p-adiques.

Enfin, signalons un article de M. Kim [47] dans lequel la cohomologie rigide est remplacée par celle d'un complexe de de Rham-Witt à pôles logarithmiques.

6. LES THÉORÈMES D'EKEDAHL ET ESNAULT

Dans ce paragraphe, je présente deux théorèmes dus à T. Ekedahl [25] et H. Esnault [26] qui permettent de contrôler la partie de pentes < 1 dans la cohomologie rigide. Leur utilité apparaîtra aux paragraphes suivants, lorsque nous déduirons de cette partie de pente < 1 des renseignements géométriques. Dans [39], B. Kahn redémontre ces énoncés à l'aide des *motifs birationnels*, notion qu'il a introduite avec R. Sujatha.

Si (M, F) est un F-isocristal et si $\alpha \in \mathbf{Q}$, notons $M^{>\alpha}$ et $M^{<\alpha}$ les plus grands sous-F-isocristaux de M dont les pentes soient respectivement strictement supérieures et inférieures à α.

Théorème 6.1 (Ekedahl). — *Soit k un corps parfait de caractéristique positive. Soient X et Y deux k-schémas de type fini, intègres de même dimension d.*

a) *S'il existe une application rationnelle dominante $X \to Y$, il existe pour tout i, une injection (canonique) de F-isocristaux de $H^i_{\mathrm{rig,c}}(Y)^{>d-1}$ dans $H^i_{\mathrm{rig,c}}(X)^{>d-1}$.*

a′) *S'il existe une application rationnelle dominante $X \to Y$ et si X et Y sont lisses, $H^i_{\mathrm{rig}}(Y)^{<1}$ est un quotient de $H^i_{\mathrm{rig}}(X)^{<1}$.*

b) *Si X et Y sont birationnels, alors pour tout i, $H^i_{\mathrm{rig,c}}(X)^{>d-1}$ et $H^i_{\mathrm{rig,c}}(Y)^{>d-1}$ sont des F-isocristaux isomorphes.*

b′) *Si X et Y sont lisses et birationnels, alors pour tout i, les F-isocristaux $H^i_{\mathrm{rig}}(X)^{<1}$ et $H^i_{\mathrm{rig}}(Y)^{<1}$ sont isomorphes.*

Les énoncés a′) et b′) se déduisent des énoncés a) et b) par dualité de Poincaré. Il est par ailleurs clair que a) implique b), ce qui nous ramène à démontrer l'énoncé a).

Il existe des ouverts lisses et denses $U \subset X$ et $V \subset Y$ sur lesquels l'application rationnelle $X \to Y$ induit un morphisme fini et plat $f\colon U \to V$. Les suites exactes d'excision associées aux ouverts U et V et l'étude des pentes de la cohomologie rigide à support propre impliquent que l'on a des isomorphismes (induits par les inclusions)

$$H^i_{\mathrm{rig,c}}(U/K)^{>d-1} \longrightarrow H^i_{\mathrm{rig,c}}(X/K)^{>d-1}, \qquad H^i_{\mathrm{rig,c}}(V/K)^{>d-1} \longrightarrow H^i_{\mathrm{rig,c}}(Y/K)^{>d-1}.$$

Par ailleurs, sont attachés à f deux morphismes de F-isocristaux

$$f_*\colon H^i_{\mathrm{rig,c}}(U/K) \longrightarrow H^i_{\mathrm{rig,c}}(V/K) \quad \text{et} \quad f^*\colon H^i_{\mathrm{rig,c}}(V/K) \longrightarrow H^i_{\mathrm{rig,c}}(U/K)$$

tels que $f_* \circ f^* = \deg(f)$. Il en résulte que f^* est injectif et le résultat s'en déduit.

Théorème 6.2 (Esnault). — *Soit k un corps de caractéristique $p > 0$. Soit X une variété propre et lisse telle que, notant Ω une clôture algébrique du corps des fonctions $k(X)$, on ait $\mathrm{CH}_0(X_\Omega)_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}$. Alors, pour tout $i > 0$, $H^i_{\mathrm{rig}}(X/K)^{<1} = 0$.*

Une classe importante de variétés où la condition $\mathrm{CH}_0(X_\Omega)_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}$ est vérifiée est fournie par les variétés (géométriquement) rationnellement connexes par chaînes : il s'agit de variétés propres X pour lesquelles deux points quelconques sont joints par une chaîne de courbes rationnelles. Les variétés faiblement unirationnelles sont évidemment rationnellement connexes par chaînes ; ce théorème généralise ainsi l'un des résultats principaux de la note [25]. D'après un théorème dû indépendamment à F. Campana et à J. Kollár, Y. Miyaoka et S. Mori, les variétés de Fano, c'est-à-dire les variétés projectives lisses dont le fibré anticanonique est ample, sont rationnellement connexes par chaînes (voir [20], prop. 5.16.) Si le corps de base est de caractéristique zéro, par deux points quelconques d'une variété propre et lisse qui est rationnellement connexe par chaînes, passe en fait une courbe rationnelle.

Pour démontrer le théorème 6.2, on peut supposer que k est algébriquement clos. D'après un théorème de Bloch ([8, 9], je rappelle aussi l'argument plus bas), il existe un ouvert dense U de X et un point $x_0 \in X(k)$ tels que sur $U \times X$, notant Δ_X la diagonale de $X \times X$,

$$\Delta_X = U \times [x_0] \quad \text{dans } \mathrm{CH}_d(U \times X)_{\mathbf{Q}}. \tag{6.3}$$

Autrement dit, le graphe $\Gamma_j \subset U \times X$ de l'immersion fermée $j \colon U \to X$ est linéairement équivalent à $U \times [x_0]$ dans $\mathrm{CH}_d(U \times X)_{\mathbf{Q}}$.

Remarquons qu'une classe de cohomologie $\alpha \in H^{2d}_{\mathrm{rig}}(U \times X)$ définit une correspondance sur la cohomologie rigide à support propre :

$$\alpha_* \colon H^i_{\mathrm{rig,c}}(U) \xrightarrow{q^*} H^i_{\mathrm{rig,c}}(U \times X) \xrightarrow{\cap\alpha} H^{i+2d}_{\mathrm{rig,c}}(U \times X) \xrightarrow{p_*} H^i_{\mathrm{rig,c}}(X).$$

L'application q^* existe car X est propre, l'accouplement $\cap\alpha$ vient de celui entre cohomologie rigide à support propre et cohomologie rigide (défini dans [5]) et l'application p_* est la transposée, via la dualité de Poincaré, de l'application p^* sur la cohomologie rigide. Le graphe de j a une classe $\gamma(\Gamma_j)$ dans $H^{2d}_{\mathrm{rig}}(U \times X)$, construite dans [61] et l'on a pour tout i,

$$\gamma(\Gamma_j)_* = j_* \colon H^i_{\mathrm{rig,c}}(U) \longrightarrow H^i_{\mathrm{rig,c}}(X).$$

Mais la décomposition (6.3) affirme que modulo l'équivalence rationnelle, $\Gamma_j = p^*[x_0]$, donc, en passant aux classes de cycles ([61], prop. 6.10),

$$\gamma(\Gamma_j) = p^*\gamma([x_0]), \qquad \gamma([x_0]) \in H^{2d}_{\mathrm{rig}}(X)$$

Par suite, pour toute classe $\xi \in H^i_{\mathrm{rig,c}}(U)$,

$$\begin{aligned} j_*(\xi) &= \gamma(\Gamma_j)_*(\xi) = p_*(q^*(\xi) \cap p^*(\gamma([x_0])) \\ &= p_*(q^*(\xi)) \cap \gamma([x_0]). \end{aligned}$$

Comme $p_*(q^*(\xi)) \in H^{i-2d}_{\mathrm{rig,c}}(X)$, il est nul pour $i < 2d$ et finalement, les homomorphismes $j_* \colon H^i_{\mathrm{rig,c}}(U) \to H^i_{\mathrm{rig,c}}(X)$ sont nuls pour $0 \leqslant i < 2d$. (En degré $2d$, c'est un isomorphisme.) D'après le théorème 6.1, ils induisent des isomorphismes sur les parties de pentes $> d-1$. Par conséquent, pour tout i, le F-isocristal $H^i_{\mathrm{rig,c}}(X)^{>d-1}$ est nul.

Par dualité de Poincaré, $H^i_{\mathrm{rig}}(X)^{<1} = 0$ si $i > 0$.

Donnons pour terminer la démonstration de l'existence d'une décomposition (6.3). L'hypothèse est que $\mathrm{CH}_0(X_\Omega)_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}$, où Ω est une clôture algébrique de $k(X)$. On suppose toujours que le corps k est algébriquement clos. Soit x_0 un point k-rationnel de X et soit η son point générique ; ils définissent deux points de $X(k(X))$ et leur différence α est un 0-cycle sur $X_{k(X)}$. Par hypothèse, leur différence est de torsion sur X_Ω, donc sur une extension finie K de $k(X)$. En prenant des normes, on voit que α est déjà de torsion dans $\mathrm{CH}_0(X_{k(X)})$. Cela signifie qu'il existe un ouvert U de X tel que le d-cycle $\overline{\alpha} = X \times [x_0] - \Delta_X$ est de torsion sur $U \times X$.

Remarque 6.4. — Si $\dim X \leqslant 3$, et si X est séparablement unirationnelle, ou bien de Fano, on sait que les groupes de cohomologie $H^i(X, \mathscr{O}_X)$ sont nuls pour $i \geqslant 1$ (Nygaard [60], Shepherd-Barron [65]). On peut alors en déduire que pour $i \geqslant 1$, $H^i(X, W\mathscr{O}_X) = 0$, d'où une autre approche au théorème 6.2.

Remarque 6.5. — Dans [26], H. Esnault énonce son théorème sous l'hypothèse, apparemment plus forte, que $\mathrm{CH}_0(X_\Omega) = \mathbf{Z}$; elle est en fait équivalente. Notons $\mathrm{CH}_0(X_\Omega)^0$ le noyau de l'application degré $\mathrm{CH}_0(X_\Omega) \to \mathbf{Z}$ et soit $\mathrm{alb} \colon X \to A$ l'application d'Albanese de X_Ω. Comme A est engendrée par l'image de X, l'application $\mathrm{CH}_0(X_\Omega)^0 \to A(\Omega)$ déduite de alb est surjective. Si $\mathrm{CH}_0(X_\Omega)_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}$, $\mathrm{CH}_0(X_\Omega)^0$ est un groupe de torsion, $A(\Omega)$ aussi, et donc $A = 0$. Par ailleurs, un théorème de Roĭtman [62] complété par Milne [57] affirme que l'application $\mathrm{CH}_0(X_\Omega)^0 \to A(\Omega)$ induit un isomorphisme sur les sous-groupes de torsion. Il en résulte que $\mathrm{CH}_0(X_\Omega)^0$ est sans torsion, donc nul. Ainsi, $\mathrm{CH}_0(X_\Omega) = \mathbf{Z}$.

7. RETOUR SUR LA FONCTION ZÊTA

Comme je l'ai déjà mentionné au § 5, la formule des traces de Lefschetz en cohomologie rigide à support propre montre que la partie de la cohomologie de pente $< \alpha$ fournit une congruence modulo q^α pour le nombre de points rationnels.

Par suite, les théorèmes 6.1 et 6.2 impliquent le théorème suivant :

THÉORÈME 7.1. — *Soit X et Y deux variétés propres, lisses et géométriquement connexes sur le corps fini $\mathbf{F}_q$. Soit Ω une clôture algébrique de $\mathbf{F}_q(X)$.*

a) *Si X et Y sont birationnelles, alors $|X(\mathbf{F}_q)| \equiv |Y(\mathbf{F}_q)| \pmod q$;*

b) *Si $\mathrm{CH}_0(X_\Omega)_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}$, alors $|X(\mathbf{F}_q)| \equiv 1 \pmod q$.*

Même si l'énoncé a) ne figure pas explicitement dans la note [25], c'en est une conséquence immédiate. D'un autre côté, il est évident si X et Y sont liées par un éclatement de centre lisse. Il le serait plus généralement pour tout couple de variétés birationnelles, si l'on disposait d'un théorème de factorisation faible en caractéristique positive. Dans leur article récent [50], G. Lachaud et M. Perret ont fait marcher cette approche en dimension 3.

Puisque les variétés de Fano sur un corps algébriquement clos sont rationnellement connexes par chaînes, il en résulte ainsi le théorème, conjecturé par Lang et Manin [53] :

Corollaire 7.2 (Esnault). — *Soit X une variété de Fano sur un corps fini $\mathbf{F}_q$. Alors, $|X(\mathbf{F}_q)| \equiv 1 \pmod q$. Il est en particulier non nul.*

On en déduit aussi le résultat :

Proposition 7.3. — *Soit X une variété propre, lisse et géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbf{F}_q$. Supposons que X soit géométriquement dominée par une k-variété Y, propre, lisse et connexe, de même dimension, telle que $H^i_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Q}_p) = 0$ si $i \neq 0$. Alors, pour toute extension finie $\mathbf{F}$ de $\mathbf{F}_q$, $|X(\mathbf{F})| \equiv 1 \pmod p$.*

Remarque 7.4. — Le théorème d'Esnault peut être mis en parallèle avec plusieurs résultats récents. Soit k le corps des fonctions d'une courbe projective et lisse sur un corps algébriquement clos. Graber, Harris, Starr [30], et de Jong et Starr [38] ont montré qu'une k-variété projective, lisse qui est séparablement rationnellement connexe a un point rationnel. Un tel corps k, de même qu'un corps fini, est C_1, donc de dimension cohomologique au plus 1. Cependant, Colliot-Thélène et Madore ont construit dans [18] une surface cubique sur $\mathbf{Q}$ (une telle surface est séparablement rationnellement connexe) et un corps de dimension cohomologique 1 sur laquelle elle n'a pas de point rationnel. La question de savoir si une variété séparablement rationnellement connexe (voire rationnellement connexe par chaînes) sur un corps C_1 admet un point rationnel reste ouverte.

Remarque 7.5. — Contrairement aux théorèmes d'Ax et Katz, la démonstration du théorème 6.2 nécessite une hypothèse de lissité. Bloch, Esnault et Levine [10] ont proposé de remplacer la décomposition de la diagonale dans le groupe de Chow (formule (6.3)) par une décomposition analogue dans un groupe de *cohomologie motivique* adéquat. Leur condition entraîne une minoration des pentes de la cohomologie rigide et ils ont montré qu'elle est vérifiée dans le cas des hypersurfaces de degré $d \leqslant n$ éventuellement singulières de l'espace projectif $\mathbf{P}^n$.

8. SIMPLE CONNEXITÉ DE CERTAINES VARIÉTÉS

On peut aussi appliquer ces considérations pour étudier le groupe fondamental de certaines variétés algébriques, notamment les variétés unirationnelles.

Rappelons que J-P. Serre a démontré dans [64] que le groupe fondamental d'une telle variété est trivial, pourvu que le corps de base soit *de caractéristique zéro.*

LEMME 8.1. — *Soit X une variété projective lisse, géométriquement connexe, sur un corps de caractéristique zéro. On suppose que X est unirationnelle, ou que X est de Fano, ou, Ω désignant la clôture algébrique du corps des fonctions de X, que* $\mathrm{CH}_0(X_\Omega)_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}$. *Alors,* $\chi(X, \mathscr{O}_X) = 1$.

Dans le premier cas, on a en effet $H^0(X, \Omega^i_X) = 0$, pour $i > 0$, comme on le voit en tirant une i-forme de X à l'espace projectif : elle y sera régulière hors d'un lieu de codimension 2, donc partout, donc nulle. En caractéristique zéro, cet espace a même dimension que $H^i(X, \mathscr{O}_X)$, d'où l'assertion. Dans le second cas, si $i > 0$, $H^i(X, \mathscr{O}_X)$ est dual de $H^{d-i}(X, \omega_X^{-1})$, donc est nul par le théorème d'annulation de Kodaira.

Le dernier cas se démontre en décomposant la diagonale mais en théorie de Hodge. Par le même argument que dans la preuve du théorème 6.2, il existe un ouvert dense U de X tel que l'application $H^i_{\mathrm{DR}}(X) \to H^i_{\mathrm{DR}}(U)$ soit nulle pour $i > 0$. D'autre part, la théorie de Hodge mixte de P. Deligne fournit une factorisation

$$H^i_{\mathrm{DR}}(X) \longrightarrow H^i_{\mathrm{DR}}(U) \longrightarrow H^i(X, \mathscr{O}_X),$$

l'application composée étant surjective (*cf.* [22], (3.2.13), (*ii*)). Il en résulte que $H^i(X, \mathscr{O}_X) = 0$ pour $i > 0$.

COROLLAIRE 8.2. — (En caractéristique zéro.) *Une variété propre et lisse qui est unirationnelle, ou de Fano, ou rationnellement connexe par chaînes, n'a pas de revêtement étale fini non trivial.*

Si $f\colon Y \to X$ est un tel revêtement, remarquons que l'hypothèse implique que Y est aussi unirationnelle (*resp.* de Fano). Par suite, on a $\chi(Y, \mathscr{O}_Y) = 1$. Or, le théorème de Riemann-Roch implique que $f_* \operatorname{ch}(\mathscr{O}_Y) = \deg(f) \operatorname{ch}(\mathscr{O}_X)$, si bien que $\chi(Y, \mathscr{O}_Y) = \deg(f)\chi(X, \mathscr{O}_X)$. Nécessairement, $\deg(f) = 1$.

Remarque 8.3. — a) Si le corps de base est $\mathbf{C}$, le groupe fondamental topologique de telles variétés est aussi trivial.

b) Soit X une surface d'Enriques sur le corps des nombres complexes. Bloch, Kas et Lieberman montrent dans [11] que sur X, tout zéro-cycle et de degré nul est rationnellement équivalent à 0. L'hypothèse $\mathrm{CH}_0(X_\Omega)_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}$ ne suffit donc pas à assurer la validité du corollaire précédent.

En caractéristique $p > 0$, les choses sont plus compliquées. Tout d'abord, il existe des surfaces unirationnelles non simplement connexes (Shioda, [66]) : si $p \neq 5$ et $p \not\equiv 1 \pmod 5$, la surface d'équation

$$X_0^5 + X_1^5 + X_2^5 + X_3^5 = 0$$

dans $\mathbf{P}^3$ est unirationnelle mais possède une action libre du groupe des racines 5-ièmes de l'unité (par $X_i \to \zeta^i X_i$). La surface de Godeaux obtenue par quotient est alors unirationnelle mais n'est pas simplement connexe : son groupe fondamental est $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$. Cet exemple montre aussi qu'en caractéristique positive, une variété rationnellement connexe par chaînes X ne vérifie pas forcément $H^i(X, \mathscr{O}_X) = 0$.

Toutefois, on peut démontrer qu'une variété propre, définie sur un corps algébriquement clos qui est normale et rationnellement connexe par chaînes, a un groupe fondamental fini (Kollàr [49], voir aussi Campana [13], ainsi que la note [14]). De plus, les variétés dites *séparablement rationnellement connexes* sont simplement connexes. (Cela résulte du théorème de de Jong et Starr, *cf.* l'exposé [21] d'O. Debarre.)

Le résultat suivant a été démontré par T. Ekedahl ([25]) dans le cas unirationnel.

Proposition 8.4. — *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et soit X une variété propre, lisse sur k. Si X est de Fano, ou si X est rationnellement connexe par chaînes, son groupe fondamental est un groupe fini d'ordre premier à p.*

D'après le lemme 5.1, si X est unirationnelle, *resp.* de Fano, *resp.* rationnellement connexe par chaînes, sur un corps algébriquement clos k de caractéristique p, on a $\chi_{\text{ét,c}}(X, \mathbf{Q}_p) = 1$. Mais un revêtement étale d'un tel X est aussi unirationnel (*resp.* de Fano, *resp.* rationnellement connexe par chaînes). Soit ainsi un revêtement étale $Y \to X$, galoisien de groupe G et soit P un p-sous-groupe de Sylow de G, de sorte que le revêtement $Y \to Y/P$ est étale galoisien de groupe P. Les variétés Y et Y/P sont rationnellement connexes par chaînes, si bien que $\chi_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Q}_p) = \chi_{\text{ét}}(Y/P, \mathbf{Q}_p) = 1$. Le lemme 8.5 ci-dessous affirme que $\chi_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Q}_p) = |P|\chi_{\text{ét}}(Y/P, \mathbf{Q}_p)$. Par suite, $P = \{1\}$ et tout revêtement étale de X est d'ordre premier à p. La proposition résulte alors de ce que le groupe fondamental de X est fini.

Pour que la démonstration de la prop. 8.4 soit complète, il reste à démontrer la formule d'Euler-Poincaré en cohomologie étale p-adique suivante, établie par R. Crew dans [19].

Lemme 8.5. — *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p et soit $f\colon Y \to X$ un revêtement étale galoisien de k-schémas séparés de type fini, de degré une puissance de p. On a alors les formules suivantes entre caractéristiques d'Euler-Poincaré en cohomologie étale à support propre :*

$$\chi_{\text{ét,c}}(Y, \mathbf{Q}_p) = \deg(f)\chi_{\text{ét,c}}(X, \mathbf{Q}_p) \quad \textit{et} \quad \chi_{\text{ét,c}}(Y, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = \deg(f)\chi_{\text{ét,c}}(X, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}).$$

En considérant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_p \longrightarrow \mathbf{Z}_p \longrightarrow \mathbf{Z}/p \longrightarrow 0$$

et en utilisant le fait que la cohomologie étale à support propre à coefficients dans $\mathbf{Z}_p$ est représentée par un complexe parfait de $\mathbf{Z}_p$-modules, on démontre que

$$\chi_{\text{ét,c}}(Y, \mathbf{Q}_p) = \chi_{\text{ét,c}}(Y, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \quad \text{et} \quad \chi_{\text{ét,c}}(X, \mathbf{Q}_p) = \chi_{\text{ét,c}}(X, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}),$$

si bien que la seconde formule implique la première.

Le faisceau étale $f_*(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ sur X est localement constant et correspond à une représentation de son groupe fondamental sur un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension $d = \deg(f)$, représentation qui provient d'une représentation de $\mathrm{Gal}(Y/X)$. Comme ce groupe est un p-groupe, cette représentation est extension successive de représentations triviales. Autrement dit, $f_*(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ est extension successive de d faisceaux $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Par suite

$$\chi_{\text{ét,c}}(Y, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = \chi_{\text{ét,c}}(X, f_*(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})) = d\chi_{\text{ét,c}}(X, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}).$$

RÉFÉRENCES

[1] J. Ax – « Zeroes of polynomials over finite fields », *Amer. J. Math.* **86** (1964), p. 255–261.

[2] P. Berthelot – *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique* $p > 0$, Lecture Notes in Math., vol. 407, Springer Verlag, 1974.

[3] ______, « Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p », in *Introductions aux cohomologies p-adiques (Luminy, 1984)*, Mém. Soc. Math. France, vol. 23, 1986, p. 7–32.

[4] ______, « Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres. Première partie », Prépublication, IRMAR, Université Rennes 1, 1996.

[5] ______, « Dualité de Poincaré et formule de Künneth en cohomologie rigide », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **325** (1997), no. 5, p. 493–498.

[6] ______, « Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide », *Invent. Math.* **128** (1997), no. 2, p. 329–377, Avec un appendice en anglais par A.J. de Jong.

[7] P. Berthelot & A. Ogus – *Notes on crystalline cohomology*, Math. Notes, vol. 21, Princeton Univ. Press, 1978.

[8] S. Bloch – *Lectures on algebraic cycles*, Duke University Mathematics Series, IV, Duke University Mathematics Department, Durham, N.C., 1980.

[9] ______, « On an argument of Mumford in the theory of algebraic cycles », in *Journées de Géometrie Algébrique d'Angers, Juillet 1979/Algebraic Geometry, Angers, 1979*, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, p. 217–221.

[10] S. Bloch, H. Esnault & M. Levine – « Decomposition of the diagonal and eigenvalues of Frobenius for Fano hypersurfaces », 2003, *arXiv:math.AG/0302109*.

[11] S. Bloch, A. Kas & D.I. Lieberman – « Zero cycles on surfaces with $p_g = 0$ », *Compositio Math.* **33** (1976), no. 2, p. 135–145.

[12] E. Bombieri – « On exponential sums in finite fields. II », *Invent. Math.* **47** (1978), no. 1, p. 29–39.

[13] F. Campana – « Remarques sur les groupes de Kähler nilpotents », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **28** (1995), p. 307–316.

[14] A. Chambert-Loir – « À propos du groupe fondamental des variétés rationnellement connexes par chaînes », 2003, *arXiv:math.AG/0303051*.

[15] B. Chiarellotto – « Weights in rigid cohomology applications to unipotent F-isocrystals », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **31** (1998), no. 5, p. 683–715.

[16] B. Chiarellotto & B. Le Stum – « F-isocristaux unipotents », *Compositio Math.* **116** (1999), no. 1, p. 81–110.

[17] ______, « Pentes en cohomologie rigide et F-isocristaux unipotents », *Manuscripta Math.* **100** (1999), no. 4, p. 455–468.

[18] J.-L. Colliot-Thélène & D.A. Madore – « Surfaces de Del Pezzo sans point rationnel sur un corps de dimension cohomologique un », 2003.

[19] R.M. Crew – « Etale p-covers in characteristic p », *Compositio Math.* **52** (1984), no. 1, p. 31–45.

[20] O. Debarre – *Higher-dimensional algebraic geometry*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001.

[21] ______, « Variétés rationnellement connexes », in *Séminaire Bourbaki, Vol. 2001/02*, Astérisque, Soc. Math. France, Paris, 2004, exposé 905, p. 243–266.

[22] P. Deligne – « Théorie de Hodge II », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **40** (1972), p. 5–57.

[23] ______, « La conjecture de Weil, I », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **43** (1974), p. 273–307.

[24] B. Dwork – « On the rationality of the zeta function of an algebraic variety », *Amer. J. Math.* **82** (1960), p. 631–648.

[25] T. Ekedahl – « Sur le groupe fondamental d'une variété unirationnelle », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **297** (1983), no. 12, p. 627–629.

[26] H. Esnault – « Varieties over a finite field with trivial Chow group of 0-cycles have a rational point », *Invent. Math.* **151** (2003), no. 1, p. 187–191, *arXiv: math.AG/0207022*.

[27] J.-Y. Étesse & B. Le Stum – « Fonctions L associées aux F-isocristaux surconvergents. I. Interprétation cohomologique », *Math. Ann.* **296** (1993), no. 3, p. 557–576.

[28] ______, « Fonctions L associées aux F-isocristaux surconvergents. II. Zéros et pôles unités », *Invent. Math.* **127** (1997), no. 1, p. 1–31.

[29] J.-M. Fontaine & W. Messing – « p-adic periods and p-adic étale cohomology », in *Arithmetic geometry* (Arcata, 1985), Contemporary mathematics, vol. 67, Amer. Math. Soc., 1987, p. 179–207.

[30] T. Graber, J. Harris & J. Starr – « Families of rationally connected varieties », *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), no. 1, p. 57–67.

[31] E. Grosse-Klönne – « Finiteness of de Rham cohomology in rigid analysis », *Duke Math. J.* **113** (2002), no. 1, p. 57–91.

[32] A. Grothendieck – « Crystals and the de Rham cohomology of schemes », in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas* [34], p. 306–358.

[33] A. Grothendieck, P. Deligne & N.M. Katz – *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, Lecture Notes in Math., no. 288-340, Springer Verlag, 1972-73, SGA 7.

[34] A. Grothendieck et al. – *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Adv. Stud. in pure Math., North-Holland, 1968.

[35] R. Hartshorne – « On the De Rham cohomology of algebraic varieties », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **45** (1975), p. 5–99.

[36] L. Illusie – « Complexe de de Rham–Witt et cohomologie cristalline », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **12** (1979), p. 501–661.

[37] A.J. de Jong – « Smoothness, semistability and alterations », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **83** (1996), p. 51–93.

[38] A.J. de Jong & J. Starr – « Every rationally connected variety over the function field of a curve has a rational point », 2002, *http://www-math.mit.edu/˜dejong/papers/familyofcurves3.dvi*.

[39] B. Kahn – « Number of points of function fields over finite fields », 2002, *arXiv:math.NT/0210202*.

[40] N.M. Katz – « On a theorem of Ax », *Amer. J. Math.* **93** (1971), p. 485–499.

[41] ———, « Le niveau de la cohomologie des intersections complètes », in *Groupes de monodromie en géométrie algébrique* [33], SGA 7, p. 363–399.

[42] ———, « Slope filtration of F-crystals », in *Journées de Géométrie algébrique de Rennes*, Astérisque, vol. 63, Soc. Math. France, Paris, 1979, p. 113–164.

[43] N.M. Katz & W. Messing – « Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields », *Invent. Math.* **23** (1974), p. 73–77.

[44] K.S. Kedlaya – « Counting points on hyperelliptic curves using Monsky-Washnitzer cohomology », *J. Ramanujan Math. Soc.* **16** (2001), no. 4, p. 323–338.

[45] ———, « Finiteness of rigid cohomology with coefficients », 2002, *arXiv:math.AG/0208027*.

[46] ———, « Fourier transforms and p-adic Weil II », 2002, *arXiv:math.NT/0210149*.

[47] M. Kim – « A vanishing theorem for Fano varieties in positive characteristic », 2002, *arXiv:math.AG/0201183*.

[48] S. Kleiman – « Algebraic cycles and the Weil conjectures », in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas* [34], p. 359–386.

[49] J. Kollár – « Shafarevich maps and plurigenera of algebraic varieties », *Invent. Math.* **113** (1993), p. 177–216.

[50] G. Lachaud & M. Perret – « Un invariant birationnel des variétés de dimension 3 sur un corps fini », *J. Algebraic Geometry* **9** (2000), no. 3, p. 451–458.

[51] A.G.B. Lauder & D.Q. Wan – « Computing zeta functions of Artin-Schreier curves over finite fields », *LMS J. Comput. Math.* **5** (2002), p. 34–55 (electronic).

[52] Yu.I. Manin – « The theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic », *Russian Math. Surveys* **18** (1963), p. 1–80.

[53] ———, « Notes on the arithmetic of Fano threefolds », *Compositio Math.* **85** (1993), no. 1, p. 37–55.

[54] B. Mazur – « Frobenius and the Hodge filtration », *Bull. Amer. Math. Soc.* **78** (1972), p. 653–667.

[55] ———, « Frobenius and the Hodge filtration (estimates) », *Ann. of Math.* **98** (1973), p. 58–95.

[56] Z. Mebkhout – « Sur le théorème de finitude de la cohomologie p-adique d'une variété affine non singulière », *Amer. J. Math.* **119** (1997), no. 5, p. 1027–1081.

[57] J.S. Milne – « Zero cycles on algebraic varieties in nonzero characteristic : Roĭtman's theorem », *Compositio Math.* **47** (1982), no. 3, p. 271–287.

[58] P. Monsky & G. Washnitzer – « Formal cohomology I », *Ann. of Math.* **88** (1968), p. 181–217.

[59] O. Moreno & C.J. Moreno – « Improvements of the Chevalley-Warning and the Ax-Katz theorems », *Amer. J. Math.* **117** (1995), no. 1, p. 241–244.

[60] N. Nygaard – « On the fundamental group of a unirational 3-fold », *Invent. Math.* **44** (1978), no. 1, p. 75–86.

[61] D. Petrequin – « Classes de Chern et classes de cycles en cohomologie rigide », *Bull. Soc. Math. France* **131** (2003), p. 59–121.

[62] A.A. Roĭtman – « The torsion of the group of 0-cycles modulo rational equivalence », *Ann. of Math.* **111** (1980), no. 3, p. 553–569.

[63] T. Satoh – « The canonical lift of an ordinary elliptic curve over a finite field and its point counting », *J. Ramanujan Math. Soc.* **15** (2000), no. 4, p. 247–270.

[64] J.-P. Serre – « On the fundamental group of a unirational variety », *J. London Math. Soc.* **34** (1959), p. 481–484.

[65] N.I. Shepherd-Barron – « Fano threefolds in positive characteristic », *Compositio Math.* **105** (1997), no. 3, p. 237–265.

[66] T. Shioda – « An example of unirational surface in characteristic p », *Math. Ann.* **211** (1974), p. 233–236.

[67] N. Tsuzuki – « Cohomological descent of rigid cohomology for proper coverings », *Invent. Math.* **151** (2003), no. 1, p. 101–133.

[68] D.Q. Wan – « A Chevalley-Warning approach to p-adic estimates of character sums », *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), no. 1, p. 45–54.

[69] E. Warning – « Bemerkung zur vorstehenden Arbeit von Herr Chevalley », *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **11** (1936), p. 76–83.

[70] A. Weil – « Number of solutions of equations in finite fields », *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), p. 397–508.

Antoine CHAMBERT-LOIR

Centre de mathématiques (CMAT)
École polytechnique
F-91128 Palaiseau Cedex
E-mail : `chambert@math.polytechnique.fr`