Astérisque

MICHEL ÉMERY

Espaces probabilisés filtrés : de la théorie de Vershik au mouvement brownien, via des idées de Tsirelson

Astérisque, tome 282 (2002), Séminaire Bourbaki, exp. n° 882, p. 63-83

<http://www.numdam.org/item?id=SB_2000-2001__43__63_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 2000
53^{e} année, 2000-2001, n^{o} 882, p. 63 à 83

ESPACES PROBABILISÉS FILTRÉS : DE LA THÉORIE DE VERSHIK AU MOUVEMENT BROWNIEN, VIA DES IDÉES DE TSIRELSON

par **Michel ÉMERY**

> D'infinis tirages ne nécessitent pas, comme les ignorants le supposent, un temps infini ; il suffit en réalité que le temps soit infiniment subdivisible.
>
> J. L. BORGES, *La loterie à Babylone*

La cinématique étudie géométriquement tous les mouvements possibles, dans le cadre d'un espace-temps donné. De même, la théorie des martingales, véritable cinématique des probabilités, s'intéresse à toutes les évolutions possibles, au cours du temps, des probabilités d'événements futurs ; et l'on sait, depuis sa fondation par J. L. Doob il y a soixante ans, que le cadre naturel pour cette théorie est un *espace probabilisé filtré.* Il s'agit d'un espace probabilisé muni d'une famille croissante $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathcal{T}}$ de tribus, appelée *filtration.* Le symbole $\mathcal{T}$ désigne un ensemble ordonné qui joue le rôle d'axe des temps ; la filtration formalise l'acquisition d'information, les événements de $\mathcal{F}_n$ s'interprétant comme ceux dont, à l'instant n, on sait avec certitude s'ils sont ou non réalisés.

En théorie des martingales à temps discret, on prend habituellement pour axe des temps $\mathcal{T}$ l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Une autre situation est le cas, dit des martingales inverses, où l'on prend $\mathcal{T} = -\mathbb{N}$; Doob a montré que le comportement des martingales inverses est plus simple que celui des martingales, mais A. M. Vershik a découvert, il y a une trentaine d'années, que, au contraire du cas où $\mathcal{T} = \mathbb{N}$, la description des filtrations lorsque $\mathcal{T} = -\mathbb{N}$ fait apparaître, au voisinage de $-\infty$, des phénomènes tout à fait inattendus et qui heurtent l'intuition.

Prenons pour fixer les idées une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\leqslant 0}$ telle que la tribu $\bigcap_n \mathcal{F}_n$ soit grossière (tous ses événements ont probabilité zéro ou un), et telle que, pour chaque n, $\mathcal{F}_n$ soit engendrée par $\mathcal{F}_{n-1}$ et par un événement indépendant de $\mathcal{F}_{n-1}$ et de probabilité $\frac{1}{2}$ (en d'autres termes, aucun événement non trivial n'est connu depuis toujours, et l'univers des événements connus s'enrichit, à chaque instant entier, du résultat d'un coup de pile ou face indépendant du passé). Sous ces hypothèses, on s'attendrait à l'existence d'un jeu de pile ou face joué à chaque instant entier depuis un temps infini, et tel que $\mathcal{F}_n$ décrive les résultats observés jusqu'à l'instant n. Mais Vershik a, entre autres,

• exhibé des contre-exemples (les espaces probabilisés filtrés qu'il a appelés non standard) ;

• donné un critère nécessaire et suffisant pour reconnaître si un espace probabilisé filtré est standard ;

• démontré le *théorème d'isomorphisme lacunaire* : tout espace probabilisé filtré du type ci-dessus mais non standard peut être rendu standard par changement de temps, c'est-à-dire en regroupant en paquets les apports successifs d'information : il existe une sous-suite $\nu : -\mathbb{N} \to -\mathbb{N}$ strictement croissante, et des variables aléatoires *indépendantes* $(U_n)_{n\leqslant 0}$ telles que, pour chaque n, $\mathcal{F}_{\nu(n)}$ soit engendrée par la famille $\{U_m,\ m\leqslant n\}$.

Ces idées de Vershik sont restées inconnues des probabilistes occidentaux jusqu'aux années 90, quand B. Tsirelson et d'autres les ont utilisées pour construire, à la stupéfaction générale, une probabilité équivalente à la mesure de Wiener, mais telle que le nouvel espace probabilisé filtré ne soit pas isomorphe à l'espace de Wiener. Ceci a relancé l'intérêt pour des questions sur les filtrations browniennes, soulevées par M. Yor voici vingt ans ; et a aussi poussé Vershik à rédiger la synthèse [24] de ses anciens travaux sur ce thème, dans laquelle nous avons largement puisé.

Tsirelson a ensuite introduit dans [20] un nouvel invariant, le *confort,* qui lui a permis de montrer que l'espace probabilisé filtré associé à un processus de Walsh (sorte de mouvement brownien à valeurs dans une étoile formée d'au moins trois demi-droites issues d'une même origine) n'est pas non plus isomorphe à l'espace de Wiener. Ces idées diffusent maintenant dans les milieux probabilistes, et commencent à donner lieu à une floraison de travaux dont nous parlerons un peu en fin d'exposé.

1. NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Un *espace probabilisé filtré* est la donnée d'un ensemble Ω, d'une famille croissante $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ de tribus de parties de Ω, appelée *filtration,* et d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur la tribu $\mathcal{F}_0$ (et donc aussi, par restriction, sur chaque $\mathcal{F}_n$).(1) Nous supposerons toujours que $\mathcal{F}_0$ (et donc aussi chaque $\mathcal{F}_n$) est essentiellement séparable, c'est-à-dire engendrée, aux événements négligeables près, par une famille dénombrable, ou encore par une v.a. (D'une façon générale, lorsque nous dirons qu'une tribu ou une filtration est engendrée par quelque chose, ce sera toujours modulo les événements négligeables.)

---

(1)Les probabilistes définissent traditionnellement $\mathbb{P}$ sur une tribu, dite « ambiante », pouvant être plus grosse que $\mathcal{F}_0$; la définition simplifiée nous suffira ici.

L'ensemble $-\mathbb{N}$ joue le rôle d'axe des temps ; sa structure discrète mais non bien ordonnée est la plus simple qui puisse donner lieu aux phénomènes découverts par Vershik. En théorie du mouvement brownien, le temps serait $\mathbb{R}_+$ au lieu de $-\mathbb{N}$.

Intuitivement, un espace probabilisé filtré décrit l'évolution chronologique des probabilités au fur et à mesure de l'acquisition des connaissances. Cette évolution étant elle-même aléatoire, la probabilité à un instant n d'un événement E est une variable aléatoire, égale à la probabilité conditionnelle(2) $\mathbb{P}[E|\mathcal{F}_n]$; les événements de $\mathcal{F}_n$ sont ceux dont la probabilité à l'instant n ne peut prendre que les valeurs extrêmes 0 et 1, à l'exclusion des valeurs intermédiaires ; et la probabilité « brute » $\mathbb{P}$, non aléatoire, représente l'état de nos connaissances — ou de notre ignorance — avant le début de l'évolution.

Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé filtré, l'ensemble $\mathcal{F}_0/\mathbb{P}$, formé des classes d'équivalences d'événements de $\mathcal{F}_0$ pour l'égalité presque sûre, est une tribu (abstraite) probabilisée ; un *isomorphisme* entre deux espaces probabilisés filtrés $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$ est une bijection Ψ entre $\mathcal{F}_0/\mathbb{P}$ et $\bar{\mathcal{F}}_0/\bar{\mathbb{P}}$, qui préserve les structures de tribus probabilisées, et telle que pour tous $n \in -\mathbb{N}$ et $E \in \mathcal{F}_0$ on ait, aux négligeables près, $E \in \mathcal{F}_n \Leftrightarrow \Psi(E) \in \bar{\mathcal{F}}_n$. Cet isomorphisme s'étend alors aux espaces $\mathrm{L}^0(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$ et $\mathrm{L}^0(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}_0, \bar{\mathbb{P}})$, formés des classes d'équivalences de variables aléatoires pour l'égalité p.s.

Pour simplifier, restreignons-nous à la plus élémentaire des situations auxquelles s'intéresse Vershik, en considérant un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ satisfaisant aux deux hypothèses suivantes(3) :

Grossièreté asymptotique : la « tribu initiale » $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_n \mathcal{F}_n$ est grossière (elle ne contient que les événements négligeables et les événements presque certains ; ou encore, pour tout événement E, $\mathbb{P}[E|\mathcal{F}_{-\infty}] = \mathbb{P}[E]$) ;

Dyadicité : il existe pour chaque $n \leqslant 0$ une v.a. X_n, prenant chacune des deux valeurs -1 et 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$, indépendante de $\mathcal{F}_{n-1}$, et telle que $\mathcal{F}_n$ soit la plus petite tribu contenant $\mathcal{F}_{n-1}$ et les événements $\{X_n = -1\}$ et $\{X_n = 1\}$.

La question que s'est posée Vershik est : Ces deux hypothèses suffisent-elles à caractériser l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à isomorphisme près ? L'exemple évident vérifiant ces conditions est l'espace naturel du jeu de pile ou face ; mais y en a-t-il d'autres ?

En remplaçant l'axe des temps $-\mathbb{N}$ par $\{0, 1, ..., N\}$ ou par $\mathbb{N}$, on obtiendrait un problème analogue, et beaucoup plus facile, auquel la réponse serait positive, simplement parce que la filtration $\mathcal{F}$ serait alors engendrée par le processus X. Mais lorsque

(2) Techniquement, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}[E|\mathcal{F}_n]$ peut être définie comme la densité de Radon-Nikodym de la mesure $F \mapsto \mathbb{P}(E \cap F)$ sur $\mathcal{F}_n$, par rapport à la mesure $\mathbb{P}$ restreinte à $\mathcal{F}_n$.

(3) Prises ensemble, elles disent que $\mathcal{F}$ possède la propriété de représentation prévisible par rapport à un jeu de pile ou face.

le temps est $-\mathbb{N}$, cet argument est en défaut. Prendre par exemple un jeu de pile ou face $Y = (Y_n)_{n\leqslant 0}$ (c'est-à-dire des v.a. Y_n indépendantes et valant ± 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$), appeler $\mathcal{F}$ la filtration engendrée par Y, et poser $X_n = Y_{n-1}Y_n$. Le processus X est aussi un jeu de pile ou face, les deux hypothèses ci-dessus sont satisfaites par $\mathcal{F}$ et X, et cependant X n'engendre pas $\mathcal{F}$, puisque la v.a. Y_0, qui est mesurable pour $\mathcal{F}_0$, est indépendante du processus X et ne peut donc être une fonctionnelle des X_n.

Dans cet exemple, bien que X n'engendre pas $\mathcal{F}$, l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ engendré par Y est néanmoins isomorphe à celui engendré par X, puisque les processus X et Y ont la même loi (ce sont tous deux des jeux de pile ou face). Voici maintenant un exemple, beaucoup plus surprenant, emprunté à Vershik [24], d'un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ qui satisfait aux deux hypothèses ci-dessus, sans être engendré par aucun jeu de pile ou face.

Exemple. — Considérer une suite $(M_n)_{n\leqslant 0}$ de v.a. qui suivent chacune la loi uniforme sur $[0,1]$, et qui se déduisent les unes des autres de la façon suivante : Ayant observé toutes les M_m pour $m \leqslant n$, on obtient M_{n+1} en jetant une pièce de monnaie et en ne conservant, dans le développement décimal de M_n, que les décimales de rang pair ou impair selon que l'on a obtenu pile ou face. En termes plus savants, M est un processus de Markov stationnaire, de loi uniforme sur $[0,1]$ et de probabilités de transition

$$0,d_1d_2d_3d_4d_5d_6\ldots \begin{array}{l} \nearrow 0,d_1d_3d_5\ldots \quad \text{avec probabilité } \frac{1}{2} \\[2ex] \searrow 0,d_2d_4d_6\ldots \quad \text{avec probabilité } \frac{1}{2}. \end{array}$$

Si l'on se donne $m \leqslant n \leqslant 0$ et si l'on pose $r = 2^{n-m}$ et $M_m = 0,e_1e_2e_3e_4\ldots$, la loi conditionnelle de M_n à l'instant m consiste en le choix au hasard de l'un parmi les r nombres $0,e_1e_{r+1}e_{2r+1}\ldots$, $0,e_2e_{r+2}e_{2r+2}\ldots$, et ainsi de suite jusqu'à $0,e_re_{2r}e_{3r}\ldots$, chacun avec probabilité $1/r$; puisque ces r nombres sont des v.a. indépendantes et de même loi uniforme, la loi faible des grands nombres entraîne que cette loi conditionnelle est proche de la loi uniforme quand r est grand, c'est-à-dire quand m tend vers $-\infty$, et la grossièreté asymptotique résulte alors de la propriété de Markov. Le caractère dyadique est évident ; il est clair également que le jeu de pile ou face qui a servi à construire M n'engendre pas tout l'espace probabilisé filtré : la première décimale de M_0, par exemple, est indépendante de ce jeu de pile ou face. Mais il est bien plus délicat de montrer qu'*aucun* jeu de pile ou face ne peut engendrer cet espace probabilisé filtré ; Vershik le déduit de son « critère de standardité » (et d'estimations de nature combinatoire sur M). Pour pouvoir énoncer ce critère, nous aurons besoin de quelques définitions.

DÉFINITION 1. — *On appelle* sous-filtration *d'une filtration $\mathcal{F}$ une filtration $\mathcal{E}$ telle que $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{F}_n$ pour tout instant $n \in -\mathbb{N}$.*

On dit qu'une filtration $\mathcal{E}$ est immergée dans *un espace probabilisé filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *si $\mathcal{E}$ est une sous-filtration de $\mathcal{F}$ telle que, pour tout événement $E \in \mathcal{E}_0$ et tout temps $n \in -\mathbb{N}$, les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}[E|\mathcal{E}_n]$ et $\mathbb{P}[E|\mathcal{F}_n]$ sont (p.s.) égales.*

DÉFINITION 2. — *Soient $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ et $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$ deux espaces probabilisés filtrés. On dit que $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ est* immersible *dans $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$ s'il existe une filtration $\bar{\mathcal{E}}$ immergée dans $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$ telle que les espaces probabilisés filtrés $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ et $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathbb{P}})$ soient isomorphes.*

L'immersibilité formalise rigoureusement l'idée très simple souvent ainsi informellement exprimée : « Quitte à enrichir l'espace, on peut supposer que... ».

DÉFINITION 3. — *Un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dit* standard diffus *s'il existe une suite $(U_n)_{n \leqslant 0}$ de v.a. indépendantes et de lois diffuses*[4] *telle que, pour chaque $n \in -\mathbb{N}$, la tribu $\mathcal{F}_n$ soit engendrée par la famille $(U_m)_{m \leqslant n}$.*

Un espace probabilisé filtré est dit standard *s'il est immersible dans un espace probabilisé filtré standard diffus.*

On vérifie sans peine que deux espaces probabilisés filtrés standard diffus sont toujours isomorphes (car on peut choisir les U_n de loi uniforme sur $[0,1]$) ; il est trivial qu'un espace probabilisé filtré isomorphe à un espace probabilisé filtré standard est lui-même standard, et facile de vérifier qu'un espace probabilisé filtré immersible dans un espace probabilisé filtré standard est lui aussi standard (car l'immersibilité est transitive).

Si $(U_n)_{n \leqslant 0}$ est une suite indépendante de v.a. (de lois non nécessairement diffuses) et si $\mathcal{F}_n$ est la tribu engendrée par les U_m pour $m \leqslant n$, l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est standard. Pour établir que l'espace probabilisé filtré de l'exemple vu plus haut n'est pas engendré par un jeu de pile ou face, il suffira donc à Vershik de montrer qu'il n'est pas standard ; nous verrons plus loin comment.

PROPOSITION 1. — *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré standard, $\nu : -\mathbb{N} \to -\mathbb{N}$ une application croissante non bornée, et $\mathcal{E}$ la filtration définie par $\mathcal{E}_n = \mathcal{F}_{\nu(n)}$. L'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ est standard.*

Démonstration. — Pour n tel que $d = \nu(n) - \nu(n-1) \geqslant 2$, utiliser une bijection bimesurable et préservant la mesure de Lebesgue entre $[0,1]$ et $[0,1]^d$. □

Le théorème d'isomorphisme lacunaire (théorème 3 plus bas) montrera combien la réciproque à la proposition 1 est loin d'être vraie.

La proposition suivante exprime que le fait d'être standard est une propriété asymptotique au voisinage de $n = -\infty$.

---

[4] C'est-à-dire $\mathbb{P}[U_n = a] = 0$ pour tout réel a.

PROPOSITION 2. — *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé filtré et* m *un instant fixé dans* $-\mathbb{N}$ *; on pose* $\mathcal{F}_n^{m]} = \mathcal{F}_{m \wedge n}$*. Si l'espace probabilisé filtré* $(\Omega, \mathcal{F}^{m]}, \mathbb{P})$ *est standard,* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *l'est aussi.*

Démonstration. — Sans restreindre la généralité, on peut supposer l'existence d'un vecteur aléatoire $(U_{m+1}, ..., U_0)$ indépendant de $\mathcal{F}_m$ et de loi uniforme sur $[0,1]^{|m|}$; il suffit alors de poser $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_n$ pour $n \leqslant m$ et $\mathcal{G}_n = \sigma(\mathcal{F}_m, U_{m+1}, ..., U_n)$ pour $m < n \leqslant 0$, et d'observer que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est immersible dans $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, qui est lui-même standard. □

Remarque. — La proposition 2 reste vraie si l'on y remplace l'instant fixe m par un temps d'arrêt, c'est-à-dire une variable aléatoire N à valeurs dans $-\mathbb{N}$ (la valeur $-\infty$ est interdite !) telle que, pour chaque $n \in -\mathbb{N}$, l'événement $\{N = n\}$ soit dans $\mathcal{F}_n$.

2. LE CRITÈRE DE VERSHIK

Avant de pouvoir énoncer la condition nécessaire et suffisante donnée par Vershik pour qu'un espace probabilisé filtré soit standard, il nous faut introduire quelques no(ta)tions.

Si (K, ρ) est un espace métrique compact, l'ensemble K' de toutes les mesures de probabilités sur K est métrisable et compact pour la topologie faible (K' est inclus dans le dual de $\mathrm{C}(K)$) ; cette topologie peut être définie à l'aide de la distance ρ' donnée par

$$\rho'(\mu, \nu) = \inf_{\substack{\lambda \text{ de marges} \\ \mu \text{ et } \nu}} \int_{K \times K} \rho(k_1, k_2)\, \lambda(dk_1, dk_2) = \sup_{f \text{ contraction}} \Big[\int f\, d\mu - \int f\, d\nu \Big] ,$$

où l'infimum porte sur toutes les probabilités λ sur le produit $K \times K$ ayant μ et ν comme marges, et le supremum sur toutes les fonctions $f : K \to \mathbb{R}$ telles que $|f(k_1) - f(k_2)| \leqslant \rho(k_1, k_2)$ pour tous k_1 et k_2 dans K.

Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et (K, ρ) un espace métrique compact, nous noterons $\mathrm{L}(\mathcal{A}, K)$ l'ensemble de toutes les classes d'équivalence pour $\mathbb{P}$ de v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans K. Si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, la *loi conditionnelle sachant* $\mathcal{B}$ d'une v.a. $R \in \mathrm{L}(\mathcal{A}, K)$ est définie comme la v.a. $R' \in \mathrm{L}(\mathcal{B}, K')$ telle que, pour chaque borélien G de K, on ait $[R'(\omega)](G) = \mathbb{P}[R \in G | \mathcal{B}](\omega)$ pour presque tout ω ; nous la noterons $\mathcal{L}[R|\mathcal{B}]$.

Si maintenant $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé filtré et (K, ρ) un espace métrique compact, pour tout $R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$ on peut définir de proche en proche

$$\begin{aligned} \pi_0 R &= R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K) , \\ \pi_{-1} R &= \mathcal{L}[\pi_0 R | \mathcal{F}_{-1}] \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_{-1}, K') , \\ \pi_{-2} R &= \mathcal{L}[\pi_{-1} R | \mathcal{F}_{-2}] \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_{-2}, K'') , \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

En appelant (K_n, ρ_n) le $|n|$-ième itéré de l'espace (K, ρ) par la transformation qui en fait (K', ρ'), on a ainsi, pour chaque $n \leqslant 0$, une variable aléatoire $\pi_n R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_n, K_n)$, que l'on peut appeler la *prédiction itérée* de R à l'instant n.

Pour $n < -1$, cette prédiction itérée $\pi_n R$ recèle en général bien plus d'information que la simple loi conditionnelle $\mathcal{L}[R|\mathcal{F}_n]$: cette dernière indique seulement l'état à l'instant n des prévisions concernant la valeur prise par R, alors que $\pi_n R$ décrit aussi les prédictions quant à la façon dont ces prévisions elles-mêmes vont pouvoir évoluer au cours du temps, et ainsi de suite jusqu'au $|n|$-ième degré. Pour illustrer ceci, prenons par exemple trois v.a. indépendantes (non constantes) N, X_{-1} et X_0, telles que N prenne les valeurs -1 et 0, et que X_{-1} et X_0 aient la même loi ; supposons que $\mathcal{F}_{-2} = \sigma(N)$, $\mathcal{F}_{-1} = \sigma(N, X_{-1})$ et $\mathcal{F}_0 = \sigma(N, X_{-1}, X_0)$, et considérons la v.a. $R = X_N$. La v.a. $\mathcal{L}[R|\mathcal{F}_{-2}]$, qui est constante, dit seulement que R est indépendante de $\mathcal{F}_{-2}$ et a même loi que X_{-1} et X_0 ; alors que la v.a. $\pi_{-2} R$, plus informative, dit que si $N = -1$, R sera entièrement dévoilée à l'instant -1, et que si $N = 0$, R sera encore complètement indéterminée à l'instant -1.

THÉORÈME 1 (Critère de Vershik). — *Pour qu'un espace probabilisé filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *soit standard, il faut et il suffit que soit satisfait le critère suivant, où* (K, ρ) *est le compact* $[0, 1]$ *muni de la distance usuelle : Pour toute v.a.* $R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$, *il existe une suite* $(\mu_n)_{n \leqslant 0}$ *telle que* μ_n *soit dans* K_n *pour chaque* n, *et que* $\mathbb{E}[\rho_n(\pi_n R, \mu_n)]$ *tende vers zéro quand* $n \to -\infty$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{F}_{-\infty}$ soit grossière est que les lois conditionnelles $\mathcal{L}[R|\mathcal{F}_n]$ deviennent déterministes quand $n \to -\infty$; le critère de Vershik, condition bien plus forte, demande que les prédictions itérées $\pi_n R$ deviennent déterministes quand $n \to -\infty$.

Remarques. — 1) Le critère peut s'énoncer sans faire intervenir explicitement la suite déterministe des μ_n. En effet, si X est une v.a. à valeurs dans (K, ρ), appelant ξ la loi de X, ϕ la fonction $k \mapsto \mathbb{E}[\rho(X, k)]$ sur K, et dispersion de X le nombre

$$\operatorname{disp} X = \mathbb{E}[\phi \circ X] = \iint_{K \times K} \rho(k_1, k_2)\, \xi(dk_1)\, \xi(dk_2) ,$$

on a l'encadrement

$$\inf_{k \in K} \mathbb{E}[\rho(X, k)] \leqslant \operatorname{disp} X \leqslant 2 \inf_{k \in K} \mathbb{E}[\rho(X, k)] ;$$

un énoncé équivalent au critère de Vershik est donc : *pour toute v.a.* $R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$, $\operatorname{disp} \pi_n R \to 0$ *quand* $n \to -\infty$.

2) Le critère reste vrai si l'on y remplace $[0, 1]$ par n'importe quel espace métrique compact infini, ou encore si l'on y remplace « pour toute R à valeurs dans $[0, 1]$ » par « pour tout (K, ρ), où K est un ensemble fini muni de la distance $\rho(k_1, k_2) = \mathbf{1}_{\{k_1 \neq k_2\}}$, et toute R à valeurs dans K ». Mais j'ignore si l'on obtient encore une condition équivalente en se restreignant aux K n'ayant que deux points, c'est-à-dire en

remplaçant les variables aléatoires R par les événements de $\mathcal{F}_0$. (C'est bien équivalent lorsqu'il existe un temps d'arrêt $N > -\infty$ et une v.a. mesurable pour $\mathcal{F}_0$, indépendante de $\mathcal{F}_N$ et de loi diffuse ; mais le cas dyadique, par exemple, échappe à cette condition.)

La nécessité du critère de Vershik (utilisée pour montrer que l'exemple vu plus haut n'est pas standard) se vérifie sans peine, au moyen des trois arguments suivants :

a) *Stabilité par immersions.* — Si $\mathcal{F}$ est immergée dans $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ et si ce dernier satisfait au critère de Vershik, il en va de même de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Cela résulte immédiatement de ce que, par immersion, les prédictions itérées $\pi_n R$ d'une v.a. R mesurable pour $\mathcal{F}_0$ sont les mêmes, qu'elles soient calculées dans la filtration $\mathcal{F}$ ou dans la filtration $\mathcal{G}$. Pour établir que tout espace standard satisfait au critère, il suffit donc de montrer que tout espace engendré par un processus $(U_n)_{n\leqslant 0}$ fait de v.a. indépendantes y satisfait. On est ainsi ramené au cas où $\mathcal{F}_n = \sigma(U_m\,,\ m \leqslant n)$.

b) *Robustesse de la prédiction.* — Si R et S sont deux v.a. mesurables pour $\mathcal{F}_0$ et à valeurs dans $K = [0,1]$, on vérifie facilement, à l'aide de la définition de ρ', l'inégalité $\mathbb{E}[\rho_n(\pi_n R, \pi_n S)] \leqslant \mathbb{E}[\rho(R,S)]$ (plus précisément, mais nous n'en aurons pas besoin, le processus $\big(\rho_n(\pi_n R, \pi_n S)\big)_{n\leqslant 0}$ est une sous-martingale). Pour montrer que $\pi_n R$ est proche d'une constante lorsque n est assez petit, cette inégalité permet de se restreindre à des R pris dans une partie dense de $\mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$.

c) *Prédiction d'une fonctionnelle des innovations.* — Comme partie dense de $\mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$, nous prendrons l'ensemble des v.a. de la forme $f(U_{n+1}, ..., U_0)$ pour un $n \leqslant 0$ et une fonction borélienne $f : \mathbb{R}^{|n|} \to K$; la densité est assurée par le classique théorème de Doob sur les martingales directes ($\mathcal{T} = \mathbb{N}$). Lorsque R est de cette forme, il est immédiat, par récurrence descendante, que, pour chaque $m \in \{n, ..., 0\}$, la prédiction itérée $\pi_m R$ est de la forme $g_m(U_{n+1}, ..., U_m)$ pour une fonction borélienne $g_m : \mathbb{R}^{m-n} \to K_m$ (c'est ici qu'intervient l'indépendance des U_ℓ). En particulier, pour $m = n$, on voit que la v.a. $\pi_n R$ est constante ; ceci reste vrai a fortiori lorsque l'on remplace n par un instant antérieur. La nécessité du critère est établie.

Il est plus ardu de montrer que le critère est suffisant ; nous allons seulement esquisser ci-dessous les grandes lignes de l'argument. Pour plus de détails, voir Vershik [24], ou [11] pour un langage plus probabiliste, ou encore Feldman-Smorodinsky [13] pour une méthode légèrement différente.

Étant données, dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, deux sous-tribus $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ telles que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, rappelons que, pour qu'il existe une v.a. X mesurable pour $\mathcal{B}$, de loi diffuse, indépendante de $\mathcal{C}$ et telle que $\mathcal{C} \vee \sigma(X) = \mathcal{B}$ (une telle X sera appelée un *complément à* $\mathcal{C}$ *dans* $\mathcal{B}$), il faut et il suffit que toute v.a. V vérifiant $\mathcal{C} \vee \sigma(V) = \mathcal{B}$ ait une loi diffuse. Nous dirons en ce cas que $\mathcal{B}$ est *conditionnellement diffuse par rapport à* $\mathcal{C}$; et un espace probabilisé filtré tel que chaque $\mathcal{F}_n$ soit conditionnellement diffuse par rapport à $\mathcal{F}_{n-1}$ sera dit *de type diffus.* Pour ce type d'espaces, on a une sorte de réciproque à l'inégalité du b) précédent :

LEMME 1. — *L'espace probabilisé filtré étant de type diffus, soient $R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_n, K)$ et $L \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_{n-1}, K')$ deux v.a. étagées, et telles que les valeurs (dans K') prises par L soient des probabilités (sur K) à supports finis. Il existe une v.a. $S \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_n, K)$ vérifiant les deux égalités $\mathcal{L}[S|\mathcal{F}_{n-1}] = L$ et $\mathbb{E}[\rho(R,S)] = \mathbb{E}\big[\rho'\big(\mathcal{L}[R|\mathcal{F}_{n-1}], L\big)\big]$.*

Démonstration. — Remarquer d'abord que, par compacité faible de l'ensemble des probabilités sur $K \times K$, l'infimum dans la définition de $\rho'(\mu,\nu)$ est atteint pour un certain λ ; si de plus K est fini, ce λ optimal peut être choisi fonction mesurable du couple (μ,ν).

Par hypothèse, il existe un ensemble fini $H \subset K$ tel que les valeurs prises par R soient des points de H et que les valeurs (en nombre fini) prises par L soient des probabilités à supports dans H. Choisissant $\mu = \mathcal{L}[R|\mathcal{F}_{n-1}](\omega)$ et $\nu = L(\omega)$, on obtient pour presque tout ω l'existence d'une probabilité $\lambda(\omega)$ sur $H \times H$, dont la dépendance en ω est mesurable pour $\mathcal{F}_{n-1}$, et qui vérifie

$$\sum_{k\in H} \lambda(\omega,\,.\,,k) = \mathcal{L}[R|\mathcal{F}_{n-1}](\omega) \qquad \sum_{h\in H} \lambda(\omega,h,\,.\,) = L(\omega)$$

et
$$\sum_{(h,k)\in H\times H} \rho(h,k)\,\lambda(\omega,h,k) = \rho'\big(\mathcal{L}[R|\mathcal{F}_{n-1}](\omega), L(\omega)\big)\ .$$

Posons $\Sigma(\omega) = \sum_{k\in H} \lambda\big(\omega, R(\omega), k\big) = \sum_{h\in H} \mathbf{1}_{\{R=h\}}\,\mathbb{P}[R=h|\mathcal{F}_{n-1}]$. De

$$\mathbb{P}[\Sigma=0 \text{ et } R=h|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{P}[R=h|\mathcal{F}_{n-1}]\ \mathbf{1}_{\{\mathbb{P}[R=h|\mathcal{F}_{n-1}]=0\}} = 0\ ,$$

on déduit $\mathbb{P}[\Sigma=0] = 0$ et $\Sigma > 0$ p.s. Appelons $k_1,\ldots,k_p$ les points de H et pour $0 \leqslant j \leqslant p$ posons

$$Q_j(\omega) = \frac{\lambda\big(\omega,R(\omega),k_1\big) + \cdots + \lambda\big(\omega,R(\omega),k_j\big)}{\Sigma(\omega)}\ ;$$

ces v.a. sont mesurables pour $\mathcal{F}_{n-1}\vee\sigma(R)$ et vérifient $0 = Q_0 \leqslant Q_1 \leqslant \cdots \leqslant Q_p = 1$. Mais, R étant étagée, $\mathcal{F}_n$ est conditionnellement diffuse par rapport à $\mathcal{F}_{n-1}\vee\sigma(R)$; il existe donc un complément X à $\mathcal{F}_{n-1}\vee\sigma(R)$ dans $\mathcal{F}_n$, de loi uniforme sur $[0,1]$. Ceci permet de définir une v.a. S, mesurable pour $\mathcal{F}_n$ et à valeurs dans H, par la formule

$$S(\omega) = k_j \quad \iff \quad Q_{j-1}(\omega) < X(\omega) \leqslant Q_j(\omega)\ ,$$

et l'on a

$$\mathbb{P}[S=k|\mathcal{F}_{n-1}\vee\sigma(R)] = \frac{\lambda\big(\omega,R(\omega),k\big)}{\Sigma(\omega)}\ ;$$

$$\mathbb{P}[R=h \text{ et } S=k|\mathcal{F}_{n-1}\vee\sigma(R)] = \mathbf{1}_{\{R=h\}}\,\frac{\lambda(\omega,h,k)}{\mathbb{P}[R=h|\mathcal{F}_{n-1}]}\ ;$$

$$\mathbb{P}[R=h \text{ et } S=k|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{P}[R=h|\mathcal{F}_{n-1}]\,\frac{\lambda(\omega,h,k)}{\mathbb{P}[R=h|\mathcal{F}_{n-1}]} = \lambda(\omega,h,k)$$

(où tout s'annule quand le dénominateur est nul). En conséquence, la loi conditionnelle de (R,S) par rapport à $\mathcal{F}_{n-1}$ vaut λ. Ceci implique d'une part $\mathcal{L}[S|\mathcal{F}_{n-1}] = L$ et d'autre part

$$\mathbb{P}[\rho(R,S)|\mathcal{F}_{n-1}] = \sum_{(h,k)\in H\times H} \rho(h,k)\,\lambda(h,k) = \rho'\big(\mathcal{L}[R|\mathcal{F}_{n-1}], L\big)\ ,$$

d'où $\mathbb{P}[\rho(R,S)] = \mathbb{P}\big[\rho'\big(\mathcal{L}[R|\mathcal{F}_{n-1}], L\big)\big]$. □

Posons $K_0^\circ = K$ et, pour tout $n<0$, appelons K_n° l'ensemble, inclus dans K_n, de toutes les probabilités portées par un nombre fini de points de K_{n+1}°. Il est facile de vérifier que, étant donné un $R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$, toutes les $|n|+1$ v.a. $\pi_n R$, $\pi_{n+1}R$,...,$\pi_0 R$ sont étagées si et seulement si $\pi_n R$ est étagée et à valeurs dans K_n°. Les v.a. R ayant cette propriété seront dites *étagées jusqu'à n*. Avec ces notations, en itérant $|n|$ fois le lemme 1, on obtient sans peine :

LEMME 2. — *Toujours en supposant que l'espace est de type diffus, soient $n \in -\mathbb{N}$, $R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$ et $L \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_n, K_n^\circ)$; on suppose en outre L étagée. Il existe une v.a. $S \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$, étagée jusqu'à n, telle que $\pi_n S = L$ et que $\mathbb{E}[\rho(R,S)] = \mathbb{E}[\rho_n(\pi_n R, L)]$.*

Ceci a lieu dans tout espace probabilisé filtré de type diffus. Pour montrer que le critère de Vershik est suffisant, supposons-le satisfait, et cherchons à établir que l'espace est standard. Quitte à immerger $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans un espace plus gros, nous devons construire un processus engendrant la filtration et formé de v.a. indépendantes. En faisant un produit, c'est-à-dire un grossissement indépendant, par « l' » espace probabilisé filtré standard diffus, et en vérifiant que le critère est stable par de tels produits, on se ramène au cas où $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est de type diffus.

Pour $R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$ et $\varepsilon > 0$, nous savons par hypothèse qu'il existe un $n \leqslant 0$ et un $\mu \in K_n$ tels que $\mathbb{E}[\rho_n(\pi_n R, \mu)] < \varepsilon$. Il est immédiat de vérifier que K_n° est dense dans K_n ; on peut donc choisir μ dans K_n°. En prenant la v.a. constante $L = \mu$ dans le lemme 2, on obtient une $S \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$ telle que $\pi_n S$ soit déterministe, que $\pi_{n+1}S$, ..., $\pi_0 S$ soient étagées, et que $\mathbb{E}\big[|S-R|\big] < \varepsilon$. Puisque chaque $\pi_\ell S$ est étagée, il existe pour tout $\ell \in \{n+1, \ldots, 0\}$ un complément X_ℓ à $\mathcal{F}_{\ell-1} \vee \sigma(\pi_\ell S)$ dans $\mathcal{F}_\ell$. On peut définir une filtration $\mathcal{E}$ en prenant $\mathcal{E}_\ell$ grossière pour $\ell \leqslant n$, et

$$\mathcal{E}_\ell = \sigma\big(\pi_{n+1}S, X_{n+1}, \pi_{n+2}S, X_{n+2}, \ldots, \pi_\ell S, X_\ell\big) \qquad \text{pour } \ell > n\,;$$

on montre que $\mathcal{F}_n \vee \mathcal{E}_\ell = \mathcal{F}_\ell$ pour tout $\ell \geqslant n$, que $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{F}_n$ sont indépendantes, et donc que $\mathcal{E}$ est immergée dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour $\ell \in \{n+1, \ldots, 0\}$ il existe un complément U_ℓ à $\mathcal{E}_{\ell-1}$ dans $\mathcal{E}_\ell$; nécessairement, U_ℓ est aussi un complément à $\mathcal{F}_{\ell-1}$ dans $\mathcal{F}_\ell$. Puisque S est mesurable pour $\mathcal{E}_0$, elle est fonction borélienne de $U_{n+1}, \ldots, U_0$; il est donc établi que *les v.a. de la forme $f(U_{n+1}, \ldots, U_0)$, où f est borélienne, n dans $-\mathbb{N}$, et chaque U_ℓ un complément à $\mathcal{F}_{\ell-1}$ dans $\mathcal{F}_\ell$, sont denses dans L^1.*

Si en outre R est étagée, à valeurs dans une partie finie F de K, en remplaçant f par $g \circ f$, où $g : K \to F$ est l'identité sur F et est continue en tout point de F, on obtient l'existence d'une S de la forme ci-dessus, et proche de R au sens fort où $\mathbb{P}[S \neq R] < \varepsilon$.

Supposons maintenant donnés $n \in -\mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, des compléments $U_{n+1}, \ldots, U_0$ comme ci-dessus, et une v.a. $R \in \mathrm{L}^1(\mathcal{F}_0)$. En raison de la séparabilité essentielle, il existe une suite croissante $(\mathcal{F}_n^k)_{k\geqslant 0}$ de sous-tribus essentiellement finies de $\mathcal{F}_n$ telle que $\bigvee_k \mathcal{F}_n^k = \mathcal{F}_n$; par un théorème de Doob, R est donc approchable dans L^1 par des v.a. de la forme $\phi(T, U_{n+1}, \ldots, U_0)$ où T est étagée et mesurable pour $\mathcal{F}_n$. En appliquant la remarque précédente à T au lieu de R et à la filtration décalée $(\mathcal{F}_m)_{m\leqslant n}$, on obtient l'existence de T', mesurable pour $\mathcal{F}_n$, telle que $\mathbb{P}[T' \neq T] < \varepsilon$ et qui soit de la forme $T' = \psi(V_{m+1}, \ldots, V_n)$, où $m < n$ et où les V_ℓ sont respectivement des compléments à $\mathcal{F}_{\ell-1}$ dans $\mathcal{F}_\ell$. Il s'ensuit que R est approchable par $\phi\big(\psi(V_{m+1}, \ldots, V_n), U_{n+1}, \ldots, U_0\big)$. Résumons : *$U_{n+1}, \ldots, U_0$ étant donnés, on obtient une partie dense de $\mathrm{L}^1(\mathcal{F}_0)$ en considérant les v.a. de L^1 qui sont de la forme $h(V_{m+1}, \ldots, V_n, U_{n+1}, \ldots, U_0)$, où h est borélienne, $m < n$ et, où V_ℓ est un complément à $\mathcal{F}_{\ell-1}$ dans $\mathcal{F}_\ell$ pour $m < \ell \leqslant n$.*

Pour terminer la démonstration, considérons une v.a. intégrable R qui engendre la tribu $\mathcal{F}_0$. En partant par exemple de $n_0 = -1$ et d'un complément U_0 à $\mathcal{F}_{-1}$ dans $\mathcal{F}_0$, l'étape précédente permet de construire de proche en proche une suite strictement décroissante $(n_k)_{k\geqslant 0}$ et des compléments U_ℓ à $\mathcal{F}_{\ell-1}$ dans $\mathcal{F}_\ell$ tels que, pour chaque k, R soit à distance au plus $1/k$ d'un élément de $\mathrm{L}^1\big(\sigma(U_\ell\,,\ n_k < \ell \leqslant 0)\big)$. Il en résulte que R est mesurable pour la tribu limite $\sigma(U_\ell\,,\ \ell \in -\mathbb{N})$; et $\mathcal{F}_0$, engendrée par R, l'est aussi par les U_ℓ. Enfin, la filtration $\mathcal{F}'$ engendrée par les U_ℓ est immergée dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et vérifie $\mathcal{F}_0{}' = \mathcal{F}_0$; ces deux propriétés suffisent à entraîner que $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$, et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est donc standard. □

Comme nous l'avons dit plus haut, ce critère est utilisable en pratique, puisqu'il permet de vérifier que l'exemple donné dans la section 1 n'est pas standard. Une autre situation, non fabriquée ad hoc, où le critère fait la preuve de son efficacité, est le problème « T, T^{-1} », résolu par D. Heicklen et C. Hoffman [15] : Si T est un automorphisme d'un espace probabilisé $(E, \mathcal{E}, \mu)$, et si l'entropie de T n'est pas nulle, le processus de Markov à valeurs dans E, de loi stationnaire μ et de probabilités de transition $p(x, .\,) = \frac{1}{2}(\delta_{Tx} + \delta_{T^{-1}x})$ engendre un espace probabilisé filtré qui n'est pas standard.

Dans la même veine que le critère, voici un autre résultat également emprunté à Vershik [24] :

THÉORÈME 2. — *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré ; pour chaque $n \leqslant 0$, supposons $\mathcal{F}_n$ engendrée par $\mathcal{F}_{n-1}$ et par une v.a. indépendante de $\mathcal{F}_{n-1}$, de loi soit diffuse, soit uniforme sur un ensemble fini. Alors $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est standard (si et) seulement s'il est engendré par un processus formé de v.a. indépendantes.*

Pour la démonstration, nous renvoyons à Vershik [24]. Il ne la donne complètement que dans le cas où aucune des lois n'est diffuse ; mais dans le cas général les instants n

pour lesquels $\mathcal{F}_n$ admet une v.a. diffuse indépendante de $\mathcal{F}_{n-1}$ se traitent facilement par les mêmes arguments que plus haut. Une variante de sa méthode est proposée par J. Feldman et M. Smorodinsky ([13], théorème 3.2).

Dans le theorème 2, on ne peut se passer de l'hypothèse d'uniformité des lois. Un contre-exemple très simple est fourni par un processus de Markov stationnaire $(X_n)_{n\leqslant 0}$ ne prenant que deux valeurs, tel que $\mathbb{P}[X_n = X_{n-1}] = p$, où $p \in]0,1[$ est fixé et différent de $\frac{1}{2}$. Par un argument de couplage, le critère de confort-I, dont nous parlerons en fin d'exposé, entraîne facilement que l'espace probabilisé filtré engendré par X est standard. Mais cet espace ne peut pas être engendré par un processus formé de v.a. indépendantes, car les deux seuls événements de $\mathcal{F}_n$ non dégénérés et indépendants de $\mathcal{F}_{n-1}$ sont $\{X_n = X_{n-1}\}$ et $\{X_n = X_{n-1}\}$ (c'est ici qu'intervient la restriction $p \neq \frac{1}{2}$), et la tribu engendrée par tous les événements de ce type est indépendante de la v.a. X_0 (échanger les deux points de l'espace d'états), donc strictement incluse dans $\mathcal{F}_0$.

Au premier abord, la théorie de Vershik est surprenante, et l'existence d'espaces filtrés non standard inattendue. Une fois habitué, et quelques exemples assimilés, on fait face à un deuxième choc, le théorème d'isomorphisme lacunaire, selon lequel un espace probabilisé filtré non standard peut toujours être rendu standard par un changement de temps adéquat.

THÉORÈME 3 (d'isomorphisme lacunaire). — *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé filtré tel que la tribu initiale* $\mathcal{F}_{-\infty}$ *soit grossière. Il existe une application strictement croissante* $\nu : -\mathbb{N} \to -\mathbb{N}$ *telle que, si l'on pose* $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{\nu(n)}$, *l'espace probabilisé filtré* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *soit standard.*

La démonstration de cet étonnant résultat est assez semblable à celle du théorème 1 plus haut ; on ne dispose plus de la puissante hypothèse qu'est le critère, mais l'on sait que toutes les martingales convergent à $-\infty$, et l'on peut à volonté accélérer cette convergence en regroupant l'innovation par paquets, qui correspondront à des intervalles $]\nu(n-1), \nu(n)]$. Pour les détails, voyez Vershik [24] ou [11].

3. CHANGEMENTS NON STANDARD DE PROBABILITÉS

À partir d'ici, nous abandonnons la convention selon laquelle l'axe des temps $\mathcal{T}$ est toujours $-\mathbb{N}$: nous rencontrerons aussi le cas où $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$; nous préciserons donc explicitement, lorsque le contexte sera ambigu, l'axe des temps utilisé, en parlant de *temps continu* quand $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$ et de *temps discret* quand $\mathcal{T} = -\mathbb{N}$; les instants seront notés m ou n en temps discret et s ou t en temps continu.

Nous appellerons *espace de Wiener* l'espace probabilisé filtré (à temps continu) engendré par un mouvement brownien.

En 1995, L. Dubins, Feldman, Smorodinsky et Tsirelson [8] et [14] ont utilisé le critère de Vershik pour construire, sur l'espace de Wiener, des probabilités aux propriétés étranges. Leur construction commence avec un jeu de pile ou face infini $(X_n)_{n\leqslant 0}$ et l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ qu'il engendre. Au moyen d'une martingale de densités $(D_n)_{n\leqslant 0}$ markovienne par blocs (avec des blocs de plus en plus gros au voisinage de $-\infty$), ils parviennent à définir une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$, vérifiant même $1-\varepsilon < d\mathbb{Q}/d\mathbb{P} = D_0 < 1+\varepsilon$, et cependant telle que l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ ne soit pas standard ! Très compliquée, leur construction n'est pas explicite (« tel ensemble ayant une mesure non nulle, on peut y choisir un point... ») ; malgré deux tentatives [18] et [4] pour la simplifier un peu, l'argument reste assez indigeste. Par contre, transférer le résultat du jeu de pile ou face vers le mouvement brownien ne pose pas de difficultés : Étant donné un mouvement brownien $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ pour une probabilité $\bar{\mathbb{P}}$, on choisit dans $\mathbb{R}_+$ une suite strictement croissante $(t_n)_{n\leqslant 0}$, et il suffit de définir la densité $d\bar{\mathbb{Q}}/d\bar{\mathbb{P}}$ comme $\phi\big(\operatorname{sgn}(B_{t_n}-B_{t_{n-1}})\ ,\ n\leqslant 0\big)$, où la fonction ϕ est celle qui définit $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$ à partir des X_n pour le jeu de pile ou face : $D_0 = \phi(X_n\ ,\ n\leqslant 0)$.

Historiquement, cette construction de Dubins, Feldman, Smorodinsky et Tsirelson a été le premier exemple fournissant la réponse (négative) à une question posée par M. Yor [27] en 1979 : Appelons *faiblement brownien* un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que la filtration $\mathcal{F}$ possède la propriété de représentation prévisible par rapport à un mouvement brownien ; ceci signifie que $\mathcal{F}_0$ est grossière et que toutes les martingales sont des intégrales stochastiques par rapport à ce mouvement brownien ; c'est l'analogue en temps continu d'un espace probabilisé filtré à temps discret dyadique et asymptotiquement grossier. Tout espace probabilisé filtré faiblement brownien est-il engendré par un mouvement brownien ?

En fait, une fois que l'on a à sa disposition la théorie de Vershik, et si l'on ne s'intéresse pas aux changements de probabilités mais seulement à la question de Yor, l'argument de transfert du jeu de pile ou face vers le mouvement brownien fournit très facilement des exemples bien plus simples, de la façon suivante.

On se donne, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, deux objets indépendants : un mouvement brownien $(B_t)_{t\geqslant 0}$, et une filtration à temps discret $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\leqslant 0}$ telle que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ soit non standard, mais dyadique et asymptotiquement grossier (l'exemple de Vershik donné plus haut, avant la définition des espaces standard, fait parfaitement l'affaire). Il existe des v.a. $(X_n)_{n\leqslant 0}$ telles que X_n soit indépendante de $\mathcal{F}_{n-1}$, prenne les valeurs 1 et -1 avec même probabilité $\frac{1}{2}$, et que $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} \vee \sigma(X_n)$. On se donne aussi, dans $\mathbb{R}_+$, une suite strictement croissante $(t_n)_{n\leqslant 0}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $-\infty$; en remarquant que l'ensemble des v.a. $X'_n = X_n \operatorname{sgn}(B_{t_n}-B_{t_{n-1}})$ est indépendant de B, on définit un nouveau mouvement brownien $(B'_t)_{t\geqslant 0}$ par

$$B'_t = B'_{t_{n-1}} + X'_n(B_t - B_{t_{n-1}})$$

si t est dans l'intervalle $I_n =]t_{n-1}, t_n]$ pour un $n \leqslant 0$, et par $B'_t = B'_{t_0} + (B_t - B_{t_0})$ si $t \in]t_0, +\infty[$; remarquer que le signe de l'accroissement $B'_{t_n} - B'_{t_{n-1}}$ est X_n. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ les filtrations (à temps continu) engendrées par B et B'. On peut définir une filtration à temps continu $\mathcal{G}$ par $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{n(t)} \vee \mathcal{B}'_t$, où $n(t)$ est le plus grand n tel que $t_n \leqslant t$; observer que l'on a aussi $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_n \vee \mathcal{B}'_t$ pour chaque n tel que $t_n \leqslant t$. Comme les accroissements de B' dans l'intervalle I_n sont fonction de X_n et des accroissements de B dans I_n, ils sont indépendants de $\mathcal{F}_{n-1} \vee \mathcal{B}_{t_{n-1}}$ et a fortiori de $\mathcal{G}_{t_{n-1}}$. Comme, par définition de $\mathcal{G}$, on a

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_{t_{n-1}} \vee \sigma\big(B'_s - B'_{t_{n-1}}\,,\ s \in]t_{n-1}, t]\big) \qquad \text{pour } t \in]t_{n-1}, t_n],$$

B' est un mouvement brownien pour $\mathcal{G}$; comme en outre $\mathcal{G}_{-\infty} \subset \mathcal{F}_{-\infty} \vee \mathcal{B}_0$ est grossière, $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ jouit de la propriété de représentation prévisible par rapport à B', et est donc faiblement brownien. Et cependant $\mathcal{G}$ ne saurait être engendrée par aucun mouvement brownien (ni même aucun processus dont les accroissements sur les I_n sont mutuellement indépendants), puisque la filtration à temps discret $\mathcal{F}$, qui n'est pas standard, est immergée dans l'espace probabilisé filtré à temps discret $\big(\Omega, (\mathcal{G}_{t_n})_{n\leqslant 0}, \mathbb{P}\big)$, qui n'est donc pas standard non plus.

Avant de quitter cette section, signalons encore un autre contre-exemple, qui touche à une question voisine : Partant de l'espace de Wiener $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et effectuant des changements de temps suffisamment réguliers, obtient-on un espace isomorphe à l'espace initial ? Inspirée des idées de Dubins, Feldman, Smorodinsky et Tsirelson, mais beaucoup plus simple que leur changement de probabilité, une construction faite dans [9] donne une famille $(T_t)_{t\geqslant 0}$ de temps d'arrêt de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, vérifiant les propriétés suivantes : chaque fonction $t \mapsto T_t(\omega)$ est C^∞ et de dérivée dT_t/dt vérifiant $1-\varepsilon < dT_t/dt < 1+\varepsilon$; et cependant la filtration changée de temps $(\mathcal{F}_{T_t})_{t\geqslant 0}$ n'est engendrée par aucun mouvement brownien. Ici encore, la construction s'effectue d'abord en temps discret, et est seulement ensuite transférée au cadre brownien.

4. CONFORT ET POINTS TRIPLES

Revenons à la question de Yor mentionnée dans la section précédente. Depuis 1988, M. Barlow, J. Pitman et Yor [3] soupçonnaient que les processus de Walsh y fournissent un contre-exemple. Ce sont des processus dont la filtration est faiblement brownienne, et ces auteurs conjecturaient qu'elle n'est pas engendrée par un mouvement brownien.

Le processus de Walsh le plus simple est une sorte de mouvement brownien à valeurs dans une (é)toile à trois rayons $T = \{z \in \mathbb{C} \;:\; z^3 \in \mathbb{R}_+\}$; sa distance à l'origine est (en loi) la même que pour un mouvement brownien usuel, mais les excursions hors de l'origine, au lieu d'être affectées comme d'habitude de signes ± 1 indépendants, choisissent leur direction indépendamment, et uniformément, parmi les trois rayons de la toile. L'idée de Barlow, Pitman et Yor était que le choix entre trois possibilités (les trois rayons), effectué par le processus aux instants aléatoires où il quitte l'origine, est impossible dans une filtration brownienne. Plus précisément, on sait définir une classe d'instants aléatoires, les *temps honnêtes*[(5)], tels que les débuts d'excursions aient lieu à de tels instants ; et si L est un temps honnête, il y a deux tribus, $\mathcal{F}_L$ et $\mathcal{F}_{L+}$, qui représentent respectivement les événements connus à l'instant L et ceux connus juste après L, et qui vérifient toujours $\mathcal{F}_L \subset \mathcal{F}_{L+}$. Dans le cas où la filtration $\mathcal{F}$ abriterait un processus de Walsh W, en notant L le temps honnête égal au dernier instant avant 2001 où W passe à l'origine, $\mathcal{F}_{L+}$ devrait contenir une v.a. à *trois* valeurs (le rayon choisi pour quitter l'origine, c'est-à-dire celui où se trouve le point W_{2001}) indépendante de $\mathcal{F}_L$. La stratégie que proposaient Barlow, Pitman et Yor consiste à montrer que si L est n'importe quel temps honnête dans une filtration $\mathcal{F}$ engendrée par un mouvement brownien, $\mathcal{F}_{L+}$ est engendrée par $\mathcal{F}_L$ et par une v.a. ne prenant que *deux* valeurs ; cette propriété, appelée « conjecture de Barlow » par Yor [28], rendrait impossible l'existence dans $\mathcal{F}_{L+}$ d'une v.a. trivaluée indépendante de $\mathcal{F}_L$, et, par là même, d'un processus de Walsh dans $\mathcal{F}$.

Une bonne partie de ce programme a été menée à bien par Tsirelson en 1996 : en introduisant une idée radicalement nouvelle, le *confort,* il a démontré dans [20] que les processus de Walsh ne peuvent être immergés dans la filtration engendrée par un mouvement brownien, fût-il de dimension plus grande que 1, ou même infinie. Une des nouveautés essentielles de son approche est qu'il ne travaille pas sur *un* processus de Walsh supposé vivre dans *une* filtration brownienne, mais qu'il considère simultanément *deux* copies de cette situation, qui soient très proches (condition (iv) de la définition 6 ci-dessous), mais en même temps un tout petit peu indépendantes (condition (iii)).

DÉFINITION 4. — *En temps discret ou continu, on dit que deux filtrations $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, sont* co-immergées *si elles sont toutes deux immergées dans une même troisième.*

Il est facile de voir qu'en ce cas, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont toutes deux immergées dans la plus petite filtration qui les contient toutes deux.

DÉFINITION 5. — *En temps continu, on dit que deux filtrations $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et co-immergées, sont* séparées *s'il existe une constante $c < 1$ telle que, pour toute martingale M pour $\mathcal{F}$ et toute martingale N pour $\mathcal{G}$, on ait*

$$[M, N]^2 \leqslant c\,[M, M]\,[N, N]\,.$$

(5) Ce sont exactement les fins des ensembles optionnels.

Sans la constante c, ce serait l'inégalité de Kunita-Watanabe usuelle ; la constante vient renforcer l'inégalité, de façon uniforme pour toutes les martingales de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Noter que la condition de co-immersion donne un sens à la formule : le calcul de la covariation $[M, N]$ se fait dans une filtration commune, qui est celle dans laquelle $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont immergées. Nous n'utiliserons cette définition que dans le cas où toutes les martingales de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont continues — c'est la situation que considérait Tsirelson lorsqu'il a inventé cette notion — ; elle s'interprète alors comme une sorte d'indépendance partielle, l'indépendance étant obtenue pour $c = 0$.

DÉFINITION 6. — *En temps continu, on dit qu'un espace probabilisé filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est* confortable *si, pour toute v.a.* $R \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un espace probabilisé* $(\bar\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$ *pourvu de deux filtrations* $\mathcal{F}'$ *et* $\mathcal{F}''$ *telles que*

(i) *les trois espaces probabilisés filtrés* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $(\bar\Omega, \mathcal{F}', \bar{\mathbb{P}})$ *et* $(\bar\Omega, \mathcal{F}'', \bar{\mathbb{P}})$ *sont isomorphes ;*

(ii) *les deux filtrations* $\mathcal{F}'$ *et* $\mathcal{F}''$ *sont co-immergées ;*

(iii) *les deux filtrations* $\mathcal{F}'$ *et* $\mathcal{F}''$ *sont séparées* (la constante de séparation c pouvant bien entendu dépendre de R et ε) ;

(iv) *les deux v.a.* $R' \in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{F}'_\infty)$ *et* $R'' \in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{F}''_\infty)$, *respectivement obtenues à partir de* R *par les isomorphismes de la condition* (i), *vérifient* $\bar{\mathbb{E}}\big[|R' - R''|\big] < \varepsilon$.

Ceci signifie que l'on peut faire vivre ensemble (ii) deux copies (i) de l'espace, tout à la fois proches (iv) et un peu indépendantes (iii). La démarche de Tsirelson consiste à établir que les espaces probabilisés filtrés engendrés par des mouvements browniens (pouvant être multidimensionnels) sont toujours confortables, alors que l'espace probabilisé filtré engendré par un processus de Walsh n'est jamais confortable. Il en résultera qu'un processus de Walsh ne peut engendrer le même espace qu'un mouvement brownien. Plus précisément, comme tout espace probabilisé filtré immergé dans un espace probabilisé filtré confortable l'est aussi (cela résulte facilement de la définition 6), l'espace engendré par un processus de Walsh n'est immersible dans aucun espace engendré par un mouvement brownien.

La première étape de Tsirelson est donc celle-ci :

THÉORÈME 4. — *Un espace probabilisé filtré engendré par un mouvement brownien est toujours confortable.*

Démonstration. — Prendre deux copies indépendantes B^0 et $B^{\pi/2}$ du brownien générateur, et considérer l'espace probabilisé filtré $(\bar\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$ engendré par le couple $(B^0, B^{\pi/2})$. Pour tout réel α, le processus $B^\alpha = B^0 \cos\alpha + B^{\pi/2} \sin\alpha$ est un mouvement brownien dans $(\bar\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$; la filtration $\mathcal{F}^\alpha$ qu'il engendre est donc immergée dans cet espace. Si $\alpha - \beta$ n'est pas multiple de π, $\mathcal{F}^\alpha$ et $\mathcal{F}^\beta$ sont séparées, avec constante $c = \cos^2(\alpha - \beta) < 1$, car l'inégalité de Kunita-Watanabe renforcée, vraie pour les mouvements browniens B^α et B^β, s'étend aux autres martingales par représentation prévisible.

Pour conclure, il ne reste qu'à établir que, étant donnée une fonctionnelle bornée R^0 de B^0, la copie R^α de R^0 dans la filtration $\mathcal{F}^\alpha$ vérifie $\bar{\mathbb{E}}\big[|R^\alpha - R^0|\big] < \varepsilon$ pour un α assez voisin de 0 (mais non nul, pour que $\mathcal{F}^\alpha$ et $\mathcal{F}^0$ soient séparées). Cela résulte facilement du joli théorème suivant, qui semble classique chez les probabilistes russes sous le nom de « lemme de Slutsky » :

Si une suite $(Z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de v.a. ayant même loi converge en probabilité vers une limite Z_∞, et si h est une fonction borélienne, la suite $(h\circ Z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $h\circ Z_\infty$.

En effet, si l'on n'exige pas que les Z_p aient la même loi, c'est vrai pour toute h continue ; et lorsque les Z_p ont même loi, l'ensemble des h pour lesquelles c'est vrai est stable par limites simples de suites. □

La deuxième étape est tout aussi simple à énoncer que la première ; mais sa réalisation demandera bien plus d'efforts :

THÉORÈME 5. — *Si, dans un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, il existe un processus de Walsh (pour la filtration $\mathcal{F}$), cet espace n'est pas confortable.*

Éléments de démonstration. — Considérant deux copies de $\mathcal{F}$ co-immergées et séparées, on a deux processus de Walsh W' et W'' dans une même filtration. Tsirelson montre tout d'abord que les instants où W' et W'' sont tous deux à l'origine sont rares : mesuré en termes du temps local de l'un, le temps passé par l'autre à l'origine est nul. Ceci est établi par une méthode de comparaison de solutions d'inéquations aux dérivées partielles ; pour une autre démonstration (par le calcul stochastique), voir [12]. C'est ici qu'est utilisée l'hypothèse de séparation.

Tsirelson s'intéresse ensuite à la distance $D_t = d(W'_t, W''_t)$, mesurée sur la toile T. Le processus D est une sous-martingale, dont le compensateur ne croît que lorsque W' et W'' sont égaux, ou que l'un au moins d'entre eux est à l'origine. Le résultat du paragraphe précédent permet de minorer ce compensateur par une somme de termes de temps locaux de W' et W'' à l'origine, qui se calculent séparément ; on obtient ainsi $\bar{\mathbb{E}}[D_t] \geqslant \frac{1}{3}\sqrt{2t/\pi}$ (si l'on remplaçait T par une toile à r rayons au lieu de 3, le coefficient $\frac{1}{3}$ deviendrait $\frac{r-2}{r}$, et le théorème subsisterait pourvu que $r > 2$).

Enfin, la minoration ci-dessus, universelle et indépendante en particulier de la constante de séparation c, montre que les v.a. complexes W'_t et W''_t ne sont pas proches, et empêche que ne soit satisfaite la condition (iv) de la définition 6 : l'espace ne peut être confortable. □

En appliquant les mêmes méthodes à des processus à valeurs dans T un peu plus généraux (les « semimartingales-araignées », qui sont les semimartingales continues, de compensateur porté par l'ensemble des instants où le processus est à l'origine), Tsirelson établit, sous l'hypothèse de confort, la formule $dL_1 \wedge dL_2 \wedge dL_3 = 0$, où L_i est le temps local à l'origine du processus projeté sur le i-ième rayon. Soient maintenant U_1, U_2 et U_3 trois ouverts bornés de $\mathbb{R}^d$, deux-à-deux disjoints. En choisissant comme semimartingale-araignée le processus $(G_1 \circ B, G_2 \circ B, G_3 \circ B)$, où G_i est une fonction de Green dans U_i et B un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$, il obtient $\mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \mu_3 = 0$, où μ_i est « la » mesure harmonique sur la frontière de U_i (seule la classe d'équivalence de μ_i est intrinsèquement définie). Ce résultat selon lequel, en dimension d quelconque, les frontières harmoniques ont fort peu de points triples, avait été conjecturé par C. Bishop [5] en 1991 (en dimension $d = 3$ on savait seulement que la multiplicité est $\leqslant 4$, et, en grandes dimensions, $\leqslant 10$). En donner une démonstration non probabiliste est, selon Tsirelson [21], « a challenge for classical analysis ! ».

En utilisant les outils introduits par Tsirelson, mais avec une définition du confort légèrement modifiée, la conjecture de Barlow a été complètement établie dans [2] (voir aussi [6] pour une simplification). L'idée est ici, partant d'un temps honnête L tel que $\mathcal{F}_{L+}$ ne soit pas engendrée par $\mathcal{F}_L$ et par une v.a. à deux valeurs, de construire une martingale à valeurs dans T (une « martingale-araignée ») quittant l'origine à l'instant L, et de lui faire ensuite subir les traitements infligés par Tsirelson aux processus de Walsh, pour montrer que l'espace ne peut être confortable.

Le confort, ou plutôt son absence, a également été utilisé par S. Watanabe [26] pour montrer qu'une certaine diffusion dans le plan, symétrique pour la mesure de Lebesgue et de probabilités de transition continues, introduite par Ikeda et lui-même en 1971, ne peut pas non plus s'immerger dans un espace de Wiener. Ce processus se déplace de façon brownienne dans le plan ; lorsqu'il rencontre les rayons de la toile T, il s'agite aussi de façon brownienne le long du rayon, à une vitesse beaucoup plus rapide (réglée par le temps local de la composante normale au rayon) ; lorsqu'il est à l'origine, ce qui se produit de façon récurrente, son comportement est régi par une loi d'excursions explicite. Watanabe montre qu'aux instants où le processus quitte l'origine, la conjecture de Barlow est violée ; d'où le résultat.

Dans le même article, il en déduit que le « mouvement brownien gluant » (mouvement brownien réel ralenti lorsqu'il passe en 0 de façon à faire coïncider son temps local avec le temps ordinaire passé en 0) n'est pas confortable non plus. L'argument consiste simplement à remarquer qu'à changement de temps près, deux mouvements browniens gluants indépendants forment une diffusion du type vu précédemment, la toile (à quatre rayons) étant formée des deux axes.

Ce dernier résultat est aussi obtenu, indépendamment, par Warren [25], en étudiant directement deux copies co-immergées de ce processus. (Mais ma fille soutient que sans étudier les mathématiques, tout le monde sait que rien de gluant ne peut être confortable.)

Nous avons vu que, pour prouver la conjecture de Barlow, la définition du confort a dû être modifiée ; voici, pour terminer, une autre variation sur cette notion, qui fournit un lien entre critère de Vershik et confort. Revenons en temps discret, les filtrations étant indexées par $-\mathbb{N}$, et reprenons la définition 6, en y remplaçant bien sûr $\mathcal{F}_\infty$ par $\mathcal{F}_0$, mais aussi la condition (iii) par

(iii′) *il existe un* $n \in -\mathbb{N}$ *tel que les tribus* $\mathcal{F}'_n$ *et* $\mathcal{F}''_n$ *soient indépendantes sous* $\bar{\mathbb{P}}$.

La propriété obtenue est appelée *confort-I* (le I signifie indépendance) ; elle a été utilisée, sans être explicitement définie, par Smorodinsky [19], comme condition nécessaire pour que l'espace probabilisé filtré soit standard ; et cette condition nécessaire se trouve être aussi suffisante [11]. Elle fournit ainsi un substitut au critère de Vershik (qui est d'ailleurs mis à contribution pour montrer qu'elle est suffisante).

Un intérêt du confort-I est d'être parfois plus simple à mettre en œuvre que le critère de Vershik, parce que l'on n'a pas à calculer dans un espace métrique dépendant de n ; l'exemple donné juste après le théorème 2 en est une illustration. Mais le confort-I donne aussi un nouvel éclairage au concept d'espace standard, par le lien qu'il établit avec la notion de *couplage.* Le couplage consiste à faire évoluer simultanément deux versions d'un même processus, de conditions initiales différentes, en cherchant à maximiser leur probabilité de rencontre ; c'est une méthode familière aux probabilistes pour obtenir des estimations en loi (voir le traité de Lindvall [16] ou l'exposé de Diaconis [7]). L'analogie avec le confort-I saute aux yeux : si la filtration $\mathcal{F}$ est engendrée par un processus X, la condition (iii′) dit que jusqu'à un instant passé n on disposait de deux copies indépendantes X' et X'' de X, la condition (ii) dit qu'après n les deux processus évoluent conjointement, et (iv), qu'à la fin, les deux copies donnent à une certaine fonctionnelle de X des valeurs proches. Pour un exemple éclairant sur ce que le couplage peut apporter à l'étude des filtrations, voir la démonstration par Arnaudon [1] du fait que le mouvement brownien sur une variété compacte à d dimensions en temps éternel (l'axe des temps est $\mathbb{R}$) a une filtration brownienne à d dimensions, ou [10] pour le cas, plus simple, où la variété est une sphère.

Une question stimulante pour les travaux à venir me paraît être la recherche d'un analogue, en temps continu, de la théorie de Vershik : comprendre ce qui fait qu'un espace probabilisé filtré est, ou n'est pas, isomorphe à l'espace de Wiener (qui devrait être un analogue, en temps continu, de l'espace probabilisé filtré standard dyadique).

Les progrès actuels à cet égard sont de deux types : d'une part, de plus en plus de bruits stochastiques continus, autres que les bruits blancs, sont définis et explorés par Tsirelson [22] et [23]. D'autre part, les démonstrations du fait qu'une filtration donnée est engendrée par un mouvement brownien sont de moins en moins explicitement constructives (voyez M. Malric [17]).

Mais, pour impressionnantes que soient les avancées de ces dernières années, bien du chemin reste à parcourir. La question posée par Yor il y a vingt ans reste d'actualité, une fois précisée et reformulée à la lumière des connaissances actuelles :

Si un espace probabilisé filtré faiblement brownien est immersible dans l'espace de Wiener, est-il nécessairement isomorphe à l'espace de Wiener (c'est-à-dire engendré par un mouvement brownien)?

RÉFÉRENCES

[1] M. Arnaudon – *La filtration du mouvement brownien indexé par $\mathbb{R}$ dans une variété compacte.* Séminaire de Probabilités XXXIII, Springer Lecture Notes in Math. 1709, 304–314, 1999.

[2] M. Barlow, M. Émery, F. Knight, S. Song & M. Yor – *Autour d'un théorème de Tsirelson sur des filtrations browniennes et non browniennes.* Séminaire de Probabilités XXXII, Springer Lecture Notes in Math. 1686, 264–305, 1998.

[3] M. Barlow, J. Pitman & M. Yor – *On Walsh's Brownian motions.* Séminaire de Probabilités XXIII, Springer Lecture Notes in Math. 1372, 275–293, 1989.

[4] S. Beghdadi-Sakrani & M. Émery – *On certain probabilities equivalent to coin-tossing, d'après Schachermayer.* Séminaire de Probabilités XXXIII, Springer Lecture Notes in Math. 1709, 240–256, 1999.

[5] C. Bishop – *A characterization of Poissonian domains.* Ark. Mat. 29, 1–24, 1991.

[6] B. De Meyer – *Une simplification de l'argument de Tsirelson sur le caractère non-brownien des processus de Walsh.* Séminaire de Probabilités XXXIII, Springer Lecture Notes in Math. 1709, 217–220, 1999.

[7] P. Diaconis – *From shuffling cards to walking around the building : an introduction to modern Markov chain theory.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Doc. Math., Extra Vol. I, 187–204, 1998.

[8] L. Dubins, J. Feldman, M. Smorodinski & B. Tsirelson – *Decreasing sequences of σ-fields and a measure change for Brownian motion.* Ann. Prob. 24, 882–904, 1996.

[9] M. Émery & W. Schachermayer – *Brownian filtrations are not stable under equivalent time-changes.* Séminaire de Probabilités XXXIII, Springer Lecture Notes in Math. 1709, 267–276, 1999.

[10] M. Émery & W. Schachermayer – *A remark on Tsirelson's stochastic differential equation.* Séminaire de Probabilités XXXIII, Springer Lecture Notes in Math. 1709, 291–303, 1999.

[11] M. Émery & W. Schachermayer – *On Vershik's standardness criterion and Tsirelson's notion of cosiness.* Séminaire de Probabilités XXXV, à paraître.

[12] M. Émery & M. Yor – *Sur un théorème de Tsirelson relatif à des mouvements browniens corrélés et à la nullité de certains temps locaux.* Séminaire de Probabilités XXXII, Springer Lecture Notes in Math. 1686, 306–312, 1998.

[13] J. Feldman & M. Smorodinski – *Decreasing sequences of measurable partitions : product type, standard, and prestandard.* Ergodic Theory and Dynamical Systems 20, 1079–1090, 2000.

[14] J. Feldman & B. Tsirelson – *Decreasing sequences of σ-fields and a measure change for Brownian motion II.* Ann. Prob. 24, 905–911, 1996.

[15] D. Heicklen & C. Hoffman – *T, T^{-1} is not standard.* Ergodic Theory and Dynamical Systems 18, 875–878, 1998.

[16] T. Lindvall – *Lectures on the Coupling Method.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, 1992.

[17] M. MALRIC – *Filtrations quotients de la filtration brownienne.* Séminaire de Probabilités XXXV, à paraître.

[18] W. SCHACHERMAYER – *On certain probabilities equivalent to Wiener measures, d'après Dubins, Feldman, Smorodinsky and Tsirelson.* Séminaire de Probabilités XXXIII, Springer Lecture Notes in Math. 1709, 221–239, 1999.

[19] M. SMORODINSKI – *Processes with no standard extension.* Israel J. Math. 107, 327–331, 1998.

[20] B. TSIRELSON – *Triple points : From non-Brownian filtrations to harmonic measures.* GAFA, Geom. funct. anal. 7, 1096–1142, 1997.

[21] B. TSIRELSON – *Within and beyond the reach of Brownian innovation.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Doc. Math., Extra Vol. III, 311–320, 1998.

[22] B. TSIRELSON – *Toward stochastic analysis beyond the white noise.* Prépublication. `http://www.math.tau.ac.il/~tsirel/Research/Recent/toward.html`

[23] B. TSIRELSON – *Noise sensitivity on continuous products : an answer to an old question of J. Feldman.* Prépublication. `http://www.math.tau.ac.il/~tsirel/Research/Recent/products.html`

[24] A. M. VERSHIK – *Approximation in measure theory.* Thèse de doctorat, Leningrad 1973. Version anglaise augmentée et mise à jour : *The theory of decreasing sequences of measurable partitions.* St. Petersburg Math. J. 6, 705–761, 1995.

[25] J. WARREN – *On the joining of sticky Brownian motion.* Séminaire de Probabilités XXXIII, Springer Lecture Notes in Math. 1709, 257–266, 1999.

[26] S. WATANABE – *The existence of a multiple spider martingale in the natural filtration of a certain diffusion in the plane.* Séminaire de Probabilités XXXIII, Springer Lecture Notes in Math. 1709, 277–290, 1999.

[27] M. YOR – *Sur l'étude des martingales continues extrémales.* Stochastics 2, 191–196, 1979.

[28] M. YOR – *Some Aspects of Brownian Motion. Part II : Some Recent Martingale Problems.* Birkhäuser, 1997.

Michel ÉMERY

C.N.R.S. et Université Louis Pasteur
I.R.M.A.
URA 7501 du C.N.R.S.
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
E-mail : `emery@math.u-strasbg.fr`