Astérisque

YVES MEYER

La conjecture de Kato

Astérisque, tome 290 (2003), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 902, p. 193-206

<http://www.numdam.org/item?id=SB_2001-2002__44__193_0>

Séminaire BOURBAKI
Mars 2002
54e année, 2001-2002, n° 902, p. 193 à 206

LA CONJECTURE DE KATO
[d'après Pascal Auscher, Steve Hofmann, Michael Lacey, John Lewis, Alan McIntosh et Philippe Tchamitchian]

par **Yves MEYER**

1. INTRODUCTION

La conjecture de Kato concerne les racines carrées d'opérateurs accrétifs. Cette conjecture est magique au sens suivant : son énoncé est innocent et ne fait appel qu'à des notions très naturelles concernant les opérateurs agissant sur un espace de Hilbert. Il s'agit de démontrer que le domaine de la racine carrée d'un opérateur accrétif coïncide avec celui de la forme ayant servi à construire l'opérateur. Mais la conjecture de Kato implique d'autres conjectures importantes. Par exemple, un cas particulier, en dimension 1, de la conjecture de Kato entraîne une conjecture de Calderón portant sur la continuité du noyau de Cauchy pour les graphes lipschitziens. Quand Alan McIntosh observa ce fait en 1980, il traça du même coup le chemin conduisant à la preuve de la conjecture de Calderón. Il ne restait plus qu'à terminer la démonstration en ramenant le problème à une estimation portant sur une fonctionnelle quadratique et en utilisant alors la technique des « mesures de Carleson » (section 6). Les mesures de Carleson ont été introduites par Lennart Carleson pour résoudre un problème portant sur les idéaux de fonctions holomorphes et bornées dans le disque unité. Leur usage en théorie des opérateurs a été systématisé par R. Coifman et ses collaborateurs. Ces mêmes estimations quadratiques et ces mêmes mesures de Carleson joueront un rôle essentiel dans la résolution de la conjecture de Kato.

2. LA PREMIÈRE VERSION DE LA CONJECTURE DE KATO

Commençons par une définition introduite par Ralph Phillips en 1957. La partie réelle du nombre complexe z est notée $\operatorname{Re} z$.

DÉFINITION 2.1. — *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et désignons par $\langle x, y\rangle$ et $\|x\|$ la forme sesquilinéaire et la norme correspondantes. Soit V un sous-espace vectoriel de H et $T : V \to H$ un opérateur linéaire. On dira que T est dissipatif si*

$$\mathrm{Re}\langle T(x), x\rangle \leqslant 0, \quad x \in V. \tag{2.1}$$

L'opérateur T est dissipatif maximal s'il est dissipatif et s'il ne peut être prolongé en un opérateur dissipatif $\widetilde{T} : \widetilde{V} \to H$ où $\widetilde{V}$ contienne strictement V. Nous dirons alors que V est le domaine de T.

Rappelons également la définition d'un semi-groupe de contractions.

DÉFINITION 2.2. — *Un semi-groupe de contractions est une famille $S(t)$, $t \geqslant 0$, d'opérateurs linéaires continus sur l'espace de Hilbert H vérifiant, pour tout $x \in H$,*

$$S(t+\tau) = S(t)S(\tau), \quad t, \tau \geqslant 0 \tag{2.2}$$

$$\|S(t)(x) - x\| \to 0, \quad t \to 0 \tag{2.3}$$

$$\|S(t)(x)\| \leqslant \|x\|, \quad t \geqslant 0. \tag{2.4}$$

Avec ces notations, le théorème de Phillips est l'énoncé suivant

THÉORÈME 2.3. — *Un opérateur T est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions $S(t) : H \to H$ si et seulement si T est dissipatif maximal et si son domaine V est dense dans H.*

Selon une suggestion de Friedrichs, un opérateur T est appelé accrétif si $-T$ est dissipatif.

Voici un exemple des situations que nous venons d'étudier. L'opérateur $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ est dissipatif quand $H = L^2(\mathbb{R}^n)$ et le semi-groupe associé $\exp(t\Delta)$ est le semi-groupe de la chaleur. Notre propos sera de définir la racine carrée d'un opérateur accrétif maximal. Dans le cas particulier du laplacien, cette racine carrée est l'opérateur de Calderón $\Lambda = \sqrt{-\Delta}$. Son domaine est celui de la forme de Dirichlet $B(u, v) = \int \nabla u \cdot \overline{\nabla v}\, dx$. Le semi-groupe $S(t) = \exp(-t\Lambda)$, $t \geqslant 0$, décrit l'évolution $u(x, 0) \to u(x, t)$ des fonctions harmoniques $u(x, t)$ dans $\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)\}$ qui sont nulles à l'infini.

Si la construction d'opérateurs accrétifs est aisée, celle d'opérateurs accrétifs maximaux est un peu plus délicate. On commence par la définition d'une forme sesquilinéaire accrétive.

DÉFINITION 2.4. — *Soit H un espace de Hilbert pour lequel le produit scalaire et la norme seront notés $\langle x, y\rangle$ et $\|x\|$. Soit H_1 un second espace de Hilbert. On désigne par $\|x\|_1$ la norme correspondante et l'on suppose que H_1 est un sous-espace vectoriel dense dans H, cette injection étant continue.*
Soit $B(x, y)$ une forme sesquilinéaire définie et bicontinue sur $H_1 \times H_1$:

$$|B(x, y)| \leqslant C\|x\|_1\|y\|_1. \tag{2.5}$$

Nous dirons que B est accrétive si, pour tout x dans H_1, on a

$$\operatorname{Re} B(x,x) \geqslant 0. \tag{2.6}$$

Si β est un nombre réel positif, nous dirons que $B(x,y)$ est β-accrétive si, pour tout $x \in H_1$, on a

$$\operatorname{Re} B(x,x) + \|x\|^2 \geqslant \beta \|x\|_1^2. \tag{2.7}$$

Dans ce cas, nous dirons que H_1 est le domaine de la forme $B(x,y)$.

Ceci étant, voici comment on construit des opérateurs accrétifs maximaux.

LEMME 2.5. — *Soit $B : H_1 \times H_1 \to \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire β-accrétive. On désigne par V l'ensemble des $x \in H$ pour lesquels il existe une constante $C = C(x)$ de sorte que, pour tout $y \in H$, on ait*

$$|B(x,y)| \leqslant C\|y\|. \tag{2.8}$$

Alors l'opérateur $T : V \to H$ défini par

$$\langle T(x), y\rangle = B(x,y), \quad x \in V,\ y \in H \tag{2.9}$$

est accrétif maximal.

En restant toujours dans un cadre hilbertien général, voici la définition, puis la construction de la racine carrée accrétive d'un opérateur accrétif maximal.

DÉFINITION 2.6. — *Soit H un espace de Hilbert et $T : V \to H$ un opérateur accrétif maximal de domaine $V \subset H$. Alors il existe un et un seul opérateur accrétif maximal S tel que $S^2 = T$. On écrit $S = \sqrt{T}$. En outre, sur le domaine V de T, on a*

$$S = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (1+\lambda^2 T)^{-1} T\, d\lambda = \frac{8}{\pi}\int_0^\infty (1+\lambda^2 T)^{-3}\lambda^2 T^2\, d\lambda. \tag{2.10}$$

Le problème posé par Kato dans [7] est la question suivante :

Supposons que l'opérateur maximal accrétif T soit défini à l'aide d'une forme β-accrétive B au sens du lemme 2.5. Le domaine de la racine carrée accrétive maximale $\sqrt{T}$ est-il alors le même que le domaine H_1 de la forme qui a servi à construire T ?

Ceci est évidemment vrai si l'opérateur T est auto-adjoint, c'est-à-dire si $B(u,u) \geqslant 0$ pour tout $u \in V$.

J.-L. Lions a démontré dans [7] que la conjecture de Kato est équivalente à l'énoncé suivant : il existe une constante C telle que, pour tout $x \in H_1$, on ait, en désignant par T^* l'adjoint de T

$$\|\sqrt{T}x\| \leqslant C\|x\|_1, \quad \|\sqrt{T^*}x\| \leqslant C\|x\|_1, \quad x \in H_1. \tag{2.11}$$

Alan McIntosh a trouvé un contre-exemple à cette version hilbertienne de la conjecture de Kato. Il restait à savoir si la conjecture de Kato est exacte dans le cas particulier qui a motivé le travail de Tosio Kato, celui où T est un opérateur différentiel accrétif du second ordre, écrit sous forme de divergence.

3. LA CONJECTURE DE KATO PRÉCISÉE

On pose $H = L^2(\mathbb{R}^n)$ et $H_1 \subset H$ désignera l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^n)$ qui se compose des fonctions de carré intégrable dont le gradient, pris au sens des distributions, est aussi de carré intégrable. Ensuite on pose $\partial_j = \partial/\partial x_j$ et l'on considère n^2 fonctions $a_{j,k}(x)$, $1 \leqslant j,k \leqslant n$, à valeurs réelles ou complexes, mesurables et bornées (appartenant à $L^\infty(\mathbb{R}^n)$). On suppose qu'il existe deux constantes $C \geqslant \beta > 0$ telles que l'on ait, pour tout $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ et pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\beta|\xi|^2 \leqslant \operatorname{Re}\Big(\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} a_{j,k}(x)\xi_k\overline{\xi_j}\Big) \leqslant C|\xi|^2. \tag{3.1}$$

On désigne par $\Omega(\beta, C)$ l'ensemble des matrices $A(x) = (a_{j,k}(x))_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ qui vérifient (3.1) et $\|a_{j,k}\|_\infty \leqslant C$, $1 \leqslant j,k \leqslant n$. Ensuite Ω est la réunion des $\Omega(\beta, C)$, $0 < \beta \leqslant C < \infty$. Alors Ω est un ensemble ouvert dans $(L^\infty(\mathbb{R}^n))^{n^2}$ de matrices $n \times n$.

LEMME 3.1. — *Si* (3.1) *est vérifiée,*

$$B(f,g) = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} \int a_{j,k}(x)\partial_k f(x)\overline{\partial_j g(x)}\, dx \tag{3.2}$$

est une forme sesquilinéaire $\min(1,\beta)$*-accrétive dont le domaine est l'espace de Sobolev* $H^1(\mathbb{R}^n)$.

L'opérateur accrétif maximal défini par cette forme est alors

$$T(f) = -\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} \partial_j\big(a_{j,k}(x)\partial_k f(x)\big) \tag{3.3}$$

et son domaine V est le sous-espace vectoriel de $H^1(\mathbb{R}^n)$ caractérisé par la condition suivante : $f \in V$ si et seulement si les fonctions $g_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$ définies par $g_j(x) = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_{j,k}(x)\partial_k f(x)$ vérifient $\sum_{1\leqslant j\leqslant n} \partial_j g_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Ce domaine dépend non linéairement des fonctions mesurables $a_{j,k}$ et n'est pas un espace fonctionnel classique.

Pascal Auscher et ses collaborateurs (S. Hofmann, M. Lacey, J. Lewis, A. McIntosh et Ph. Tchamitchian) ont démontré le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2. — *Soit T l'opérateur maximal accrétif défini par* (3.3) *lorsque la matrice $A(x)$ vérifie les conditions* (3.1). *Alors le domaine de l'opérateur maximal accrétif $\sqrt{T}$ est l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^n)$ et l'application $\Phi : A \to \sqrt{T}$ est holomorphe sur l'ouvert Ω.*

La seconde assertion du théorème 3.2 conduit à étudier $\sqrt{T}$ en utilisant son développement en série entière. Lorsque ce théorème était encore une conjecture, plusieurs équipes concurrentes établissaient la continuité des opérateurs multilinéaires $T_k(A, A, \ldots, A)(f)$, $k \in \mathbb{N}$, apparaissant dans cette série entière, mais nous (R. Coifman, G. David, J-L. Journé, C. Kenig, Y.M., etc.) n'étions capables de démontrer la convergence de cette série que si la matrice $A(x)$ est suffisamment proche de l'identité : $\|A(x) - I\|_\infty \leqslant \varepsilon_n$ et le résultat le plus précis dans cette direction (fournissant la valeur la moins faible de la constante ε_n) avait été obtenu par J-L. Journé [6].

Si les fonctions $a_{j,k}$ sont suffisamment régulières, $\sqrt{T}$ est alors un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre 1 et, à ce titre, est continu sur l'espace de Sobolev H^1. La même remarque s'applique à T^* et le théorème de J-L. Lions implique alors la conjecture de Kato.

Dans le cas général où les fonctions $a_{j,k}(x)$ sont mesurables et bornées, on ne peut plus utiliser les ressources du calcul pseudo-différentiel. Les méthodes hilbertiennes abstraites sont également insuffisantes. Des outils plus puissants sont nécessaires. Ces outils ont été forgés par Alberto Calderón et « l'École de Chicago », mais il faut aussi mentionner les travaux de De Giorgi, Moser, Carleson, etc. Le programme de Calderón a consisté à s'affranchir des hypothèses superflues de régularité qui limitent la portée du calcul pseudo-différentiel classique et à construire des algèbres incluant à la fois les opérateurs de multiplication ponctuelle par des fonctions mesurables et bornées, comme les $a_{j,k}(x)$, et les opérateurs de dérivation, comme les ∂_j.

Après avoir attaqué la conjecture de Kato dans la perspective donnée par le programme de Calderón (voir le théorème 5.3), Pascal Auscher et Philippe Tchamitchian ont finalement décidé d'aborder cette conjecture par une voie un peu différente, en s'inspirant des travaux de De Giorgi et de Moser que nous rappelons maintenant.

4. ENNIO DE GIORGI ET JÜRGEN MOSER

En 1956, E. De Giorgi étudia la régularité des solutions faibles u de l'équation aux dérivées partielles $T(u) = 0$ où T est défini par (3.3) et où les coefficients $a_{j,k}(x)$ sont réels, mesurables et bornés. Il démontra que toute solution faible d'une telle équation aux dérivées partielles est höldérienne d'exposant $\mu > 0$ et que μ ne dépend que des normes L^∞ des coefficients, de la constante d'accrétivité et de la dimension.

Plus précisément on a, en posant $B_R = \{x; |x - x_0| < R\}$ et $B_\rho = \{x; |x - x_0| < \rho\}$

THÉORÈME 4.1. — *Soit T l'opérateur accrétif maximal défini par* (3.3). *Supposons que les fonctions $a_{j,k}(x)$, $1 \leqslant j,k \leqslant n$ soient à valeurs réelles. Alors il existe un exposant positif μ et une constante positive C tels que, pour tout $\rho \in]0,R[$ et pour toute solution $u \in H^1(B_R)$ de $T(u)=0$, on ait*

$$\int_{B_\rho} |\nabla u|^2\,dx \leqslant C\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{n-2+2\mu} \int_{B_R} |\nabla u|^2\,dx. \tag{4.1}$$

En outre μ et C ne dépendent que des normes L^∞ des fonctions $a_{j,k}(x)$, de la constante β d'ellipticité et de la dimension n.

La propriété (4.1) implique la régularité höldérienne. Si les fonctions $a_{j,k}(x)$ sont à valeurs complexes, le théorème 4.1 cesse d'être vrai, comme l'ont établi Maz'ya, Nazarov et Plamenevskii [9] en dimension $n \geqslant 5$. Nous dirons que l'opérateur T a la propriété de Dirichlet si (4.1) est vérifiée.

Une autre définition utile concerne le « noyau de la chaleur » $K_t(x,y)$ défini par

$$\exp(-tT)[f(x)] = \int K_t(x,y)f(y)\,dy. \tag{4.2}$$

On peut penser que sous l'hypothèse (3.1) le noyau de la chaleur $K_t(x,y)$ possède des propriétés analogues à celles du noyau de la chaleur usuel (correspondant à $A(x)=I$). Cette remarque conduit à la définition suivante

DÉFINITION 4.2. — *L'opérateur accrétif maximal T est de type gaussien s'il existe un exposant $\mu \in (0,1]$ et deux constantes positives $\beta > 0, c > 0$ tels que l'on ait d'une part*

$$|K_t(x,y)| \leqslant ct^{-n/2}\exp\Big(-\beta\frac{|x-y|^2}{t}\Big) \tag{4.3}$$

$$|K_t(x,y) - K_t(x+h,y)| \leqslant c\Big(\frac{|h|}{t^{1/2}+|x-y|}\Big)^{\mu} t^{-n/2}\exp\Big(-\beta\frac{|x-y|^2}{t}\Big) \tag{4.4}$$

pour $t > 0, x,y,h \in \mathbb{R}^n$ tels que $|h| \leqslant t^{1/2}+|x-y|$. On impose, d'autre part, la propriété (4.4) *en échangeant les rôles de x et y.*

J. Nash, D. Aronson, E. Fabes et D. Stroock ont établi le théorème suivant

THÉORÈME 4.3. — *Si les n^2 fonctions $a_{j,k}(x)$ sont toutes à valeurs réelles, alors l'opérateur accrétif maximal T défini par* (3.3) *est du type gaussien.*

Ce théorème a été complété par un résultat remarquable dû à P. Auscher. En effet on a

THÉORÈME 4.4. — *Revenons au cas où les $a_{j,k}(x)$ sont à valeurs réelles ou complexes. Alors T défini par* (3.3) *est de type gaussien si et seulement si T et T^* ont la propriété de Dirichlet.*

Ceci a toujours lieu si $n = 1$ et $n = 2$, mais il existe des contre-exemples en dimension $n \geqslant 5$ [9].

Venons-en aux contributions de Jürgen Moser. On considère un opérateur accrétif maximal T défini par (3.3) et l'on suppose encore que les fonctions $a_{j,k}(x)$ soient réelles. On a alors

$$c_0|\xi|^2 \leqslant \sum_{j,k} a_{j,k}(x)\xi_j\xi_k \leqslant \frac{1}{c_0}|\xi|^2 \tag{4.5}$$

uniformément en x. En 1961, J. Moser utilisa les ressources de l'espace BMO qui venait d'être créé pour démontrer l'inégalité de Harnack qui s'énonce ainsi

THÉORÈME 4.5. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $K \subset \Omega$ un ensemble compact. Il existe alors une constante $C = C(c_0, K, \Omega)$ telle que, pour toute fonction positive $f \in H^1(\Omega)$ vérifiant $T(f) = 0$ au sens des distributions, ont ait*

$$\sup\{f(x); x \in K\} \leqslant C \inf\{f(x); x \in K\}. \tag{4.6}$$

5. ALBERTO CALDERÓN

Intrigué par le théorème de De Giorgi, A. Calderón se proposait de le redémontrer en construisant de nouvelles algèbres d'opérateurs incluant les opérateurs accrétifs donnés par (3.3). Calderón s'est d'abord posé le problème d'établir l'estimation L^2 de base en utilisant des conditions minimales de régularité sur noyau-distribution $K(x, y)$ d'un opérateur T. On veut savoir si, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a $\|T(f)\|_2 \leqslant C\|f\|_2$ quand $T(f)(x) = \text{v.p.} \int K(x, y)f(y)\, dy$. Lars Hörmander a proposé la condition suivante

$$\int_{\{|x-y|\geqslant 2|x'-x|\}} |K(x', y) - K(x, y)|\, dy \leqslant C. \tag{5.1}$$

Cette propriété, combinée à l'estimation $L^2(\mathbb{R}^n)$ qui s'écrit

$$\|T(f)\|_2 \leqslant C\|f\|_2 \tag{5.2}$$

entraîne les estimations $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $2 \leqslant p < \infty$, ainsi que l'estimation limite (L^∞, BMO) où, là encore, BMO est l'espace de John et Nirenberg. C'est-à-dire que $f \in BMO$ si et seulement s'il existe une constante C telle que l'on ait

$$\sup_Q \left\{ \int_Q |f(x) - m_Q(f)|^2 \frac{dx}{|Q|} \right\} \leqslant C. \tag{5.3}$$

On a désigné par $|Q|$ le volume du cube Q, la borne supérieure est calculée sur tous les cubes $Q \subset \mathbb{R}^n$ et $m_Q(f)$ désigne la moyenne de f sur Q.

DÉFINITION 5.1. — *Si à la fois T et son adjoint T^* vérifient* (5.1) *et* (5.2), *nous dirons que T est un opérateur de Calderón-Zygmund.*

Les opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre 0 sont des opérateurs de Calderón-Zygmund, mais la réciproque n'est pas vraie. Les opérateurs de Calderón-Zygmund jouent un rôle fondamental dans la preuve, par Guy David, de la conjecture de Vitushkin (caractérisation des ensembles compacts du plan complexe de capacité analytique nulle et de mesure de Hausdorff unidimensionnelle finie comme étant les ensembles totalement non rectifiables).

Le problème essentiel dans l'étude des opérateurs de Calderón-Zygmund est celui de la continuité de l'opérateur T sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ce programme de travail a débouché sur le « théorème $T(1)$ » de David et Journé que nous énonçons sous une forme simplifiée

THÉORÈME 5.2. — *Supposons que l'on ait*

$$K(x,y) = -K(y,x), \quad |K(x,y)| \leqslant |x-y|^{-n}, \quad |\nabla K(x,y)| \leqslant |x-y|^{-(n+1)}. \tag{5.4}$$

Alors une condition nécessaire et suffisante de continuité de T sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ est $T(1) \in BMO$.

Les conditions imposées à $K(x,y)$ peuvent être considérablement allégées ; une régularité höldérienne suffit. Mais l'on ne sait pas démontrer le « théorème $T(1)$ » sous la condition (5.1). L'action de T sur la fonction identiquement égale à 1 doit être définie en donnant un sens à l'intégrale $g(x) = \int K(x,y)dy$. Cette fonction $g(x)$ est définie, modulo une fonction constante. En principe le théorème $T(1)$ pourraît s'appliquer à notre propos, grâce à la relation entre la conjecture de Kato et les opérateurs de Calderón-Zygmund. On a, en effet

THÉORÈME 5.3. — *En conservant les notations du théorème 4.4, supposons que T soit de type gaussien et que la conjecture de Kato soit vraie, c'est-à-dire que (2.11) soit vérifiée lorsque H_1 est l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe n opérateurs de Calderón-Zygmund $U_1, \dots, U_n$, tels que l'on ait*

$$\sqrt{T} = U_1\partial_1 + \dots + U_n\partial_n. \tag{5.5}$$

Ce théorème a été établi par Auscher et Tchamitchian avant que la preuve complète de la conjecture de Kato ne soit obtenue. Ce théorème nous incite à démontrer la conjecture de Kato en utilisant le « théorème $T(1)$ » de David et Journé. La preuve générale doit beaucoup à cette remarque. Voici cependant des exemples où le théorème $T(1)$ ne permet pas de conclure. C'est, par exemple, le cas si T est l'opérateur de Cauchy sur une courbe lipschitzienne Γ qui est le graphe d'une fonction lipschitzienne $a(x)$. Dans ce cas, l'opérateur T est défini par le noyau singulier vp $\frac{1}{\pi}(z(x)-z(y)^{-1}$ où $z(x) = x + ia(x)$. Le calcul de $T(1)$ ne peut se faire et c'est pourquoi un nouveau théorème a été recherché, puis démontré. Il s'agit du « théorème $T(b)$ » dont on trouvera la preuve dans [10]. On part d'une fonction $b(x)$, appartenant à L^∞, qui est accrétive au sens où sa partie réelle $\operatorname{Re} b(x)$ vérifie $\operatorname{Re} b(x) \geqslant \beta > 0$. Dans ces conditions, le théorème $T(1)$ se généralise et l'on a

THÉORÈME 5.4. — *En conservant les hypothèses du théorème 5.2, supposons qu'il existe une fonction accrétive $b(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $T(b)$ appartienne à BMO. Alors T est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

En revenant à l'opérateur de Cauchy, il suffit, pour appliquer le théorème 5.4, de choisir $b(x) = 1 + ia'(x)$. En effet, cette fonction satisfait évidemment la condition d'accrétivité et l'on a alors $T(b) = 0$, comme le montre immédiatement la formule de Cauchy. La force du « théorème $T(b)$ » réside dans la possibilité de choisir la fonction $b(x)$ « après coup », en prenant en compte les propriétés de l'opérateur que l'on étudie.

Une autre version du théorème $T(b)$ peut être trouvée dans un remarquable travail de M. Christ et J.L. Journé [4].

Comme nous le verrons dans la huitième section, la preuve de la conjecture de Kato dépend d'une troisième version (adaptée) du « théorème $T(b)$ ». Cette nouvelle version, qui étend celle de M. Christ et J.L. Journé, s'applique à des situations beaucoup plus générales que celles décrites dans le théorème 5.4. Il n'est plus nécessaire de supposer que T soit de type gaussien, ce qui, comme nous l'avons vu, n'est pas toujours vérifié.

6. LES MESURES DE CARLESON

La définition des mesures de Carleson apparaît pour la première fois dans la preuve par Lennart Carleson de la « conjecture de la couronne ». Il s'agit de l'énoncé suivant : si $f_1(z), \cdots, f_n(z)$ sont n fonctions holomorphes et bornées dans le disque unité D et s'il existe une constante C telle que l'on ait, pour tout $z \in D$,

$$1 \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} |f_k(z)| \leqslant C \tag{6.1}$$

alors on peut trouver n autres fonctions holomorphes et bornées dans D, notées $g_1(z), \cdots, g_n(z)$, telles que

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} f_k(z) g_k(z) = 1. \tag{6.2}$$

Pour démontrer ce théorème, Carleson définit ce qui est aujourd'hui connu sous le nom de mesures de Carleson et démontra le théorème 6.2 qui suit.

DÉFINITION 6.1. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert. On désigne alors par $\widehat{\Omega}$ l'ensemble des couples $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times]0,\infty[$ tels que la boule $B(x,t)$ de centre x et de rayon t soit incluse dans Ω. Soit $d\mu(x,t)$ une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^n \times]0,\infty[$. On dit que $d\mu$ est une mesure de Carleson s'il existe une constante C telle que pour toute partie ouverte $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on ait*

$$\mu(\widehat{\Omega}) \leqslant C|\Omega|, \tag{6.3}$$

où $|E|$ est la mesure de Lebesgue de $E \subset \mathbb{R}^n$.

La plus petite constante C pouvant figurer dans (6.3) est la norme de la mesure de Carleson μ et sera notée $\|\mu\|_C$. Pour établir (6.3), il suffit de le faire si Ω est une boule arbitraire de $\mathbb{R}^n$. Le passage au cas général utilise un recouvrement de Vitali de Ω par une suite de boules B_j, $j \in \mathbb{N}$. Ce faisant, la constante figurant dans le second membre de (6.3) aura changé.

Pour vérifier qu'une mesure de Radon positive $d\mu(x,t)$ est une mesure de Carleson, on utilise le plus souvent une variante de la condition (6.3). Si Q est une cube arbitraire de $\mathbb{R}^n$ de côté l_Q, on désignera par $\widetilde{Q}$ le cube $Q \times [0, l_Q]$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ et la condition de Carleson s'écrit simplement $\mu(\widetilde{Q}) \leqslant C|Q|$.

Nous arrivons maintenant au théorème annoncé. Il concerne le calcul des intégrales $I = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)d\mu(x,t)$ où $f(x,t)$ est une fonction borélienne positive ou nulle et où $d\mu$ est une mesure de Carleson de norme $\|\mu\|_C$.

THÉORÈME 6.2. — *Posons*

$$f^*(x) = \sup_{|y-x|\leqslant t} f(y,t). \tag{6.4}$$

Alors on a

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)d\mu(x,t) \leqslant \|\mu\|_C \int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)\, dx. \tag{6.5}$$

7. LA PREUVE DE LA CONJECTURE DE KATO (PREMIÈRE PARTIE)

La preuve de la conjecture de Kato utilise deux idées maintenant classiques en théorie des opérateurs. La première qui a été développée par Elias Stein, mais qui peut être rattachée aux travaux de Littlewood et Paley, concerne l'utilisation de fonctionnelles quadratiques. Supposons qu'un opérateur T soit naturellement décomposé en une série $\sum_{j\in J} T_j$. Pour démontrer que cet opérateur T est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire pour établir l'estimation fondamentale $\|T(f)\|_2 \leqslant C\|f\|_2$, il suffit, dans certains cas, de démontrer que

$$\Big(\sum_{j\in J} \|T_j(f)\|_2^2\Big)^{1/2} \leqslant C\|f\|_2. \tag{7.1}$$

On dira alors que les morceaux T_j, $j \in J$, sont presque orthogonaux.

Le second ingrédient est l'utilisation des mesures de Carleson pour établir l'estimation quadratique (7.1). La preuve du théorème $T(1)$ de David et Journé suit ce programme.

Commençons par la réduction à une fonctionnelle quadratique. On part de T défini par (3.3) et l'on considère sa racine carrée accrétive, définie par (2.10). Nous devons démontrer que l'on a

$$\|\sqrt{T}(f)\|_2 \leqslant C\|\nabla f\|_2 \tag{7.2}$$

et cela nous amène à calculer

$$\sup\{|\langle\sqrt{T}(f), g\rangle|;\ \|g\|_2 \leqslant 1\}. \tag{7.3}$$

Mais ce produit scalaire s'écrit, grâce à (2.10),

$$\langle\sqrt{T}(f), g\rangle = \frac{8}{\pi}\int_0^\infty \langle W_\lambda(f), V_\lambda(g)\rangle \frac{d\lambda}{\lambda}, \tag{7.4}$$

où

$$W_\lambda = (1+\lambda^2 T)^{-1}\lambda T, \quad V_\lambda = (1+\lambda^2 T^*)^{-2}\lambda^2 T^*. \tag{7.5}$$

Arrivés à ce point, on applique les estimations quadratiques « abstraites » de McIntosh et Yagi ([3] est la meilleure référence) qui fournissent

$$\int_0^\infty \|V_\lambda(g)\|_2^2 \frac{d\lambda}{\lambda} \leqslant C\|g\|_2^2. \tag{7.6}$$

La conjecture de Kato résultera donc de l'estimation quadratique

$$\int_0^\infty \|W_\lambda(f))\|_2^2 \frac{d\lambda}{\lambda} \leqslant C\|\nabla f\|_2^2. \tag{7.7}$$

L'opérateur Θ_λ est défini sur les n-uples de fonctions de $L^2(\mathbb{R}^n)$ par

$$\Theta_\lambda(f_1, \ldots, f_n)(x) = \lambda(1+\lambda^2 T)^{-1}\sum_{j,k}\partial_j[(a_{j,k}(x))(f_k(x))]. \tag{7.8}$$

Alors (7.7) s'écrit

$$\int_0^\infty \|\Theta_\lambda \nabla f\|_2^2 \frac{d\lambda}{\lambda} \leqslant C\|\nabla f\|_2^2. \tag{7.9}$$

Nous désignons ensuite par $\varphi(x)$ une fonction de la classe de Schwartz, portée par la boule unité, d'intégrale égale à 1 et par Φ_λ l'opérateur de convolution avec $\varphi_\lambda(x) = \lambda^{-n}\varphi(x/\lambda)$. On pose ensuite

$$\gamma_\lambda(x) = [(1+\lambda^2 T)^{-1}\lambda\partial_j a_{j,k}(x)]_{1\leqslant k\leqslant n}. \tag{7.10}$$

En utilisant des estimations sur l'action « à longue portée » de l'opérateur $(I+\lambda^2 T)^{-1}$, on obtient

$$\Theta_\lambda(\nabla f)(x) = \gamma_\lambda(x)\cdot\Phi_\lambda\nabla f(x) + \rho(x,\lambda), \tag{7.11}$$

où

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} |\rho(x,\lambda)|^2\, dx \frac{d\lambda}{\lambda} \leqslant C\|\nabla f\|_2^2. \tag{7.12}$$

La conjecture de Kato découlera alors de

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\gamma_\lambda(x)|^2 |\Phi_\lambda \nabla f(x)|^2 \, dx \frac{d\lambda}{\lambda} \leqslant C \|\nabla f\|_2^2. \tag{7.13}$$

Le théorème de Hardy et Littlewood sur la fonction maximale implique

$$\| \sup_{|y-x|\leqslant\lambda} |\Phi_\lambda \nabla f(y)| \|_2 \leqslant C\|\nabla f\|_2. \tag{7.14}$$

La conjecture de Kato sera donc établie si nous montrons que la mesure $d\mu(x,\lambda) = |\gamma_\lambda|^2 \, dx \frac{d\lambda}{\lambda}$ est une mesure de Carleson. La preuve de ce fait est classique. Partant d'une boule arbitraire B de $\mathbb{R}^n$, on découpe la fonction mesurable et bornée $a_{j,k}(x)$ en deux morceaux. Le premier (noté u) est porté par la boule double $\widetilde{B}$, de même centre que B et de rayon double et le second (noté v) est nul sur $\widetilde{B}$. Pour traiter la contribution de u dans la mesure $d\mu$, on observe que $\|u\|_2 \leqslant C\|a_{j,k}\|_\infty |B|^{1/2}$ et l'estimation recherchée proviendra de

$$\int_0^\infty \|(1+\lambda^2 T)^{-1} \lambda \nabla f\|_2^2 \frac{d\lambda}{\lambda} \leqslant C\|f\|_2^2. \tag{7.15}$$

Mais cette dernière estimation n'est autre que l'estimation (7.7) que nous nous proposions de démontrer. Nous sommes donc dans une situation de cercle vicieux !

8. UN THÉORÈME T(b) POUR LES MESURES DE CARLESON

Le paragraphe précédent nous a appris que la preuve de l'estimation (H^1, L^2) pour l'opérateur $\sqrt{T}$ repose sur le fait que la mesure $d\mu(x,\lambda) = |\gamma_\lambda|^2 \, dx \frac{d\lambda}{\lambda}$ est une mesure de Carleson, ce qui semble essentiellement dépendre de l'estimation cherchée. P. Auscher et Ph. Tchamitchian ont réussi à sortir de cette impasse en démontrant un « théorème $T(b)$ pour les mesures de Carleson ». La fonction accrétive b est ici remplacée par une collection F_Q de fonctions de test adaptées à l'opérateur T. Soyons plus précis. Nous désignons par $\mathcal{Q}$ l'ensemble de tous les cubes $Q \subset \mathbb{R}^n$ et, pour tout cube $Q \in \mathcal{Q}$, de côté l_Q, nous supposons avoir pu construire une fonction F_Q ayant les cinq propriétés suivantes

$$F_Q \in H^1(5Q) \tag{8.1}$$

$$\int_{5Q} |\nabla F_Q|^2 \, dx \leqslant C|Q| \tag{8.2}$$

$$T(F_Q) = -\mathrm{div}[A(x)\nabla F_Q] \in L^2(5Q) \tag{8.3}$$

$$\int_{5Q} |T(F_Q)|^2 \, dx \leqslant C l_Q^{-2} |Q| \tag{8.4}$$

$$\sup_{Q\in\mathcal{Q}} \int_0^{l_Q} \int_Q |\gamma_\lambda(x)|^2 \, dx \, \frac{d\lambda}{\lambda} \leqslant C \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \int_0^{l_Q} \int_Q |\gamma_\lambda(x) \cdot \Phi_\lambda \nabla F_Q(x)|^2 \, dx \, \frac{d\lambda}{\lambda}, \tag{8.5}$$

où C désigne une constante.

Le « théorème $T(b)$ d'Auscher et Tchamitchian » est l'énoncé suivant [3].

THÉORÈME 8.1. — *Sous les hypothèses* (8.1) *à* (8.5), *la mesure*

$$d\mu(x,\lambda) = |\gamma_\lambda(x)|^2\, dx \frac{d\lambda}{\lambda}$$

est une mesure de Carleson, ce qui implique la conjecture de Kato.

Ce résultat est capital, car il a défini la stratégie qui conduisit à la preuve complète de la conjecture de Kato. Aujourd'hui, la preuve du théorème 8.1 peut sembler assez naturelle. Nous devons estimer le membre de gauche de (8.5). Nous utilisons (8.3) et (7.11). Ceci, joint aux estimations de l'action « à longue portée » de l'opérateur $(1+\lambda^2 T)^{-1}$, fournit l'estimation désirée.

Mais il reste à construire les « fonctions de test » F_Q, $Q \in \mathcal{Q}$. Cette construction repose sur de remarquables méthodes de temps d'arrêts (stopping time arguments) découvertes par S. Hofmann et J. Lewis [5] dans un contexte très différent. Cela suffisait pour démontrer la conjecture de Kato en dimension 2. La preuve finale [1] doit beaucoup aux améliorations apportées par M. Lacey.

RÉFÉRENCES

[1] P. AUSCHER, S. HOFMANN, M. LACEY, A. MCINTOSH & PH. TCHAMITCHIAN – « The solution of the Kato square root problem for second order elliptic operators on $\mathbb{R}^n$ », à paraître aux Annals of Maths.

[2] P. AUSCHER, S. HOFMANN, J. LEWIS & PH. TCHAMITCHIAN – « Extrapolation of Carleson measures and the analyticity of Kato's square root operator », Acta Math., à paraître.

[3] P. AUSCHER & PH. TCHAMITCHIAN – *Square root problem for divergence operators and related topics*, Astérisque, vol. 249, Société Mathématique de France, 1998.

[4] M. CHRIST & J.-L. JOURNÉ – « Polynomial growth estimates for multilinear singular operators », *Acta Math.* **159** (1987), p. 51–80.

[5] S. HOFMANN & J.L. LEWIS – « The Dirichlet problem for parabolic operators with singular drift terms », à paraître aux Memoirs of the Amer. Math. Soc.

[6] J.-L. JOURNÉ – « Remarks on the square root problem », *Pub. Math.* **35** (1991), p. 299–321.

[7] T. KATO – « Fractional powers of dissipative operators », *J. Math. Soc. Japan* **13** (1961), p. 246–274.

[8] J.-L. LIONS – « Espaces d'interpolation et domaines de puissances fractionnaires », *J. Math. Soc. Japan* **14** (1962), p. 233–241.

[9] V.G. MAZ'YA, S.A. NAZAROV & B.A. PLAMENEVSKII – « Absence of the De Giorgi-type theorems for strongly elliptic equations with complex coefficients », *J. Math. Sov.* **28** (1985), p. 726–739.

[10] Y. MEYER & R. COIFMAN – *Wavelets, Calderón-Zygmund operators and multilinear operators*, Cambridge Studies in advanced mathematics, vol. 48, Cambridge University Press, 1997.

Yves MEYER
École Normale Supérieure
C.M.L.A.
61 avenue du Président Wilson
F-94235 CACHAN Cedex
E-mail : `Yves.Meyer@cmla.ens-cachan.fr`