Astérisque

FRANÇOIS LOESER

Cobordisme des variétés algébriques [d'après M. Levine et F. Morel]

Astérisque, tome 290 (2003), Séminaire Bourbaki, exp. n^{o} 901, p. 167-192

<http://www.numdam.org/item?id=SB_2001-2002__44__167_0>

Séminaire BOURBAKI
54e année, 2001-2002, n° 901, p. 167 à 192

Mars 2002

COBORDISME DES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES [d'après M. Levine et F. Morel]

par **François LOESER**

INTRODUCTION

Le but de cet exposé est de décrire les travaux de Levine et Morel concernant une nouvelle théorie (co)homologique des variétés algébriques, le cobordisme algébrique, ainsi que ses applications à la formule du degré de Rost. Traditionnellement, deux variétés $\mathcal{C}^\infty$ compactes sans bord de dimension n sont dites cobordantes si leur somme disjointe est le bord d'une variété $\mathcal{C}^\infty$ compacte de dimension $n+1$. On définit ainsi une relation d'équivalence et l'ensemble des classes d'équivalence peut être naturellement muni d'une structure d'anneau gradué (la graduation provenant de la dimension), l'anneau de cobordisme réel N_*. Cet anneau a été introduit par Thom dans [21], qui a démontré que les N_n sont isomorphes aux groupes d'homotopie stable des « espaces de Thom » $\mathrm{MO}(n)$ et que N_* est isomorphe à une algèbre de polynômes sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. En considérant de façon similaire des variétés $\mathcal{C}^\infty$ stablement presque complexes, on définit l'anneau de cobordisme complexe U_* dont la construction est rappelée dans la section 1. Milnor a démontré dans [17] que U_* est isomorphe à une algèbre de polynômes sur $\mathbf{Z}$ et qu'elle est engendrée comme algèbre par les classes de certaines variétés projectives complexes, en fait les espaces projectifs complexes et les hypersurfaces de bidegré $(1,1)$ dans le produit de deux espaces projectifs complexes (*cf.* 2.3.9).

Dans un travail fondamental [20], Quillen démontre plus précisément que U_* est canoniquement isomorphe à l'anneau de Lazard $\mathbf{L}_*$ classifiant les lois de groupe formel commutatif de rang 1. Plus généralement, il considère les théories homologiques et cohomologiques $X \mapsto U_*(X)$ et $X \mapsto U^*(X)$ représentées par le spectre de Thom complexe. Que U_* soit canoniquement isomorphe à l'anneau de Lazard $\mathbf{L}_*$ peut être compris comme le fait que, dans la théorie U_*, la classe de Chern du produit tensoriel de deux fibrés en droite est « la plus compliquée possible » contrairement à ce qui se passe en homologie singulière où $c_1(L\otimes M) = c_1(L)+c_1(M)$. Ceci reflète une propriété plus générale de U_* qui est d'être universelle parmi « les théories homologiques avec orientation complexe ».

En géométrie algébrique, pour les variétés sur un corps k, il existe un analogue naturel du cobordisme qui consiste à considérer un morphisme projectif $W \to \mathbf{A}^1$, avec, disons, W lisse et irréductible, qui est transverse à $\{0\}$ et à $\{1\}$. Les fibres W_0 et W_1 correspondantes sont alors lisses sur k et on aurait envie de dire qu'elles sont algébriquement cobordantes. La théorie que l'on obtient (*cf.* 2.3.3) de cette façon est malheureusement bien trop naïve : par exemple deux courbes cobordantes en ce sens ont toujours même genre, ce qui ne se produit pas avec la théorie Ω_* de Levine et Morel dont une des propriétés fondamentales est que sa valeur $\Omega_*(\operatorname{Spec} k)$ sur le point est canoniquement isomorphe à l'anneau de Lazard $\mathbf{L}_*$. De plus, comme on le verra au cours de l'exposé, la théorie homologique Ω_* est également universelle parmi les théories homologiques « orientées » pour les variétés algébriques sur un corps k.

Pour conclure remarquons que, comme il l'exprime lui-même dans l'introduction de [20], le travail de Quillen est déjà fortement influencé par les travaux de Grothendieck en géométrie algébrique : « I have been strongly influenced by Grothendieck's theory of motives in algebraic geometry ... and like to think of a cobordism theory as a universal contravariant functor on the category of $\mathcal{C}^\infty$ manifolds endowed with Gysin homomorphisms for a class of proper « oriented maps »... ».

J'ai bénéficié de l'aide et des conseils de J.-B. Bost, A. Chambert-Loir, M. Levine et F. Morel pendant la préparation de cet exposé. Qu'ils en soient amicalement remerciés ici.

Table des matières

1. PRÉLIMINAIRES SUR LE COBORDISME COMPLEXE

1.1. Cobordisme complexe

La notion d'orientation complexe pour un morphisme $f : Z \to X$ de variétés $\mathcal{C}^\infty$ généralise celle de structure faiblement complexe sur Z lorsque X est un point. Soit f

un tel morphisme. On suppose que les variétés Z et X sont équidimensionnelles, et on définit la dimension relative de f comme $\dim f := \dim Z - \dim X$. Commençons par supposer que f est de dimension relative paire. Dans ce cas, une orientation complexe de f consiste en la donnée d'une classe d'équivalence de factorisations de f en le composé d'un morphisme structural de fibré complexe $p : E \to X$ et d'un plongement $i : Z \to E$ dont le fibré normal est muni d'une structure complexe. Deux factorisations $f = p \circ i$ et $f = p' \circ i'$ sont considérées comme équivalentes si les fibrés complexes E et E' peuvent être plongés dans le même fibré complexe E'' de façon que, dans E'', i et i' soient isotopes de façon compatible avec la structure complexe dont sont munis leurs fibrés normaux respectifs. Quand f est de dimension relative impaire, on remplace E par $E \times \mathbf{R}$ dans la définition précédente. On dira morphisme orienté pour morphisme muni d'une orientation complexe.

Deux morphismes propres orientés $f_1 : Z_1 \to X$ et $f_2 : Z_2 \to X$ sont dits cobordants s'il existe un morphisme propre orienté $b : W \to X \times \mathbf{R}$ tel que les morphismes $\epsilon_i : X \to X \times \mathbf{R}$ qui à x associent (x, i) soient transverses à b et que le pull-back de b par les ϵ_i soient isomorphes comme morphismes orientés aux f_i.

Le cobordisme est une relation d'équivalence et on note $U^q(X)$ l'ensemble des classes de cobordisme de morphismes propres orientés de dimension relative $-q$. Il sera aussi commode de passer en notation homologique en posant $U_q(X) := U^{\dim X - q}(X)$.

1.1.1. Le cobordisme U^* est un foncteur contravariant : si $g : Y \to X$ est un morphisme de variétés $\mathcal{C}^\infty$ et $f : Z \to X$ un morphisme propre orienté, quitte à bouger g par une homotopie, on peut supposer, par le théorème d'isotopie de Thom que le morphisme g est transverse à f. La classe de cobordisme du morphisme $Y \times_X Z \to Y$ ne dépend que de celle de f, et on obtient ainsi un morphisme

$$g^* : U^q(X) \to U^q(Y).$$

1.1.2. Tout morphisme propre orienté $g : X \to Y$ de dimension relative d définit un morphisme de Gysin

$$g_* : U^q(X) \to U^{q-d}(Y),$$

par composition.

1.1.3. Le produit cartésien induit un produit externe naturel

$$\otimes : U^*(X_1) \times U^*(X_2) \to U^*(X_1 \times X_2).$$

On en tire une structure d'anneau gradué sur $U^*(X)$ en posant $x_1 \cdot x_2 := \Delta^*(x_1 \otimes x_2)$, Δ désignant le morphisme diagonal. L'unité est la classe de cobordisme $1 = 1_X$ du morphisme identité $X \to X$.

1.2. L'anneau de Lazard

Rappelons qu'une loi de groupe formel commutatif de rang 1 à coefficients dans un anneau commutatif A est une série formelle

$$F(u,v) = \sum_{(i,j)\in\mathbf{N}^2} a_{i,j}u^iv^j \tag{1.2.1}$$

appartenant à $A[[u,v]]$ et satisfaisant les relations

$$F(u,0) = F(0,u) = u \tag{1.2.2}$$

$$F(u,v) = F(v,u) \tag{1.2.3}$$

et

$$F(u,F(v,w)) = F(F(u,v),w). \tag{1.2.4}$$

D'après Lazard [9], il existe une loi de groupe formel commutatif de rang 1 universelle $(\mathbf{L}, F_{\mathbf{L}})$. La construction de $(\mathbf{L}, F_{\mathbf{L}})$ est très simple. On considère l'anneau $\widetilde{\mathbf{L}}$ des polynômes à coefficients entiers en les variables $A_{i,j}$, pour i, j dans $\mathbf{N}$ et la série formelle universelle $\widetilde{F} = \sum_{i,j} A_{i,j}u^iv^j$ dans $\widetilde{\mathbf{L}}[[u,v]]$. Il suffit alors de définir $\mathbf{L}$ comme le quotient de l'anneau $\widetilde{\mathbf{L}}$ par les relations obtenues en imposant les relations (1.2.2), (1.2.3) et (1.2.4) à $\widetilde{F}$ et de définir la série $F_{\mathbf{L}} := \sum_{i,j} a_{i,j}u^iv^j$ comme l'image de $\widetilde{F}$ dans $\mathbf{L}[[u,v]]$. On munit l'anneau $\mathbf{L}$ d'une structure d'anneau gradué $\mathbf{L}_*$ en donnant le degré $i+j-1$ à $a_{i,j}$. On aura aussi à considérer l'anneau gradué $\mathbf{L}^*$ défini par $\mathbf{L}^n := \mathbf{L}_{-n}$. Un fait remarquable, démontré par Lazard [9], est que l'anneau de Lazard $\mathbf{L}$ est un anneau de polynômes à coefficients entiers en un nombre dénombrable de variables.

1.3. Le théorème de Quillen

Soit E un fibré vectoriel complexe de rang n sur une variété X. On note $i : X \to E$ le morphisme donné par la section nulle. La classe d'Euler de E est l'élément

$$e(E)(= c_n(E)) := i^*i_*1 \tag{1.3.1}$$

de $U^{2n}(X)$.

Notons $q : \mathbf{P}(E) \to X$ le fibré projectif représentant les quotients de rang 1 de E et γ le fibré en droites sur $\mathbf{P}(E)$ quotient canonique de $q^*(E)$. Dans les sections suivantes ce fibré en droites sera parfois également noté $O(1)$ (c'est le fibré qui a des sections globales et non son dual). On note ξ la classe d'Euler du fibré γ. On vérifie alors par un calcul classique, *cf.* [8], que $U^*(\mathbf{P}(E))$ est, via q^*, un $U^*(X)$-module libre de base $1, \xi, \ldots, \xi^{n-1}$. De plus si E est somme directe de fibrés en droites $L_1, \ldots, L_n$, on a

$$\prod_{i=1}^{n}(\xi - e(L_i)) = 0. \tag{1.3.2}$$

On en tire en particulier que

$$U^*(\mathbf{P}^n) \simeq U^*(\text{point})[u]/u^{n+1} \tag{1.3.3}$$

avec $u = e(\gamma)$ et que

$$U^*(\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n) \simeq U^*(\text{point})[u,v]/(u^{n+1}, v^{n+1}), \tag{1.3.4}$$

avec $u = e(\mathrm{pr}_1^*(\gamma))$ et $u = e(\mathrm{pr}_2^*(\gamma))$. On peut alors construire une loi de groupe formel commutative sur $U^*(\text{point})$ de la façon suivante. D'après (1.3.4), on peut écrire

$$e(\mathrm{pr}_1^*(\gamma) \otimes \mathrm{pr}_2^*(\gamma)) = \sum_{i,j \leqslant n} c_{i,j}^n u^i v^j. \tag{1.3.5}$$

De plus $c_{i,j}^n$ ne change pas quand on augmente n. En faisant tendre n vers l'infini on en tire une série formelle $F(u,v)$ dans $U^*(\text{point})[[u,v]]$ de la forme

$$F(u,v) = \sum_{i,j} c_{i,j} u^i v^j \tag{1.3.6}$$

avec $c_{i,j}$ dans $U^{2-2i-2j}(\text{point})$. On vérifie facilement que c'est une loi de groupe formel sur $U^*(\text{point})$. Par exemple, on démontre l'associativité (1.2.4) en évaluant de deux façons différentes la classe d'Euler de $\mathrm{pr}_1^*(\gamma) \otimes \mathrm{pr}_2^*(\gamma) \otimes \mathrm{pr}_3^*(\gamma)$ sur $\mathbf{P}^n \otimes \mathbf{P}^n \otimes \mathbf{P}^n$.

Comme tout fibré en droites complexes sur une variété X est image inverse de γ pour un morphisme $X \to \mathbf{P}^n$ convenable, on en déduit que pour toute paire de fibrés en droites complexes E_1 et E_2 sur la variété X on a

$$e(L_1 \otimes L_2) = F(e(L_1), e(L_2)). \tag{1.3.7}$$

Par la propriété universelle de l'anneau de Lazard, on dispose d'un morphisme canonique $\delta : \mathbf{L}^* \to U^*(\text{point})$.

1.3.1. THÉORÈME (Quillen [20]). — *Le morphisme canonique* $\delta : \mathbf{L}^* \to U^*(\text{point})$ *est un isomorphisme d'anneaux gradués.*

Dans cet isomorphisme, les coefficients $a_{i,j}$ de la série de Lazard admettent une interprétation géométrique en terme des classes des espaces projectifs et de celles des hypersurfaces de Milnor $H_{i,j}$ (*cf.* 2.3.9, la proposition 2.3.10 restant bien sûr vraie en remplaçant Ω_* par U_* ; voir aussi [2] Proposition 10.6). La preuve de Quillen a été exposée dans ce séminaire par M. Karoubi [8] (voir aussi [2]). Elle utilise de façon essentielle que $U^q(X)$ est de type fini lorsque X a le type d'homotopie d'un CW-complexe fini, ce qui résulte de l'interprétation homotopique à la Thom (Théorème 7.1.1) et des énoncés de finitude usuels en homotopie, le lien entre opérations de Steenrod en cobordisme complexe et opérations de Landweber-Novikov ainsi qu'un calcul explicite faisant intervenir les espaces lenticulaires.

2. CONSTRUCTION DU COBORDISME ALGÉBRIQUE

2.1. Notations

On fixe un corps k. On note $\mathcal{L}_k$ la catégorie des variétés lisses quasi-projectives sur k et $\mathcal{V}_k$ celle des schémas de type fini sur k. On note $\mathcal{L}'_k$ et $\mathcal{V}'_k$ les catégories formées des mêmes objets mais où les morphismes sont les morphismes projectifs. On dira parfois variété lisse pour variété quasi-projective lisse.

2.2. Cycles de cobordisme

2.2.1. Soit X dans $\mathcal{V}_k$. On note $\mathcal{M}^+_*(X)$ le groupe abélien libre sur les classes d'isomorphisme de cycles $f : Y \to X$ avec f projectif et Y lisse et intègre sur k, gradué par la dimension de Y.

On désire définir le groupe de cobordisme algébrique $\Omega_*(X)$ comme quotient de $\mathcal{M}^+_*(X)$ par une relation d'équivalence convenable, le « cobordisme algébrique ».

Pour des raisons de commodité technique, en particulier pour disposer dès le départ de classes de Chern de fibrés en droites, il est préférable de considérer la donnée supplémentaire de familles de fibrés en droites sur Y. Ainsi on définit un cycle de cobordisme sur X comme la donnée d'un morphisme $f : Y \to X$ avec f projectif et Y lisse et intègre sur k ainsi que de r fibrés en droites $L_1, \dots L_r$ sur Y, avec r éventuellement nul. On a une notion évidente d'isomorphisme pour les cycles de cobordisme sur X (on tolère le renumérotage des L_i). La dimension d'un tel cycle est l'entier $\dim_k(Y) - r$. On notera 1_X le cycle $\mathrm{Id} : X \to X$ et $1 = 1_{\operatorname{Spec} k}$.

2.2.2. On note $\mathcal{Z}(X)$ le groupe abélien libre sur les classes d'isomorphisme de cycles de cobordisme sur X. En considérant la dimension des cycles de cobordisme, on le munit d'une structure de groupe abélien gradué $\mathcal{Z}_*(X)$.

Si $g : X \to X'$ est un morphisme projectif, on dispose d'un morphisme d'image directe

$$g_* : \mathcal{Z}_*(X) \longrightarrow \mathcal{Z}_*(X')$$

qui à $[f : Y \to X, (L_1, \dots, L_r)]$ associe $[g \circ f : Y \to X', (L_1, \dots, L_r)]$. On obtient ainsi un foncteur

$$\mathcal{Z}_* : \mathcal{V}'_k \longrightarrow \mathbf{Ab}_*$$

qui est additif, autrement dit, le morphisme canonique

$$\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant r} \mathcal{Z}_*(X_i) \longrightarrow \mathcal{Z}_*\Big(\coprod_{1 \leqslant i \leqslant r} X_i\Big)$$

est un isomorphisme.

Si $g : X' \to X$ est un morphisme lisse équidimensionnel de dimension relative d on dispose d'un morphisme d'image inverse

$$g^* : \mathcal{Z}_*(X) \longrightarrow \mathcal{Z}_{*+d}(X')$$

qui à $[f : Y \to X, (L_1, \ldots, L_r)]$ associe $[p_2 : Y \times_X X' \to X', (p_1^* L_1, \ldots, p_1^* L_r)]$. Enfin, pour tout fibré en droites L sur la variété X, on dispose d'un morphisme tautologique, la première classe de Chern,

$$\widetilde{c}_1(L) : \mathcal{Z}_*(X) \longrightarrow \mathcal{Z}_{*-1}(X)$$

qui à $[f : Y \to X, (L_1, \ldots, L_r)]$ associe $[f : Y \to X, (L_1, \ldots, L_r, f^* L)]$.

Ces données vérifient les conditions suivantes :

(A1) On a $\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$ et, chaque fois que cela a un sens, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

(A2) Si $f : X \to Z$ est projectif et $g : Y \to Z$ est lisse équidimensionnel, on a $g^* f_* = f'_* g'^*$, pour tout diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{g} & Z. \end{array}$$

(A3) La première classe de Chern est compatible à l'image directe :

$$f_* \circ \widetilde{c}_1(f^* L) = \widetilde{c}_1(L) \circ f_*$$

et à l'image inverse :

$$\widetilde{c}_1(f^* L) \circ f^* = f^* \circ \widetilde{c}_1(L).$$

De plus on a toujours

$$\widetilde{c}_1(L) \circ \widetilde{c}_1(M) = \widetilde{c}_1(M) \circ \widetilde{c}_1(L)$$

et $\widetilde{c}_1(L) = \widetilde{c}_1(M)$ si L et M sont isomorphes.

On pose $\mathcal{Z}_*(k) := \mathcal{Z}_*(\operatorname{Spec} k)$. On a un produit externe évident

$$\mathcal{Z}_*(X) \times \mathcal{Z}_*(Y) \longrightarrow \mathcal{Z}_*(X \times_k Y)$$

qui est associatif, commutatif, et pour lequel l'élément 1 de $\mathcal{Z}_0(k)$ est une unité. Ainsi $\mathcal{Z}_*(k)$ est muni d'une structure d'anneau gradué et $\mathcal{Z}_*(X)$ est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{Z}_*(k)$-module gradué.

Ce produit externe est compatible en un sens évident aux images directes et inverses, ainsi qu'aux classes de Chern $\widetilde{c}_1$.

2.2.3. Un foncteur additif

$$H_* : \mathcal{V}'_k \longrightarrow \mathbf{Ab}_*$$

muni de morphismes d'image inverse $g^* : H_*(X) \to H_{*+d}(X')$ pour les morphismes $g : X' \to X$ lisses équidimensionnels de dimension d et de classes de Chern $\widetilde{c}_1(L) : H_*(X) \to H_{*-1}(X)$ pour les fibrés en droites, vérifiant l'analogue des conditions (A1)-(A3) est appelé foncteur de Borel-Moore orienté sur $\mathcal{V}_k$. On écrira $H_*(k)$ pour $H_*(\operatorname{Spec} k)$. Si de plus, $H_0(k)$ contient un élément 1 et pour toute paire (X, Y) d'objets de $\mathcal{V}_k$, on dispose d'un produit externe, donné par une forme bilinéaire graduée

$$H_*(X) \times H_*(Y) \longrightarrow H_*(X \times Y),$$

qui est strictement commutatif, associatif et pour lequel 1 est une unité et que ce produit externe est compatible aux images directes et inverses, ainsi qu'aux classes de Chern $\widetilde{c}_1$, on dira que H_* est un foncteur de Borel-Moore orienté avec produit.

Remarquons que le foncteur $\mathcal{Z}_*$ est universel parmi les foncteurs de Borel-Moore orientés avec produit : en effet, si H_* est un tel foncteur, il existe un unique morphisme de foncteurs de Borel-Moore orientés $\theta : \mathcal{Z}_* \to \mathcal{H}_*$ tel que $\theta(1) = 1$, car nécessairement $\theta([f : Y \to X, (L_1, \dots, L_r)]) = f_* \circ \widetilde{c}_1(L_1) \circ \dots \circ \widetilde{c}_1(L_r)(1)$.

2.3. De $\mathcal{Z}_*$ à Ω_*

2.3.1. Condition dimensionnelle. — Un premier axiome naturel que doit satisfaire la théorie Ω_* que nous cherchons à construire est la condition de dimensionalité

(Dim) Pour toute variété lisse Y sur k et toute famille $(L_1, \dots, L_n)$ de fibrés en droites sur Y, on a

$$\widetilde{c}_1(L_1) \circ \dots \circ \widetilde{c}_1(L_n)(1_Y) = 0$$

si $n > \dim(Y)$.

En quotientant les $\mathcal{Z}_*(X)$ par les sous-groupes engendrés par les éléments de la forme $[Y \to X, (\pi^* L_1, \dots, \pi^* L_n, M_1, \dots M_m)]$ pour $\pi : Y \to Z$ un morphisme lisse équidimensionnel entre variétés lisses et $n > \dim(Z)$, on obtient un foncteur de Borel-Moore orienté $\underline{\mathcal{Z}}_*(X)$ universel parmi les foncteurs de Borel-Moore orientés avec produit satisfaisant (Dim). Remarquons que, par construction, $\underline{\mathcal{Z}}_n(X) = 0$ si $n < 0$.

2.3.2. Zéros d'une section et $\widetilde{c}_1$. — Une autre condition naturelle est que la première classe de Chern corresponde aux zéros d'une section générale. Plus précisément

(Sec) Pour toute variété lisse Y sur k et tout fibré en droites L sur Y, pour toute section s de L qui est transverse à la section nulle,

$$\widetilde{c}_1(L)(1_Y) = [i : Z \to Y]$$

avec $i : Z \to Y$ l'inclusion du lieu des zéros de s.

En quotientant les $\underline{\mathcal{Z}}_*(X)$ par les sous-groupes engendrés par les éléments de la forme

$$[Y \to X, (L, L_1, \dots, L_n)] - [Z \to X, (i^* L_1, \dots, i^* L_n)]$$

on obtient un foncteur $\underline{\Omega}_*(X)$ universel parmi les foncteurs de Borel-Moore orientés avec produit satisfaisant (Dim) et (Sec).

2.3.3. Remarque. — Soit $W \to X \times \mathbf{A}^1$ un morphisme projectif avec W lisse et irréductible. On suppose que le morphisme composé $W \to \mathbf{A}^1$ est transverse à $\{0\}$ et à $\{1\}$ de telle sorte que les fibres W_0 et W_1 correspondantes soient lisses sur k. Par analogie avec le cas complexe, on définit le groupe de cobordisme naïf $\Omega_*^{\text{naif}}(X)$ comme le quotient de $\mathcal{M}_*^+(X)$ par le sous-groupe engendré par les différences $[W_0 \to X] - [W_1 \to X]$ (cobordisme naïf). En appliquant (Sec) au fibré trivial sur W, on vérifie qu'on a un morphisme $\Omega_*^{\text{naif}}(X) \to \underline{\Omega}_*(X)$. En général, ce morphisme n'est pas surjectif.

2.3.4. R_*-foncteurs de Borel-Moore orientés. — Si R_* est un anneau gradué (commutatif avec unité), un R_*-foncteur de Borel-Moore orienté est un foncteur de Borel-Moore orienté avec produit A_* muni d'un morphisme d'anneaux gradués $R_* \to A_*(k)$. Dans ce cas, tous les groupes $A_*(X)$ sont naturellement munis d'une structure de R_*-module pour laquelle toutes les opérations précédemment considérées sont R_* linéaires.

2.3.5. Construction de Ω_*, enfin!— On désire que Ω_* soit un $\mathbf{L}_*$-foncteur de Borel-Moore orienté et que la classe de Chern dans Ω_* du produit de deux fibrés en droites soit donnée par la loi de Lazard universelle $F_{\mathbf{L}}$.

Soit A_* un $\mathbf{L}_*$-foncteur de Borel-Moore orienté vérifiant (Dim). On note F_A l'image de la série de Lazard $F_{\mathbf{L}}$ dans $A_*(k)[[u,v]]$. On considère la condition

(LGF) Pour toute variété lisse Y sur k et toute paire de fibrés en droites (L, M) sur Y, on a

$$F_A(\widetilde{c}_1(L), \widetilde{c}_1(M))(1_Y) = \widetilde{c}_1(L \otimes M)(1_Y).$$

Remarquons que l'évaluation de F_A a un sens grâce à l'axiome (Dim).

On peut maintenant définir Ω_*. Pour cela on considère comme précédemment le quotient des $\mathbf{L}_* \otimes_{\mathbf{Z}} \underline{\Omega}_*(X)$ par des relations convenables (*cf.* [11]) pour obtenir le foncteur Ω_* universel parmi les $\mathbf{L}_*$-foncteurs de Borel-Moore orientés avec produit satisfaisant (Dim), (Sec) et (LGF).

2.3.6. Considérons le foncteur $X \mapsto \mathrm{CH}_*(X)$ qui à une variété X sur k associe son groupe de Chow. C'est un foncteur de Borel-Moore orienté avec produit. De plus on a la relation

$$\widetilde{c}_1(L \otimes M) = \widetilde{c}_1(L) + \widetilde{c}_1(M)$$

pour deux fibrés en droites sur une même base. On en tire une structure de $\mathbf{L}_*$-foncteur sur CH_* correspondant à la loi additive $F_a(u,v) = u+v$ qui munit CH_* d'une structure de $\mathbf{L}_*$-foncteur de Borel-Moore orienté avec produit satisfaisant (Dim), (Sec) et (LGF). On dispose donc d'un morphisme canonique de foncteurs $\Omega_* \to \mathrm{CH}_*$.

2.3.7. Un autre exemple est fourni par le foncteur de G_0-théorie qui à une variété X sur k associe le groupe de Grothendieck $G_0(X)$ de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules cohérents. On pose $G_0(X)[\beta, \beta^{-1}] := G_0(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\beta, \beta^{-1}]$. On munit ce groupe d'une graduation en décrétant que β est de degré 1. On définit $f_* : G_0(Y)[\beta, \beta^{-1}] \to G_0(X)[\beta, \beta^{-1}]$ pour $f : Y \to X$ un morphisme projectif par extension des scalaires à partir de $f_* : G_0(Y) \to G_0(X)$. Par contre, pour l'image inverse par un morphisme $f : Y \to X$ lisse équidimensionnel de dimension d, on multiplie de plus par β^d. Enfin, si L est un fibré en droites sur X, on définit $\widetilde{c}_1(L)$ comme la multiplication par $(1 - [\mathcal{L}^\vee])\beta$, $\mathcal{L}$ désignant le faisceau des sections de L. On a la relation

$$\widetilde{c}_1(L \otimes M) = \widetilde{c}_1(L) + \widetilde{c}_1(M) - \beta\, \widetilde{c}_1(L) \circ \widetilde{c}_1(M)$$

pour deux fibrés en droites sur une même base. On en tire une structure de $\mathbf{L}_*$-foncteur sur $G_0[\beta, \beta^{-1}]$ correspondant à la loi multiplicative $F_m(u, v) = u + v - \beta uv$. On vérifie qu'on a ainsi une structure de $\mathbf{L}_*$-foncteur de Borel-Moore orienté avec produit satisfaisant (Dim), (Sec) et (LGF) et donc un morphisme canonique de foncteurs $\Omega_* \to G_0[\beta, \beta^{-1}]$.

2.3.8. Classe d'un diviseur. — À tout diviseur de Cartier D dans X on peut associer la classe $[D \to X] := \widetilde{c}_1(O_X(D))(1_X)$, $O_X(D)$ désignant le fibré des sections de $\mathcal{O}_X(D)$. Si D et D' sont linéairement équivalents on a $[D \to X] = [D' \to X]$.

2.3.9. Hypersurfaces de Milnor. — On considère des entiers $n > 0$ et $m > 0$. On note γ_n le fibré sur $\mathbf{P}^n$ dont le faisceau des sections est $\mathcal{O}(1)$ et on considère le fibré $\gamma_{n,m} := p_1^*\gamma_n \otimes p_2^*\gamma_m$ sur $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m$. On considère l'hypersurface $H_{n,m}$ de $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m$ lieu des zéros d'une section de $\gamma_{n,m}$ transverse à la section nulle. Si $m \leqslant n$, on peut choisir $H_{n,m}$ définie par l'équation bihomogène $\sum_{0 \leqslant i \leqslant m} X_i Y_i = 0$.

L'énoncé suivant résulte aisément des constructions précédentes.

2.3.10. PROPOSITION. — *On a les relations*

$$[H_{n,m} \to \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m] = \sum_{i \geqslant 0}^{n} \sum_{j \geqslant 0}^{m} a_{i,j} [\mathbf{P}^{n-i} \times \mathbf{P}^{m-j} \to \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m]$$

dans $\Omega_*(\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m)$, *et*

$$[H_{n,m}] = [\mathbf{P}^n][\mathbf{P}^{m-1}] + [\mathbf{P}^{n-1}][\mathbf{P}^m] + \sum_{i \geqslant 1}^{n} \sum_{j \geqslant 1}^{m} a_{i,j} [\mathbf{P}^{n-i}][\mathbf{P}^{m-j}]$$

dans $\Omega_*(k)$, *les* $a_{i,j}$ *étant les coefficients de la série de Lazard* $F_{\mathbf{L}}$.

Ceci donne une interprétation géométrique aux coefficients $a_{i,j}$. En particulier, pour $i, j > 1$, $a_{i,j}$ est égal à la classe de $H_{i,j}$ dans $\Omega_*(k)$ modulo des éléments décomposables. Aussi l'image de $\mathbf{L}_*$ dans $\Omega_*(k)$ est engendrée par les images des espaces projectifs et des hypersurfaces de Milnor $H_{i,j}$. On en déduit que pour toute variété X sur k le morphisme canonique $\mathcal{Z}_*(X) \to \Omega_*(X)$ est surjectif : les $a_{i,j}$ étaient en fait déjà là avant qu'on ne les y mette de force !

En fait le morphisme canonique $\mathcal{M}_*^+(X) \to \Omega_*(X)$ est aussi surjectif, autrement dit $\Omega_*(X)$ est engendré comme groupe abélien par des cycles naïfs de la forme $[Y \to X]$. Pour se débarrasser des fibrés L_i dans les générateurs, on commence par remarquer que sur une variété quasi-projective, pour tout fibré en droites L, il existe un fibré en droites M tel que M et $M \otimes L$ soient tous les deux très amples. Comme $\widetilde{c}_1(L)$ s'exprime en fonction de $\widetilde{c}_1(M)$ et $\widetilde{c}_1(L \otimes M)$ on peut supposer que les L_i sont très amples. Quand k est infini, on a alors des sections transverses à la section nulle par Bertini et on conclut par (SEC). Quand k est fini, un petit argument supplémentaire est nécessaire ([11] Lemma 4.17).

2.4. Premières propriétés

On regroupe ici quelques propriétés fondamentales dont la démonstration n'est pas très difficile à partir de ce qui précède.

2.4.1. Formule pour un éclatement. — Soit $i : Z \to X$ une immersion fermée entre variétés lisses. On note X_Z l'éclatement de Z dans X et η le fibré conormal à i. La déformation au cône normal de i est l'éclatement $\pi : Y \to X \times \mathbf{P}^1$ de $X \times \mathbf{P}^1$ le long de $Z \times \{0\}$. Le diviseur exceptionnel P de π s'identifie au projectifié du fibré conormal à $Z \times \{0\}$ et X_Z au transformé strict de $X \times \{0\}$. On note $O_Y(P)$ le fibré en droites associé au diviseur P sur Y et $O_P(-1)$ le dual du fibré canonique quotient sur P. La série $\chi(u)$ donnant l'inverse pour la loi de groupe formel $F_{\mathbf{L}}$ (i.e. vérifiant $F_{\mathbf{L}}(u, \chi(u)) = u$) étant divisible par u, on peut l'écrire $\chi(u) = ug(u)$.

2.4.2. PROPOSITION. — *Avec les notations précédentes, on a les égalités*

$$[X_Z \to Y] = [X \to Y] + \chi([O_Y(P)])$$

dans $\Omega_*(Y)$ et

$$[X_Z \to X] = [X \to X] + i_* q_*([g(O_P(-1))])$$

dans $\Omega_*(X)$, q désignant la projection $P \to X$.

2.4.3. Trace et dimension zéro. — Le lemme suivant se démontre en considérant un cobordisme naïf (*cf.* remarque 2.3.3) convenable.

2.4.4. LEMME. — *Soit L une k-algèbre séparable finie. Alors* $[\operatorname{Spec} L] = ([L : k])1$ *dans $\Omega_0(k)$.*

On en déduit aisément :

2.4.5. PROPOSITION. — *Soit $L|k$ une extension séparable finie de corps. Alors la composition des morphismes canoniques*

$$\Omega_*(X) \longrightarrow \Omega_*(X \otimes L) \longrightarrow \Omega_*(X)$$

est la multiplication par $[L : k]$.

D'où finalement :

2.4.6. THÉORÈME. — *Pour tout corps k le morphisme canonique $\mathbf{L}_0 \to \Omega_0(k)$ est un isomorphisme. Pour toute variété lisse de dimension 0, $X = \operatorname{Spec} A$ sur k, $[X] = (\dim_k A)\, 1$ dans $\Omega_0(k)$.*

3. PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

On aura besoin dans cette section de supposer que k admet la résolution des singularités, ce qui est vérifié pour k de caractéristique 0. Par souci de simplicité, on supposera dans la suite de cet exposé que k est toujours de caractéristique 0, même si ce n'est pas explicite et/ou utile.

3.1. Le théorème de localisation

L'énoncé suivant est vraiment le résultat technique essentiel qui permet la démonstration des propriétés fondamentales de Ω_*.

3.1.1. THÉORÈME. — *On suppose que le corps k admet la résolution des singularités. Soient X une variété sur k, $i : Z \to X$ une sous-variété fermée et $j : U \to X$ l'ouvert complémentaire. Alors on a une suite exacte*

$$\Omega_*(Z) \longrightarrow \Omega_*(X) \longrightarrow \Omega_*(U) \longrightarrow 0.$$

Expliquons pourquoi l'hypothèse que le corps k admette la résolution des singularités permet de démontrer la surjectivité de $j^* : \Omega_*(X) \to \Omega_*(U)$. On part de $Y \to U$ un morphisme projectif avec Y lisse quasi-projective. En appliquant la résolution des singularités et le lemme de Chow à une adhérence convenable de Y on parvient à construire un morphisme projectif $\widetilde{Y} \to X$ prolongeant $Y \to U$ avec $\widetilde{Y}$ lisse quasi-projective, ce qui permet de démontrer la surjectivité au niveau de $\mathcal{M}_*^+$. La suite de la démonstration est bien plus délicate. Elle procède en plusieurs étapes successives, pour lesquelles nous renvoyons à [11], et consiste à prolonger, de façon plus ou moins analogue, certaines relations de U à X. Elle utilise en particulier de façon fondamentale l'énoncé suivant, qui est une conséquence (d'une variante de) la proposition 2.4.2 et de la résolution des singularités.

3.1.2. PROPOSITION. — *Soit $W' \to W$ un morphisme birationnel projectif entre variétés quasi-projectives lisses. On note F et E les lieux exceptionnels de W et W', respectivement. On suppose que E est un diviseur à croisements normaux. Alors il existe η dans $\Omega_*(F)$ tel que*

$$[W' \to W] = [W \to W] + i_*(\eta),$$

i désignant le morphisme d'inclusion de F dans W.

3.2. Invariance par homotopie

3.2.1. THÉORÈME. — *Soit X une variété sur k. Pour tout entier n le morphisme d'image inverse $p^* : \Omega_*(X) \to \Omega_{*+n}(X \times \mathbf{A}^n)$ associé à la projection $p : X \times \mathbf{A}^n \to X$ est un isomorphisme.*

On se ramène au cas $n = 1$ et on commence par démontrer :

3.2.2. LEMME. — *Avec les notations précédentes, pour tout a dans k, le morphisme $T_a : X \times \mathbf{A}^1 \to X \times \mathbf{A}^1$ donné par la translation par a sur le deuxième facteur induit l'identité sur $\Omega_*(X \times \mathbf{A}^1)$*

Démonstration. — Soit $f : Y \to X \times \mathbf{A}^1$. On considère $F : X \times \mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1 \to X \times \mathbf{A}^1$ donné par $(x, t_1, t_2) \mapsto (x, t_1 + at_2)$. Le produit fibré F^*Y donne un cobordisme naïf (au sens de la remarque 2.3.3) entre f qui est isomorphe à la fibre en 0 et son translaté par a qui est isomorphe à la fibre en 1. □

Suite de la preuve. — Démontrons la surjectivité de p^*. Soit $f : Y \to X \times \mathbf{A}^1$. D'après le lemme précédent on peut supposer que le composé $Y \to \mathbf{A}^1$ est lisse en 0. On considère le produit fibré $Y_m := Y \times_{\mathbf{A}^1} (\mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1)$, le morphisme $\mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1 \to \mathbf{A}^1$ étant celui de multiplication, et le cycle $g : Y_m \to X \times \mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1$ qui s'en déduit en composant avec la projection. On vérifie que ce cycle donne un cobordisme naïf entre f qui est isomorphe à la préimage de $X \times \mathbf{A}^1 \times \{1\}$ et la préimage de $X \times \mathbf{A}^1 \times \{0\}$ qui s'identifie à $p^*(f^{-1}(X \times \{0\}) \times X)$.

On va démontrer l'injectivité de p^* en exhibant un inverse à gauche. Soit $f : Y \to X \times \mathbf{P}^1$ un cycle sur $X \times \mathbf{P}^1$ de classe η dans $\Omega_*(X \times \mathbf{P}^1)$. La classe $\psi(\eta)$ du cycle $f^{-1}(X \times \{a\}) \to X)$ dans $\Omega_{*-1}(X)$ est bien définie et indépendante de a, pour a assez général. En effet $\psi = q_* \circ \widetilde{c}_1(\gamma_1)$ avec $q : X \times \mathbf{P}^1 \to X$ la projection. En particulier ψ s'annule sur l'image de $\Omega_*(X \times \{\infty\})$ dans $\Omega_*(X \times \mathbf{P}^1)$. Par le théorème de localisation 3.1.1, il s'ensuit que ψ se factorise par un morphisme $\Omega_*(X \times \mathbf{A}^1) \to \Omega_{*-1}(X)$ qui est l'inverse à gauche de p^* désiré. □

3.3. Fibrés projectifs

Soit X une k-variété et soit E un fibré vectoriel de rang n sur X. On considère le fibré projectif $q : \mathbf{P}(E) \to X$ représentant les quotients de rang 1 de E. On note $O(1) \to \mathbf{P}(E)$ le fibré en droites quotient canonique de $q^*(E)$. Pour tout entier i dans $\{0, \dots, n\}$ on considère le morphisme

$$\xi^{(i)} : \Omega_{*-n+i}(X) \longrightarrow \Omega_*(\mathbf{P}(E))$$

défini en posant $\xi^{(i)} := \widetilde{c}_1(O(1))^i \circ q^*$.

Par des méthodes essentiellement classiques, Levine et Morel obtiennent à partir des théorèmes 3.1.1 et 3.2.1, la formule suivante pour les fibrés projectifs.

3.3.1. THÉORÈME. — *Soit X une k-variété et soit E un fibré vectoriel de rang n sur X. Le morphisme canonique*

$$\oplus_{i=0}^{n-1} \xi^{(i)} : \oplus_{i=0}^{n-1} \Omega_{*-n+i}(X) \longrightarrow \Omega_*(\mathbf{P}(E))$$

est un isomorphisme.

En utilisant ce résultat joint au théorème 3.1.1, ils obtiennent la forme plus générale suivante de l'invariance par homotopie.

3.3.2. THÉORÈME. — *Soit X une k-variété, soit E un fibré vectoriel de rang n sur X et soit $p : V \to X$ un E-torseur. Alors le morphisme canonique*

$$p^* : \Omega_*(X) \longrightarrow \Omega_{*+n}(V)$$

est un isomorphisme.

3.4. Classes de Chern

Soit X une k-variété et soit E un fibré vectoriel de rang n sur X. On déduit du théorème 3.3.1 que $\Omega_*(\mathbf{P}(E))$ est muni d'une structure canonique de $\operatorname{End}\Omega_*(X)$-module gradué à gauche. On en tire l'existence de morphismes

$$\widetilde{c}_i(E) : \Omega_*(X) \longrightarrow \Omega_*(X)$$

pour $0 \leqslant i \leqslant n$, caractérisés par les relations

$$\sum_{i=0}^{n} \widetilde{c}_i(E)\widetilde{c}_1(O(1))^{n-i} = 0$$

et $\widetilde{c}_0(E) = \mathrm{id}$, les classes de Chern de E, qui vérifient les propriétés « usuelles » des classes de Chern.

Il est aussi possible de définir ces classes de Chern à partir des classes de Chern des fibrés en droites en utilisant le principe de scindage. Plus généralement considérons l'anneau gradué $\mathbf{Z}[t] = \mathbf{Z}[t_1, \dots, t_n, \dots]$ des polynômes à coefficients entiers en une infinité de variables t_i de degré 1 et posons

$$\Omega_*(X)[t] := \Omega_*(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[t].$$

Pour tout fibré en droites L sur X on considère l'automorphisme $\widetilde{c}_t(L) := \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{c}_1(L)^i t_i$ de $\Omega_*(X)[t]$. Par le principe de scindage, cette construction s'étend à tout fibré vectoriel E de rang n sur X. On développe alors $\widetilde{c}_t(E)$ en

$$\widetilde{c}_t(E) = \sum_I \widetilde{c}_I(E) t^I,$$

I parcourant $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. Les coefficients $\widetilde{c}_I(E)$ sont les classes de Chern de Conner et Floyd attachées à E. On retrouve les classes de Chern usuelles comme coefficients des t_i.

4. THÉORÈMES DE COMPARAISON

4.1. Loi de groupe formel multiplicative et invariance birationnelle

On s'intéresse dans cette section à des foncteurs de Borel-Moore orientés avec produit satisfaisant (Dim), (Sec) et (LGF) avec loi de groupe formel multiplicative, c'est-à-dire de la forme

$$u + v - \beta uv,$$

avec β non nécessairement inversible. Le foncteur $\Omega_*^\beta := \Omega_* \otimes_{\mathbf{L}_*} \mathbf{Z}[\beta]$ est universel parmi de tels foncteurs. On notera avec un indice α_β l'image d'un élément α de $\Omega_*(X)$ dans $\Omega_*^\beta(X)$. Il résulte de la proposition 2.3.10 que $[\mathbf{P}^1]_\beta = \beta$. De plus on peut montrer, à l'aide de la proposition 2.4.2, du théorème 3.3.2 et de l'astuce de Jouanolou, que, pour tout fibré vectoriel E sur X lisse quasi-projective de rang n, on a

$$[\mathbf{P}(E) \to X]_\beta = \beta^{n-1}[X \to X]_\beta. \tag{4.1.1}$$

En particulier on a $[\mathbf{P}^n]_\beta = \beta^n$. La formule pour un éclatement 2.4.2 se simplifie dramatiquement alors pour donner :

4.1.1. Proposition. — *Soit X une variété quasi-projective lisse quasi-projective sur k et soit Z une sous-variété lisse fermée. Alors on a*

$$[X_Z \to X]_\beta = [X \to X]_\beta$$

dans $\Omega_*^\beta(X)$.

En utilisant le théorème de factorisation faible de Abramovich, Karu, Matsuki, et Włodarczyk ([1], [3]), on en déduit :

4.1.2. Corollaire. — *Soient Z et Z' deux variétés projectives lisses birationnellement équivalentes. Alors $[Z]_\beta = [Z']_\beta$ dans $\Omega_*^\beta(k)$.*

Plus précisément, on a le résultat suivant :

4.1.3. Proposition. — *Le noyau du morphisme canonique*

$$\Omega_*(k) \longrightarrow \Omega_*^\beta(k)$$

est l'idéal I engendré par les différences $[Z]-[Z']$ avec Z et Z' des variétés projectives lisses birationnellement équivalentes.

Démonstration. — Au vu du corollaire 4.1.2, il suffit de démontrer que $\Omega_*(k) = I + \mathbf{Z}[\mathbf{P}^1]$, ce qui résulte du fait que les hypersurfaces de Milnor $H_{n,m}$ sont birationnellement équivalentes à $\mathbf{P}^{n+m-1}$ et de ce que $\Omega_*(k)$ est engendré par les classes des hypersurfaces de Milnor et des espaces projectifs (ce dernier point est conséquence de l'isomorphisme $\mathbf{L}_* \to \Omega_*(k)$ démontré en 4.3.2). □

On en déduit le théorème :

4.1.4. Théorème. — *Le foncteur $X \mapsto \Omega_*(X) \otimes_{\mathbf{L}_*} \mathbf{Z}[\beta]$ est universel parmi les $\mathbf{L}_*$-foncteurs de Borel-Moore orientés avec produit satisfaisant* (Dim), (Sec) *et* (LGF) *satisfaisant la condition d'invariance birationnelle suivante : pour tout morphisme projectif birationnel $f : Y \to X$ entre variétés lisses irréductibles, on a $f_* 1_Y = 1_X$.*

Démonstration. — Il résulte de la proposition 4.1.3 que si A_* est un $\mathbf{L}_*$-foncteur de Borel-Moore orienté avec produit satisfaisant (Dim), (Sec) et (LGF) satisfaisant la condition d'invariance birationnelle, alors on a un morphisme de foncteurs $\Omega_* \otimes_{\mathbf{L}_*} \mathbf{Z}[\beta] \to A_*$. Il reste à vérifier que le foncteur $\Omega_* \otimes_{\mathbf{L}_*} \mathbf{Z}[\beta]$ satisfait la condition d'invariance birationnelle, ce qui résulte de la proposition 4.1.1 et du théorème de factorisation faible. □

4.2. Comparaison avec le K^0

Dans ce numéro on restreindra des foncteurs de Borel-Moore orientés avec produit A_* à la catégorie $\mathcal{L}'_k$. On passera en numérotation cohomologique en posant $A^*(X) = A_{\dim X - *}(X)$.

Pour X dans $\mathcal{L}'_k$ le morphisme canonique entre groupes de Grothendieck $K^0(X) \to G_0(X)$ est un isomorphisme (on rappelle que $K^0(X)$ désigne le groupe de Grothendieck des faisceaux localement libres de type fini sur X). On identifiera donc la restriction du foncteur $G_0[\beta, \beta^{-1}]$ à $\mathcal{L}'_k$ au foncteur $K^0[\beta, \beta^{-1}] := K^0 \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\beta, \beta^{-1}]$, en convenant maintenant que β est de degré -1.

4.2.1. Théorème. — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Le morphisme canonique de foncteurs de Borel-Moore orientés avec produit sur $\mathcal{L}'_k$*

$$\Omega^* \longrightarrow K^0[\beta, \beta^{-1}]$$

induit un isomorphisme

$$\Omega^* \otimes_{\mathbf{L}_*} \mathbf{Z}[\beta, \beta^{-1}] \simeq K^0[\beta, \beta^{-1}].$$

Ébauche de preuve. — Compte tenu du caractère universel de Ω_*, il suffit de montrer qu'il existe un unique morphisme de foncteurs de Borel-Moore orientés avec produit sur $\mathcal{L}'_k$:

$$\lambda : K^0[\beta, \beta^{-1}] \longrightarrow \Omega^* \otimes_{\mathbf{L}_*} \mathbf{Z}[\beta, \beta^{-1}].$$

Remarquons que nécessairement λ doit envoyer β sur la classe de $[\mathbf{P}^1]$, autrement dit β. De plus, pour X dans $\mathcal{L}_k$, on a, pour tout fibré en droites L de faisceau des sections $\mathcal{L}$, la relation $[\mathcal{L}] = 1 - c_1(L^\vee)\beta$ dans $K^0[\beta, \beta^{-1}]$, et donc nécessairement λ doit envoyer $[\mathcal{L}]$ sur $1 - c_1(L^\vee)\beta$ dans $\Omega^* \otimes_{\mathbf{L}_*} \mathbf{Z}[\beta, \beta^{-1}]$, ce qui garantit l'unicité de λ par le principe de scindage. Pour définir λ, on pose $\lambda([\mathcal{E}]\beta^n) = (r - c_1(E^\vee)\beta)\beta^n$, pour E un fibré vectoriel de rang r sur X de faisceau des sections $\mathcal{E}$. Par le principe de scindage, λ est un morphisme d'anneaux gradués. Le fait qu'il commute à l'image inverse par les morphismes lisses étant clair, il reste à vérifier qu'il commute à l'image directe par les morphismes projectifs. Ceci se démontre de façon tout à fait analogue[(1)] à la preuve du théorème de Riemann-Roch-Grothendieck donnée dans [5]. Il suffit de vérifier l'énoncé pour une projection $\mathbf{P}^n_k \times X \to X$ sur un schéma lisse et pour une immersion fermée

[(1)] En fait, d'après [11] remarque 8 page 93, le théorème est essentiellement équivalent au théorème de Riemann-Roch-Grothendieck.

$Y \to X$ entre schémas lisses. Pour le premier cas on se ramène au cas où $X = \operatorname{Spec} k$, par compatibilité avec le produit externe, qui est de vérification directe. Le cas de l'immersion fermée se démontre lui par déformation au cône normal. □

4.3. Calcul de $\Omega_*(k)$

Commençons par déterminer $\Omega_*(k) \otimes_{\mathbf{L}_*} \mathbf{Z}$.

4.3.1. Proposition. — *Soit k un corps de caractéristique zéro. On a*

$$\Omega_*(k) \otimes_{\mathbf{L}_*} \mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}.$$

Démonstration. — Posons $\Omega_*^{\mathrm{ad}}(k) = \Omega_*(k) \otimes_{\mathbf{L}_*} \mathbf{Z}$. D'après le théorème 2.4.6, $\Omega_0^{\mathrm{ad}}(k) \simeq \mathbf{Z}$. Il suffit donc de démontrer que $\Omega_n^{\mathrm{ad}}(k) = 0$, pour $n > 0$, autrement dit que la classe de X dans $\Omega_*^{\mathrm{ad}}(k)$ est nulle, pour toute variété projective lisse X de dimension > 0. D'après 4.1, la classe de $\mathbf{P}^n$ est nulle pour $n > 0$. Si $n > 0$, la classe de toute hypersurface lisse Y dans $\mathbf{P}^{n+1}$ est nulle ; en effet une telle hypersurface est linéairement équivalente au diviseur $d\mathbf{P}^n$ et $[d\mathbf{P}^n] = d[\mathbf{P}^n] = 0$ dans $\Omega_*^{\mathrm{ad}}(k)$. On utilise ici l'additivité de la loi de groupe formel associée à $\Omega_*^{\mathrm{ad}}(k)$ ainsi que les notations de 2.3.8. Considérons maintenant une variété projective lisse irréductible Y. Elle est birationnellement équivalente à une hypersurface réduite (peut-être singulière) $\overline{Y}$. Par le théorème d'Hironaka, il existe un morphisme $\mu : S \to \mathbf{P}^{n+1}$ composé d'éclatements de centres lisses tel que le diviseur $\mu^{-1}(\overline{Y})$ soit à croisements normaux. En particulier la transformée stricte $\widetilde{Y}$ de $\overline{Y}$ est lisse et birationnellement équivalente à Y. On a donc $[Y] = [\widetilde{Y}]$ dans $\Omega_*^{\mathrm{ad}}(k)$. Il résulte de (4.1.1) appliqué aux centres des éclatements successifs que $[\widetilde{Y}] = [\mu^{-1}(\overline{Y})]$ dans $\Omega_*^{\mathrm{ad}}(k)$. Pour conclure, on remarque que la classe de $\mu^{-1}(\overline{Y})$ est égale à celle de $\mu^{-1}(D)$ pour tout diviseur D de même degré que $\overline{Y}$, et que $\mu^{-1}(D)$ est lisse et birationnellement équivalent à D pour D assez général. □

4.3.2. Théorème. — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Le morphisme canonique*

$$\Psi : \mathbf{L}_* \longrightarrow \Omega_*(k)$$

est un isomorphisme.

Ébauche de preuve. — Démontrons l'injectivité. Lorsque k est un sous-corps de $\mathbf{C}$, on peut considérer le foncteur cohomologique $X \mapsto U^{2*}(X(\mathbf{C}))$ sur les variétés lisses sur k. Par le caractère universel du cobordisme algébrique, on en tire un morphisme canonique $\Omega^*(X) \to U^{2*}(X(\mathbf{C}))$, et en particulier un morphisme canonique d'anneaux $\theta : \Omega_*(k) \to U_{2*}(\text{point})$. Mais le composé $\theta \circ \Psi$ n'est autre que l'isomorphisme de Quillen $\delta : \mathbf{L}^* \to U^*(\text{point})$, ce qui prouve l'injectivité de Ψ. Pour démontrer l'injectivité sans hypothèse sur k, Levine et Morel considèrent le morphisme canonique[(2)]

$$\Omega_*(k) \longrightarrow \mathbf{Z}[t_1, \ldots, t_n, \ldots]$$

qui associe à une variété projective lisse sur k « l'ensemble de ses nombres de Chern ». En composant avec le morphisme canonique $\mathbf{L}_* \to \Omega_*(k)$, on en tire un morphisme

$$\mathbf{L}_* \longrightarrow \mathbf{Z}[t_1, \ldots, t_n, \ldots].$$

Pour conclure, Levine et Morel démontrent que ce morphisme correspond à la loi de groupe formel $\lambda^{-1}(\lambda(u) + \lambda(v))$, avec $\lambda(u)$ la série $\sum_{i \geqslant 0} t_i u^i$ et $\lambda^{-1}(u)$ son inverse pour la composition, dont il est connu qu'il est injectif [20]. Cette preuve n'utilise pas le théorème de Quillen.

Enfin, il résulte de la proposition 4.3.1 que, pour $i > 0$, $\Omega_i(k) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant i} \mathbf{L}_j \Omega_{i-j}(k)$, et la surjectivité suit. □

4.3.3. Remarque. — La preuve du théorème précédent est toute différente (et indépendante) de celle du théorème de Quillen. En effet, comme nous l'avons déjà signalé, celle-ci repose de façon essentielle sur les propriétés de finitude du cobordisme complexe, dont l'analogue strict en cobordisme algébrique n'est vraisemblablement pas vérifié en général. Par contre on a utilisé des arguments géométriques qui n'ont pas d'analogue en topologie : la suite exacte de localisation, le théorème d'Hironaka, le fait que toute variété soit birationnellement une hypersurface, etc.

4.3.4. COROLLAIRE. — *Soit $k \subset K$ une extension de corps de caractéristique zéro. Le morphisme canonique $\Omega_*(k) \to \Omega_*(K)$ est un isomorphisme.*

4.4. Comparaison avec les groupes de Chow

4.4.1. THÉORÈME. — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Le morphisme canonique de foncteurs de Borel-Moore orientés*

$$\Omega_* \longrightarrow \mathrm{CH}_*$$

induit un isomorphisme

$$\Omega_* \otimes_{\mathbf{L}_*} \mathbf{Z} \longrightarrow \mathrm{CH}_*.$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que si $\widetilde{Z} \to Z$ est un morphisme projectif birationnel entre variétés lisses, alors l'image de $[\widetilde{Z} \to Z]$ dans $\Omega_*(Z) \otimes_{\mathbf{L}_*} \mathbf{Z}$ est égale à 1_Z. En effet cela résulte du théorème 5.2.1 car les termes du second membre de (5.2.1) sont nuls dans $\Omega_*(Z) \otimes_{\mathbf{L}_*} \mathbf{Z}$ pour des raisons de degré.

Soit Z un sous-schéma fermé intègre d'un schéma X de type fini sur k. Il résulte de la remarque précédente que la classe de $[\widetilde{Z} \to X]$ dans $\Omega_*(X) \otimes_{\mathbf{L}_*} \mathbf{Z}$, pour $\widetilde{Z} \to Z$ un morphisme projectif birationnel avec $\widetilde{Z}$ lisse, ne dépend que de Z. On la note $[Z \hookrightarrow X]$.

(2) Merkurjev a démontré, sans hypothèse sur k, que ce morphisme se factorise en une rétraction $\Omega_*(k) \to \mathbf{L}_*$ du morphisme canonique $\mathbf{L}_* \to \Omega_*(k)$.

On définit ainsi un morphisme de groupes abéliens $\Phi : Z_*(X) \to \Omega_*(X) \otimes_{\mathbf{L}_*} \mathbf{Z}$ dont le composé avec le morphisme $\Omega_*(X) \otimes_{\mathbf{L}_*} \mathbf{Z} \to \mathrm{CH}_*(X)$ est le morphisme canonique $Z_*(X) \to \mathrm{CH}_*(X)$. Comme il résulte du théorème 5.2.1 que le morphisme Φ est surjectif, il reste à savoir que Φ se factorise par $\mathrm{CH}_*(X)$, ce qui est donné par le lemme suivant. □

4.4.2. Lemme. — *Soit W un sous-schéma fermé intègre d'un schéma X de type fini sur k et soit f dans $k(W)^*$ une fonction rationnelle non nulle de diviseur* $\mathrm{div}(f)$ *dans* $Z_*(X)$. *Alors* $\Phi(\mathrm{div}(f)) = 0$ *dans* $\Omega_*(X) \otimes_{\mathbf{L}_*} \mathbf{Z}$.

Ébauche de preuve. — Grâce à la résolution des singularités on peut considérer un morphisme $\pi : \widetilde{W} \to W$ avec $\widetilde{W}$ quasi-projective lisse tel que f induise un morphisme $\widetilde{f} : \widetilde{W} \to \mathbf{P}^1$. On peut de plus supposer que le diviseur de $\widetilde{f}$ soit de la forme $D_0 - D_\infty$ avec D_0 et D_∞ des diviseurs à croisements normaux ne s'intersectant pas. Considérons les classes $[D_0 \to \widetilde{W}]$ et $[D_\infty \to \widetilde{W}]$ définies dans 2.3.8. Comme on a $[D_0 \to \widetilde{W}] = [D_\infty \to \widetilde{W}]$, il suffit de démontrer que $\Phi(D_0)$ est égale à l'image de $[D_0 \to \widetilde{W}]$ dans $\Omega_*(X) \otimes_{\mathbf{L}_*} \mathbf{Z}$, et de même pour D_∞, ce qui résulte des formules explicites pour la classe d'un diviseur à croisements normaux de [11] et de la proposition 4.3.1. □

En particulier, pour X une variété algébrique complexe lisse et projective, on déduit du théorème 4.4.1 l'existence d'un morphisme canonique

$$\mathrm{CH}^*(X) \longrightarrow U^{2*}(X(\mathbf{C})) \otimes_{\mathbf{L}^*} \mathbf{Z}.$$

Ce morphisme avait été introduit par B. Totaro dans son travail sur les cycles algébriques de torsion [22].

5. LA FORMULE DU DEGRÉ

On rappelle que l'on fait partout l'hypothèse que k est de caractéristique zéro. On renvoie à [11], [15], [16], [14] pour une discussion de ce qui reste connu en caractéristique positive.

5.1. Définition du degré

Soit X une variété irréductible sur k de corps des fractions $k(X)$. Pour tout ouvert U non vide de X on dispose d'un morphisme canonique $\Omega_*(U) \to \Omega_*(k(X))$ et on vérifie que le morphisme canonique

$$\varinjlim \Omega_*(U) \to \Omega_*(k(X))$$

est un isomorphisme. En particulier on dispose d'un morphisme $\Omega_*(X) \to \Omega_*(k(X))$, qui composé avec l'inverse de l'isomorphisme du corollaire 4.3.4 fournit un morphisme canonique $\deg : \Omega_*(X) \to \Omega_*(k)$. Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_n$ sont les composantes irréductibles de X, on définit de façon similaire des morphismes degré $\deg_i : \Omega_*(X) \to \Omega_*(k)$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

5.2. Formule générale du degré

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer la formule générale du degré de Levine et Morel.

5.2.1. Théorème (Formule générale du degré). — *Soit X un schéma de type fini sur k de composantes irréductibles $X_1, \ldots, X_n$. Pour tout sous-schéma fermé Z de X, on fixe un morphisme projectif birationnel $\widetilde{Z} \to Z$ avec $\widetilde{Z}$ dans $\mathcal{L}_k$. Alors, pour tout élément α de $\Omega_*(X)$, on peut écrire*

$$\alpha - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \deg_i(\alpha)[\widetilde{X}_i \to X_i] = \sum_{Z,\, \mathrm{codim} Z > 0} \omega_Z[\widetilde{Z} \to X] \tag{5.2.1}$$

pour un choix convenable d'éléments ω_Z dans $\Omega_*(k)$.

Ébauche de preuve. — On raisonne par récurrence sur la dimension de X, en utilisant le théorème de localisation 3.1.1. □

5.2.2. Corollaire. — *Pour tout schéma de type fini X, $\Omega_*(X)$ est engendré comme $\Omega_*(k)$-module par les classes de degré $\leqslant \dim X$. Si, de plus, X est irréductible, fixons un morphisme projectif birationnel $\widetilde{X} \to X$ avec X dans $\mathcal{L}_k$. Alors $\Omega_*(X)$ est engendré comme $\Omega_*(k)$-module par les classes de degré $\leqslant \dim X - 1$ et $[\widetilde{X} \to X]$.*

5.2.3. Remarque. — Le corollaire précédent est l'analogue algébrique d'un résultat de Quillen [20] selon lequel l'anneau de cobordisme complexe $U_*(X)$ est engendré comme $\mathbf{L}_*$-module par les classes de degré $\leqslant 2\dim X$, si X est un complexe fini.

Soit X une variété projective irréductible et lisse sur k. Considérons le noyau $\widetilde{\Omega}_*(X)$ du morphisme $\deg : \Omega_*(X) \to \Omega_*(k)$. Remarquons que le morphisme composé $\Omega_*(k) \to \Omega_*(X) \to \Omega_*(k)$ étant l'identité, on a un scindage canonique $\Omega_*(X) = \Omega_*(k) \oplus \widetilde{\Omega}_*(X)$.

Il résulte du théorème 5.2.1 que l'image de $\widetilde{\Omega}_*(X)$ par le morphisme d'image directe $\Omega_*(X) \to \Omega_*(k)$ associé au morphisme structural $X \to \operatorname{Spec} k$ coïncide avec l'idéal $M(X)$ de $\Omega_*(k)$ engendré par les classes $[Y]$, pour Y projective lisse de dimension $< \dim X$ admettant un k-morphisme $Y \to X$.

L'énoncé suivant qui est également une conséquence du théorème 5.2.1, a été conjecturé par Rost (*cf.* [15]).

5.2.4. Théorème. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme entre variétés projectives lisses irréductibles. Alors $[Y] - \deg(f)[X]$ appartient à l'idéal $M(X)$ de $\Omega_*(k)$.*

5.3. La formule du degré de Rost

Soit $f : Y \to X$ un morphisme entre variétés projectives lisses irréductibles de même dimension d. Remarquons que dans ce cas $\deg(f)$ appartient à $\Omega_0(k)$, on peut donc le voir comme un entier, égal au degré usuel d'après le lemme 2.4.4. On peut ainsi réécrire (5.2.1) en

$$[Y] - \deg(f)[X] = \sum_{Z,\,\mathrm{codimZ}>0} \omega_Z[\widetilde{Z} \to X] \tag{5.3.1}$$

pour un choix convenable d'éléments ω_Z dans $\Omega_{d-\dim Z}(k)$.

Pour toute variété projective lisse X de dimension d, on considère N_d, le d-ième polynôme de Newton en les classes de Chern du fibré tangent dans $\mathrm{CH}_0(X)$ et on note $s_d(X)$ l'entier $-\deg N_d$ (il s'agit ici du degré usuel $\mathrm{CH}_0(X) \to \mathbf{Z}$). Les faits suivants sont bien connus des topologues (*cf.* [2]).

(S1) Si d est de la forme $d = p^n - 1$ avec p un nombre premier, alors l'entier $s_d(X)$ est divisible par p.

(S2) Pour X et X' de dimension d et d' tous deux > 0, on a $s_{d+d'}(X \times X') = 0$.

On va maintenant déduire de la formule générale du degré l'énoncé suivant, dû à Rost (*cf.* [15], [16]), qui généralise des résultats antérieurs de Voevodsky.

5.3.1. THÉORÈME (Formule du degré de Rost). — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme entre variétés projectives lisses irréductibles de même dimension $d > 0$. On suppose que d est de la forme $d = p^n - 1$ avec p un nombre premier. Alors il existe un zéro-cycle z dans $\mathrm{CH}_0(X)$ de degré égal à*

$$\frac{s_d(Y)}{p} - \deg(f)\frac{s_d(X)}{p}.$$

Démonstration. — Si on applique s_d à l'égalité (5.3.1), on obtient

$$s_d(Y) - \deg(f)s_d(X) = \sum_{Z,\,\mathrm{dimZ}=0} s_d(\omega_Z[Z \to X])$$

pour un choix convenable d'éléments ω_Z dans $\Omega_d(k)$, car les Z de dimension > 0 disparaissent grâce à (S2). Le zéro-cycle $z = \sum \frac{s_d(\omega_Z)}{p} Z$ vérifie alors la propriété requise. □

5.3.2. Remarque. — Il est important de remarquer qu'il est vraiment nécessaire de travailler avec Ω_* pour pouvoir utiliser (S2) dans la preuve précédente. En particulier celle-ci ne fonctionnerait plus si on se contentait de travailler directement dans l'anneau de Chow.

5.3.3. Remarque. — La version plus générale du théorème 5.3.1 due à Borghesi [4] peut également être déduite du théorème 5.2.1.

La formule du degré de Rost admet un certain nombre de conséquences frappantes (*cf.* [16]). Elle permet en particulier de retrouver les résultats suivants de la théorie des formes quadratiques (*cf.* [16]).

5.3.4. Théorème (Hoffmann [6]). — *Soient Q_1 et Q_2 deux quadriques anisotropes sur k. Si Q_1 est de dimension $\geqslant 2^r - 1$ et si Q_2 est anisotrope sur le corps des fonctions de Q_1, alors Q_2 est de dimension $\geqslant 2^r - 1$.*

5.3.5. Théorème (Izhboldin [7]). — *Soient Q_1 et Q_2 deux quadriques anisotropes sur k. Si Q_1 est de dimension $2^r - 1$ et si Q_2 est isotrope sur le corps des fonctions de Q_1, alors Q_1 est isotrope sur le corps des fonctions de Q_2.*

6. IMAGES INVERSES EN COBORDISME ALGÉBRIQUE

On présente dans cette section des résultats contenus dans [10].

6.1. Théories homologiques de Borel-Moore orientées

Pour les besoins de la construction de Ω_*, nous avons été minimalistes pour ce qui est des propriétés demandées a priori. En particulier nous n'avons considéré que des images inverses par des morphismes lisses. Il est souhaitable d'avoir des images inverses en plus grande généralité, comme celle fournie par le formalisme des théories homologiques de Borel-Moore orientées.

Une théorie de Borel-Moore orientée sur $\mathcal{V}_k$ consiste en les données suivantes [10] :

(D1) Un foncteur additif

$$H_* : \mathcal{V}'_k \longrightarrow \mathbf{Ab}_*.$$

(D2) Pour tout morphisme $f : Y \to X$ dans $\mathcal{V}_k$ localement d'intersection complète[(3)] de dimension relative d, un morphisme

$$f^* : H_*(X) \longrightarrow H_{*+d}(Y).$$

(D3) Un produit externe bilinéaire

$$H_*(X) \times H_*(Y) \longrightarrow H_*(X \times_k Y)$$

qui est associatif, commutatif, et admettant une unité 1 de $H_0(k)$.

On demande de plus que ces données vérifient les propriétés suivantes :

(BM1) Fonctorialité de f^*.

[(3)] i.e. qui admet une factorisation $f = p \circ i$ avec i une immersion régulière fermée et p un morphisme lisse.

(BM2) Si $f : X \to Z$ est un morphisme projectif et $g : Y \to Z$ est un morphisme localement d'intersection complète et que g est transverse à f, on a $g^* f_* = f'_* g'^*$, pour tout diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z. \end{tikzcd}$$

(BM3) Compatibilité de f_* et f^* au produit externe.

(PB) Soit E un fibré vectoriel de rang n sur X dans $\mathcal{V}_k$, le morphisme canonique

$$\oplus_{i=0}^{n-1} \xi^{(i)} : \oplus_{i=0}^{n-1} H_{*-n+i}(X) \longrightarrow H_*(\mathbf{P}(E))$$

est un isomorphisme, le morphisme $\xi^{(i)} : H_{*-n+i}(X) \to H_*(\mathbf{P}(E))$ étant défini comme en (3.3) par $\xi^{(i)} := \widetilde{c}_1(O(1))^i \circ q^*$.

(H) Soit X dans $\mathcal{V}_k$, soit E un fibré vectoriel de rang n sur X et soit $p : V \to X$ un E-torseur. Alors $p^* : H_*(X) \to H_{*+n}(V)$ est un isomorphisme.

Bien sûr un tel foncteur est un foncteur de Borel-Moore orienté avec produits au sens de (2.2.3), la première classe de Chern d'un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur une variété X étant définie par $\widetilde{c}_1(\mathcal{L}) := i^* \circ i_*$, pour $i : X \to \mathcal{L}$ la section nulle (ce qui permet de définir $\xi^{(i)}$ dans (PB)).

6.2. Images inverses en cobordisme algébrique

La théorie de l'intersection de Fulton [5] permet de munir le foncteur $X \mapsto \mathrm{CH}_*(X)$ d'une structure de théorie de Borel-Moore orientée. On peut également munir le foncteur $G_0[\beta, \beta^{-1}]$ d'une telle structure.

6.2.1. THÉORÈME. — *Si k est de caractéristique zéro, le cobordisme algébrique Ω_* admet une unique structure de théorie de Borel-Moore orientée compatible avec les données déjà définies. De plus le cobordisme algébrique est universel parmi les théories de Borel-Moore orientées.*

Le point-clé dans cet énoncé est la construction d'images inverses fonctorielles $f^* : \Omega_*(X) \to \Omega_{*+d}(Y)$ pour $f : Y \to X$ une immersion régulière fermée de dimension relative d vérifiant les propriétés demandées. Ce travail est mené à bien dans [10], et nécessite de reprendre en les étendant au cadre du cobordisme algébrique l'essentiel des constructions de la théorie de l'intersection de [5].

7. RELATIONS AVEC LA THÉORIE HOMOTOPIQUE DES SCHÉMAS

7.1. Le spectre du cobordisme complexe

Commençons par rappeler l'interprétation homotopique du cobordisme complexe. On note $G_{n,m}$ la grassmannienne des n-plans dans $\mathbf{C}^{n+m}$ et $\xi_{n,m}$ le fibré complexe tautologique de rang n sur $G_{n,m}$. Le classifiant $\mathrm{BU}(n)$ du groupe $U(n)$ (et des fibrés complexes de rang n) est la colimite des espaces $G_{n,m}$. Il est muni du fibré ξ_n, colimite des fibrés $\xi_{n,m}$. On note $\mathrm{MU}(n)$ l'espace de Thom du fibré ξ_n et on définit $\mathbf{MU}$, le spectre du cobordisme complexe, par $\mathbf{MU}_{2n} = \mathrm{MU}(n)$ et $\mathbf{MU}_{2n+1} = \Sigma\mathrm{MU}(n)$, Σ désignant le foncteur de suspension.

L'énoncé suivant est une reformulation du théorème de Thom sur le cobordisme (dans le cas complexe).

7.1.1. THÉORÈME. — *Pour toute variété X, $U^q(X)$ est canoniquement isomorphe à* $\operatorname{colim}\,[\Sigma^{2k-q}X, \mathrm{MU}(k)]$. *Autrement dit, le spectre* $\mathbf{MU}$ *représente*(4) *la théorie cohomologique U^* dans la catégorie homotopique stable.*

7.2. Le spectre du cobordisme algébrique

Rappelons la construction de la catégorie homotopique stable en géométrie algébrique d'après [23], [18]. Morel et Voevodsky ont défini dans [19] la catégorie homotopique $\mathcal{H}(k)$ des schémas lisses sur un corps k. C'est une catégorie de modèles fermée dont les objets sont des faisceaux simpliciaux pour la topologie de Nisnevich. En particulier, tout fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur une k-variété admet un espace de Thom $\mathrm{Th}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{H}(k)$. Ainsi on peut définir dans la catégorie $\mathcal{H}(k)$ l'analogue noté $\mathrm{MGL}(n)$ de l'espace $\mathrm{MU}(n)$ considéré en (7.1). Remarquons que dans la catégorie homotopique $\mathcal{H}(k)$ on dispose de deux « cercles » différents, le cercle simplicial S^1_s et le cercle de Tate $S^1_t := \mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$. On vérifie que leur smash-produit T est faiblement équivalent à la droite projective. La catégorie homotopique stable $\mathcal{SH}(k)$ est définie(5) en localisant par rapport au smash-produit $\Sigma_T : X \mapsto T \wedge X$. On définit alors les T-spectres de façon usuelle, comme une suite d'objets E_i munis de morphismes $\Sigma_T(E_i) \to E_{i+1}$. À tout T-spectre $\mathbf{E}$ est associée une théorie cohomologique bigraduée

$$E^{p,q}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(\Sigma^\infty, S^{p,q} \wedge \mathbf{E})$$

sur $\mathcal{H}(k)$, en posant $S^{p,q} := (S^1_s)^{p-q} \wedge (S^1_t)^q$.

En particulier, on peut associer naturellement à la suite d'espaces $\mathrm{MGL}(n)$ un T-spectre noté $\mathbf{MGL}$ et une théorie cohomologique bigraduée $\mathrm{MGL}^{*,*}$. Ceci illustre

(4) Au grain de sel près que les objets de la catégorie homotopique stable ne sont pas tous des variétés différentiables.

(5) Pour être correct il faudrait considérer ici des espaces pointés, mais nous négligeons délibérément ce point.

le principe général selon lequel en géométrie algébrique les théories cohomologiques sur la catégorie des variétés lisses sur un corps sont naturellement bigraduées. Ainsi la cohomologie singulière $H^*(X, \mathbf{Z})$ est-elle remplacée par la cohomologie motivique $H^{*,*}(X, \mathbf{Z})$, la K-théorie complexe par la K-théorie algébrique $K^{*,*}(X)$ (avec $K^{n,i}(X) = K_{2i-n}^{\text{Quillen}}(X)$), ..., le premier degré correspondant au degré cohomologique et le second au poids. En particulier, on obtient, pour X lisse, un morphisme

$$\Omega^*(X) \longrightarrow \mathrm{MGL}^{2*,*}(X)$$

dont Levine et Morel conjecturent qu'il est toujours un isomorphisme.

Pour conclure, signalons que Hopkins et Morel ont annoncé, sans imposer d'hypothèse sur k, que pour toute variété lisse (simpliciale) X sur k on a un isomorphisme

$$\mathrm{MGL}^{*,*}(X) \otimes_{\mathbf{L}^*} \mathbf{Z}[\beta, \beta^{-1}] \simeq K^{*,*}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\beta, \beta^{-1}],$$

β étant maintenant de bidegré $(-2, -1)$. Ils ont également annoncé, sous l'hypothèse que le corps k est de caractéristique zéro, l'existence d'une suite spectrale de type Atiyah-Hirzebruch reliant la cohomologie motivique à $\mathrm{MGL}^{*,*}$.

RÉFÉRENCES

[1] D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki & J. Włodarczyk – « Torification and factorization of birational morphisms », preprint 2000, `AG/9904135`.

[2] J. Adams – *Stable homotopy and generalised homology*, University of Chicago Press, 1974.

[3] L. Bonavero – « Factorisation faible des applications birationnelles », in *Séminaire Bourbaki*, Astérisque, vol. 282, Soc. Math. France, 2002, exp. n° 880, Novembre 2000, p. 1–37.

[4] S. Borghesi – « Algebraic Morava K-theories and the higher degree formula », preprint 2000, disponible à l'adresse `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0412/index.html`.

[5] W. Fulton – *Intersection theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[6] D. Hoffmann – « Isotropy of quadratic forms over the function field of a quadric », *Math. Z.* **220** (1995), p. 461–476.

[7] O. Izhbolin – « Motivic equivalence of quadratic forms II », *Man. Math.* **102** (2000), p. 41–52.

[8] M. Karoubi – « Cobordisme et groupes formels (d'après D. Quillen et T. tom Dieck) », in *Séminaire Bourbaki, 24ème année (1971/1972)*, Lecture Notes in Math., vol. 317, Springer, Berlin, 1973, exp. n° 408, p. 141–165.

[9] M. Lazard – « Sur les groupes de Lie formels à un paramètre », *Bull. Soc. Math. France* **83** (1955), p. 251–274.

[10] M. Levine – « Algebraic cobordism II », en préparation.

[11] M. LEVINE & F. MOREL – « Algebraic cobordism I », preprint 2002, disponible à l'adresse `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0547/index.html`.

[12] ———, « Cobordisme algébrique I », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **332** (2001), p. 723–728.

[13] ———, « Cobordisme algébrique II », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **332** (2001), p. 815–820.

[14] A. MERKURJEV – « Algebraic oriented cohomology theories », preprint 2002, disponible à l'adresse `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0535/index.html`.

[15] ———, « Degree Formula », preprint 2000, disponible à l'adresse `http://www.math.ohio-state.edu/~rost/chain-lemma.html`.

[16] ———, « Rost's degree formula (Notes of mini-course in Lens, June 2001) », preprint 2001, disponible à l'adresse `http://www.math.ucla.edu/~merkurev/publicat.htm`.

[17] J. MILNOR – « On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue. I », *Amer. J. Math.* **82** (1960), p. 505–521.

[18] F. MOREL – « Voevodsky's proof of Milnor's conjecture », *Bull. Amer. Math. Soc.* **35** (1998), p. 123–143.

[19] F. MOREL & V. VOEVODSKY – « $\mathbf{A}^1$-homotopy theory of schemes », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **90** (1999), p. 45–143.

[20] D. QUILLEN – « Elementary proofs of some results of cobordism theory using Steenrod operations », *Advances in Math.* **7** (1971), p. 29–56.

[21] R. THOM – « Quelques propriétés globales des variétés différentiables », *Comment. Math. Helv.* **28** (1954), p. 17–86.

[22] B. TOTARO – « Torsion algebraic cycles and complex cobordism », *J. Amer. Math. Soc.* **10** (1997), p. 467–493.

[23] V. VOEVODSKY – « The Milnor Conjecture », preprint 1996, disponible à l'adresse `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0170/index.html`.

François LOESER

École normale supérieure
Département de mathématiques et applications
UMR 8553 du CNRS
45 rue d'Ulm
75230 Paris Cedex 05
France
E-mail : `Francois.Loeser@ens.fr`
URL : `http://www.dma.ens.fr/~loeser/`