Astérisque

GUY HENNIART

Progrès récents en fonctorialité de Langlands

Astérisque, tome 282 (2002), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 890, p. 301-322
<http://www.numdam.org/item?id=SB_2000-2001__43__301_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 2001
53e année, 2000-2001, n° 890, p. 301 à 322

PROGRÈS RÉCENTS EN FONCTORIALITÉ DE LANGLANDS

par **Guy HENNIART**

1. INTRODUCTION

Les résultats que je vais exposer concernent les représentations automorphes : de nouveaux cas spectaculaires de la fonctorialité de Langlands viennent d'être établis. Pour comprendre cela, il faut introduire le langage adélique et la théorie des représentations. Mais les progrès récents ont aussi des conséquences importantes en termes plus classiques, et c'est par elles que je veux commencer.

Pour leurs conseils amicaux et leurs remarques éclairées, je remercie L. Clozel, G. Laumon, P. Sarnak, J.-P. Serre et, particulièrement, F. Shahidi.

1.1. Valeurs propres du laplacien

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agit (par $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$) sur le demi-plan de Poincaré $\mathfrak{H}$ formé des nombres complexes à partie imaginaire strictement positive. Si Γ est un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ – par exemple le sous-groupe $\Gamma_0(N)$ formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où c est un multiple de N – la surface de Riemann $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ a un volume fini pour la mesure hyperbolique $dx\,dy/y^2$. L'opérateur de Laplace $\triangle = -y^2\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\right)$ définit un opérateur autoadjoint positif sur $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$. On note $\lambda_1(\Gamma)$ sa plus petite valeur propre non nulle.

Pour $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on a $\lambda_1(\Gamma) \geqslant 3\pi^2/2$ (Roelcke, 1956) et en fait $\lambda_1(\Gamma) \simeq 91,14$ (Hejhal [Hj]). Connaître l'inégalité $\lambda_1(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \geqslant 2/9 \simeq 0,222$ permet déjà d'aborder le « problème du cercle hyperbolique » : pour $X \geqslant 0$ estimer le nombre $P(X)$ de matrices dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ dont la somme des carrés des coefficients vaut au plus X ; on obtient $P(X) = 6X + O(X^{2/3})$ quand $X \to +\infty$[1].

---

(1) Dans [I], les membres de droite des formules suivantes doivent être multipliés par 2 : 12.6, 12.7, 12.12, 12.14, 12.15, 12.17, 12.19. En outre, le signe – de 12.3 doit être remplacé par un signe +.

Pour un sous-groupe de congruence quelconque Γ, A. Selberg, en 1965, a établi $\lambda_1(\Gamma) \geqslant 3/16 = 0,1875$, et conjecturé $\lambda_1(\Gamma) \geqslant 1/4 = 0,25$. Cette dernière inégalité permet en particulier de compter les géodésiques fermées de $\mathfrak{H}/\Gamma$ selon leur longueur avec un bon terme d'erreur [I, § 11]. Mais elle n'est connue que pour peu de groupes, par exemple pour les groupes $\Gamma_0(N)$ où N est petit, $N \leqslant 18$.

On verra en 3.6 que chaque progrès en fonctorialité de Langlands peut permettre de mieux approcher la conjecture de Selberg. C'est une approche due à Langlands lui-même [La1]. H. Kim et P. Sarnak ont ainsi récemment obtenu $\lambda_1(\Gamma) \geqslant 975/4096 \simeq 0,238$. L'inégalité $\lambda_1(\Gamma) \geqslant 2/9$ suffit à généraliser l'estimation du problème du cercle hyperbolique de la façon suivante [KS1, § 8]. Pour z, w fixés dans $\mathfrak{H}$, notons $\rho(z,w)$ la distance hyperbolique entre z et w, et pour $X \geqslant 0$, notons $P(X)$ le nombre d'éléments γ de Γ tels que $2\operatorname{ch}\rho(\gamma z, w) \leqslant X$ (on a $2\operatorname{ch}\rho(z,w) = 2 + \frac{|z-w|^2}{\operatorname{Im} z \ \operatorname{Im} w}$). On a alors l'estimation $P(X) = \operatorname{vol}(\Gamma\backslash\mathfrak{H})^{-1}\pi X + O(X^{2/3})$ pour $X \to +\infty$ [I, § 12]. Pour $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $z = w = i$, c'est le résultat cité plus haut.

1.2. Formes modulaires

Partons d'une forme modulaire classique. Plus précisément, considérons une forme modulaire parabolique f pour le groupe $\Gamma_0(N)$, de poids $k \geqslant 1$ et de caractère $\varepsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$. Supposons que f soit nouvelle, normalisée et vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke. Ainsi f est une fonction holomorphe sur $\mathfrak{H}$ qui vérifie $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \varepsilon(d)(cz+d)^k f(z)$ pour $z \in \mathfrak{H}$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$. Elle a un développement de Fourier en la pointe $i\infty$ qui s'écrit $f(z) = \sum_{n\geqslant 1} a_n q^n$, où on a posé $q = \exp(2\pi i z)$ pour $z \in \mathfrak{H}$. Ce développement commence par $a_1 = 1$ et, au moins pour les nombres premiers p ne divisant pas N, l'action de l'opérateur de Hecke T_p est donnée par $T_p f = a_p f$. La transformée de Mellin de f est sa fonction L

$$L(f,s) = \sum_{n\geqslant 1} a_n\, n^{-s}.$$

Cette série de Dirichlet est donnée par un produit eulérien $L(f,s) = \prod_p L_p(f,s)$, où pour p premier ne divisant pas N, on a $L_p(f,s) = (1 - a_p\, p^{-s} + \varepsilon(p)\, p^{k-1-2s})^{-1}$.

La série de Dirichlet $L(f,s)$ converge si la partie réelle du paramètre complexe s est assez grande, et la fonction ainsi obtenue possède un prolongement holomorphe à tout le plan complexe, borné dans les bandes verticales. Si on ajoute un facteur à l'infini $L_\infty(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ et que l'on pose $\Lambda(f,s) = L_\infty(s)\, L(f,s)$, on a l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(f,s) = \alpha\, N^{-s}\, \Lambda(\widetilde{f}, k-s),$$

où $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ et où $\Lambda(\widetilde{f}, s)$ est la fonction analogue attachée à la forme modulaire $\widetilde{f}(z) = \sum_{n\geqslant 1} \overline{a}_n q^n$.

Par ailleurs, les coefficients de f engendrent une extension finie E de $\mathbb{Q}$ et on sait que si ℓ est un nombre premier et j un plongement de E dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, il existe une représentation $\rho_\ell : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, qui est continue, irréductible, non ramifiée hors de $N\ell$, et caractérisée à isomorphisme près par le fait que, pour p premier ne divisant pas $N\ell$, on a, en appliquant j aux coefficients de $L_p(f,s)$,

$$j\, L_p(f,s) = \det\left(1 - \rho_\ell(\mathrm{Frob}_p) p^{-s}\right)^{-1},$$

Frob_p désignant ici une substitution de Frobenius géométrique en p.

Si maintenant $r : \mathrm{GL}_2 \to \mathrm{GL}_n$ est une représentation algébrique, on peut former la représentation $r \circ \rho_\ell : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ et, au moins pour $p \nmid N\ell$, le facteur

$$L_p(r \circ \rho_\ell, s) = \det\left(1 - r \circ \rho_\ell(\mathrm{Frob}_p) p^{-s}\right)^{-1}.$$

On espère bien que cela définit des fonctions L ayant les mêmes propriétés que $L(f,s)$. Par exemple, on voudrait définir, pour tout nombre premier p, un facteur eulérien $L_p(f,r,s)$, à coefficients dans E, et également un facteur à l'infini $L_\infty(f,r,s)$ de sorte que, pour p ne divisant pas $N\ell$, on ait $j\, L_p(f,r,s) = L_p(r \circ \rho_\ell, s)$ et que la fonction $\Lambda(f,r,s) = L_\infty(f,r,s) \prod_p L_p(f,r,s)$ (qui, elle aussi, converge pour s de partie réelle assez grande) se prolonge à tout le plan complexe en une fonction sinon entière, du moins avec un nombre fini de pôles contrôlables, et qui en outre vérifie une équation fonctionnelle comme plus haut.

Bien sûr, on peut se limiter au cas où r est irréductible. Si $r : \mathrm{GL}_2 \to \mathrm{GL}_1$ est donné par le déterminant, le résultat est connu : on trouve, à un décalage de la variable près, la fonction L du caractère de Dirichlet ε. Les représentations algébriques irréductibles de GL_2 de degré supérieur sont, à torsion près par une puissance du déterminant, les représentations $\mathrm{Sym}^k : \mathrm{GL}_2 \to \mathrm{GL}_{k+1}$, $k \geqslant 1$, données par les produits symétriques. Pour $k = 1$, on retrouve $L(f,s)$. Jusqu'à récemment, on connaissait le prolongement méromorphe et l'équation fonctionnelle (conformément à l'espoir énoncé plus haut) pour $k \leqslant 5$. Grâce aux travaux récents de F. Shahidi et H. Kim, on peut aller jusqu'à $k = 9$, avec un contrôle précis des pôles pour $k = 2, 3, 4$ [KS0, KS1, K3, KS2].

Mais, à vrai dire, l'espoir est bien plus profond que celui évoqué plus haut : ces propriétés analytiques devraient découler du fait que les facteurs $L_p(f,r,s)$ sont attachés à des objets généralisant les formes modulaires, les représentations automorphes : les formes modulaires correspondent à des représentations automorphes de GL_2 (sur $\mathbb{Q}$), tandis que $L_p(f, \mathrm{Sym}^k, s)$ doit provenir d'une représentation automorphe de GL_{k+1} (sur $\mathbb{Q}$). Ce passage, de GL_2 à GL_{k+1}, est un cas particulier des conjectures de fonctorialité de Langlands [La1, B]. Pour $k = 2$, il est dû à Gelbart et Jacquet [GJ]. Kim et Shahidi ont établi tout récemment [KS0, KS1, K3, KS2] les cas $k = 3$ et 4, pour les représentations automorphes de GL_2 sur tout corps de nombres F. C'est ce que nous tenterons d'expliquer dans la suite de l'exposé.

2. REPRÉSENTATIONS AUTOMORPHES ET FONCTORIALITÉ

2.1. Formes automorphes [BJ]

Soit F une extension finie de $\mathbb{Q}$. On note $\mathbb{A}_F$ l'anneau des adèles de F et $\mathcal{P} = \mathcal{P}(F)$ l'ensemble des places de F. Pour $v \in \mathcal{P}$, on note F_v le complété de F en v et, si v est finie, $\mathcal{O}_v$ est l'anneau des entiers de F_v.

Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ est l'union de ses sous-groupes $\prod_{v\in S} \mathrm{GL}_n(F_v) \prod_{v\notin S} \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_v)$, où S parcourt les parties finies de $\mathcal{P}$ contenant les places à l'infini. Chacun de ces sous-groupes est muni de la topologie produit, et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ de la topologie limite inductive. Plus généralement, si G est un groupe linéaire algébrique sur F, on définit de manière analogue un groupe topologique $G(\mathbb{A}_F)$. C'est un groupe localement compact. Pour $G = \mathrm{GL}_1$, on obtient le groupe $\mathbb{A}_F^\times$ des idèles de F. Pour $v \in \mathcal{P}$, on a un plongement à image dense de $G(F)$ dans $G(F_v)$, d'où un plongement diagonal de $G(F)$ dans $G(\mathbb{A}_F)$, qui fait de $G(F)$ un sous-groupe discret de $G(\mathbb{A}_F)$.

Désormais, nous prendrons G réductif, déployé, le plus souvent $G = \mathrm{GL}_n$. Les *formes automorphes* sur $G(\mathbb{A}_F)$ sont des fonctions à valeurs complexes sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$ qui possèdent diverses propriétés de finitude, de lissité et de croissance. Elles forment un espace vectoriel $\mathcal{A}$ sur lequel le groupe $G(F_v)$ pour $v \in \mathcal{P}$ finie agit par translation à droite. Pour $v \in \mathcal{P}$ infinie, c'est l'algèbre de Lie $\mathcal{G}_v$ de $G(F_v)$ et un sous-groupe compact maximal K_v qui agissent, de façon compatible.

2.2. Représentations automorphes [BJ]

Une *représentation automorphe* de $G(\mathbb{A}_F)$ s'obtient en prenant deux sous-espaces de $\mathcal{A}$ stables par ces actions, inclus l'un dans l'autre, de sorte que l'action sur le quotient soit irréductible. Une telle représentation Π se décompose en produit tensoriel $\Pi = \otimes_{v\in\mathcal{P}}\Pi_v$, où Π_v est un $(\mathcal{G}_v, K_v)$-module admissible irréductible si v est infinie, et une représentation lisse irréductible de $G(F_v)$ si v est finie : *lisse* signifie que tout vecteur de l'espace de Π_v est fixé par un sous-groupe ouvert de $G(F_v)$. Les composantes Π_v sont déterminées par Π, à isomorphisme près.

Étant irréductible, une représentation automorphe Π vérifie une version du lemme de Schur. Si Z est le centre de G, $Z(\mathbb{A}_F)$ agit sur l'espace de Π par un quasi-caractère, i.e. un homomorphisme continu à valeurs dans $\mathbb{C}^\times$, appelé *quasi-caractère central* de π, et noté ω_Π.

Pour toute place v finie sauf un nombre fini d'entre elles (on dit « pour presque tout v »), la représentation π_v est *non ramifiée* : elle possède un vecteur non nul fixé par un sous-groupe compact maximal convenable K_v, dit hyperspécial ; pour $G = \mathrm{GL}_n$, on prend $K_v = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_v)$.

Les représentations lisses irréductibles non ramifiées de $G(F_v)$ ont été classifiées : il y en a une, à isomorphisme près, par classe de conjugaison semi-simple dans un certain groupe complexe attaché à G. Pour G déployé comme ici, on peut se contenter de prendre le groupe dual $\widehat{G}$ de G. C'est le groupe réductif complexe dont les racines sont les coracines de G, et les coracines les racines de G. Pour $G = \mathrm{GL}_n$, on a donc $\widehat{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$; pour $G = \mathrm{Sp}_{2n}$, on a $\widehat{G} = \mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$ et dualement $\widehat{G} = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ pour $\mathbf{G} = \mathrm{SO}_{2n+1}$, tandis que $\widehat{G} = \mathrm{SO}_{2n}(\mathbb{C})$ pour $G = \mathrm{SO}_{2n}$. Pour $G = \mathrm{GL}_n$, se donner une représentation lisse irréductible non ramifiée de $\mathrm{GL}_n(F_v)$ revient donc à se donner une matrice diagonalisable de taille n, à conjugaison près, ou encore n valeurs propres complexes, à l'ordre près.

Exemple 1. — Prenons $F = \mathbb{Q}$ et partons d'une forme modulaire f comme en 1.2. En utilisant l'application $g \mapsto g(i)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{H} \cup -\mathfrak{H}$, et en voyant $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ comme quotient de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$, on associe à f une forme automorphe sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, qui apparaît comme un vecteur caractéristique, dit « nouveau vecteur », dans une représentation automorphe $\Pi = \Pi(f)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ [Ge]. Le composant à l'infini de $\Pi(f)$ reflète le poids de f ; c'est la « série discrète » de poids k si $k \geqslant 2$. Pour p premier ne divisant pas le niveau N de f, π_p est non ramifiée et la classe de conjugaison correspondante dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ a deux valeurs propres α_p et β_p vérifiant

$$a_p = p^{(k-1)/2}(\alpha_p + \beta_p), \qquad \alpha_p\,\beta_p = \varepsilon(p).$$

Remarque. — Si G est un produit $G_1 \times G_2$, le groupe dual $\widehat{G}$ s'identifie à $\widehat{G}_1 \times \widehat{G}_2$, et une représentation automorphe de $G(\mathbb{A}_F)$ apparaît comme un produit tensoriel $\Pi_1 \otimes \Pi_2$ d'une représentation automorphe de $G_1(\mathbb{A}_F)$ par une représentation automorphe de $G_2(\mathbb{A}_F)$. On a des considérations analogues pour les composants locaux, et les produits de plus de deux facteurs.

2.3. Conjecture de Ramanujan-Petersson

Pour une forme automorphe f sur $G(\mathbb{A}_F)$, on a une notion de *cuspidalité* qui, dans le cadre de l'exemple 1, traduit le fait que la forme modulaire est parabolique. On dit que f est *cuspidale* si, quel que soit le sous-groupe parabolique maximal P de G, de radical unipotent N, l'intégrale $\int f(ng)dn$, où dn désigne une mesure $N(\mathbb{A}_F)$-invariante sur $N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)$, est nulle pour tout $g \in G(\mathbb{A}_F)$.

Il faut voir cette condition comme exprimant que certains coefficients de Fourier sont nuls ; dans ce contexte, on parle de terme constant le long de N.

La théorie des séries d'Eisenstein de Selberg et Langlands permet dans une certaine mesure d'analyser les représentations automorphes non cuspidales de $G(\mathbb{A}_F)$ en termes des représentations automorphes de ses sous-groupes de Levi propres – des produits de groupes GL_r avec $r < n$ si $G = \mathrm{GL}_n$ –, de même que dans le cas classique les formes modulaires orthogonales aux formes paraboliques sont combinaisons linéaires de séries d'Eisenstein.

Une représentation automorphe est dite *unitaire* si elle possède un produit scalaire hermitien invariant, *cuspidale* si on peut la réaliser dans un espace de formes cuspidales. La *conjecture de Ramanujan-Petersson* dit que si π est une représentation automorphe cuspidale unitaire de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, alors pour chaque place v de F, le composant π_v est *tempéré*, ce qui signifie que ses coefficients matriciels[(2)] ne croissent pas trop vite à l'infini. Si v est fini et π_v non ramifiée, cela équivaut à dire que les valeurs propres de la matrice correspondante de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont toutes de module 1. Pour f comme dans l'exemple 1, c'est un résultat connu (Eichler, Shimura, Ihara, Deligne, Deligne-Serre,...). Quand f est la fonction de Ramanujan $\Delta = \sum_{n\geqslant 1}\tau(n)q^n$, de poids 12, cela donne précisément la conjecture de Ramanujan : $|\tau(p)| \leqslant 2p^{11/2}$ pour p premier.

Exemple 2. — Si Γ est un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, une fonction L^2 sur $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$, valeur propre du laplacien, peut aussi s'interpréter comme forme automorphe sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$; on donne ainsi naissance à des représentations automorphes Π. Mais le composant à l'infini Π_∞ n'est plus alors une « série discrète » mais une « série principale » dépendant de paramètres complexes s_1 et s_2. La valeur propre correspondante du laplacien est $\lambda = \frac{1}{4} - s^2$ si $s = \mathrm{Re}(s_1) = -\mathrm{Re}(s_2)$ n'est pas nul ; dire que Π_∞ est tempérée pour Π cuspidale implique précisément $\lambda_1(\Gamma) \geqslant 1/4$. Les progrès récents vers la conjecture de Selberg proviennent de bornes sur $s = |\mathrm{Re}(s_1)|$ (voir 3.6).

2.4. Fonctorialité [La1, B, La3]

Plus profondes que la conjecture de Ramanujan-Petersson sont les conjectures de fonctorialité de Langlands. Sous une première forme, dite faible, on peut les énoncer ainsi. Partons d'une représentation automorphe Π de $G(\mathbb{A}_F)$, et donnons-nous une représentation (algébrique) irréductible r de $\widehat{G}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Pour presque toute place finie v de F, le composant Π_v est non ramifié et définit une classe de conjugaison semi-simple A_v dans $\widehat{G}$, d'où une matrice diagonalisable $r(A_v)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, bien définie à conjugaison près. L'espoir est qu'il existe une représentation automorphe $r(\Pi)$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ paramétrée par $r(A_v)$ en toute place finie v où Π_v est non ramifiée ; on aura reconnu, dans un contexte élargi, des considérations analogues à 1.2.

Notons le phénomène de *rigidité* suivant : si $r(\Pi)$ est cuspidale, ou plus généralement si $r(\Pi)$ est *isobare* au sens de Langlands [La5], la donnée des $r(A_v)$ (presque partout) détermine $r(\Pi)$ [JS]. Si G est un produit de groupes linéaires GL_{n_i} et que Π est cuspidale, on espère que $r(\Pi)$ est isobare, et même cuspidale sauf dans des cas précis (cf. 3.7).

Cette propriété de rigidité laisse espérer, si l'on est optimiste, que pour *toute* place v de F, le composant $r(\Pi)_v$ ne dépende que de Π_v et donne une application locale $\Pi_v \mapsto r(\Pi_v)$. De telles applications locales sont connues pour les places infinies, et pour les places finies si G est un produit de groupes linéaires GL_{n_i}. Expliquons cela.

[(2)] Voir plus loin 3.1.

Quand v est une place infinie de F, Langlands [La3] a montré comment répartir les classes d'isomorphisme de $(\mathcal{G}_v, K_v)$-modules admissibles irréductibles en paquets finis appelés L-paquets, lesquels paquets sont paramétrés par les homomorphismes continus semi-simples du groupe de Weil W_v dans $\widehat{G}$, à conjugaison près. On peut même analyser la structure des paquets, cf. [ABV] ; pour $G = \mathrm{GL}_n$, un L-paquet n'a qu'un élément.

Le groupe de Weil W_v est une variante du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)$, où $\overline{F_v}$ est une clôture algébrique de F_v, variante qui existe aussi pour v finie. Pour v finie, on conjecture que les classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles de $G(F_v)$ se répartissent elles aussi en L-paquets finis, paramétrés cette fois par les homomorphismes continus semi-simples de $W_v \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ dans $\widehat{G}$, à conjugaison près – on demande bien sûr une compatibilité avec la classification dans le cas non ramifié. Pour $G = \mathrm{GL}_n$, ces conjectures ont été prouvées récemment par M. Harris et R. Taylor [HT, He, Ca], et les L-paquets sont des singletons.

On définit les applications locales $\Pi_v \mapsto r(\Pi_v)$ de la façon évidente : si le L-paquet de Π_v a pour paramètre l'homomorphisme σ_v, à valeurs dans $\widehat{G}$, alors $r(\Pi_v)$ a pour paramètre l'homomorphisme $r \circ \sigma_v$ à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On peut alors énoncer la forme forte des conjectures de fonctorialité de Langlands, au moins si G est un produit de groupes GL_{n_i} : pour une représentation automorphe Π de $G(\mathbb{A}_F)$, on demande que $r(\Pi) = \otimes\, r(\Pi_v)$ soit automorphe. En pratique, on démontre souvent d'abord la forme faible ; si la représentation $r(\Pi)$ ainsi construite est isobare, alors, par rigidité, les composants $r(\Pi)_v$ aux places infinies ou finies ramifiées sont déterminés, et il s'agit pour conclure de prouver qu'on a $r(\Pi)_v = r(\Pi_v)$ en ces places.

Remarquons qu'il existe un groupe de Weil pour F lui-même, noté W_F, et qu'il est muni de plongements continus $W_v \to W_F$ pour $v \in \mathcal{P}$. Si Σ est un homomorphisme continu de W_F dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on obtient pour chaque $v \in \mathcal{P}$ un homomorphisme $W_v \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ paramétrant un composant local R_v, et on espère que $R = \otimes R_v$ est une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$; on pense même que R est cuspidale si et seulement si Σ est irréductible.

En fait, le résultat de Harris et Taylor mentionné plus haut est obtenu en utilisant le phénomène de rigidité : pour Σ dans une certaine collection d'homomorphismes continus irréductibles $W_F \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, ils prouvent qu'il existe une représentation automorphe cuspidale R de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ telle que R_v soit paramétrée par Σ_v pour presque tout v ; ils montrent ensuite que R_v en toute place ne dépend que de Σ_v et que cela donne bien la paramétrisation attendue.

Cependant, sauf pour $n = 1$ où le résultat est donné par la construction même du groupe de Weil, on ne peut espérer obtenir *toutes* les représentations automorphes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ à partir d'homomorphismes $\Sigma : W_F \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$; il faut postuler l'existence d'un groupe plus gros L_F dont W_F serait un quotient. L'existence de ce groupe est encore très hypothétique, mais l'heuristique est puissante : au moins pour G produit de groupes GL_{n_i}, tout se passe comme si les représentations automorphes isobares Π de $G(\mathbb{A}_F)$ étaient paramétrées par les représentations $\Sigma : L_F \to \widehat{G}$, Σ étant irréductible exactement quand Π est cuspidale. Le composé $r \circ \Sigma : L_F \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ paramètre alors la représentation automorphe $r(\Pi)$. On peut de cette façon comprendre les critères pour que $r(\Pi)$ soit cuspidale, *cf.* 3.7.

Remarque. — Toutes ces conjectures de Langlands ont des analogues quand on remplace le corps de nombres F par un corps de fonctions en une variable sur un corps fini. Mais dans ce cadre la situation est bien plus satisfaisante. Laumon, Rapoport et Stuhler ont établi en 1993 que les représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F_v)$ sont paramétrées par les homomorphismes $W_v \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et Laurent Lafforgue a prouvé en 2000 que les représentations automorphes cuspidales sont paramétrées par les représentations irréductibles de degré n du groupe de Weil W_F et ce de façon compatible à la paramétrisation locale(3) (voir [Ln] pour les détails). Ainsi, il n'y a pas besoin du groupe plus gros L_F. Pour un corps de fonctions F, les résultats de 2.5 ci-dessous sont donc automatiques.

2.5. Les principaux résultats récents

Les progrès récents portent surtout sur les groupes GL_2 et GL_3. Pour $G = \mathrm{GL}_2$, les représentations à considérer sont de la forme $r = \mathrm{Sym}^k \otimes \det^\ell$, $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{Z}$. Certains cas sont évidents : pour $k = 1$ et $\ell = 0$, on trouve $r(\Pi) = \Pi$; pour $k = \ell = 0$, $r(\Pi)$ est le caractère trivial de $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_F)$. Plus généralement, si Π est une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$, $r(\Pi)$, pour $r = \mathrm{Sym}^k \otimes \det^\ell$, s'obtient à partir de $\mathrm{Sym}^k(\Pi)$ par torsion par $(\omega_\Pi \circ \det)^\ell$, où $\omega_\Pi : \mathbb{A}_F^\times \to \mathbb{C}^\times$ est le quasi-caractère central de Π. Il suffit donc de traiter le cas $r = \mathrm{Sym}^k$, $k \geqslant 2$.

Pour une représentation automorphe Π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$, on se demande si $\mathrm{Sym}^k(\Pi)$ est automorphe. On supposera Π cuspidale : c'est le cas difficile.

Pour $k = 2$, le résultat est dû à Gelbart et Jacquet [GJ] en 1978. Le cas $k = 3$ n'a cédé que l'an dernier aux efforts de Shahidi et Kim [KS0, KS1] ; ce dernier a peu après résolu le cas $k = 4$ [K3].

En fait, les résultats de Kim et Shahidi sont conséquences d'autres résultats de fonctorialité, qu'ils démontrent aussi. Pour $k = 3$, ils utilisent $G = \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3$ et $r : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_6(\mathbb{C})$ donné par le produit tensoriel ; le cas similaire pour $G = \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$ avait été traité peu auparavant par Ramakrishnan [Ra2] ; la méthode de Kim et Shahidi redonne d'ailleurs ce résultat [K3]. Pour $k = 4$, Kim utilise $G = \mathrm{GL}_4$ et $r = \wedge^2 : \mathrm{GL}_4(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_6(\mathbb{C})$ donné par le carré extérieur. Mais en ce dernier cas, le résultat n'est pas tout à fait complet : si Π est une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{A}_F)$, on a une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_6(\mathbb{A}_F)$ dont le

(3)Il faut cependant considérer les représentations ℓ-adiques de W_F plutôt que les représentations complexes.

composant en toute place v est $\wedge^2(\Pi_v)$ sauf peut-être, dans certains cas exceptionnels, pour des places au-dessus de 2 ou 3. Pour Sym^4 par contre, le résultat est complet.

Pour $k = 3$ ou 4, Kim et Shahidi [KS2] (Gelbart et Jacquet [GJ], déjà, pour $k = 2$) disent quand $\mathrm{Sym}^k(\Pi)$ est cuspidale et analysent les cas où elle ne l'est pas. Voir ci-dessous, 3.7.

Dans la suite, nous expliquons le rôle omniprésent que jouent les fonctions L dans les démonstrations.

3. LE RÔLE DES FONCTIONS L

3.1. Fonctions L pour GL_n [J]

Une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_F)$ n'est autre qu'un quasicaractère de $F^\times\backslash\mathbb{A}_F^\times$. Dans sa thèse, en 1955, Tate a montré comment définir la fonction $L(\chi, s)$ d'un tel quasicaractère comme produit de facteurs locaux $L(\chi_v, s)$ de sorte que l'équation fonctionnelle de $L(\chi, s)$ soit conséquence d'équations fonctionnelles locales – et d'un argument du style formule de Poisson; en outre, la constante dans l'équation fonctionnelle se trouve décomposée en produit de constantes locales. En 1970, Godement et Jacquet [GoJ] ont généralisé la thèse de Tate au cas des représentations automorphes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, $n \geqslant 2$. À titre d'illustration, précisons leurs résultats pour une place finie v de F. On fixe un caractère additif non trivial ψ de F_v et une représentation lisse irréductible π de $\mathrm{GL}_n(F_v)$. On considère des intégrales $Z(f, \Phi, s)$ dépendant d'un paramètre complexe s, d'un coefficient matriciel f de π et d'une fonction auxiliaire Φ sur $M_n(F)$, localement constante et à support compact. Un *coefficient matriciel* est une fonction sur $\mathrm{GL}_n(F_v)$ de la forme $g \mapsto \lambda(\pi(g)v)$ où v est un vecteur de l'espace de π et λ une forme linéaire sur cet espace qui est *lisse*, i.e. invariante par un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_n(F_v)$; ces formes linéaires forment l'espace d'une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(F_v)$, la représentation *contragédiente* $\pi^\vee$ de π. L'intégrale est définie par $Z(f, \Phi, s) = \int f(g)\, \Phi(g)\, |\mathrm{det} g|^{s+(n-1)/2} dg$, où dg est une mesure de Haar sur $\mathrm{GL}_n(F_v)$.

Une telle intégrale converge pour s de partie réelle assez grande, vers une fonction rationnelle de q_v^{-s} où q_v est le cardinal du corps résiduel de F_v, et quand f et Φ varient ces fonctions rationnelles engendrent un idéal fractionnaire de $\mathbb{C}[q_v^{-s}, q_v^s]$ qui possède un unique générateur de la forme $P(q_v^{-s})^{-1}$, où P est un polynôme complexe de terme constant égal à 1. Ce générateur est la fonction $L(\pi, s)$.

L'équation fonctionnelle locale apparaît quand on remplace f par le coefficient $f^\vee : g \mapsto f(g^{-1})$ de $\pi^\vee$ et Φ par sa transformée de Fourier $\widehat{\Phi} : y \mapsto \int \Phi(x)\psi \circ \mathrm{tr}(xy)dx$, où dx est une mesure de Haar autoduale sur $M_n(F)$. Elle s'écrit

$$\frac{Z(f, \Phi, s)}{L(\pi, s)} = \varepsilon(\pi, s, \psi)\, \frac{Z(f^\vee, \widehat{\Phi}, 1-s)}{L(\pi^\vee, 1-s)}\,,$$

où la constante locale $\varepsilon(\pi, s, \psi)$ est un monôme en q_v^{-s} ne dépendant ni de f ni de Φ.

Si π est non ramifiée, correspondant à une matrice diagonalisable A de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on a $L(\pi, s) = \det(1_n - Aq_v^{-s})^{-1}$. On peut alors aussi calculer facilement $\varepsilon(\pi, s, \psi)$: si par exemple ψ est non ramifié, *i.e.* trivial sur $\mathcal{O}_v$, mais non trivial sur l'inverse de son idéal maximal, $\varepsilon(\pi, s, \psi) = 1$.

Si Π est une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, sa fonction L définie par $L(\Pi, s) = \Pi\, L(\Pi_v, s)$ (le produit porte sur $v \in \mathcal{P}$; il faut établir une théorie analogue pour les places infinies) converge pour s de partie réelle assez grande et se prolonge en une fonction méromorphe à tout le plan complexe – *holomorphe* si Π est cuspidale et $n \geqslant 2$ – bornée, à distance des pôles, dans les bandes verticales. La contragrédiente $\Pi^\vee = \otimes \Pi_v^\vee$ est encore automorphe et si Ψ est un caractère additif non trivial de $\mathbb{A}_F$ trivial sur F, de composants locaux Ψ_v, on a l'équation fonctionnelle $L(\Pi, s) = \varepsilon(\Pi, s)\, L(\Pi^\vee, 1-s)$, où $\varepsilon(\Pi, s) = \Pi_v\, \varepsilon(\Pi_v, s, \Psi_v)$: ces facteurs ε valent 1 pour presque toute place v et le produit ne dépend pas de Ψ.

3.2. L'idée des démonstrations

On suppose que G est un produit de groupes linéaires GL_n et on se donne une représentation irréductible $r : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On part d'une représentation automorphe Π de $G(\mathbb{A}_F)$, et on veut prouver que $r(\Pi) = \otimes r(\Pi_v)$, où les composants locaux $r(\Pi_v)$ sont donnés par les applications locales de 3.4, est une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$. Si tel est le cas, certainement la fonction $L(r(\Pi), s)$ définie par le produit sur toutes les places des facteurs locaux $L(r(\Pi_v), s)$, a toutes les propriétés citées plus haut. Mais inversement, si l'on montre ces propriétés pour $L(r(\Pi), s)$, on a fait un pas vers la preuve que $r(\Pi)$ est automorphe. En fait, pour assurer que $r(\Pi)$ soit automorphe, il *suffit* de prouver les propriétés analogues pour un ensemble de fonctions L incluant $L(r(\Pi), s)$. Il s'agit des fonctions $L(\Pi \otimes \Sigma, r \otimes \mathrm{Id}, s)$ attachées à Π et à une représentation automorphe cuspidale quelconque Σ de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_F)$, pour m un entier quelconque entre 1 et $n-1$: on voit $\Pi \otimes \Sigma$ comme une représentation automorphe de $(G \times \mathrm{GL}_m)(\mathbb{A}_F) = G(\mathbb{A}_F) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_F)$, et $r \otimes \mathrm{Id}$ comme une représentation du groupe dual $\widehat{G \times \mathrm{GL}_m} = \widehat{G} \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{nm}(\mathbb{C})$. Ce genre de conditions suffisantes est donné par des théorèmes dits « *réciproques* », dus à Hecke, Weil et Jacquet & Langlands pour $n = 2$, à Jacquet, Piatetski-Shapiro & Shalika [JPSS1] pour $n = 3$, et à Cogdell & Piatetski-Shapiro en général [CPS1,2]. Voir 3.4 pour la version des théorèmes réciproques effectivement utilisée.

Le problème est de prouver l'existence et les propriétés de ces fonctions L, ce qui n'est pas une mince affaire. Deux grands types de méthodes existent. La première utilise des intégrales comme plus haut, la seconde la théorie des séries d'Eisenstein de Langlands. On utilise en fait les deux approches simultanément, mais les succès récents sont dus à des progrès importants (Gelbart, Kim, Shahidi) dans la seconde approche, développée par Shahidi.

3.3. Fonctions L de paires

La méthode des intégrales consiste à définir des intégrales locales comme en 3.1, dépendant éventuellement de données auxiliaires comme Φ, dont le facteur L est un « dénominateur commun ». Mais il faut deviner quelles intégrales choisir ! La première contrainte est qu'au moins pour des représentations non ramifiées on trouve bien le facteur L local $\det(1 - r(A_v)q_v^{-s})^{-1}$ donné par le paramètre A_v dans ${}^LG$; une autre contrainte est qu'on sache prouver les équations fonctionnelles locales et globales. Pour fixer les idées, prenons une place v finie. La plupart des procédés actuels demandent qu'on prenne un modèle de la représentation lisse irréductible de $G(F_v)$ dans un espace de fonctions sur $G(F_v)$, fonctions qui interviennent dans les intégrales. On utilise surtout le « modèle de Whittaker ». Pour le définir, on fixe un sous-groupe de Borel B de G et, grâce à un caractère non trivial ψ de F_v, un caractère θ_ψ du radical unipotent $U(F_v)$ de $B(F_v)$ qui est non dégénéré au sens où son stabilisateur dans $G(F_v)$ est réduit à $Z(F_v)\,U(F_v)$. Une représentation lisse irréductible π de $G(F_v)$ est dite *θ_ψ-générique* s'il existe une forme linéaire non nulle λ sur l'espace V de π telle que $\lambda(\pi(u)v) = \theta_\psi(u)\lambda(v)$ pour $v \in V$ et $u \in U(F_v)$. Une telle forme linéaire est unique à scalaire près et donne une réalisation de π dans un espace de fonctions $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ sur $G(F_v)$, le modèle de Whittaker attendu : à $v \in V$ on associe la fonction $\mathcal{W}_v : g \mapsto \lambda(\pi(g)v)$. On peut voir cette fonction comme un « coefficient de Fourier générique » de π.

Pour $G = \mathrm{GL}_n$, on prend pour B le groupe des matrices triangulaires supérieures; alors $U = U_n$ est formé des matrices unipotentes dans B, et θ_ψ est défini par $\theta_\psi(u) = \psi\big(\sum_{i=1}^{n-1} u_{i,i+1}\big)$ pour $u \in U(F_v)$. On connaît toutes les représentations lisses irréductibles génériques (cela ne dépend pas en fait du choix de ψ), et on sait qu'un composant local de représentation automorphe *cuspidale* de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ est toujours générique.

Si π est une représentation lisse irréductible générique de $\mathrm{GL}_m(F_v)$, Jacquet, Piatetski-Shapiro & Shalika [JPSS1] ont d'abord obtenu une définition de $L(\pi,s)$ par la méthode des intégrales, mais utilisant les modèles de Whittaker – le cas de GL_2 était dû à Jacquet & Langlands [JL]. Puis ils ont généralisé à des fonctions $L(\pi\times\pi',s)$ [JPSS2], où π et π' sont des représentations lisses irréductibles génériques de $\mathrm{GL}_n(F_v)$, $\mathrm{GL}_{n'}(F_v)$ respectivement. Ces fonctions correspondent à la représentation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\times\mathrm{GL}_{n'}(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{nn'}(\mathbb{C})$ donnée par le produit tensoriel. Pour $n = n' = 2$, la formule de base apparaît dans un cadre classique, dans les travaux de Rankin et Selberg à la fin des années 1930. Par cette méthode dite « de Rankin-Selberg », on obtient des facteurs locaux $L(\pi\times\pi',s)$ et $\varepsilon(\pi\times\pi',s,\psi)$ caractérisés de manière analogue à 3.1. Pour donner un exemple, pour $n' = n-1$, $L(\pi\times\pi',s)$ est obtenu, comme en 3.1, à partir des intégrales $Z(W,W',s) = \int W\begin{pmatrix} g & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} W'(g)\,|\det g|^s\,dg$, où dg est une mesure $\mathrm{GL}_{n'}(F_v)$-invariante sur $U_{n'}(F_v)\backslash\mathrm{GL}_{n'}(F_v)$ et où W parcourt

$\mathcal{W}(\pi, \psi)$, W' parcourant $\mathcal{W}(\pi', \overline{\psi})$. Si Π, Π' sont des représentations automorphes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, $\mathrm{GL}_{n'}(\mathbb{A}_F)$, on obtient par produit sur toutes les places une fonction $L(\Pi \times \Pi', s)$ méromorphe, mais dont on contrôle les pôles, qui sont en nombre fini ; il n'y en a pas, par exemple, si Π, Π' sont cuspidales et $n \neq n'$. La fonction L globale est bornée, à distance des pôles, dans les bandes verticales et vérifie l'équation fonctionnelle

$$L(\Pi \times \Pi', s) = \varepsilon(\Pi \times \Pi', s)\, L(\Pi^\vee \times \Pi'^\vee, 1 - s)\,, \tag{1}$$

où le facteur ε est produit des facteurs ε locaux.

Remarque. — 1) Des facteurs L et ε analogues s'obtiennent par la méthode de Shahidi (3.5), qui a le premier obtenu l'équation fonctionnelle globale [Sh1] et montré qu'en fait ses facteurs sont les mêmes que les précédents [Sh2].

2) Les paramétrisations, mentionnées en 2.4, par des représentations de W_v ou $W_v \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, s'expriment en termes de ces facteurs L et ε de paires ; par la paramétrisation, ils doivent correspondre exactement à des facteurs L et ε, de nature galoisienne, définis par Artin et Langlands. En particulier, si v est une place finie où Π_v et Π'_v sont non ramifiées, correspondant à des matrices A_v, A'_v, on a $L(\pi_v \times \pi'_v, s) = \det(1 - A_v \otimes A'_v q_v^{-s})^{-1}$, et $\varepsilon(\pi_v \times \pi'_v, s, \psi) = 1$ si ψ est non ramifié.

3.4. Utilisation des théorèmes réciproques

Donnons la version utilisée par Kim et Shahidi, qui est due à Cogdell et Piatetski-Shapiro [CPS2].

On fixe un entier $n \geqslant 3$, et on va énoncer des conditions suffisantes pour qu'une représentation R de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ donnée par ses composants irréductibles locaux R_v soit automorphe.

On fixe un ensemble *fini* S de places finies de F et, pour tout entier $m \geqslant 1$, on note $\tau^S(m)$ l'ensemble des représentations automorphes cuspidales de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_F)$ *non ramifiées* en toute place finie de S. On fait les hypothèses suivantes :

1) Il existe un quasicaractère ω de $F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times$ tel que $\omega_{R_v} = \omega_v$ pour tout $v \in \mathcal{P}$.

2) Pour m entier, $1 \leqslant m \leqslant n-2$, et $\Sigma \in \tau^S(m)$, la fonction $L(R \times \Sigma, s) = \Pi_v\, L(R_v \times \Sigma_v, s)$ converge pour s de partie réelle assez grande et se prolonge à $\mathbb{C}$ en une fonction *entière*, bornée dans les bandes verticales et vérifiant l'équation fonctionnelle (1) plus haut.

Alors il existe une représentation automorphe R^* de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ telle que R^*_v et R_v soient isomorphes pour $v \notin S$.

On utilise les théorèmes réciproques de la manière esquissée en 3.2. Prenons l'exemple où $G = \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3$ et où $r : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_6(\mathbb{C})$ est donné par le produit tensoriel. On part d'une représentation automorphe cuspidale Π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ et d'une représentation automorphe cuspidale Π' de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{A}_F)$. Pour chaque place v de F, on dispose du composant $R_v = r(\Pi_v \otimes \Pi'_v)$, une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_6(F_v)$ si v est finie, et on applique le critère plus haut pour prouver que $R = \otimes_v R_v$ est une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_6(\mathbb{A}_F)$.

On prend pour S l'ensemble des places finies où Π_v ou Π' sont ramifiées. Pourquoi introduire un tel ensemble S, puisqu'avec S vide on saurait directement que $\otimes R_v$ est automorphe et non « presque » automorphe? La raison est la condition 2) plus haut : on veut que pour chaque représentation automorphe cuspidale Σ dans $\tau^S(m)$, $1 \leqslant m \leqslant 4$, la fonction $L(R \times \Sigma, s)$ soit *entière*; non seulement il est plus facile de prouver l'holomorphie quand on restreint Σ à $\tau^S(m)$ avec S comme plus haut, mais pour S vide, il arrive vraiment que $L(R \times \Sigma, s)$ ait des pôles, de sorte qu'on ne saurait appliquer alors les théorèmes réciproques.

En retour, on ne sait pas directement que R est automorphe, mais seulement qu'il existe une représentation automorphe R^* ayant les mêmes composants que R hors de S. Il faut utiliser alors divers artifices subtils pour savoir que R_v et R_v^* sont isomorphes pour $v \in S$. On doit par exemple utiliser la théorie du changement de base cyclique de Langlands pour GL_2 [La4] – élargie à GL_n par Arthur & Clozel [AC] – et aussi la théorie du changement de base cubique non cyclique de Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika pour GL(2) [JPSS3]. Pour les places de S au-dessus de 2 et 3, il faut même utiliser une connaissance fine des représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_2(F_v)$ et $\mathrm{GL}_3(F_v)$; des arguments de Bushnell et Henniart [BH] complètent la preuve à cet endroit.

Remarque 1. — Pour éviter les cas mentionnés plus haut où $L(R\times\Sigma, s)$ aurait effectivement un pôle, on applique les théorèmes réciproques non pas à R mais à $R\otimes(\chi \circ \det)$ où χ est un caractère de $F^\times\backslash\mathbb{A}_F^\times$ très ramifié aux places de S.

Remarque 2. — Dans des cas plus généraux où le groupe G de départ n'est pas un produit de groupes linéaires, il y a une autre raison pour introduire un ensemble S comme plus haut : on ne connaît pas l'application locale $\pi \mapsto r(\pi)$ en les places finies ramifiées. Au contraire, on espère l'obtenir a posteriori, en utilisant le résultat global (voir 3.8).

3.5. Méthode de Shahidi et applications

Les fonctions L à contrôler pour établir la fonctorialité $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3 \to \mathrm{GL}_6$ ne sont pas toutes accessibles, pour l'instant, à une méthode d'intégrales. On doit utiliser la méthode de Shahidi, qui a son origine dans les travaux de Langlands sur les séries d'Eisenstein automorphes.

Le cadre [GS1, Sh1, Sh4, Sh5] est le suivant : on considère un groupe réductif déployé H sur F (quasi-déployé suffirait) et un sous-groupe parabolique maximal P défini sur F, de radical unipotent N et de quotient de Levi M. Le groupe dual a une variante pour le groupe non réductif N, et $\widehat{M}$ agit sur le dual de l'algèbre de Lie de $\widehat{N}$. Cette représentation est somme de représentations irréductibles r_i, qui ont une indexation naturelle par des entiers $i = 1, \ldots, a$. On ne considère que des représentations automorphes cuspidales *génériques* de $M(\mathbb{A}_F)$, mais ce n'est pas une restriction si M est un produit de groupes GL_r. *Générique* signifie ici qu'un coefficient de Fourier le long d'un sous-groupe unipotent maximal n'est pas nul. Il s'agit du coefficient relatif à un caractère « non dégénéré » θ_Ψ défini grâce à un caractère non trivial Ψ de $F\backslash\mathbb{A}_F$, et les composants locaux sont θ_{Ψ_v}-génériques au sens de 3.3. Si Π est une représentation automorphe cuspidale générique de $M(\mathbb{A}_F)$, la théorie fournit des facteurs locaux $L(\Pi_v, r_i, s)$ et $\varepsilon(\Pi_v, r_i, s, \Psi_v)$ et la fonction L globale $L(\Pi, r_i, s) = \prod_v L(\Pi_v, r_i, s)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$L(\Pi, r_i, s) = \varepsilon(\Pi, r_i, s)\, L(\Pi^\vee, r_i, 1-s)$$

où $\varepsilon(\Pi, r_i, s) = \prod_v \varepsilon(\Pi_v, r_i, s, \Psi_v)$: la représentation contragédiente $\Pi^\vee$ est aussi générique.

Un point primordial est qu'en une place finie v où Π_v est non ramifiée, les facteurs L et ε sont bien les facteurs donnés par le paramètre $A_v \in \widehat{G}$: on a $L(\Pi_v, r_i, s) = \det(1 - r_i(A_v)q_0^{-s})^{-1}$. Un autre point primordial dû à Shahidi [Sh3] est qu'en une place infinie également les facteurs locaux sont ceux attendus par la paramétrisation de Langlands mentionnée en 3.4. Par exemple, ce résultat est utilisé dans 3.4 pour contrôler la situation en les places de S.

Indiquons très brièvement le principe de la construction. À partir de fonctions dans l'espace de Π, on construit des séries d'Eisenstein, formes automorphes sur $H(\mathbb{A}_F)$ dépendant d'un paramètre complexe s. Elles convergent pour s de partie réelle assez grande et Langlands [La2] a obtenu un prolongement analytique à tout le plan complexe, avec une équation fonctionnelle en $s \mapsto -s$. En fait, les propriétés analytiques des séries d'Eisenstein dépendent de ceux du terme constant le long de N, lequel fait intervenir le produit $\prod_{i=1}^a \frac{L^S(\Pi, r_i, is)}{L^S(\Pi, r_i, 1+is)}$; ici L^S désigne le produit sur les places finies où Π_v est non ramifiée. Comme Langlands l'a montré, le terme constant n'a qu'un nombre fini de pôles pour s de partie réelle positive. Cependant, à cause de la présence de quotients de fonctions L^S, on ne peut en tirer le même résultat pour les fonctions L^S individuelles, même si cela en donne le prolongement méromorphe (par décalages successifs, comme classiquement pour la fonction Γ). Shahidi analyse plutôt le coefficient de Fourier des séries d'Eisenstein relatif au choix de Ψ, ce qui exige que Π soit générique pour ce choix – alors que les arguments de Langlands ne l'exigent pas –, mais permet le contrôle et le prolongement analytique de $\prod_{i=1}^a L^S(\Pi, r_i, 1+is)^{-1}$. Il faut encore compléter la théorie locale en les places infinies ou ramifiées, prouver les équations fonctionnelles et surtout extraire des produits précédents les fonctions L individuelles $L(\Pi, r_i, s)$, ce qui se fait en considérant toutes les situations (H, M) où r_i peut intervenir. À cause du produit sur i encore, il n'est pas évident que les fonctions L ainsi obtenues aient un nombre fini de pôles et soient bornées, à distance des pôles, dans les bandes verticales. Ce point, résolu récemment par Gelbart et Shahidi [GS2], utilise de délicates estimées analytiques. Il leur faut en outre une hypothèse d'analyse harmonique locale pour établir le résultat en général (voir [K1, K2, K4]). Mais les cas particuliers nécessaires pour les applications récentes sont maintenant connus grâce aux travaux d'Asgari, Casselman & Shahidi, Kim, Moeglin & Waldspurger, Muič, Zampera, Zhang (voir les références dans [KS1]).

Terminons ce paragraphe en indiquant quels couples (H, M) on utilise pour les fonctions L donnant les résultats de 3.4.

1) Pour $H = \mathrm{GL}(n+n')$, $M = \mathrm{GL}(n) \times \mathrm{GL}(n')$, on obtient les fonctions L de paires de 3.3.

2) Pour $G = \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3 \times \mathrm{GL}_k$ et $r : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_{6k}$ donné par le produit tensoriel, on obtient la fonction L en considérant un groupe H de type D_5, E_6, E_7 respectivement pour $k = 2, 3, 4$, et un sous-groupe de Levi M ayant même groupe dérivé que G.

3) Pour $G = \mathrm{GL}_4 \times \mathrm{GL}_k$, $k = 1, 2, 3, 4$, et r donné par $\wedge^2 \otimes \mathrm{Id}$, on utilise H de type D_{k+3}.

Remarque. — Une fois que l'on sait que $\mathrm{Sym}^k(\Pi)$ est automorphe pour $k \leqslant 4$, on obtient les propriétés analytiques d'autres fonctions L : par exemple, pour $k \leqslant 9$, la fonction $L(\mathrm{Sym}^k(\Pi), s)$ se prolonge à tout le plan complexe en une fonction méromorphe, avec équation fonctionnelle, et un certain contrôle des pôles, au moins pour les fonctions L incomplètes L^S obtenues en faisant le produit des facteurs locaux sur les places finies non ramifiées [KS2]. Noter que pour $L(\mathrm{Sym}^9(\Pi), s)$, on utilise un groupe H de type E_8 ![4]

3.6. Les conjectures de Ramanujan-Petersson et Selberg

Soit Π une représentation automorphe *cuspidale unitaire* de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$. Ses composants sont génériques et unitaires. Notons S l'ensemble des places finies où Π_v est ramifiée. Pour v finie hors de S, dire que Π_v est générique et unitaire implique que la matrice $A_v \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui paramètre Π_v a ses valeurs propres $\alpha_v^{(1)}, \ldots, \alpha_v^{(n)}$ qui vérifient

$$\left|\ell n_v\, |\alpha_v^{(i)}|\right| < 1/2\ ;$$

ici on a posé $\ell n_v(x) = \ell n(x)/\ell n(q_v)$ pour $x \in \mathbb{R}_*^\times$. Si v est une place infinie, on dit parfois que Π_v est non ramifiée si Π_v est une « série principale » paramétrée par n caractères $x \mapsto |x|_v^{s_v^{(i)}}$ avec $s_v^{(i)} \in \mathbb{C}$; on a alors, toujours parce que Π_v est générique et unitaire, $|\mathrm{Re}\, s_v^{(i)}| \leqslant 1/2$. En fait des arguments de Luo, Rudnick et Sarnak [LRS][5] permettent de faire mieux. Si $L(\Pi, \mathrm{Sym}^2, s)$ converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, alors pour v finie hors de S, on a $\left|\ell n_v\, |\alpha_v^{(i)}|\right| \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2+1}$ tandis que, pour v infinie où Π_v est non ramifiée, on a $|\mathrm{Re}\, s_v^{(i)}| \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2+1}$. Pour $F = \mathbb{Q}$, Kim et Sarnak [KSk] ont montré qu'on peut remplacer $n^2 + 1$ par $n(n+1)/2 + 1$.

(4) On manque de groupes exceptionnels plus gros et il semble bien qu'on ait atteint maintenant les limites de cette méthode.

(5) Voir aussi [Se2].

La stratégie de Langlands [La1][6] pour prouver la conjecture de Ramanujan-Petersson est maintenant claire : si l'on sait prouver que $\mathrm{Sym}^k(\Pi)$ est automorphe, cuspidale et unitaire pour un entier $k \geqslant 2$, on applique le résultat précédent à $\mathrm{Sym}^k(\Pi)$: pour v finie hors de S, les valeurs propres paramétrant $\mathrm{Sym}^k(\Pi_v)$ sont produits de k valeurs propres paramétrant Π_v, et on obtient la borne $1/2k$; si on a le résultat pour tout k, la conjecture de Ramanujan-Petersson est vraie.

Pour $n = 2$, on sait maintenant que $\mathrm{Sym}^4\Pi$ est automorphe ; si elle est cuspidale, elle est unitaire. On peut appliquer le résultat de Luo, Rudnick et Sarnak à $\mathrm{Sym}^4\Pi$ et on obtient $\left|\ell n_v \, |\alpha_v^{(i)}|\right| \leqslant 3/26$; mais en fait le contrôle analytique de $L(\mathrm{Sym}^9\Pi, s)$ [KS2] donne mieux : $\left|\ell n_v \, |\alpha_v^{(i)}|\right| < 1/9$ (le précédent record était dû à Shahidi [Sh4] qui obtenait[7] $1/5$ au lieu de $1/9$). Pour $F = \mathbb{Q}$ par contre, la borne de Kim & Sarnak [KSk] est pour l'instant la meilleure $\left|\ell n_p \, |\alpha_p^{(i)}|\right| \leqslant 7/64$. En une place infinie v où Π_v est « non ramifiée », on obtient $|\mathrm{Re}\, s_v^{(i)}| < 1/9$ sur un corps de nombres quelconque et, pour $F = \mathbb{Q}$, $|\mathrm{Re}\, s_v^{(i)}| \leqslant 7/64$, ce qui implique la borne $\lambda_1(\Gamma) \geqslant 975/4096$ de 1.1.

Remarque 1. — Si $\mathrm{Sym}^k(\Pi)$ n'est pas cuspidale pour $k = 2, 3$ ou 4, alors Π vérifie la conjecture de Ramanujan-Petersson et celle de Selberg (*cf.* 3.7).

Remarque 2. — Ramakrishnan [Ra1] a été le premier à obtenir la conjecture de Ramanujan-Petersson pour un grand nombre de places finies non ramifiées. Suivant sa méthode, Kim et Shahidi [KS2] obtiennent que l'ensemble des places finies non ramifiées où Π_v est tempérée a une densité $\geqslant 34/35$.

3.7. Critères de cuspidalité et applications

Comme signalé plus haut, Kim et Shahidi [KS2] déterminent dans quels cas $\mathrm{Sym}^k(\Pi)$ est cuspidale pour $k = 3, 4$ et donnent aussi les propriétés analytiques de $L(\mathrm{Sym}^k(\Pi), s)$, $k \geqslant 9$.

Pour comprendre leurs résultats, il vaut mieux repartir de l'heuristique de 1.4. La représentation automorphe Π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ devrait correspondre à un homomorphisme $\Sigma : L_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Sym}^k(\Pi)$ à l'homomorphisme $\mathrm{Sym}^k \circ \Sigma : L_F \to \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C})$. Si Π est cuspidale, ce que nous supposons, Σ est irréductible, et il s'agit de savoir quand $\mathrm{Sym}^k \circ \Sigma$ est irréductible. Cela ne dépend vraiment que de l'adhérence de Zariski I de l'image de Σ. Si elle contient $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sym}^k \circ \Sigma$ doit être irréductible pour tout $k \geqslant 0$. Sinon, la composante connexe I^0 de I, d'indice finie dans I, est abélienne ; pour cette raison on espère que Σ provient en fait d'une représentation du groupe de Weil W_F, conjecturalement quotient de L_F. Il existe alors un entier naturel minimal

[6] Une variante de l'idée de Langlands joue un rôle dans la preuve par Deligne des conjectures de Weil.

[7] Voir [Se1] pour le cas des formes modulaires classiques.

k_0 tel que $\mathrm{Sym}^{k_0} \circ \Sigma$ soit réductible, et k_0 s'obtient à partir de $\Sigma : W_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ de la façon suivante :

1) (cas imprimitif) Si Σ est induite, $k_0 = 2$.
2) (cas tétraédral) Si l'image $\overline{I}$ de Σ dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est isomorphe à A_4, $k_0 = 3$.
3) (cas octaédral) Si $\overline{I}$ est isomorphe à S_4, $k_0 = 4$.
4) (cas icosaédral) Si $\overline{I}$ est isomorphe à A_5, $k_0 = 6$.

Noter que si l'on part d'une représentation irréductible $\Sigma : W_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, alors on sait, dans les trois premiers cas (Weil [We], Jacquet et Langlands [JL], Langlands [La4], Tunnell [Tu]) lui associer une représentation automorphe cuspidale Π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ telle que Π_v soit paramétrée par Σ_v pour tout $v \in \mathcal{P}$. Voir [BDST, Ty] pour les progrès récents dans le cas icosaédral.

Grâce à [GJ] et [LL], on sait :

1) Si $\mathrm{Sym}^2(\Pi)$ n'est pas cuspidale, Π correspond à une représentation irréductible imprimitive de W_F.

Kim et Shahidi [KS2] établissent les résultats complémentaires suivants :

2) Si $\mathrm{Sym}^2(\Pi)$ est cuspidale, mais pas $\mathrm{Sym}^3(\Pi)$, Π correspond à une représentation irréductible tétraédrale de W_F.

3) Si $\mathrm{Sym}^2(\Pi)$ et $\mathrm{Sym}^3(\Pi)$ sont cuspidales, mais pas $\mathrm{Sym}^4(\Pi)$, Π correspond à une représentation irréductible octaédrale de W_F.

Les réciproques sont également vraies(8).

Pour établir les résultats précédents, il s'agit, à nouveau, de contrôler des fonctions L. Si $\mathrm{Sym}^k(\Pi)$ n'est pas cuspidale, elle correspond à une collection de représentations automorphes cuspidales $\Pi_1, \ldots, \Pi_r$ de $\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{A}_F), \ldots, \mathrm{GL}_{n_r}(\mathbb{A}_F)$, avec $r \geqslant 2$ et $n_1 + \cdots + n_r = k+1$. On détecte les représentations Π_i par le critère que $L(\mathrm{Sym}^k(\Pi) \times \Pi_i^\vee, s)$ ait un pôle en $s = 1$. Les pôles de ces fonctions L sont contrôlés surtout par la méthode de Shahidi, mais il faut parfois faire appel à la méthode des intégrales(9). Par ces méthodes, on établit aussi que $L(\mathrm{Sym}^k(\Pi), s)$ a un prolongement analytique avec équation fonctionnelle pour $k \leqslant 9$. Pour Π unitaire, la fonction

(8)Pour traiter le cas de $\mathrm{Sym}^4 \Pi$, il faut aussi utiliser un résultat non publié de Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika sur le lien entre représentations automorphes de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_F)$ et $\mathrm{GL}_4(\mathbb{A}_F)$ (*cf.* 3.8).

(9)Les critères 1) à 3) impliquent que si l'on connaît l'ordre du pôle en $s = 1$ de $L(\Pi, \mathrm{Sym}^k, s)$ pour $k = 1, \ldots, 8$, alors on peut déterminer, non pas l'homomorphisme $\Sigma : L_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ censé correspondre à Π, mais, à isomorphisme près du moins, l'adhérence de Zariski I de son image. On n'est pas obligé d'admettre l'existence de L_F et Σ : pour une représentation irréductible cuspidale unitaire Π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, Serre conjecture l'existence d'un sous-groupe de Lie $H = H(\Pi)$ de $U_n(\mathbb{C})$ tel que, pour toute représentation algébrique r de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, la dimension de l'espace des points fixés par $r(H)$ soit l'ordre du pôle en $s = 1$ de la fonction $L(\Pi, r, s)$ ou, du moins, du produit des facteurs locaux sur les places non ramifiées. Cependant ces données ne déterminent pas toujours H à isomorphisme près [LP]. On peut remplacer GL_n par un groupe réductif quelconque G sur F, et Langlands propose une variante où H est un sous-groupe algébrique réductif de G.

L partielle $L^S(\mathrm{Sym}^k(\Pi), s)$, sauf dans certains cas particuliers expliqués, n'a ni zéro, ni pôle pour $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$.

Dans [KS2], ces résultats sont appliqués à la preuve des remarques 1 et 2 de 3.6. Une seconde application, assez inattendue, est due à P. Sarnak [Sa2]. On prend $F = \mathbb{Q}$ et on part d'une représentation automorphe cuspidale Π attachée à une fonction f de $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$, fonction propre du laplacien, comme en 1.1. Si la fonction $L(f, s)$ a ses coefficients *entiers*, alors Π est attachée à une représentation irréductible imprimitive ou tétraédrale de W_F. En particulier, la valeur propre du laplacien associée à f vaut $1/4$.

3.8. Groupes classiques

Prenons pour G le groupe (déployé) SO_{2n+1}. Son groupe dual est $\widehat{G} = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$, de sorte qu'on a une représentation évidente $r : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$. Si Π est une représentation automorphe cuspidale *générique* de $\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{A}_F)$ et que Π' est une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$, la fonction $L(\Pi \otimes \Pi', r, s)$ attachée à $r : {}^LG \times \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{2nr}(\mathbb{C})$, $r(g, h) = r(g) \otimes h$, existe. Ses propriétés locales et globales ont été établies tant par la méthode des intégrales (Ginzburg, Rallis, Soudry) que par celle des séries d'Eisenstein (Shahidi) : on utilise le sous-groupe de Levi $M = \mathrm{GL}_r \times \mathrm{SO}_{2n+1}$ du groupe $H = \mathrm{SO}_{2n+2r+1}$; les deux méthodes donnent les mêmes résultats (Soudry). Grâce aux deux méthodes jointes, on a assez de renseignements pour appliquer les théorèmes réciproques (Cogdell, Kim, Piatetski-Shapiro, Shahidi [CKPSS]). On obtient un transfert des représentations automorphes cuspidales de $\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{A}_F)$ vers les représentations automorphes de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A}_F)$ et même en retour un résultat local (*cf.* 3.4, remarque 2) ; pour v finie, c'est un transfert des représentations lisses irréductibles *génériques* de $\mathrm{SO}_{2n+1}(F_v)$ vers les représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_{2n}(F_v)$. Mais en ce cas on dispose aussi d'un transfert en sens inverse (Ginzburg, Rallis, Soudry [GRS]) qui consiste à prendre des résidus en certains pôles de séries d'Eisenstein. Ce transfert inverse ne s'applique qu'aux représentations automorphes Σ de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A}_F)$ pour lesquelles ces pôles existent ; si Σ est cuspidale, sa fonction $L(\Sigma, \Lambda^2, s)$ (qu'on sait étudier) doit avoir un pôle en $s = 1$. Utilisant ces applications dans les deux sens, Jiang et Soudry [JiS1] ont montré que le transfert de SO_{2n+1} à GL_n, tant globalement que localement, est injectif, et ont caractérisé son image. Pour v finie, ils obtiennent aussi, entre autres, une paramétrisation des représentations lisses irréductibles génériques et tempérées par des homomorphismes de $W_v \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ [JiS2].

Les arguments utilisés s'appliquent aux autres groupes classiques SO_{2n} et Sp_{2n} ; seule une petite étape manque. Par contre, pour traiter les représentations non génériques, il faut imaginer d'autres procédés de construction, ou de contrôle des fonctions L, ou bien utiliser la formule des traces. Des travaux récents d'Arthur sur la formule des traces donnent une analyse presque complète des transferts de SO_{2n} et SO_{2n+1} vers GL_{2n}, Sp_{2n} vers GL_{2n+1}, *pourvu que* l'on admette le « lemme fondamental », conjecture d'analyse harmonique locale qui résiste encore. Tout récemment, Langlands [La6] a proposé d'aller au-delà de cette analyse et d'utiliser la formule des traces pour comprendre les représentations automorphes selon l'image des représentations du groupe L_F censées leur correspondre. Pour $G = \mathrm{GL}_2$, il propose d'utiliser les pôles des fonctions $L(\mathrm{Sym}^k, s)$ et la formule des traces de Selberg. Sarnak [Sa1] suggère d'utiliser une autre formule des traces, due à Kusnetzov. À suivre donc.

RÉFÉRENCES

[CORV] *Automorphic forms, Representations and L-functions*, A. Borel et W. Casselman eds, PSPM 33, Parts I & II, A.M.S., Providence (1979).

[ABV] J. Adams, D. Barbasch, D. Vogan – *The Langlands classification and irreducible characters for real reductive groups*, Progress in Mathematics **104**, Birkhäuser (1992).

[AC] J. Arthur, L. Clozel – *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*, Annals of Math. Studies **120**, Princeton University Press (1989).

[B] A. Borel – *Automorphic L-functions*, in [CORV], Part II, 27-62.

[BJ] A. Borel, H. Jacquet – *Automorphic forms and automorphic representations*, in [CORV], Part I, 189-202.

[BH] C. Bushnell, G. Henniart – *On certain dyadic representations*, appendice à [KS1].

[BDST] K. Buzzard, M. Dickinson, N. Shepherd-Barron, R. Taylor – *On icosahedral Artin representations*, à paraître dans Duke Math. J.

[Ca] H. Carayol – *Preuve de la conjecture de Langlands locale pour* $\mathrm{GL}(n)$ *: travaux de Harris-Taylor et Henniart*, Sém. Bourbaki, exp. n° 857, mars 1999, Astérisque **266** (2000), 11-244.

[CKPSS] J. Cogdell, H. Kim, I. Piatetski-Shapiro, F. Shahidi – *On lifting from classical groups to* GL_N, à paraître dans Publ. Math. I.H.É.S.

[CPS1] J. Cogdell, I. Piatetski-Shapiro – *Converse theorems for* GL_n, Publ. Math. I.H.É.S. **79** (1994), 157-214.

[CPS2] J. Cogdell, I. Piatetski-Shapiro – *Converse theorems for* GL_n, II J. Reine Angew. Math. **507** (1999), 165-188.

[G] S. Gelbart – *Automorphic forms on adele groups*, Annals of Math. Studies **83**, Princeton University Press (1975).

[GJ] S. Gelbart, H. Jacquet – *A relation between automorphic representations of* $\mathrm{GL}(2)$ *and* $\mathrm{GL}(3)$, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **11** (1978), 471-552.

[GS1] S. Gelbart, F. Shahidi – *Analytic properties of automorphic L-functions*, Perspectives in Mathematics, vol. 6, Academic Press (1988).

[GS2] S. Gelbart, F. Shahidi – *Boundedness of automorphic L-functions in vertical strips*, J.A.M.S., **14** (2000), 79-107.

[GRS] D. Ginzburg, S. Rallis, D. Soudry – *Generic automorphic forms on* $\mathrm{SO}(2n+1)$ *: functorial lift to* $\mathrm{GL}(2n)$*, endoscopy and base change*, prépublication 2001.

[GoJ] R. Godement, H. Jacquet – *Zeta functions of simple algebras*, L.N.M. **260**, Springer-Verlag (1972).

[HaT] M. Harris, R. Taylor – *On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Prépub. Institut de Math. Jussieu (1999), à paraître dans Annals of Math. Studies **151**, Princeton University Press.

[He] G. Henniart – *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* $\mathrm{GL}(n)$ *sur un corps p-adique*, Invent. Math. **139** (2000), 439-455.

[Hj] D.A. Hejhal – *The Selberg trace formula for* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, Appendice C, L.N.M. **548** (1976) & **1001** (1983), Springer-Verlag.

[I] H. Iwaniec – *Introduction to the spectral theory of automorphic forms*, Biblioteca de la revista matemática iberoamericana (1995).

[IS] H. Iwaniec, P. Sarnak – *Perspectives on the analytic theory of L-functions*, G.A.F.A. **10** (2000).

[J] H. Jacquet – *Principal L-functions of the linear group*, in [CORV], Part II, 63-86.

[JL] H. Jacquet, R.P. Langlands – *Automorphic forms on* $\mathrm{GL}(2)$, L.N.M. **114** (1971), Springer-Verlag.

[JS] H. Jacquet, J. Shalika – *On Euler Products and the classification of automorphic forms*, II, Amer. J. Math. **103** (1981), 777-815.

[JPSS1] H. Jacquet, I. Piatetski-Shapiro, J. Shalika – *Automorphic forms on* $\mathrm{GL}(3)$, Am. J. Math. **109** (1979), 169-258.

[JPSS2] H. Jacquet, I. Piatetski-Shapiro, J. Shalika – *Rankin-Selberg convolutions*, Am. J. Math. **105** (1983), 367-464.

[JPSS3] H. Jacquet, I. Piatetski-Shapiro, J. Shalika – *Relèvement cubique non normal*, C.R.A.S. Paris **292** (1981), 567-571.

[JiS1] D. Jiang, D. Soudry – *The local converse theorem for* $\mathrm{SO}(2n+1)$ *and applications*, prépublication 2001.

[JiS2] D. Jiang, D. Soudry – *Generic representations and local Langlands reciprocity for* $\mathrm{SO}(2n+1)$, prépublication 2001.

[K1] H. Kim – *Langlands-Shahidi method and poles of automorphic L-functions : Application to exterior square L-functions*, Can. J. Math. **51** (1998), 835-849.

[K2] H. Kim – *Langlands-Shahidi method and poles of automorphic L-functions*, II, Israel J. Math. **117** (2000).

[K3] H. Kim – *Functoriality for the exterior square of* GL_4 *and symmetric fourth of* GL_2, prépublication 2000.

[K4] H. Kim – *L-functions and normalized intertwining operators*, prépublication 2000.

[KSk] H. Kim, P. Sarnak – *Refined estimates towards the Ramanujan and Selberg conjectures*, appendice à [K3].

[KS0] H. KIM, F. SHAHIDI – *Functorial products for* $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3$ *and functorial symmetric cube for* GL_2, C.R.A.S. Paris **331** (2000), 539-604.

[KS1] H. KIM, F. SHAHIDI – *Functorial products for* $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3$ *and the symmetric cube for* GL_2, prépublication 2000, à paraître aux Annals of Math.

[KS2] H. KIM, F. SHAHIDI – *Cuspidality of symmetric powers with applications*, prépublication 2000, à paraître au Duke Math. Journal.

[LL] J.-P. LABESSE, R.P. LANGLANDS – *L-indistinguishability for* SL(2), Can. J. Math. **31** (1979), 726-785.

[La1] R.P. LANGLANDS – *Problems in the theory of automorphic forms*, in Lectures in Modern Analysis and Applications, L.N.M. **170**, Springer-Verlag (1970), 18-86.

[La2] R.P. LANGLANDS – *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, L.N.M. **544**, Springer-Verlag (1976).

[La3] R.P. LANGLANDS – *On the classification of irreducible representations of real algebraic groups*, in Representation theory and harmonic analyis on semisimple Lie groups (P.J. Sally Jr, D.A. Vogan, eds), Math. Surveys and Monographs **31**, A.M.S. (1989), 101-170.

[La4] R.P. LANGLANDS – *Base change for* GL(2), Annals of Math. Studies **96**, Princeton University Press (1980).

[La5] R.P. LANGLANDS – *Automorphic representations, Shimura varieties, and motives : Ein Märchen*, in [CORV], Part II, 205-246.

[La6] R.P. LANGLANDS – *Endoscopy and beyond*, Notes I.A.S., Princeton (2000).

[LP] M. LARSEN, R. PINK – *Determining representations from invariant dimensions*, Invent. Math. **102** (1990), 377-398.

[Ln] G. LAUMON – *La correspondance de Langlands sur les corps de fonctions (d'après L. Lafforgue)*, Sém. Bourbaki, exp. n° 873, mars 2000, Astérisque **276** (2002), 207-265.

[LRS] W. LUO, Z. RUDNICK, P. SARNAK – *On the generalized Ramanujan conjecture for* GL_n, P.S.P.M. **66**, Part II (1999), 301-310.

[Ra1] D. RAMAKRISHNAN – *On the coefficients of cusp forms*, Math. Res. Letters **4** (1997), 295-307.

[Ra2] D. RAMAKRISHNAN – *Modularity of the Rankin-Selberg L-series, and multiplicity one for* SL(2), Annals of Math. **152** (2000), 45-111.

[Sa1] P. SARNAK – Lettre à R.P. Langlands, avril 2001.

[Sa2] P. SARNAK – Lettre à H. Kim et F. Shahidi, 1er mai 2001.

[Se1] J.-P. SERRE – Lettre à J.-M. Deshouillers, août 1981.

[Se2] J.-P. SERRE – Lettre à H. Jacquet, mai 1982.

[Sh1] F. SHAHIDI – *On certain L-functions*, Amer. J. of Math. **103** (1981), 297-355.

[Sh2] F. SHAHIDI – *Fourier transforms of intertwining operators and Plancherel measures for* $\mathrm{GL}(n)$, Amer. J. of Math. **106** (1984), 67-111.

[Sh3] F. SHAHIDI – *Local coefficients as Artin factors for real groups*, Duke Math. J. **52** (1985), 973-1007.

[Sh4] F. SHAHIDI – *On the Ramanujan conjecture and finiteness of poles for certain L-functions*, Annals of Math. **127** (1988), 547-584.

[Sh5] F. SHAHIDI – *A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; complementary series for p-adic groups*, Annals of Math. **132** (1990), 273-330.

[Ty] R. TAYLOR – *On icosahedral Artin representations*, II, prépublication Harvard University, 2001.

[Tu] J. TUNNELL – *Artin's conjecture for representations of octahedral type*, B.A.M.S. **5** (1981), 173-175.

[We] A. WEIL – *Dirichlet series and automorphic forms*, L.N.M. **189**, Springer-Verlag (1971).

Guy HENNIART

Département de Mathématiques
et UMR 8628 du CNRS
Université de Paris-Sud
Bâtiment 425
F-91405 Orsay Cedex
E-mail : `Guy.Henniart@math.u-psud.fr`