Astérisque

CHRISTIAN BONATTI

Dynamiques génériques : hyperbolicité et transitivité

Astérisque, tome 290 (2003), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 904, p. 225-242
<http://www.numdam.org/item?id=SB_2001-2002__44__225_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 2002
54^e année, 2001-2002, n^o 904, p. 225 à 242

DYNAMIQUES GÉNÉRIQUES : HYPERBOLICITÉ ET TRANSITIVITÉ

par **Christian BONATTI**

INTRODUCTION

Pour structurer la dynamique globale d'un difféomorphisme f d'une variété compacte M, on cherche à caractériser les parties de M qui sont « indécomposables » pour f. La notion la plus naturelle d'indécomposabilité est sans doute la notion d'*ensemble minimal* : un compact K invariant par f est dit *minimal* s'il est minimal pour l'inclusion parmi les compacts invariants, ce qui se caractérise par le fait que toute orbite d'un point de K est dense dans K. Le Théorème de Zorn entraîne que toute orbite contient un minimal dans son adhérence. En fait, il y a en général trop de minimaux pour structurer la dynamique : le classique « Fer à Cheval » de Smale contient un ensemble non dénombrable de ces minimaux.

Ensembles transitifs maximaux

Une notion moins restrictive d'indécomposabilité est la transitivité. Un ensemble compact K invariant par f est dit *transitif* s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

– il existe un point x de K dont l'orbite positive $\{f^n(x), n \geqslant 0\}$ est dense dans K ;
– pour tout couple U, V d'ouverts de K, il existe $n > 0$ tel que $f^n(U) \cap V$ soit non vide ;
– l'ensemble des points de K dont l'orbite positive et l'orbite négative sont denses dans K contient un G_δ dense dans K. On dira que l'orbite d'un *point générique de* K est dense dans K.

On s'intéresse aux parties transitives qui ne sont pas une sous-partie d'une autre plus grande : outre l'indécomposabilité, on souhaite la maximalité. Si $\{K_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ est une famille de compacts f-invariants transitifs, totalement ordonnée pour $\subset$, on vérifie facilement que $\overline{\bigcup_{i\in\mathcal{I}} K_i}$ est encore un compact f-invariant transitif. L'ensemble des compacts transitifs invariants, ordonné par $\subset$, est donc inductif et le Théorème de Zorn implique que tout compact transitif est contenu dans un *transitif maximal.*

Cette notion a un inconvénient : les transitifs maximaux d'un difféomorphisme ne sont pas toujours disjoints(1). Pour cette raison, on introduit la notion plus forte de *transitif saturé* : un compact K f-invariant transitif est dit *saturé* s'il contient tout compact transitif qui l'intersecte. Deux transitifs saturés sont donc disjoints ou confondus.

Le Théorème de décomposition spectrale de Smale

Cette approche est déjà celle de la théorie de Smale des dynamiques hyperboliques(2) : le théorème de décomposition spectrale de Smale (voir [Sm]) articule la dynamique des difféomorphismes hyperboliques autour des pièces basiques qui, outre l'indécomposabilité et la maximalité (elles sont des transitifs maximaux), possèdent trois autres propriétés fondamentales : l'isolement, la finitude, et la robustesse. Plus précisément :

– La variété admet une *filtration adaptée à f*, c'est-à-dire une famille $\varnothing = M_{k+1} \subset M_k \subset \cdots \subset M_1 = M$ de sous-variétés compactes à bord M_i, de même dimension que M, strictement invariante par f, c'est-à-dire que $f(M_i)$ est contenu dans l'intérieur $\overset{o}{M}_i$ de M_i.

– Considérons l'ensemble Λ_i des points dont l'orbite (positive et négative) reste dans la « tranche » $M_i \setminus \overset{o}{M}_{i+1}$: en formule $\Lambda_i = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(M_i \setminus \overset{o}{M}_{i+1})$. On dit que Λ_i est *l'ensemble maximal invariant dans $M_i \setminus \overset{o}{M}_{i+1}$*. Alors Λ_i est un compact transitif.

– Il existe un C^1-voisinage $\mathcal{U}_f$ de f tel que pour tout $g \in \mathcal{U}_f$ la filtration M_i est adaptée à g et l'ensemble maximal invariant $\Lambda_i(g)$ de g dans $M_i \setminus \overset{o}{M}_{i+1}$ est un compact transitif.

On sait que les dynamiques hyperboliques ne sont pas denses dans l'ensemble des difféomorphismes de classe C^1 pour les variétés de dimension trois ou plus(3). On aimerait pouvoir donner une description analogue à celle donnée par le théorème de

(1)Exemple : soit A un difféomorphisme d'Anosov du tore T^2. Notons f_0 le difféomorphisme du tore $T^5 = T^2 \times T^2 \times S^1$ défini par $f_0(x,y,t) = (A(x), A(y), t)$. Soit φ une fonction de T^5 dans $[0,+\infty[$ qui est nulle exactement sur $T^4 \times \{1/2\}$ et sur $(T^2 \times \{0\} \cup \{0\} \times T^2) \times \{0\}$. Finalement soit $f = g \circ f_0$ où g est le temps 1 du flot de $\varphi\frac{\partial}{\partial t}$.
Les ensembles $T^2 \times \{0\} \times \{0\}$ et $\{0\} \times T^2 \times \{0\}$ sont des transitifs maximaux de f qui s'intersectent au point $0 \in T^5$.

(2)Dans cet exposé, j'appellerai *difféomorphismes hyperboliques* les difféomorphismes qui vérifient l'axiome A (hyperbolicité de l'ensemble $\Omega(f)$ des points non errants et densité dans $\Omega(f)$ de l'ensemble des points périodiques) et la transversalité forte (transversalité de toute intersection entre une variété stable et une variété instable). Rappelons que l'hyperbolicité est équivalente à la C^1-stabilité stucturelle, d'après les théorèmes de Robbin, Robinson et Mañé.

(3)En dimension 2, les difféomorphismes hyperboliques ne sont pas C^1-denses si l'on exige la transversalité forte (nécessaire à la stabilité structurelle). La C^1-densité des difféomorphismes axiome A décomposition spectrale, pour un ensemble aussi large que possible de dynamiques, si possible une partie dense ou générique de $\mathrm{Diff}^1(M)$.

Pièces élémentaires de dynamiques

Plusieurs notions apparaissent comme les candidats naturels pour substituer les pièces basiques des dynamiques hyperboliques, suivant que l'on désire garder telle ou telle de leurs propriétés, la propriété indispensable restant la transitivité (indécomposabilité) :

– (Indécomposabilité, maximalité) Les ensembles maximaux transitifs et transitifs saturés, le problème étant de les caractériser.

– (Indécomposabilité, isolement, robustesse) L. Díaz, E. Pujals et R. Ures ont défini dans ce but la notion *d'ensemble robustement transitif* : si U est un ouvert de M et $\mathcal{U}$ un C^1-voisinage de f tel que, pour tout $g \in \mathcal{U}$ l'ensemble maximal invariant $\Lambda_g = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} g^n(\bar{U})$ est un compact transitif contenu dans U, on dit que Λ_f est robustement transitif.

Si U est un *voisinage filtrant* de f, (i.e. $U = M_i \setminus \overset{o}{M}_{i+1}$ pour une filtration M_i adaptée à f), l'ensemble Λ_f est naturellement aussi maximal.

– Finalement, de façon moins conceptuelle mais plus constructive, à toute orbite périodique selle p on associe sa *classe homocline* $H(p, f)$ comme étant l'adhérence des points d'intersection transverse de ses variétés invariantes (stable et instable). Les classes homoclines sont des ensembles transitifs canoniquement associés aux points périodiques hyperboliques de type selle.

Dans le cas des dynamiques hyperboliques ces trois notions coïncident : les pièces basiques du théorème de décomposition spectrale sont à la fois les classes homoclines, les ensembles maximaux transitifs (et saturés), et sont robustement transitifs. Dans [BD], nous posions le problème suivant :

Pour tout difféomorphisme générique(4) *f, les classes homoclines sont-elles les maximaux transitifs de f ?*

Ensemble maximaux transitifs des dynamiques génériques

Récemment, des idées de R. Mañé ([Ma1]) et des lemmes de perturbations en topologie C^1 (Lemme de connexion de Hayashi et ses généralisations par Hayashi, Xia et Wen et Arnaud) ont permis de répondre complètement au problème ci-dessus, et

---

sans cycles reste un problème ouvert. Cependant l'ensemble des difféomorphismes axiome A n'est pas dense en topologie C^2 (Théorème de Newhouse voir [N, PT]).

(4) Dans tout ce texte nous utiliserons des abus de langage du type « *tout difféomorphisme générique de M vérifie une propriété $\mathcal{P}$* » pour dire « *il existe une partie $\mathcal{R} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ résiduelle (i.e. contenant un G_δ dense) telle que $\mathcal{P}$ est vraie pour tout f de $\mathcal{R}$.* », sauf si nous voulons expliciter le résiduel $\mathcal{R}$ où $\mathcal{P}$ est vérifiée.

de préciser les liens entre une forme affaiblie d'hyperbolicité (*décomposition dominée*, encore appelée *hyperbolicité projective*) et la transitivité robuste.

Voici une présentation cohérente de ces résultats qui donne un panorama général de la dynamique des difféomorphismes C^1-génériques[(5)] :

THÉORÈME 1

– [Ar, CMP] *Il existe un ensemble résiduel* $\mathcal{R} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ *de difféomorphismes* f *pour lesquels toute classe homocline* $H(p, f)$, $p \in \mathrm{Per}(f)$ *est un ensemble maximal transitif, saturé (en particulier deux classes homoclines sont disjointes ou confondues).*

– [Ab] *Le cardinal* $n(f) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *de l'ensemble* $\{H(p, f), p \in \mathrm{Per}(f)\}$ *est localement constant sur* $\mathcal{R}$ *(tout* $f \in \mathcal{R}$ *possède un voisinage* U_f *tel que* $n(f) = n(g)$ *pour tout* $g \in U_f \cap \mathcal{R}$*).*

Nous dirons qu'un difféomorphisme $f \in \mathcal{R}$ est apprivoisé si $n(f) \in \mathbb{N}$ et qu'il est sauvage si $n(f) = +\infty$. Le théorème de décomposition spectrale de Smale se généralise aux dynamiques apprivoisées, justifiant ainsi leur nom :

THÉORÈME 2

– [Ab] *Si* $f \in \mathcal{R}$ *est apprivoisé alors, quitte à restreindre* U_f, *il existe une filtration* $\varnothing = M_{k+1} \subset M_k \subset \cdots \subset M_1 = M$, $k = n(f)$, *adaptée à tous les difféomorphismes* $g \in U_f$. *De plus, pour tout* $g \in U_f \cap \mathcal{R}$, *l'ensemble maximal invariant* $\Lambda_i(g)$ *du voisinage filtrant* $M_i \setminus \overset{o}{M}_{i+1}$ *est un transitif saturé qui est une classe homocline.*

– [CM] *L'union des bassins d'attractions des* $\Lambda_i(g)$ *qui sont des attracteurs topologiques est dense dans* M.

Ce résultat amène naturellement à affaiblir la notion d'ensemble robustement transitif : on parlera d'ensemble *génériquement transitif*, si la transitivité n'est obtenue que pour les difféomorphismes génériques au voisinage de f. Les ensembles génériquement transitifs possèdent une forme affaiblie d'hyperbolicité (voir l'appendice A pour les définitions des formes affaiblies d'hyperbolicité).

THÉORÈME 3 ([Ma1, DPU, BDP, Ab]). — *Tout ensemble génériquement transitif* K *est* hyperbolique en volume, *c'est-à-dire qu'il possède une décomposition dominée* $TM_K = E_1 \oplus \cdots \oplus E_\ell$ *telle que la différentielle* f_* *contracte uniformément le volume dans* E_1 *et dilate uniformément le volume dans* E_ℓ.

Il n'existe pour l'instant aucun exemple connu d'ensemble génériquement transitif qui ne soit pas robustement transitif, et nous conjecturons que ces deux notions coïncident, sur un ouvert dense de difféomorphismes.

---

(5) Cette présentation est un assemblage de travaux de, par ordre alphabétique : Abdenur, Arnaud, Bonatti, Carballo, Díaz, Hayashi, Morales, Pacifico, Pujals, Rocha, Ures, Viana, Wen, Xia... et Mañé, omniprésent dans l'esprit de ces travaux.

On espère que l'hyperbolicité en volume, nécessaire à la transitivité robuste, permettra de donner une description de ces ensembles génériquement transitifs. À l'opposé, le Théorème 3 permet de construire des exemples de dynamiques sauvages. Il existe en effet des mécanismes maintenant assez bien compris, permettant de construire des classes homoclines n'ayant, de façon robuste, aucune décomposition dominée. Ceci nous a permis de montrer :

THÉORÈME 4 ([BD2]). — *Pour toute variété compacte M de dimension $\geqslant 3$, il existe un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathrm{Diff}^1(M)$ et une partie résiduelle $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$, telle que tout $f \in \mathcal{W}$ admet un ensemble non dénombrable d'ensembles transitifs saturés qui ne contiennent aucune orbite périodique.*

Structure de cet exposé

Dans la suite de cet exposé je chercherai à donner une intuition de ces résultats et les idées qui ont permis de les démontrer, sans chercher à résumer les preuves, parfois longues et techniques.

– La première partie construit des exemples de difféomorphismes robustement transitifs non hyperboliques. Ces exemples ont eu un grand rôle dans la théorie, en permettant de comprendre jusqu'où on pouvait relâcher l'hyperbolicité.
– La seconde présente les idées de Mañé qui permettent de montrer qu'un peu d'hyperbolicité est nécessaire à la transitivité robuste.
– La troisième met en parallèle les récents théorèmes de connexions et leurs conséquences sur les classes homoclines des difféomorphismes génériques.
– La quatrième décrit un exemple à l'opposé de ceux de la première partie : l'absence robuste de toute forme d'hyperbolicité casse la dynamique en une infinité de « petites dynamiques » indépendantes.

1. EXEMPLES DE DIFFÉOMORPHISMES ROBUSTEMENT TRANSITIFS

On dit qu'un difféomorphisme f d'une variété compacte M est *robustement transitif* s'il appartient à l'intérieur C^1 de l'ensemble des difféomorphismes transitifs ; en d'autres termes et suivant la terminologie introduite ci-dessus, f est robustement transitif si la variété M est elle-même un ensemble robustement transitif.

Plus généralement, nous dirons qu'une propriété de f est *robuste* si elle est valide sur un C^1-voisinage de f.

1.1. Exemples classiques

Voyons d'abord deux exemples très différents de difféomorphismes transitifs, sur le tore T^2 :

– Si $a = (a_1, a_2)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées a_1 et a_2 sont irrationnelles et indépendantes sur $\mathbb{Q}$, la translation $(x, y) \mapsto (x + a_1, y + a_2)$ induit un difféomorphisme du tore T^2 dont toutes les orbites sont denses.
– Si $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ est une matrice de trace différente de ± 2 (par exemple la célèbre matrice $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$) elle induit sur le tore T^2 un difféomorphisme transitif, appelé *difféomorphisme d'Anosov*, possédant une infinité d'orbites périodiques.

La dynamique d'une translation irrationnelle peut paraître plus parfaite : elle est minimale (toutes les orbites sont denses) et uniquement ergodique. Elle est cependant très fragile : la transitivité ne résiste pas aux perturbations de la dynamique.

Voici une démonstration rapide et élémentaire (n'utilisant pas la puissance de la théorie hyperbolique de Smale) du résultat très classique suivant :

THÉORÈME 5. — *Le difféomorphisme d'Anosov $A \in \mathrm{Diff}^1(T^2)$ est robustement transitif.*

Démonstration. — Soit E^s et E^u les directions propres de la matrice A, associées aux valeurs propres λ^{-1} et λ de A, de module respectivement < 1 et > 1. On écrit tout vecteur de la forme $v = v^s + v^u$ et on note $\mathcal{C}^s$ et $\mathcal{C}^u$ les cônes définis par

$$v \in \mathcal{C}^u \quad \text{si} \quad \|v^u\| \geqslant 2\|v^s\| \quad \text{et} \quad v \in \mathcal{C}^s \quad \text{si} \quad \|v^s\| \geqslant 2\|v^u\|.$$

Voici deux remarques simples :

(1) Il existe $L > 0$ tel que, si γ^s et γ^u sont des segments immergés dans T^2, tangents respectivement aux cônes stable et instable, et chacun de longueur supérieure à L, alors $\gamma^s \cap \gamma^u \neq \varnothing$.
(2) Il existe un C^1-voisinage $\mathcal{U}$ de A tel que tout difféomorphisme $f \in \mathcal{U}$ vérifie :
   – pour tout vecteur $v \in \mathcal{C}^u \subset T_p(T^2)$ le vecteur $w = f_*(v)$ appartient encore au cône $\mathcal{C}^u$, et de plus $\|w^u\| \geqslant \sqrt{\lambda}\|v^u\|$;
   – pour tout vecteur $v \in \mathcal{C}^s \subset T_p(T^2)$ le vecteur $w = f_*^{-1}(v)$ appartient encore au cône $\mathcal{C}^s$, et de plus $\|w^u\| \geqslant \sqrt{\lambda}\|v^u\|$.

La seconde de ces remarques montre que tout ouvert O_1 de T^2 possède des itérés positifs $f^n(O_1)$, $n > 0$, contenant des segments de longueur L tangents au cône instable. De la même façon les itérés négatifs grands d'un ouvert O_2 contiennent des segments de longueur L tangents au cône stable. La première remarque assure alors que $f^{n+m}(O_1) \cap O_2$ est non vide, prouvant la transitivité de f. □

1.2. Difféomorphismes robustement transitifs non hyperboliques

Voici quelques remarques simples :

– Si un difféomorphisme transitif possède deux points périodiques hyperboliques d'indices de Morse (dimension de la variété instable) différents, il ne peut pas être hyperbolique.

– Dans le même esprit : pour qu'un difféomorphisme transitif d'une variété compacte de dimension 4 ne soit pas partiellement hyperbolique (i.e. ne laisse invariant aucun sous-fibré uniformément contractant ou dilatant) il suffit qu'il possède trois points fixes de type selle : un point d'indice 1, un point d'indice 3, et finalement un point d'indice 2 ayant deux valeurs propres complexes (non réelles) (une de module > 1 et une de module < 1).

– Pour qu'un difféomorphisme f soit transitif, il suffit qu'il possède un point périodique hyperbolique x de type selle dont les variétés stable et instable sont denses dans la variété M : en effet, si U et V sont deux ouverts de M, U contient alors un disque transverse à la variété stable de x, et le classique « λ-Lemma » implique alors que les itérés positifs de ce disque s'accumulent sur toute la variété instable de x, et rencontrent donc V.

– Soit f un difféomorphisme d'une variété compacte M, partiellement hyperbolique, possédant un fibré uniformément dilatant. Soit p un point périodique hyperbolique de type selle de f. On suppose que toute orbite de feuille du feuilletage instable fort $\mathcal{F}^u$ coupe la variété stable $W^s(p)$ de l'orbite de p. Alors la variété stable de p est robustement dense.

Démonstration. — En effet cette propriété implique qu'il existe L tel que le disque de rayon L centré en p dans $W^s(p)$ coupe tout disque de rayon L d'une feuille de $\mathcal{F}^u$. La famille des disques instables de rayon $2L$ est une famille compacte, variant continûment avec le difféomorphisme. On en déduit que, pour tout difféomorphisme g suffisamment C^1-proche de f, le disque de rayon $2L$ centré en p de $W^s(p, g)$ coupe tout disque de $\mathcal{F}^u(g)$ de rayon $2L$. Par invariance par g^{-1} on en déduit que $W^s(p, g)$ coupe tout disque instable arbitrairement petit, et donc est dense. □

Ces quelques idées permettent de reconstruire simplement des exemples de difféomorphismes robustement transitifs non hyperboliques, mais partiellement hyperboliques, ayant à la fois un fibré uniformément contractant et un fibré uniformément dilatant. Voici en quelques mots l'exemple construit par M. Shub dans [Sh] :

Considérons une famille différentiable $f_x \colon T^2 \to T^2$ de difféomorphismes de T^2, dont le paramètre x varie dans le tore T^2. On suppose que, pour $x = 0 \in T^2$, le difféomorphisme f_0 est un difféomorphisme d'Anosov.

Soit $A\colon T^2 \to T^2$ un difféomorphisme d'Anosov admettant 0 comme point fixe. Alors pour tout n assez grand, le difféomorphisme $F\colon T^2 \times T^2 \to T^2 \times T^2$ défini par $F(x,y) = (A^n(x), f_x(y))$ est partiellement hyperbolique, les feuilletages stable et instable forts de F se projetant sur les feuilletages stable et instable du difféomorphisme A.

THÉORÈME 6. — *Le difféomorphisme F défini ci-dessus est robustement transitif.*

Démonstration. — Soit 0 un point fixe du difféomorphisme f_0, si bien que $p_f = (0,0)$ est un point fixe de F. Nous allons montrer que sa variété stable et sa variété instable sont robustement denses dans T^4, ce qui conclut, d'après la 3ème des remarques ci-dessus.

Pour cela, on remarque que la fibre $T_F = \{0\} \times T^2$ est une variété compacte, F-invariante et normalement hyperbolique. Un théorème de Hirsch, Pugh et Shub [HPS] montre que cette variété invariante a une continuation G-invariante T_G, pour tout difféomorphisme G suffisamment C^1-proche de F. On peut alors considérer les variétés stable et instable du tore T_G, notées $W^s(T_G)$ et $W^u(T_G)$, unions des feuilles stables et instables fortes, respectivement, passant par T_G. On remarque que $W^s(T_F)$ coupe toutes les feuilles instables fortes, ce qui prouve qu'elle est robustement dense dans le tore T^4, d'après notre 4ème remarque ci-dessus. De même $W^u(T_F)$ est robustement dense dans T^4.

Pour tout G suffisamment C^1-proche de F, la restriction de G à T_G est un difféomorphisme d'Anosov conjugué à f_0 et nous noterons p_G le point fixe de G dans T_G qui est la continuation de p_F. On remarque que la variété stable de p_G dans T_G est dense dans T_G et on en déduit que l'union des feuilles stables fortes s'appuyant sur les points de la variété stable de p_G dans T_G est dense dans $W^s(T_G)$ et donc dans T^4. La variété stable de p_G est donc robustement dense dans T^4 et il en est de même pour sa variété instable, ce qui prouve la transitivité robuste. □

Pour construire un exemple où F est un difféomorphisme robustement transitif et robustement non hyperbolique, il suffit que, pour un point fixe $x \neq 0$ de A, l'application f_x ait un point fixe y attracteur ou répulseur : le point (x,y) est alors un point fixe selle d'indice 1 ou 3 de F, et la première remarque montre que F n'est pas hyperbolique.

Ce type d'argument utilise fortement l'existence d'un feuilletage stable fort et d'un feuilletage instable fort, et ne peut pas servir pour construire des difféomorphismes robustement transitifs non partiellement hyperboliques. Un autre type d'argument a été utilisé par Mañé ([Ma2]) pour construire un difféomorphisme robustement transitif, robustement non hyperbolique de T^3 : il considère un difféomorphisme d'Anosov linéaire de T^3 ayant trois valeurs propres réelles différentes, $\lambda_1 < 1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Il fait alors une perturbation de cette application, à support dans une toute petite boule B, et qui conserve une décomposition invariante en trois fibrés unidimensionnels, un instable fort, un stable fort et un central. En utilisant l'expansion uniforme dans la direction instable forte, il montre que tout ouvert contient au moins un point dont les itérés positifs ne passent qu'un nombre fini de fois dans B. Comme en dehors de B la dynamique coïncide avec la dynamique du difféomorphisme d'Anosov initial, les itérés d'un petit disque centré en x dans la direction instable vont contenir un disque de rayon fixé, qui coupera tout segment stable fort de longueur assez grande. La transitivité robuste est obtenue comme dans la preuve, donnée ci-dessus, de la transitivité robuste des difféomorphismes d'Anosov du tore (Théorème 5). La non hyperbolicité est obtenue en créant, dans B, un point fixe d'indice de Morse égal à 1.

Cet argument a été adapté par M. Viana et moi-même (voir [BV]) pour construire sur le tore T^4 des difféomorphismes robustement transitifs qui n'admettent aucun sous-fibré invariant uniformémement contractant ou dilatant : les difféomorphismes que nous construisons admettent une unique décomposition dominée $E^1 \oplus E^2$ (E_i de dimension 2) telle que l'aire est uniformément contractée dans E^1 et uniformément dilaté dans E^2. Comme dans l'exemple de Mañé, nous les construisons C^1-proches d'un difféomorphisme d'Anosov en dehors de deux petites boules B_1 et B_2. Nous adaptons le raisonnement de Mañé en utilisant l'expansion uniforme du volume au lieu de la dilatation uniforme, pour montrer que tout ouvert contient un point dont seul un nombre fini d'itérés positifs passent dans les boules B_i et un point dont seul un nombre fini d'itérés négatifs passent dans les boules B_i. On obtient alors la transitivité robuste comme dans l'exemple de Mañé.

L'absence de fibré hyperbolique invariant est alors donnée par la présence d'un point fixe d'indice 1 dans B_1, d'un point d'indice 3 dans B_2 et d'un point ayant des valeurs propres complexes (comme dans les remarques).

2. DE L'HYPERBOLICITÉ EN VOLUME POUR LES DYNAMIQUES ROBUSTEMENT TRANSITIVES

2.1. En dimension 2 : l'argument de Mañé

Dans [Ma1], R. Mañé montre que tout difféomorphisme robustement transitif d'une surface compacte est un difféomorphisme d'Anosov du tore T^2. Sa preuve se décompose en deux étapes :

PROPOSITION 2.1. — *Soit f un difféomorphisme d'une surface compacte S et soit $\mathcal{E} = \{x_i\}$ un ensemble d'orbites périodiques de type selle de f. Alors l'une des affirmations suivantes est vérifiée :*

(1) *ou bien la décomposition naturelle de TM au-dessus de $\mathcal{E}$ donnée par les directions stable $E^s(x)$ et instable $E^u(x)$ des points x de $\mathcal{E}$ est dominée ;*

(2) *ou bien, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point $x \in \mathcal{E}$ et une ε-C^1-perturbation g de f à support sur un voisinage arbitrairement petit de l'orbite de x de façon que x soit un puits ou une source de g.*

PROPOSITION 2.2. — *Supposons à présent que $\mathcal{E}$ possède une décomposition dominée $TM_{\mathcal{E}} = E \oplus F$ mais que $\bar{\mathcal{E}}$ n'est pas hyperbolique. Alors il existe g aussi C^1-proche de f que l'on veut tel que g possède un puits ou une source contenue dans un voisinage arbitrairement petit de $\bar{\mathcal{E}}$.*

Les preuves de ces deux étapes sont de natures très différentes :

Pour la première étape, un lemme de Franks permet réaliser toute perturbation de la différentielle de f au-dessus d'un ensemble fini, sans modifier f sur cet ensemble, par une C^1-perturbation de f à support dans un voisinage arbitraire de cet ensemble. Mañé utilise alors deux idées simples (je supposerai ici que f préserve l'orientation) :

– Si une matrice hyperbolique $A \in GL_+(2, \mathbb{R})$ a ses directions propres qui font entre elles un angle inférieur à ε, alors il existe $\alpha \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ tel que $R_\alpha \circ A$ possède une valeur propre complexe, où R_α est la rotation d'angle α. Remarquons qu'une orbite périodique en dimension 2 qui a une valeur propre complexe (non réelle) est (ou peut être perturbée en) un puits ou une source.

– Si la décomposition $E^s \oplus E^u$ n'est pas dominée, c'est que certaines orbites tardent à voir leur hyperbolicité : pour tout $n > 0$, il existe $x \in \mathcal{E}$ tel que f_*^n ne dilate pas les vecteurs de $E^u(x)$ deux fois plus que ceux de $E^s(x)$. Mañé montre que l'on peut alors perturber la différentielle de f le long de l'orbite de x, de façon que l'angle entre les nouvelles directions stable et instable au point $f^n(x)$ soit très petit. Le premier item permet alors de créer un puits ou une source, par une nouvelle perturbation.

Pour la deuxième étape, Mañé a trouvé une démonstration très astucieuse et profonde. Bien qu'elle ait certains côtés un peu techniques, je ne résiste pas au plaisir de vous la présenter :

Si E n'est pas uniformément contractant, c'est qu'il existe des points de $\mathcal{E}$ qui tardent à voir la contraction. Mañé construit alors une mesure μ à support sur $\bar{\mathcal{E}}$ telle que l'intégrale du logarithme de la dérivée de f dans la direction E est positive ou nulle. Cette propriété reste vraie pour au moins une des composantes ergodiques de μ : on peut donc supposer μ ergodique. On en déduit que μ-presque tout point a un exposant de Lyapunov positif dans la direction E.

Mañé prouve alors un raffinement important du Lemme de Fermeture de Pugh ; il montre que μ-presque tout point x possède une infinité de temps $n > 0$ tels que l'on peut « fermer l'orbite de x au temps n » :

il existe g C^1-proche de f telle que x est périodique pour g de période n et $g^i(x)$ et $f^i(x)$ restent très proches l'un de l'autre pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

C'est le Lemme de Fermeture Ergodique. En fermant ainsi l'orbite d'un point ayant un exposant positif ou nul dans la direction de E, il crée un nouveau point périodique ayant une valeur propre proche de 1 (en valeur absolue) dans la direction de E. Une nouvelle perturbation rend cette valeur propre strictement plus grande que 1 : le point devient donc une source, ce qui conclut la preuve.

2.2. Généralisation en dimension plus grande

Si l'on applique directement les techniques de Mañé en dimension plus grande, on obtient que, en l'absence de décomposition dominée, il existe des points périodiques dont on va pouvoir faire changer l'indice de Morse par une petite perturbation. Les exemples de difféomorphismes robustement transitifs non hyperboliques montrent que ceci n'est pas suffisant pour briser la transitivité. Pour obtenir un puits ou une source (qui, eux, brisent la transitivité), [DPU] et [BDP] vont utiliser une propriété dynamique supplémentaire de l'ensemble des orbites périodiques homocliniquement liées à un point périodique p : si x et y sont de telles orbites, il existe des orbites périodiques z qui accompagnent x un temps arbitraire, puis s'approchent de y un temps uniformément borné et accompagnent y en un temps arbitraire, etc. Cette propriété permet, en quelque sorte, de multiplier les différentielles de f (à la période) des points x et y.

Cette propriété des classes homoclines a permis de montrer :

THÉORÈME 7 ([BDP]). — *Soit f un difféomorphisme d'une variété compacte et soit p un point périodique hyperbolique de type selle f. On suppose que la classe homocline $H(p, f)$ n'admet aucune décomposition dominée. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point périodique x de f homocliniquement lié à p, ayant la propriété suivante :*

Pour tout voisinage U de l'orbite de x, il existe un difféomorphisme g, ε-C^1-proche de f, coïncidant avec f hors de U et le long de l'orbite de x, tel que la différentielle $g_*^n(x)$ soit une homothétie, où n est la période de x.

Ce résultat montre l'existence d'une décomposition dominée pour toute dynamique robustement transitive. La démonstration de l'hyperbolicité en volume (dilatation et contraction uniforme du volume dans les fibrés extrémaux de la décomposition dominée la plus fine) est alors une adaptation facile de l'argument de Mañé en dimension 2.

3. CLASSES HOMOCLINES DES DIFFÉOMORPHISMES GÉNÉRIQUES

3.1. Classes homoclines des points périodiques selles

Considérons un difféomorphisme f d'une variété compacte M et p un point périodique hyperbolique de f. On définit la classe homocline $H(p, f)$ de p comme l'adhérence des points d'intersection transverse des variétés stable et instable de p. En formule :

$$H(p, f) = \overline{W^s(p) \pitchfork W^u(p)}.$$

C'est bien sûr un compact invariant par f. Rappelons la démonstration du fait classique suivant :

LEMME 3.1. — *La classe homocline $H(p,f)$ est un ensemble transitif.*

Démonstration. — Considérons deux ouverts U, V de M rencontrant K. L'ouvert U contient un point homocline transverse et contient donc un disque instable D^u transverse à $W^s(p)$ en un point $x \in H(p,f) \cap U$, et de même V contient un disque D^s tranverse à $W^u(p)$ en un point $y \in H(p,f) \cap V$. Le λ-lemma implique que les itérés $f^n(D^u)$ convergent quand $n \to +\infty$ vers toute la variété instable de p, et ceci en topologie C^1. On en déduit qu'il existe n tel que $f^n(D^u)$ coupe transversalement D^s en un point proche de y. Ce point est un point homocline transverse et donc appartient à $H(p,f)$. On vient de montrer que $f^n(H(p,f) \cap U)$ rencontre $H(p,f) \cap V$, ce qui montre la transitivité de $H(p,f)$. □

Voici une autre façon de voir la classe homocline : on dit que deux points périodiques selles x et y sont *homocliniquement liés* si la variété stable et la variété instable de x possèdent chacune une intersection transverse avec la variété instable et la variété stable, respectivement, de y. Ceci implique que x et y ont même indice de Morse. Le λ-lemma permet de montrer simplement que cette relation est une relation d'équivalence.

La classe homocline de p coïncide avec l'adhérence de l'ensemble des points périodiques de même indice que p et homocliniquement liés à p.

On a ainsi associé de façon canonique un ensemble transitif à toute orbite périodique hyperbolique.

3.2. Difféomorphismes génériques

Les propriétés des difféomorphismes génériques sont intimement liées aux théorèmes de perturbations, et la raison essentielle pour laquelle les propriétés des difféomorphismes génériques sont pour la topologie C^1 est que le lemme de fermeture de Pugh, le lemme de connexion de Hayashi et ses généralisations, et enfin un lemme de Franks utilisent tous la topologie C^1 (voir [Pu, Ha, Ar, WX, F]).

L'un des lemmes de perturbations les plus célèbres est le lemme de fermeture de C. Pugh :

THÉORÈME ([Pu]). — *Si f est un difféomorphisme d'une variété compacte et si x est un point non errant de f, alors il existe g arbitrairement C^1-proche de f tel que x est périodique pour g.*

Le lemme de fermeture et le théorème de Kupka-Smale permettent de montrer :

COROLLAIRE. — *Pour tout difféomorphisme générique, l'ensemble $\Omega(f)$ des points non errants de f coïncide avec l'adhérence de l'ensemble des points périodiques de f, et de plus ceux-ci sont tous hyperboliques, et toute intersection entre leurs variétés invariantes est transverse.*

Longtemps conjecturé, le lemme de connexion d'Hayashi a permis de reprendre l'étude des dynamiques génériques :

THÉORÈME ([Ha]). — *Soient p et q deux points périodiques hyperboliques et supposons qu'il existe une suite de points x_n convergeant vers un point x de $W^u_{\mathrm{loc}}(p)$ et des itérés $y_n = f^{m(n)}(x_n)$, $m(n) \geqslant 0$, convergeant vers un point $y \in W^s_{\mathrm{loc}}(q)$.*

Il existe alors g, arbitrairement C^1-proche de f, tel que les points x et y soient sur une même orbite hétérocline des points p et q ; en d'autres termes :

$$x \in W^u_{\mathrm{loc}}(p,g),\ \ y \in W^s_{\mathrm{loc}}(q,g) \ \textit{et il existe } n > 0 \ \textit{tel que } g^n(x) = y.$$

Si p et q appartiennent à un même ensemble transitif K, les suites de points x_n et y_n (de l'énoncé ci-dessus) sont obtenues naturellement à l'aide d'une orbite positive dense dans K. Ceci a permis de montrer :

COROLLAIRE 3.2 ([BD]). — *Pour tout difféomorphisme générique, deux points périodiques p et q appartiennent à un même ensemble transitif si et seulement si leurs classes homoclines sont égales.*

Voici maintenant une généralisation du lemme de connexion d'Hayashi que l'on peut trouver dans [WX] ou dans [Ar] :

THÉORÈME 8. — *Soit x un point non périodique de f, et soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $N > 0$ tel que, pour tout voisinage U du segment d'orbite $\{f^{-N}(x), \ldots, f^N(x)\}$, il existe un voisinage V de x avec la propriété suivante :*

Soient p et q deux points hors de U tels qu'il existe n, m deux entiers positifs tels que $f^n(p) \in V$ et $f^{-m}(q) \in V$. Il existe un difféomorphisme g, ε-C^1-proche de f, coïncidant avec f hors de U et il existe $k > 0$ tel que $g^k(p) = q$.

Voici un exemple d'application directe qui est sans doute de lecture plus facile :

THÉORÈME 9. — *Soient p_0 et q_0 deux points périodiques de f tels que $\overline{W^s(p_0,f)} \cap \overline{W^u(q_0,f)}$ contient un point non périodique x. Alors il existe g aussi C^1-proche que l'on veut de f tel que $x \in W^s(p_0,f) \cap W^u(q_0,f)$.*

Cette généralisation a permis à M.-C. Arnaud de montrer :

COROLLAIRE 3.3 ([Ar]). — *Pour tout difféomorphisme f générique et tout $p \in$* Per(f) *on a :*

$$H(p,f) = \overline{W^u(p)} \cap \overline{W^s(q)}.$$

Une variante de cette généralisation a permis à C. Carballo, C. Morales et M.J. Pacifico de montrer :

COROLLAIRE 3.4 ([CMP]). — *Pour tout difféomorphisme f générique et tout point périodique p de f, $\overline{W^u(p)}$ est stable au sens de Lyapunov* [(6)] *et $\overline{W^s(p)}$ est stable au sens de Lyapunov pour f^{-1}.*

De ces deux corollaires on déduit le corollaire suivant qui est la première partie du Théorème 1 :

COROLLAIRE 3.5 ([CMP]). — *Pour tout difféomorphisme f générique et tout $p \in$ $\mathrm{Per}(f)$, la classe homocline $H(p, f)$ est un ensemble transitif saturé.*

Démonstration. — Soit K un compact transitif rencontrant $H(p, f)$, et soit x une orbite positivement et négativement dense dans K. L'orbite de x s'approche donc arbitrairement près d'un point de $\overline{W^u(p)}$. Comme $\overline{W^u(p)}$ est stable au sens de Lyapunov, on en déduit que K est inclus dans des voisinages arbitrairement petits de $\overline{W^u(p)}$, et donc finalement est inclus dans $\overline{W^u(p)}$. De même K est inclus dans $\overline{W^s(p)}$, et donc dans $\overline{W^u(p)} \cap \overline{W^s(p)}$. D'après le Corollaire 3.3, K est donc inclus dans $H(p, f)$. □

Voici finalement quelques remarques simples qui sont à la base de la preuve de la seconde partie du Théorème 1 :

– La classe homocline $H(p, f)$ est semi-continue inférieurement pour la distance de Hausdorff : en effet les disques compacts de $W^s(p, f)$ ou de $W^u(p, f)$ varient continûment avec f et les intersections transverses entre ces disques compacts varient donc elles aussi de façon continue avec f.

– Le même argument montre que les adhérences $\overline{W^s(p, f)}$ et $\overline{W^u(p, f)}$ varient de façon semi-continue inférieure avec f.

– En conséquence des items précédents, pour f générique les classes homoclines $H(p, f)$ et les adhérences $\overline{W^s(p, f)}$ et $\overline{W^u(p, f)}$ varient continûment avec f.

4. EXEMPLES DE DYNAMIQUES SAUVAGES

On considère un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ tel qu'il existe un point périodique p_f variant continûment avec $f \in \mathcal{U}$ ayant les propriété suivantes :

– Pour tout $f \in \mathcal{U}$ la classe homocline de p_f contient deux points d'indice différent et possédant chacun une valeur propre complexe (non réelle) (contractante pour l'un et dilatante pour l'autre).

– Pour tout $f \in \mathcal{U}$ il existe deux points périodiques de même indice que p_f et homocliniquement liés à p_f tels que l'un soit de jacobien > 1 et l'autre de jacobien < 1.

(6) Un compact invariant K est dit stable au sens de Lyapunov si, pour tout voisinage U de K, il existe un voisinage V de K dont les orbites positives sont incluses dans U : de façon équivalente, K possède une base de voisinages positivement invariants.

Le premier item implique que la classe homocline $H(p_f, f)$ n'a aucune décomposition dominée. Le Théorème 7 montre que $H(p_f, f)$ possède des points périodiques dont la dérivée peut être perturbée de façon à devenir une homothétie. Le deuxième item permet de choisir ce point de façon que son jacobien soit aussi proche de 1 que l'on veut, si bien que l'on obtient finalement un point périodique dont la dérivée (à la période) est l'identité.

Ceci permet de montrer :

THÉORÈME 10 ([BD2]). — *Il existe une partie résiduelle $\mathcal{R}$ de $\mathcal{U}$ telle que tout $f \in \mathcal{R}$ possède une infinité de disques D_n périodiques (de période t_n), d'orbites deux à deux disjointes, avec la propriété universelle suivante : pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de difféomorphisme de D^3 dans l'intérieur $\overset{o}{D^3}$, il existe n tel que la restriction de f^{t_n} au disque D_n est différentiablement conjuguée à un élément de $\mathcal{O}$.*

En remarquant que l'ensemble des difféomorphismes de D^3 dans $\overset{o}{D^3}$ contient un ouvert $\mathcal{U}_0$ possédant les propriétés de $\mathcal{U}$ décrites ci-dessus, on obtient un procédé de renormalisation : il existe une partie résiduelle de $\mathcal{U}$ qui contient une infinité de disques périodiques D_n qui contiennent chacun une infinité de disques périodiques qui contiennent eux-mêmes une infinité de disques périodiques, etc.

On crée ainsi un arbre dont chaque branche est une suite, décroissante pour l'inclusion, d'orbites de disques strictement périodiques et dont la période tend vers l'infini. L'intersection de cette suite décroissante est un compact transitif, Lyapunov stable et donc saturé, conjugué à un *odomètre* (adding machine) et donc sans orbite périodique. L'ensemble des branches infinies de cet arbre étant non dénombrable, on obtient le Théorème 4.

A. HYPERBOLICITÉ : UNIFORME, PARTIELLE, PROJECTIVE, EN VOLUME

Soit f un difféomorphisme d'une variété compacte et soit $\mathcal{E}$ un compact de M invariant par f. Voici une définition « minimaliste » de la notion de décomposition dominée (i.e. ayant le moins d'hypothèses inutiles possibles) :

DÉFINITION A.1. — *Soit $\mathcal{E}$ une partie de M invariante par f (i.e. $f(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$). Considérons une décomposition $TM_x = E_1(x) \oplus \cdots \oplus E_k(x)$, $x \in \mathcal{E}$, de l'espace tangent en tout point de $\mathcal{E}$. On dira que cette décomposition est dominée si elle vérifie les propriétés suivantes :*

(1) *Pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, la dimension de $E_i(x)$ ne dépend pas de $x \in \mathcal{E}$.*

(2) *La décompostion est invariante par l'action naturelle de la différentielle f_* de f : en d'autres termes $E_i(f(x)) = f_*(E_i(x))$.*

(3) *Il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{E}$ tout couple $1 \leqslant i < j \leqslant k$ et tout couple $u \in E_i(x) \smallsetminus \{0\}, v \in E_j(x) \smallsetminus \{0\}$, on a l'inégalité suivante :*

$$\frac{\|f_*^\ell(u)\|}{\|u\|} \leqslant \frac{\|f_*^\ell(v)\|}{2\|v\|}.$$

(Certains auteurs parlent d'*hyperbolicité projective* en présence d'une décomposition dominée.)

Voyons quelques propriétés élémentaires des décompositions dominées :

– (Continuité) Toute décomposition dominée sur un ensemble $\mathcal{E}$ est continue et s'étend de façon unique à l'adhérence de $\mathcal{E}$.

– (Extension à un voisinage) Il existe un voisinage U de $\bar{\mathcal{E}}$ tel que l'ensemble maximal invariant $\Lambda(\bar{U}, f)$ dans $\bar{U}$ possède une décomposition dominée prolongeant celle définie sur $\mathcal{E}$.

– (Robustesse) Il existe un C^1-voisinage $\mathcal{U}_f$ de f tel que pour tout $g \in \mathcal{U}_f$ l'ensemble maximal invariant $\Lambda(\bar{U}, g)$ possède une décomposition dominée variant continûment avec g.

– (Unicité) Si $\mathcal{E}$ admet une décomposition dominée, alors il existe une (unique) décomposition dominée $TM|_{\mathcal{E}} = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$, appelée *la décomposition dominée la plus fine*, telle que toute autre décomposition dominée $F_1 \oplus \cdots \oplus F_l$ de $\mathcal{E}$ s'obtient en regroupant les fibrés E_i.

On dira qu'un des fibrés E_i est *uniformément contractant* si (quitte à augmenter l'entier ℓ dans la définition ci-dessus) on a :

$$\frac{\|f_*^\ell(u)\|}{\|u\|} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{E} \text{ et tout } u \in E_i(x) \smallsetminus \{0\}.$$

Bien sûr, la domination implique que, si E_i est uniformément contractant, alors tous les E_j, $j \leqslant i$ le sont aussi.

De même on dit que E_i est *uniformément dilatant* si $\|f_*^\ell(u)\|/\|u\| \geqslant 1/2$ pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout $u \in E_i(x) \smallsetminus \{0\}$. Dans ce cas les fibrés E_j, $j \geqslant i$, sont aussi uniformément dilatants.

Un compact f-invariant K est *hyperbolique* s'il existe une décomposition dominée $TM|_K = E^s \oplus E^u$ où E^s est uniformément contractant et E^u est uniformément dilatant.

Un compact f-invariant K sera dit *partiellement hyperbolique* s'il possède une décomposition dominée et si l'un des sous-fibrés E_i de sa décomposition dominée la plus fine est uniformément contractant ou dilatant. On notera alors E^s et E^u la somme des sous-fibrés uniformément contractants et dilatants, respectivement, et E^c la somme des autres sous-fibrés. On obtient ainsi une nouvelle décomposition dominée du type $E^s \oplus E^c$, $E^c \oplus E^u$ ou $E^s \oplus E^c \oplus E^u$, ces fibrés étant appelés respectivement fibrés stable, central et instable.

Si f est un difféomorphisme partiellement hyperbolique d'une variété compacte M possédant une décomposition dominée $E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$ telle que E_k soit uniformément dilatant, Brin et Pesin ([BrPe]) montrent l'existence d'un unique feuilletage $\mathcal{F}^u$ f-invariant tangent à E_k et dont les feuilles sont aussi différentiables que f, appelé *feuilletage instable fort.*

RÉFÉRENCES

[Ab] F. ABDENUR – « Generic robustness of spectral decompositions », preprint IMPA, 2001.

[Ar] M.-C. ARNAUD – « Création de connexions en topologie C^1 », *Ergod. Th. & Dynam. Systems* **21** (2001), p. 339–381.

[BD] CH. BONATTI & L.J. DÍAZ – « Connexions hétéroclines et généricité d'une infinité de puits ou de sources », *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4e série* **32** (1999), p. 135–150.

[BD2] ———, « On maximal transitive sets of generic diffeomorphisms », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **96** (2002), p. 171–197.

[BDP] CH. BONATTI, L.J. DÍAZ & E. PUJALS – « A C^1–generic dichotomy for diffeomorphisms : weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources », à paraître aux *Annals of Math.*

[BV] CH. BONATTI & M. VIANA – « SRB for partially hyperbolic attractors : the contracting case », *Israel Journal of Math.* **115** (2000), p. 157–193.

[BrPe] M. BRIN & YA. PESIN – « Partially hyperbolic dynamical systems », *Izv. Acad. Nauk. SSSR* **1** (1974), p. 177–212.

[CM] C. CARBALLO & C. MORALES – « Homoclinic classes and finitude of attractors for vector fields on n-manifolds », Preprint, 2001.

[CMP] C. CARBALLO, C. MORALES & M.J. P. FICO – « Homoclinic class for C^1-generic vector fields », preprint PUC-Rio, à paraître à *Ergod. Th. & Dynam. Systems*, 2000.

[DPU] L.J. DÍAZ, E. PUJALS & R. URES – « Partial hyperbolicity and robust transitivity », *Acta Math.* **183** (1999), p. 1–43.

[F] J. FRANKS – « Necessary conditions for stability of diffeomorphisms », *Trans. Amer. Math. Soc.* **158** (1971), p. 301–308.

[Ha] S. HAYASHI – « Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1-stability and Ω-stability conjectures for flows », *Ann. of Math.* **145** (1997), p. 81–137.

[HPS] M. HIRSCH, C. PUGH & M. SHUB – *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Math., vol. 583, Springer-Verlag, 1977.

[Ma1] R. MAÑÉ – « An ergodic closing lemma », *Annals of Math.* **116** (1982), p. 503–540.

[Ma2] ———, « Contributions to the stability conjecture », *Topology* **17** (1978), p. 386–396.

[N] S. NEWHOUSE – « Diffeomorphisms with infinitely many sinks », *Topology* **13** (1974), p. 9–18.

[PT] J. PALIS & F. TAKENS – *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 35, Cambridge University Press, 1993.

[Pu] C. PUGH – « The closing lemma », *Amer. J. Math.* **89** (1967), p. 956–1009.

[Sh] M. SHUB – « Topological transitive diffeomorphism on T^4 », Lect. Notes in Math., vol. 206, Springer-Verlag, 1971, p. 39.

[Sm] S. SMALE – « Differentiable dynamical systems », *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), p. 747–817.

[WX] L. WEN & Z. XIA – « C^1 connecting lemmas », *Trans. Amer. Math. Soc.* **352** (2000), p. 5213–5230.

Christian BONATTI

Université de Bourgogne
UMR 5584 du C.N.R.S.
Laboratoire de Topologie
UFR de Sciences et Technologies
9, avenue Alain Savary
B.P. 47870
F-21078 Dijon Cedex
E-mail : bonatti@satie.u-bourgogne.fr