PHILIPPE BIANE

Entropie libre et algèbres d'opérateurs

Astérisque, tome 282 (2002), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 889, p. 279-300
<http://www.numdam.org/item?id=SB_2000-2001__43__279_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 2001
53^{e} année, 2000-2001, n^{o} 889, p. 279 à 300

ENTROPIE LIBRE ET ALGÈBRES D'OPÉRATEURS

par **Philippe BIANE**

La théorie des probabilités libres est née dans les années 80 quand D. Voiculescu a commencé à utiliser des idées probabilistes pour étudier les facteurs de type II_1 associés aux groupes libres. Des progrès importants ont été faits grâce à l'introduction de la notion d'entropie libre. Ainsi les facteurs de groupes libres sont les premiers exemples de facteurs de type II_1 (à prédual séparable) dont on sait démontrer qu'ils n'ont pas de sous-algèbre de Cartan. De plus ces facteurs sont « premiers », ce qui signifie qu'ils ne sont pas isomorphes à un produit tensoriel $M_1 \otimes M_2$ où M_1 et M_2 sont deux facteurs de type II_1, et ils ne possèdent pas de sous-algèbre abélienne maximale simple.

On expliquera ces notions, ainsi que d'autres applications aux numéros 6 et suivants, mais auparavant on commence par introduire les éléments de théorie des algèbres de von Neumann et de probabilités libres nécessaires.

Je remercie Liming Ge, Gilles Pisier, Sorin Popa et Dan Voiculescu pour leurs explications et leurs commentaires lors de la préparation de cet exposé.

1. ALGÈBRES DE VON NEUMANN ET FACTEURS

Soit H un espace de Hilbert complexe, que l'on supposera séparable dans la suite de l'exposé, l'algèbre $B(H)$ des opérateurs bornés sur H est un espace de Banach, dual de l'espace $L^1(H)$, formé des opérateurs à trace et muni de la norme $\|T\|_1 = \mathrm{Tr}(|T|)$. Une sous-algèbre de $B(H)$, contenant l'unité, stable par passage à l'adjoint, et fermée pour la topologie faible correspondant à cette dualité, est appelée algèbre de von Neumann. Une telle algèbre est stable par le calcul fonctionnel borélien ; si $x \in B(H)$ est un élément auto-adjoint de l'algèbre, alors pour toute fonction f, borélienne bornée, $f(x)$ est encore dans l'algèbre. Ainsi les éléments de $L^\infty(S,m)$ où (S,m) est un espace mesuré, agissant par multiplication sur $L^2(S,m)$, forment une sous-algèbre de von Neumann de $B(L^2(S,m))$, et le théorème spectral pour les opérateurs autoadjoints entraîne que toute algèbre de von Neumann abélienne est isomorphe à une algèbre de ce type.

Ces deux propriétés font de la théorie des algèbres de von Neumann un candidat naturel au titre de théorie non commutative de la mesure. La théorie de la réduction [vN2], [Di] permet de ramener le problème de la classification des algèbres de von Neumann à celui de la classification des facteurs, c'est-à-dire des algèbres de von Neumann dont le centre est de dimension 1. Parmi ces facteurs, Murray et von Neumann dans leurs articles fondateurs, distinguaient une classe particulièrement intéressante, les facteurs de type II_1, auxquels finalement on peut se ramener, grâce aux travaux de Tomita, Takesaki et Connes [C3]. Un facteur de type II_1 est un facteur de dimension infinie sur lequel est définie une trace τ qui est une forme linéaire, continue pour la topologie $\sigma(B(H), L^1(H))$, telle que, pour tous x, y dans l'algèbre, on ait

$$\tau(1) = 1\,; \quad \tau(x^*) = \overline{\tau(x)}\,; \quad \tau(x^*x) \geqslant 0\,; \quad \tau(xy) = \tau(yx).$$

Appliquée à un projecteur orthogonal, la trace donne un nombre compris entre 0 et 1 que l'on interprète comme la « dimension continue » de l'image du projecteur. Il existe une seule trace sur un facteur de type II_1, et la dimension continue y prend toutes les valeurs réelles comprises entre 0 et 1. Pour Murray et von Neumann les facteurs de type II_1 devaient fournir un cadre naturel pour développer la théorie des probabilités utilisées en mécanique quantique. Ils mettaient particulièrement l'accent sur la structure de treillis des projections, et sur la dimension continue, alors que le point de vue moderne met au premier plan la trace τ qui tient le rôle de l'espérance en probabilités classiques.

Les articles [vN1] et [MvN] donnent deux constructions de facteurs de type II_1. La première [vN1] utilise une action libre, ergodique, d'un groupe dénombrable G sur un espace mesuré (S, m). L'algèbre de von Neumann agit sur $L^2(S, m)$, elle est engendrée par les opérateurs de multiplication par les fonctions de $L^\infty(S, m)$ et par des opérateurs unitaires déduits de l'action de G sur S. La seconde construction associe à un groupe dénombrable G l'algèbre de von Neumann $L(G)$, engendrée par la représentation régulière gauche, c'est-à-dire les opérateurs unitaires $\lambda_g : l^2(G) \to l^2(G)$ définis par $\lambda_g f(h) = f(g^{-1}h)$. Elle fournit un facteur de type II_1 si et seulement si toutes les classes de conjugaison non triviales de G sont infinies, condition que l'on désigne en général par CCI. La trace est donnée par la formule

$$\tau(x) = \langle x\delta_e, \delta_e\rangle_{l^2(G)},$$

où δ_e est la fonction qui vaut 1 sur l'identité de G et 0 ailleurs.

Dans [MvN] Murray et von Neumann montrent que tous les groupes CCI qui sont limite inductive de sous-groupes finis donnent le même facteur, appelé facteur hyperfini (de type II_1). En fait tout facteur de type II_1 dans lequel il existe une suite croissante de sous-algèbres de dimension finie, dont la réunion est faiblement dense, est isomorphe à ce facteur, d'où le nom hyperfini. De plus ils démontrent que le facteur hyperfini n'est pas isomorphe au facteur engendré par un groupe libre à deux générateurs.

En 1969, Dusa Mac Duff [McD] a exhibé une infinité non dénombrable de facteurs de type II_1 deux à deux non isomorphes. Il semble peu probable que l'on parvienne un jour à classifier tous les facteurs de type II_1 à isomorphisme près, mais on peut espérer dégager des familles intéressantes de tels facteurs, en particulier parmi ceux obtenus par les constructions évoquées plus haut. Ainsi un résultat fondamental d'Alain Connes [C1] entraîne que, pour un groupe CCI, le facteur $L(G)$ est isomorphe au facteur hyperfini si et seulement si ce groupe est moyennable. En ce qui concerne les facteurs associés aux groupes non moyennables, on connaît ([C2], [GN]) quelques propriétés des facteurs associés aux groupes ayant la propriété T, mais c'est surtout sur les facteurs associés aux groupes libres que des résultats substantiels ont été obtenus. En particulier, si on note $L(F_n)$ le facteur engendré par un groupe libre à n générateurs ($n \geqslant 2$, et $n = \infty$ est permis), Rădulescu ([R], voir aussi [Sk]) a montré que l'un des termes de l'alternative suivante est vrai : soit les facteurs $L(F_n)$ sont deux à deux non isomorphes, soit ils sont tous isomorphes.

2. PROBABILITÉS NON COMMUTATIVES ET LIBERTÉ

2.1. Espace de probabilités non commutatif

Comme on l'a vu plus haut, il est naturel d'utiliser un langage probabiliste pour étudier les algèbres de von Neumann. Dans la suite de l'exposé on appellera espace de probabilités non commutatif un couple (A, φ) formé d'une algèbre de von Neumann A et d'une trace fidèle φ. La trace φ vérifie donc les propriétés énoncées au numéro 1, et le qualificatif de fidèle signifie que pour tout $x \in A$, l'égalité $\varphi(x^*x) = 0$ entraîne que $x = 0$.

Bien sûr si $A = L^\infty(\Omega, P)$ et $\varphi(f) = \int_\Omega f(\omega)P(d\omega)$ où (Ω, P) est un espace de probabilités, on retrouve la situation classique. L'exemple réellement non commutatif le plus simple est celui où $A = M_N(\mathbb{C})$ et $\varphi = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}$ est la trace normalisée, et celui qui nous intéressera principalement est le cas où A est un facteur de type II_1 et $\varphi = \tau$ est sa trace.

La trace permet de définir des normes L^p non commutatives

$$|x|_p = \tau((x^*x)^{p/2})^{1/p}$$

et par complétion des espaces L^p qui sont des analogues non commutatifs des espaces L^p ordinaires.

Soit X un élément auto-adjoint dans A ; il existe une unique mesure μ sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(X^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n \mu(dx)$ pour tout $n \geqslant 0$. De plus on a $\varphi(f(X)) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx)$ pour toute fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}$, et l'algèbre de von Neumann (abélienne) engendrée par X est isométriquement isomorphe à $L^\infty(\mathbb{R},\mu)$. Comme dans la théorie des probabilités, on appelle variable aléatoire un élément auto-adjoint de A et la mesure μ est appelée la distribution, ou la loi, de X. Plus généralement, il existe une version non commutative de la méthode des moments. Soient $(X_1,\dots,X_d)$ des variables aléatoires dans A, engendrant une sous-algèbre de von Neumann B. On appelle moments non commutatifs de $(X_1,\dots,X_d)$ les nombres complexes

$$\varphi(X_{i_1}\dots X_{i_p})$$

où l'on parcourt l'ensemble des monômes non commutatifs en les X_i. La donnée de ces moments détermine complètement la forme linéaire

$$P\mapsto \varphi(P(X_1,\dots,X_d))$$

définie sur l'espace $\mathbb{C}\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ des polynômes non commutatifs en n variables. La construction GNS (pour Gelfand, Naimark et Segal) permet, à partir de la donnée de cette forme linéaire, de reconstruire une algèbre de von Neumann isomorphe à B. Pour cela on sépare et complète l'espace $\mathbb{C}\langle x_1,\dots,x_d\rangle$ pour le produit hermitien

$$\langle P,Q\rangle=\varphi(Q(X_1,\dots,X_d)^*\,P(X_1,\dots,X_d))$$

ce qui donne un espace de Hilbert H. Les opérateurs de multiplication à gauche par les x_i définis sur $\mathbb{C}\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ passent au quotient et induisent des opérateurs bornés sur H, qui engendrent une algèbre de von Neumann isomorphe à B. La trace sur B est la restriction de la forme linéaire $X\mapsto\langle X1,1\rangle$ sur $B(H)$. On voit donc que la donnée d'un espace de probabilités non commutatif engendré par un nombre fini de variables aléatoires se ramène à celle de la famille des moments associés.

3. LIBERTÉ

3.1. Définition de la liberté

Soit G un groupe qui peut se décomposer comme le produit libre de sous-groupes $G=*_{i\in I}G_i$. L'idée initiale de Voiculescu a été d'utiliser la trace τ pour caractériser les positions relatives des sous-algèbres $L(G_i)$ dans $L(G)$, d'une manière qui rappelle la notion d'indépendance en théorie des probabilités.

DÉFINITION 3.1 (Voiculescu [V1]). — *Soient A une algèbre unifère, φ une forme linéaire sur A, normalisée (i.e. $\varphi(1)=1$), et $B_i; i\in I$ des sous-algèbres de A, contenant l'unité, on dit que les B_i sont libres dans (A,φ) si pour tout choix de $b_1,\dots,b_n\in A$ tels que $\varphi(b_k)=0$ et $b_k\in B_{i_k}$ avec $i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_n$ on a*

$$\varphi(b_1\dots b_n)=0.$$

Ainsi dans l'exemple du produit libre les $L(G_i)$ sont libres dans $(L(G),\tau)$.

Remarque 3.2. — La définition donnée ci-dessus est purement algébrique et se prête à un traitement combinatoire. R. Speicher a découvert que l'on pouvait fonder cette combinatoire sur la notion de partition non croisée, ce qui a donné lieu à des développements algébriques intéressants, que l'on trouvera exposés par exemple dans [Sp1], [Sp2].

On dira qu'une famille de variables aléatoires $(X_i)_{i\in I}$ dans (A,φ) est libre, si les sous-algèbres de von Neumann engendrées par les X_i sont libres. Il existe beaucoup d'exemples de familles libres, la situation de ce point de vue est même optimale puisque si on se donne des espaces de probabilités non commutatifs (B_i,φ_i), alors il existe un espace de probabilités non commutatif (A,φ), unique à isomorphisme près, et des injections fortement continues $\iota_i : B_i \to A$, préservant l'unité, telles que $\varphi_i = \varphi\circ\iota_i$, les algèbres $\iota_i(B_i)$ engendrent A comme algèbre de von Neumann, et elles sont libres dans (A,φ). L'espace de probabilités non commutatif (A,φ) est appelé produit libre réduit des $(B_i,\varphi_i)_{i\in I}$.

Soient $(X_1,\dots,X_n)$ des variables aléatoires libres, de distributions non atomiques ; alors elles engendrent une algèbre de von Neumann isomorphe au facteur $L(F_n)$. En effet pour chaque i on peut trouver une fonction mesurable $f_i : \mathit{supp}(\mu_i)\to U(1)$, inversible hors d'un ensemble négligeable sur $U(1)$ et telle que $f_i(\mu_i)$ soit la mesure de Haar. Les opérateurs $f_i(X_i)$ sont unitaires, et ils engendrent la même algèbre de von Neumann que les X_i. Soit G un groupe libre de générateurs $g_i; i=1,\dots,n$, la propriété de liberté entraîne que l'application $G\to A : g_i\mapsto f_i(X_i)$ se prolonge en un isomorphisme d'algèbres de von Neumann de $L(G)$ sur A.

3.2. Modèles matriciels pour la liberté

L'ingrédient essentiel dans la compréhension de la notion de liberté a été la découverte que les variables libres pouvaient être modélisées par des matrices aléatoires de grande taille. Ainsi le résultat suivant permet de relier la notion de liberté à celle d'indépendance en probabilités.

PROPOSITION 3.3. — *Soient n et k deux entiers, ε et δ deux réels >0 ; il existe N_0 tel que pour tout $N\geqslant N_0$ on ait la propriété suivante :*

pour tout n-uplet $(A_1,\dots,A_n)$ de matrices $N\times N$, hermitiennes, de normes inférieures à 1, on a

$$P\Big[\,\big|\tfrac{1}{N}\mathrm{Tr}(B_{i_1}\dots B_{i_m})-\varphi(Y_{i_1}\dots Y_{i_m})\big|<\varepsilon;\ \forall m\leqslant k \text{ et } (i_1,\dots,i_m)\in[1,n]^m\Big]\geqslant 1-\delta,$$

où $B_i=U_iA_iU_i^*$, les U_i étant des matrices aléatoires unitaires, indépendantes, choisies avec la mesure de Haar sur $U(N)$, et les $Y_i\in(A,\varphi)$ sont des variables libres telles que, pour tout entier $l\leqslant k$,

$$\varphi(Y_i^l)=\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(A_i^l).$$

Remarque 3.4. — Le choix de la borne $\|A_i\| < 1$ n'a évidemment rien de fondamental, on aurait pu prendre une autre valeur, mais une restriction de ce type est nécessaire, sinon on peut infirmer l'énoncé en multipliant les A_i par une constante assez grande.

Ce résultat, dont il existe de nombreuses variantes, est dû à Voiculescu [V2], [V7], et une démonstration simple peut se trouver dans [PV].

La proposition 3.3 montre que des matrices de grande taille choisies au hasard vont se comporter, avec une grande probabilité, comme des variables libres. On peut donc s'attendre à ce que des variables aléatoires non commutatives qui sont très éloignées d'être des variables libres ne puissent être approchées, en distribution, que par des n-uplets de matrices de mesure petite. C'est ce que la notion d'entropie libre que nous verrons au numéro 5 permet de quantifier. Mais d'abord on va faire quelques rappels sur l'entropie en mécanique statistique.

4. ENTROPIE DE BOLTZMANN ET THÉORÈME DE SANOV

En mécanique statistique l'état d'un système est caractérisé par les valeurs de plusieurs quantités macroscopiques, par exemple le volume, la température et la pression pour un gaz. Un tel système est constitué d'un grand nombre de petites particules, et à chaque état macroscopique correspondent de nombreux états microscopiques qui le réalisent. On a donc une fonction

$$\text{États microscopiques} \to \text{États macroscopiques}.$$

Boltzmann définit l'entropie du système par la formule

$$S = k \log \Omega,$$

où S est l'entropie de l'état macroscopique et Ω le nombre d'états microscopiques correspondant, k étant une constante de proportionnalité (la constante de Boltzmann). Cette définition suppose que l'on a discrétisé l'espace des phases, c'est-à-dire l'ensemble des états microscopiques. Pour des systèmes continus on remplace le nombre Ω par un volume.

Considérons un système constitué de N points $X_1, \dots, X_N$ dans $\mathbb{R}^d$. Ici d est fixé et N est très grand. Convenons que les états macroscopiques sont déterminés par les valeurs des moments de cette distribution de points, c'est-à-dire les nombres

$$\int_{\mathbb{R}^d} x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d} \widehat{\mu}_X(dx),$$

où

$$\widehat{\mu}_X = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \delta_{X_j}$$

est la distribution empirique des $X_j; j = 1, \dots, N$. Soit μ une mesure sur $\mathbb{R}^d$ à support compact. Notons $\Gamma_{\mu,N,\varepsilon,k}$ l'ensemble des états microscopiques qui réalisent l'état μ à k, ε près i.e. les N-uplets de points tels que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d} \widehat{\mu}_X(dx) - \int_{\mathbb{R}^d} x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d} \mu(dx) \right| < \varepsilon$$

pour tout monôme de degré inférieur à k. Utilisons la formule de Boltzmann pour définir l'entropie par particule

$$S(\mu, N, \varepsilon, k) = \frac{1}{N} \log |\Gamma_{\mu,N,\varepsilon,k}|$$

où $|.|$ désigne la mesure de Lebesgue.

On peut alors montrer que la quantité $S(\mu, N, \varepsilon, k)$ admet une limite quand $N \to \infty$. Cette limite est une fonction décroissante de k et croissante de ε, on peut donc à nouveau en prendre la limite quand $k \to \infty$ et $\varepsilon \to 0$. On obtient ainsi la quantité

$$E(\mu) = -\int_{R^d} f(t) \log f(t) dt$$

si $\mu = f(t)dt$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et

$$E(\mu) = -\infty$$

sinon. C'est cette quantité que l'on désigne habituellement sous le nom d'entropie de la mesure μ.

Les énoncés qui précèdent peuvent se déduire du théorème de Sanov, un résultat classique de la théorie des grandes déviations ; voir par exemple [DS], [DZ].

5. ENTROPIE LIBRE

5.1. Définition

Pour définir l'entropie libre, nous allons reprendre l'idée précédente, en utilisant cette fois-ci des moments non commutatifs, et en prenant pour états microscopiques des états matriciels. On considère donc $(X_1, \dots, X_d)$ des opérateurs auto-adjoints dans un espace de probabilités non commutatif (A, φ). On note $\Gamma_{X_1,\dots,X_d,N,\varepsilon,k}$ l'ensemble de tous les d-uplets $(M_1, \dots M_d)$ de matrices hermitiennes de taille $N \times N$ qui satisfont

$$\left| \frac{1}{N} \mathrm{Tr}(M_{i_1} \dots M_{i_m}) - \varphi(X_{i_1} \dots X_{i_m}) \right| \leqslant \varepsilon$$

pour tout $m \leqslant k$ et tout choix d'indices $1 \leqslant i_1, \dots, i_m \leqslant d$. Munissons l'espace H_N des matrices hermitiennes de taille $N \times N$ de la structure euclidienne associée à la forme quadratique $\mathrm{Tr}(M^2)$. L'inégalité $\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(M_i^2) \leqslant \varphi(X_i^2) + \varepsilon$ entraîne que l'ensemble $\Gamma_{X_1,\dots,X_d,N,\varepsilon,k}$ est inclus dans un produit de d boules euclidiennes de rayons $\sqrt{(\varphi(X_i^2) + \varepsilon)N}$. Lorsque $N \to \infty$, le logarithme du volume de ce produit de boules est de l'ordre de $-\frac{dN^2}{2}\log N$. Cela nous amène à renormaliser la formule de Boltzmann en posant

$$S(X_1,\ldots,X_d,N,\varepsilon,k)=\frac{1}{N^2}\log|\Gamma_{X_1,\ldots,X_d,N,\varepsilon,k}|+\frac{d}{2}\log N.$$

Contrairement au cas classique traité dans le numéro précédent, on ne sait pas montrer en général que $S(X_1,\ldots,X_d,N,\varepsilon,k)$ admet une limite quand $N\to\infty$, on se contente de prendre la limite sup, puis on fait tendre k vers ∞ et ε vers 0. On obtient ainsi la quantité

$$\chi(X_1,\ldots,X_d)=\inf_{\varepsilon>0}\inf_{k\geqslant 0}\limsup\nolimits_{N\to\infty}S(X_1,\ldots,X_d,N,\varepsilon,k).$$

DÉFINITION 5.1. — *L'entropie libre du d-uplet $(X_1,\ldots,X_d)$ est la quantité*

$$\chi(X_1,\ldots,X_d).$$

Remarquons qu'elle ne dépend que des moments de $(X_1,\ldots,X_d)$.

La définition ci-dessus n'est pas tout à fait celle de Voiculescu [V3] ; il effectue une troncature supplémentaire qui disparaît à la fin du calcul. J'ai ignoré ce raffinement pour simplifier l'exposé, mais il faudrait le rétablir pour être entièrement correct.

L'entropie libre est une quantité intéressante en elle-même, j'y reviendrai à la fin de l'exposé, mais d'abord je voudrais expliquer comment on l'utilise pour étudier les facteurs associés aux groupes libres. Pour cela on commence par montrer que cette quantité n'est pas triviale.

5.2. Entropie d'une variable

Soit X un élément auto-adjoint de A, son entropie ne dépend que de sa distribution. Soit μ une mesure à support compact sur $\mathbb{R}$, on va donner une formule explicite pour l'entropie d'une variable aléatoire non commutative de loi μ. On cherche à estimer la mesure de l'ensemble des matrices $N\times N$ dont la mesure spectrale approche μ. Toute matrice hermitienne peut se diagonaliser dans une base orthonormale ; on a donc une application surjective

$$D(N)\times U(N)\to H_N;\quad (\Lambda,U)\mapsto U\Lambda U^*,$$

où H_N est l'espace des matrices hermitiennes $N\times N$ et $D(N)$ celui des matrices diagonales réelles. On vérifie (cf. [Me]) que la mesure de Lebesgue sur H_N est l'image de la mesure

$$\frac{1}{Z_N}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant N}(\lambda_i-\lambda_j)^2 d\Lambda\, dU$$

par cette application. On a noté $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ l'élément générique de D, et $d\Lambda$ est la mesure de Lebesgue sur D tandis que dU est la mesure de Haar sur $U(N)$ et

Z_N une constante de normalisation. En faisant intervenir la distribution de Λ,

$$\mu_\Lambda = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{\lambda_i}$$

cette mesure se met sous la forme

$$\frac{1}{Z_N}\exp\left(N^2\int\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\Delta}\log|x-y|\mu_\Lambda(dx)\mu_\Lambda(dy)\right)d\Lambda\, dU,$$

où Δ est la diagonale de $\mathbb{R}^2$. On peut en déduire, en traitant soigneusement la diagonale et en évaluant Z_N, une expression explicite de l'entropie libre de X en fonction de sa distribution,

$$\chi(X) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\log|x-y|\,\mu(dx)\mu(dy)\ + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\log(2\pi).$$

À une constante additive près, c'est l'énergie logarithmique de la mesure μ, une quantité qui intervient dans la théorie du potentiel dans le plan complexe. En particulier, on voit que cette expression n'est pas triviale, et qu'elle peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle $[-\infty,+\infty[$, ce qui justifie a posteriori la renormalisation effectuée dans la définition de l'entropie libre.

Ce calcul peut également s'interpréter comme un résultat de grandes déviations pour le théorème de Wigner sur la distribution limite du spectre de grandes matrices gaussiennes [BG].

5.3. Entropie libre et liberté

Il est clair d'après leur définition que les ensembles $\Gamma_{X_1,\ldots,X_d,N,\varepsilon,k}$ vérifient

$$\Gamma_{X_1,\ldots,X_d,N,\varepsilon,k}\subset\Gamma_{X_1,\ldots,X_r,N,\varepsilon,k}\times\Gamma_{X_{r+1},\ldots,X_d,N,\varepsilon,k}.$$

On en déduit les inégalités

$$\chi(X_1,\ldots,X_d)\leqslant\chi(X_1,\ldots,X_r)+\chi(X_{r+1},\ldots,X_d)$$

pour tout r, et donc

$$\chi(X_1,\ldots,X_d)\leqslant\chi(X_1)+\cdots+\chi(X_d).$$

D'autre part en utilisant la proposition 3.3, on voit que la plupart (au sens de la mesure de Lebesgue) des d-uplets dans $\Gamma_{X_1,N,\varepsilon,k}\times\cdots\times\Gamma_{X_d,N,\varepsilon,k}$ sont « presque libres », on en déduit que si $(X_1,\ldots,X_d)$ est une famille libre alors

$$\chi(X_1,\ldots,X_d)=\chi(X_1)+\cdots+\chi(X_d).$$

Réciproquement, Voiculescu [V5] a montré que si l'on a

$$-\infty<\chi(X_1,\ldots,X_d)=\chi(X_1)+\cdots+\chi(X_d),$$

alors $(X_1,\ldots,X_d)$ est une famille libre.

Ces calculs montrent que le facteur $L(F_n)$ admet un système de générateurs $(X_1, \ldots, X_n)$ dont l'entropie est $> -\infty$. En effet on a vu au numéro 3.1 qu'une famille libre de n variables de distributions non atomiques engendre $L(F_n)$. D'après le numéro 5.2, on peut choisir ces distributions de telle sorte que leur entropie libre soit finie, et alors leur somme le sera également.

6. APPLICATIONS AUX FACTEURS DE GROUPES LIBRES

Le principe général des applications de l'entropie libre à la théorie des facteurs est le suivant. On considère une propriété P, vérifiée par un espace de probabilités non commutatif (A, φ). Soit $X_1, \ldots, X_d$ un système de générateurs auto-adjoints de A, on utilise P pour obtenir des contraintes sur les ensembles $\Gamma_{X_1,\ldots,X_d,N,\varepsilon,k}$ qui permettent de majorer leur mesure de Lebesgue. Puis on fait tendre N vers l'infini et on déduit de ces majorations que l'entropie libre de $X_1, \ldots, X_d$ vaut $-\infty$. Donc tout système de d générateurs de l'algèbre doit avoir une entropie $-\infty$, or le facteur $L(F_d)$ possède un sytème de d générateurs d'entropie libre finie, par conséquent il ne peut pas satisfaire la propriété P. Le point délicat dans la démonstration est évidemment d'obtenir une estimation convenable de la mesure de l'ensemble en question.

6.1. La propriété Γ

Je vais expliquer comment cela fonctionne dans un cas relativement simple, celui de la propriété Γ.

DÉFINITION 6.1. — *Soit (A, φ) un espace de probabilités non commutatif; une suite centrale dans (A, φ) est une suite $(t_k)_{k\geqslant 0}$, bornée dans A, telle que $\|[t_k, x]\|_2 \to_{k\to\infty} 0$ pour tout $x \in A$. Une suite centrale est dite triviale si $|t_k - \varphi(t_k).1|_2 \to_{k\to\infty} 0$. On dit que (A, φ) a la propriété Γ s'il existe une suite centrale non triviale dans A.*

Ici $[x, y] = xy - yx$ désigne comme d'habitude le commutateur.

La propriété Γ a été introduite par Murray et von Neumann dans [MvN] pour distinguer le facteur hyperfini du facteur engendré par le groupe libre à deux éléments : en effet il est facile de construire une suite centrale non triviale dans le facteur hyperfini, mais le facteur du groupe libre à deux générateurs ne vérifie pas la propriété Γ (ni, par le même argument, n'importe quel facteur $L(F_n)$).

THÉORÈME 6.2 ([V4]). — *Soit $(X_1, \ldots, X_d)$ un d-uplet vérifiant*

$$\chi(X_1, \ldots, X_d) > -\infty,$$

alors l'algèbre de von Neumann engendrée par $X_1, \ldots, X_d$ n'a pas la propriété Γ.

En particulier, cette algèbre de von Neumann est un facteur de type II_1, non hyperfini.

Appliqué aux facteurs de groupes libres, ce résultat ne nous apporte rien de nouveau par rapport à l'article de Murray et von Neumann, mais la démonstration constitue un bon prototype pour les démonstrations des autres propriétés des facteurs de groupes libres. D'autre part, il suggère le problème suivant, toujours ouvert : soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-uplet d'entropie libre finie, le facteur qu'ils engendrent est-il isomorphe à $L(F_n)$?

Passons à la démonstration du théorème. Une application du calcul fonctionnel borélien à une suite centrale non triviale permet de montrer que la propriété Γ entraîne l'existence de $\theta \in]0, 1/2[$ et d'une suite de projections orthogonales $(P_n)_{n\geqslant 0}$ dans A, telles que $\theta < \tau(P_n) < 1-\theta$ et $|[x, P_n]|_2 \to 0$ quand $n \to \infty$ pour tout $x \in A$.

LEMME 6.3. — *Soit (A, φ) un espace de probabilités non commutatif engendré par un d-uplet $(X_1, \ldots, X_d)$, vérifiant $\tau(X_i^2) \leqslant 1$, soient $\theta \in]0, 1/2[$ et $P \in A$ une projection orthogonale telle que $\theta < \tau(P) < 1-\theta$ et $|[P, X_i]|_2 < \omega$ pour $i = 1, \ldots, d$. Alors on a*

$$\chi(X_1 \ldots, X_d) \leqslant C_1 + C_2 \log \omega$$

où C_1 et C_2 sont des constantes > 0 dépendant seulement de d et de θ.

Sous les hypothèses du lemme, pour tout $\eta > 0$ on peut trouver un polynôme Q tel que $|P - Q(X_1, \ldots, X_d)|_2 < \eta$. En choisissant η assez petit, puis k assez grand et ε assez petit, on voit que pour tout N assez grand, et tout $(M_1, \ldots, M_d) \in \Gamma_{X_1,\ldots,X_d,N,\varepsilon,k}$ on peut trouver une projection orthogonale Π dans $M_N(\mathbb{C})$, sur un sous-espace de dimension $q = [N\tau(P)]$, telle que

$$|[M_i, \Pi]|_2 < 2\omega$$

(ici la norme est prise dans l'espace de probabilités non commutatif $(M_N(\mathbb{C}), \frac{1}{N}\mathrm{Tr})$). La matrice Π s'écrit sous la forme

$$U \begin{pmatrix} I_{qq} & 0_{N-q,q} \\ 0_{q,N-q} & 0_{N-q,N-q}, \end{pmatrix} U^*$$

où la matrice U est déterminée à un facteur dans $U(q) \times U(N-q)$ près (le commutant de la matrice par blocs ci-dessus) ; on peut la considérer comme un élément de la grassmanienne $U(N)/U(q) \times U(N-q)$.

Écrivons la matrice U^*M_iU sous la forme

$$U^*M_iU = \begin{pmatrix} B_i & C_i^* \\ C_i & D_i \end{pmatrix}, \tag{1}$$

avec $B_i \in H_q, D_i \in H_{N-q}, C_i \in M_{q,N-q}(\mathbb{C})$. La condition

$$|[M_i, \Pi]|_2 < 2\omega$$

signifie que

$$\frac{2}{N}\mathrm{Tr}[C_iC_i^*] \leqslant 4\omega^2 ;$$

d'autre part comme $\tau(X_i^2) \leqslant 1$ on a

$$\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(M_i^2) \leqslant 1+\varepsilon$$

donc (en supposant $\varepsilon < 1$)

$$\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(B_i^2) \leqslant 2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(D_i^2) \leqslant 2.$$

La décomposition (1) permet d'identifier H_N au produit $H_q \times M_{q,N-q} \times H_{N-q}$, et en notant $B_p(R)$ la boule euclidienne de rayon R dans chacun de ces espaces, on a donc

$$\Gamma_{X_1,\dots,X_d,N,k,\varepsilon} \subset$$
$$\cup_{U\in U(N)/U(q)\times U(N-q)} \left(U^*(B_{q^2}(\sqrt{4N}) \times B_{2q(N-q)}(\omega\sqrt{2N}) \times B_{(N-q)^2}(\sqrt{4N}))U\right)^d.$$

Le volume du membre de droite n'est pas facile à estimer directement car on prend la réunion d'une famille continue de produits de boules. Pour faire le calcul on discrétise l'ensemble des matrices unitaires. Munissons la grassmanienne $U(N)/U(q) \times U(N-q)$ de la distance obtenue par quotient de la distance associée à la norme uniforme sur $U(N)$. Grâce à un résultat de Szarek [Sz], on sait que pour tout $\delta > 0$, on peut recouvrir $U(N)/U(q) \times U(N-q)$ par une famille de boules de rayon δ, de cardinal inférieur à $(C\delta^{-1})^{N^2-q^2-(N-q)^2}$, où C est une constante universelle. Notons $(U_s)_{s\in S}$ les centres d'une telle famille de boules. En prenant $(M_1,\dots,M_d)$, Π, et U comme ci-dessus, il existe un $s\in S$ tel que $\|U-U_s\| \leqslant \delta$ et on a

$$\begin{aligned}
|[U_s^*M_iU_s, U^*\Pi U]|_2 &\leqslant |[U_s^*M_iU_s, U_s^*\Pi U_s]|_2 + |[U_s^*M_iU_s, U_s^*\Pi U_s - U^*\Pi U]|_2\\
&\leqslant 2\omega + 2\|U_s^*\Pi U_s - U^*\Pi U\||M_i|_2\\
&\leqslant 2\omega + 8\delta
\end{aligned}$$

donc

$$\Gamma_{X_1,\dots,X_d,N,k,\varepsilon} \subset \cup_{s\in S}\left(U_s^*(B(\sqrt{4N}) \times B((2\omega+8\delta)\sqrt{N}) \times B(\sqrt{4N}))U_s\right)^d.$$

Rappelons que le volume de la boule euclidienne dans un espace de dimension p est

$$|B_p(R)| = \frac{R^p\pi^{p/2}}{\Gamma(1+\frac{p}{2})}.$$

Nous pouvons maintenant estimer le volume de $\Gamma_{X_1,\dots,X_d,N,k,\varepsilon}$

$$|\Gamma_{X_1,\dots,X_d,N,k,\varepsilon}| \leqslant$$
$$(C\delta^{-1})^{N^2-q^2-(N-q)^2}\left(\frac{(4\pi N)^{q^2/2}(2\omega+8\delta)^{2q(N-q)}(\pi N)^{q(N-q)}(4\pi N)^{(N-q)^2/2}}{\Gamma(1+\frac{q^2}{2})\Gamma(1+q(N-q))\Gamma(1+\frac{(N-q)^2}{2})}\right)^d.$$

En prenant $\delta = \omega$, on obtient après quelques calculs la majoration du lemme, le point étant que $d \geqslant 2$.

Soit maintenant $(X_1, \ldots, X_d)$ engendrant une algèbre de von Neumann avec la propriété Γ, alors pour tout $\omega > 0$ on a

$$\chi(X_1, \ldots, X_d) < C_1 + C_2 \log \omega$$

et donc

$$\chi(X_1, \ldots, X_d) = -\infty,$$

ce qui démontre le théorème.

6.2. Sous-algèbres de Cartan

Soit B une sous-algèbre de von Neumann de A ; son normalisateur est le groupe des unitaires u de A tels que $uBu^* = B$. Ainsi dans $M_N(\mathbb{C})$ le normalisateur de la sous-algèbre des matrices diagonales est engendré par les matrices de permutations et les matrices unitaires diagonales. La sous-algèbre engendrée par ce normalisateur est $M_N(\mathbb{C})$ tout entier. On appelle sous-algèbre de Cartan d'un facteur de type II_1, une sous-algèbre abélienne maximale dont le normalisateur engendre le facteur tout entier. On montre que le facteur hyperfini possède des sous-algèbres de Cartan. De même, dans la première construction de facteurs évoquée au numéro 2, l'algèbre $L^\infty(S, m)$ est une sous-algèbre de Cartan. Dans [FM], Feldman et Moore montrent que les facteurs de type II_1 ayant une sous-algèbre de Cartan sont exactement ceux qui sont obtenus par une généralisation appropriée de cette construction, utilisant une relation d'équivalence mesurée. Voiculescu démontre dans [V4] que les facteurs associés aux groupes libres n'ont pas de sous-algèbre de Cartan, ce qui fournit le premier exemple de tels facteurs (dans le cas non séparable, que l'on ne considère pas ici, un argument de cardinal dû à Popa [P] fournit un contre-exemple). Le résultat de Voiculescu est en fait plus fort. Pour l'énoncer, introduisons la terminologie suivante. Une algèbre de von Neumann est dite diffuse si, pour tout projecteur orthogonal non nul $P \in A$, il existe deux projecteurs orthogonaux non nuls P_1 et P_2 tels que $P = P_1 + P_2$. Dans un facteur de type II_1, une sous-algèbre de von Neumann diffuse et hyperfinie (SADH en bref) est appelée régulière si son normalisateur engendre le facteur tout entier. Ainsi, une sous-algèbre de Cartan est une SADH régulière.

THÉORÈME 6.4 ([V4]). — *Les facteurs $L(F_n)$ n'ont pas de sous-algèbre diffuse hyperfinie régulière.*

La démonstration suit le même principe que dans le cas de la propriété Γ. Soient $(X_1, \ldots, X_d)$ des variables engendrant un facteur A, de type II_1, contenant une SADH régulière B. Voiculescu montre que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sous-algèbre de dimension finie $B_0 \subset B$, des entiers $p(j)$ pour $1 \leqslant j \leqslant d$, des éléments $X_{ij} \in A$ et des projecteurs orthogonaux P_{ij} et Q_{ij} dans B_0, pour $1 \leqslant j \leqslant d$, $1 \leqslant i \leqslant p(j)$, tels que

$$\Big| X_j - \sum_{1 \leqslant i \leqslant p(j)} (X_{ij} + X_{ij}^*) \Big|_2 < \varepsilon, \qquad X_{ij} = P_{ij} X_{ij} Q_{ij}$$

(2) $$\sum_{i,j} \tau(P_{ij}) \tau(Q_{ij}) < \varepsilon.$$

Ainsi les variables X_j peuvent être reconstruites, à ε près, en recollant des « petits bouts » de matrices, la petitesse de ces bouts étant mesurée par (2). À ε fixé, ces conditions sont suffisamment fortes pour permettre de majorer le volume des états matriciels qui approximent $(X_1, \ldots, X_d)$, et obtenir une estimation de l'entropie de la forme

$$\chi(X_1, \ldots, X_d) \leqslant C_1 + C_2 \log \varepsilon$$

cf. [V4], Theorem 3.2.

On en déduit que l'existence d'une SADH régulière dans le facteur engendré par $(X_1, \ldots, X_d)$ entraîne que $\chi(X_1, \ldots, X_d) = -\infty$, et donc que les facteurs de groupes libres n'ont pas de SADH régulière.

6.3. Sous-algèbres abéliennes maximales simples et facteurs premiers

Soient (A, φ) et (A', φ') deux espaces de probabilités non commutatifs, la forme linéaire $\varphi \otimes \varphi'$ définie sur le produit tensoriel algébrique de A et A' est positive. En lui appliquant la construction GNS on obtient un espace de probabilités non commutatif $(A \otimes A', \varphi \otimes \varphi')$. Si A et A' sont des facteurs de type II_1, alors leur produit tensoriel est encore un facteur de type II_1. Un facteur M, de type II_1, est dit premier s'il n'existe pas d'isomorphisme $M \sim M_1 \otimes M_2$ où M_1 et M_2 sont des facteurs de type II_1. Le facteur hyperfini R est isomorphe à $R \otimes R$, il n'est pas premier. Le problème de trouver des facteurs premiers remonte à Popa [P], qui avait donné un exemple dans le cas non séparable.

Liming Ge démontre dans [G2], en utilisant les techniques d'entropie libre, que les facteurs de groupes libres sont premiers. Le point crucial de la démonstration consiste à prouver que si un facteur A, de type II_1, est engendré par $(X_1, \ldots, X_d)$ et n'est pas premier, alors pour tout $\omega > 0$ on peut trouver deux sous-facteurs hyperfinis R_1 et R_2 de A qui commutent, des projections orthogonales $P_1, \ldots, P_p$ de trace $1/2$, qui commutent avec R_1, d'autres projections orthogonales $Q_1, \ldots, Q_q$ également de trace $1/2$, qui commutent avec R_2, et des polynômes non commutatifs $(V_j)_{j=1,\ldots,d}$ tels que

$$|X_j - V_j(P_1, \ldots, P_p, Q_1, \ldots, Q_q)|_2 < \omega.$$

Cette propriété permet de majorer l'entropie libre des X_i par

$$\chi(X_1, \ldots, X_d) \leqslant (d-1) \log \omega + C_2.$$

Le résultat de Liming Ge a été généralisé par Ştefan [St1], qui montre que tout sous-facteur d'indice fini d'un facteur de groupe libre est premier.

Les techniques d'entropie libre ne permettent toutefois pas de répondre à la question suivante : $L(F_2) \otimes L(F_2)$ est-il isomorphe à $L(F_2) \otimes L(F_2) \otimes L(F_2)$?

Soit (A, φ) un espace de probabilités non commutatif, l'algèbre A agit à droite et à gauche sur l'espace $L^2(A, \varphi)$ et ces deux actions commutent. Une sous-algèbre abélienne maximale B dans A est dite simple (ou de multiplicité 1) s'il existe un vecteur $\xi \in L^2(A, \varphi)$ tel que $B\xi B$ est dense dans $L^2(A, \varphi)$. Liming Ge montre dans [G1] que les facteurs de groupes libres ne possèdent pas de sous-algèbre maximale simple. Pour cela il montre d'abord que si l'espace de probabilités non commutatif (A, φ) est engendré par les d variables $(X_1, \ldots, X_d)$ et contient une sous-algèbre abélienne maximale simple, alors il existe, pour tout ω, un opérateur autoadjoint H dans A, des projections orthogonales $P_1, \ldots, P_k$ de trace $\tau(P_i) = 1/k$ vérifiant $\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$, et des nombres complexes $\lambda_{r,s}^{(j)}$ tels que

$$|X_j - \sum_{r,s} \lambda_{r,s}^{(j)} P_r H P_s|_2 < \omega.$$

Autrement dit, les X_j peuvent être reconstruits, à ω près, à partir d'un seul opérateur H, et d'une algèbre $M_k(\mathbb{C})$ (engendrée par les P_i). Cette condition peut se traduire sur les états matriciels appartenant à $\Gamma_{X_1,\ldots,X_d,N,k,\varepsilon}$ et entraîne que leur entropie libre est majorée par $C + (d-2)\log \omega$. Si $d \geqslant 3$ on voit donc que $\chi(X_1, \ldots, X_d) = -\infty$, ce qui règle le cas des facteurs $L(F_n)$ pour $n \geqslant 3$. Pour le cas de $L(F_2)$ on utilise l'isomorphisme $L(F_2) \sim L(F_5) \otimes M_2(\mathbb{C})$ pour conclure.

Une sous-algèbre abélienne maximale est dite de multiplicté finie s'il existe un nombre fini de vecteurs $\xi_1, \ldots, \xi_l \in L^2(A, \varphi)$ tels que $B\xi_1 B + \cdots + B\xi_l B$ soit dense dans $L^2(A, \varphi)$. En utilisant des arguments semblables à ceux de Ge, Dykema [Dy2] a montré que les facteurs de groupes libres n'ont pas de sous-algèbre abélienne maximale de multiplicité finie. Il a d'autre part établi qu'ils ne satisfont pas la propriété C de Popa.

Finalement un résultat très général dans cette direction est celui de Ştefan [St2] qui montre que, dans un facteur de groupe libre $L(F_n)$, on ne peut pas trouver un sous-ensemble fini Z formé de p éléments auto-adjoints, et des facteurs non premiers $N_1, \ldots, N_f$ tels que $\sum_t \sum_{j_1,\ldots,j_{t+1}} N_{j_1} Z N_{j_2} Z \ldots N_{j_t} Z N_{j_{t+1}}$ soit dense dans $L^2(A, \varphi)$, dès que $n \geqslant p + 2f + 2$. Le même énoncé reste valable en remplaçant les facteurs non premiers N_j par des sous-algèbres abéliennes.

Signalons aussi que Shlyakhtenko [Sh2] a utilisé les résultats des numéros 6.2 et 6.3 pour montrer que les analogues libres des facteurs d'Araki-Woods (qui sont de type III_λ, $0 < \lambda < 1$) sont premiers et n'ont pas de sous-algèbre de Cartan.

7. QUELQUES PROPRIÉTÉS DE L'ENTROPIE LIBRE

L'entropie libre jouit de nombreuses propriétés qu'il sera sans doute nécessaire d'approfondir pour obtenir de nouvelles applications aux algèbres d'opérateurs. Jusqu'à présent, nous avons rencontré la propriété de sous-additivité au numéro 5.3, qui devient l'additivité dans le cas de variables libres. Les propriétés suivantes sont des analogues de propriétés bien connues de l'entropie classique.

7.1. Semi-continuité

Si une suite de d-uplets $(X_1^{(k)}, \dots, X_d^{(k)})$ converge en distribution vers $(X_1, \dots, X_d)$ (ce qui signifie que les moments de $(X_1^{(k)}, \dots, X_d^{(k)})$ convergent simplement vers ceux de $(X_1, \dots, X_d)$), alors

$$\limsup_{k\to\infty} \chi(X_1^{(k)}, \dots, X_d^{(k)}) \leqslant \chi(X_1, \dots, X_d).$$

7.2. Changement de variable

Soient

$$F_j = \sum_k \sum_{i_1,\dots,i_k} c_{i_1,\dots,i_k} t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_k}$$

d séries entières en d indéterminées non commutatives $t_1, \dots, t_d$. On a une formule de changement de variables

$$\chi(F_1(X_1), \dots, F_d(X_d)) = \chi(X_1, \dots, X_d) + \log |\det| DF(X_1, \dots, X_d),$$

où DF est un jacobien non commutatif et $|\det|$ est son déterminant de Kadison-Fuglede, cf. [V3]. Dans le cas où $F = (F_1, \dots, F_d)$ est une application linéaire, on a simplement $|\det| DF = |\det(F)|$. En particulier, si les X_i sont linéairement dépendants, leur entropie libre vaut $-\infty$.

7.3. Maximisation de l'entropie

Le rôle des variables gaussiennes est tenu, en probabilités libres, par les systèmes semi-circulaires. Un système semi-circulaire est une famille de variables libres, chacune ayant la loi du demi-cercle de densité $\frac{1}{4\pi}\sqrt{4-x^2}\,dx$ sur l'intervalle $[-2,+2]$. Comme pour les variables gaussiennes, les systèmes semi-circulaires maximisent l'entropie, à variance fixée. Plus précisément, soient $(X_1, \dots, X_d)$ des variables centrées telles que $\varphi(X_i^2) = 1$, et $(S_1, \dots, S_d)$ un système semi-circulaire alors

$$\chi(X_1, \dots, X_d) \leqslant \chi(S_1, \dots, S_d).$$

Il y a égalité si et seulement si $(X_1, \dots, X_d)$ est un système semi-circulaire [V5]. La formule de changement de variable vue au numéro précédent, dans le cas linéaire, permet de traiter le cas où la matrice de covariance des X_i est arbitraire.

Finalement certaines inégalités valables pour l'entropie classique ont des analogues libres [BV], [V6].

8. LA DIMENSION LIBRE

8.1. Définition

On a vu au numéro 6 que l'on utilise l'entropie libre en montrant que certains d-uplets de variables ont une entropie infinie. On peut introduire une quantité, appelée dimension libre par Voiculescu, qui permet de distinguer entre eux certains d-uplets ayant une entropie infinie. Pour cela on effectue une régularisation des variables par un système semi-circulaire, puis on évalue la croissance de l'entropie en fonction de la variance du système semi-circulaire. Plus précisément, soient $(X_1,\dots,X_d)$ un d-uplet de variables non commutatives et $(S_1,\dots,S_d)$ un système semi-circulaire, libre avec $(X_1,\dots,X_d)$; on définit

$$\delta(X_1,\dots,X_d) = d + \limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\chi(X_1+\varepsilon S_1,\dots,X_d+\varepsilon S_d)}{\log \varepsilon^{-1}}.$$

Les principales propriétés de cette dimension libre sont les suivantes.

1) $\delta(X_1,\dots,X_d)\leqslant d$.

2) Si $\chi(X_1,\dots,X_d) > -\infty$ alors $\delta(X_1,\dots,X_d) = d$.

3) Si X est une variable de loi μ, alors $\delta(X)=\sum_t \mu(\{t\})^2$.

4) $\delta(X_1,\dots,X_d)\leqslant \delta(X_1,\dots,X_r)+\delta(X_{r+1},\dots,X_d)$ et si $X_1,\dots,X_d$ forment une famille libre, alors

$$\delta(X_1,\dots,X_d) = \delta(X_1)+\cdots+\delta(X_d)$$

Les propriétés 3) et 4) assurent que la notion est non triviale, et la propriété 2) montre que $L(F_n)$ possède un système de n générateurs de dimension libre n.

8.2. Le problème de l'isomorphisme

On ne sait pas si les facteurs de groupes libres sont isomorphes ou non. J'ai mentionné dans l'introduction l'alternative de Rădulescu : soit ces facteurs sont deux à deux non isomorphes, soit ils sont tous isomorphes. Si ces facteurs sont isomorphes alors, étant données $(X_1,\dots,X_n)$ des variables libres d'entropie finie qui engendrent donc un facteur isomorphe à $L(F_n)$, pour tout $m>n$, il existe $(Y_1,\dots,Y_m)$, des variables libres d'entropie finie, qui engendrent le même facteur. Par exemple, on peut prendre des systèmes semi-circulaires pour les X_i et les Y_i. Les Y_i sont des « fonctions mesurables non commutatives » des X_i. La notion de dimension libre permet de montrer que ces fonctions mesurables non commutatives ne peuvent pas être trop régulières.

THÉORÈME 8.1 ([V3]). — *Soient $(X_1,\dots,X_n)$ et $(Y_1,\dots,Y_m)$ deux familles de variables aléatoires, chacune engendrant l'espace de probabilités non commutatif (A,φ). Supposons qu'il existe des séries entières non commutatives $F_1,\dots,F_m$ en n variables, telles que $Y_j=F_j(X_1,\dots,X_n)$, et que les Y_i forment une famille libre d'entropie finie alors*

$$\delta(X_1,\dots,X_n)\geqslant m.$$

En particulier on a $n\geqslant m$.

En fait la notion de dimension libre permettrait de résoudre le problème de l'isomorphisme des facteurs de groupes libres (en montrant qu'ils ne sont pas isomorphes entre eux), si l'on parvenait à établir la propriété de semi-continuité suivante : pour toute suite $(X_1^{(k)},\dots,X_d^{(k)})_{k\geqslant 0}$ telle que $X_j^{(k)} \to_{k\to\infty} X_j$ pour la topologie forte des opérateurs, alors

$$\liminf_{k\to\infty}\delta(X_1^{(k)},\dots,X_d^{(k)}) \geqslant \delta(X_1,\dots,X_d).$$

Il est facile en utilisant la propriété 3) du numéro précédent de vérifier cette semi-continuité dans le cas d'une variable, i.e.

$$\liminf_{k\to\infty}\delta(X^{(k)}) \geqslant \delta(X).$$

Dans le cas de plusieurs variables, on se heurte à la difficulté suivante : la dimension libre ne dépend que des moments des X_i, mais si, dans la propriété de semi-continuité, on remplace la convergence forte par la convergence des moments, alors il est facile de trouver des contre-exemples (prendre par exemple pour $(X_1,\dots,X_n)$ un système semi-circulaire, et des approximations par des matrices de taille finie).

Une légère modification de la notion de dimension libre (qui, dans tous les exemples où on sait la calculer, coïncide avec la notion ci-dessus), a permis à Voiculescu [V4] de donner une version renforcée de certains résultats du numéro 6. Ainsi en notant δ_0 cette dimension libre modifiée, il montre que si l'algèbre de von Neumann engendrée par $(X_1,\dots,X_d)$ admet une SAHD régulière, ou bien si elle a la propriété Γ, alors on a $\delta_0(X_1,\dots,X_d)\leqslant 1$.

La notion de dimension libre possède des traits communs, encore loin d'être élucidés, avec une autre notion de dimension, introduite par Dykema [Dy1], ainsi qu'avec la notion de coût d'une relation d'équivalence, due à Gaboriau [Ga], voir également [Sh1].

8.3. Groupes ayant la propriété T de Kazhdan

Les groupes ayant la propriété T de Kazhdan ont des propriétés de rigidité qui suggèrent que les facteurs associés sont très éloignés des facteurs de groupes libres. Une tentative de quantifier cet éloignement au moyen de la dimension libre a été faite par Voiculescu [V8], qui a montré que certains systèmes de générateurs de $SL(n,\mathbb{Z})$ ont une dimension libre $\leqslant 1$. Ce résultat a été généralisé par Liming Ge et Junhao Shen [GS] qui ont montré que dans une grande classe d'algèbres de von Neumann, qui inclut à la fois les facteurs non premiers (au sens du numéro 6.3) et beaucoup de facteurs associés à des groupes ayant la propriété T, tout système fini de générateurs a une dimension libre $\leqslant 1$.

THÉORÈME 8.2 ([GS]). — *Soit (A,φ) un espace de probabilités non commutatif, engendré par r sous-algèbres $B_1,\dots,B_r$, tel que, pour tout $1\leqslant j\leqslant r$, il existe une sous-algèbre diffuse de B_j qui commute avec B_{j+1} (en identifiant B_{r+1} et B_1). Pour tout système fini de générateurs auto-adjoints de A on a*

$$\delta_0(X_1,\dots,X_n)\leqslant 1.$$

Si $A = A_1 \otimes A_2$, alors A_1 commute avec A_2 dans A et le théorème s'applique. On retrouve ainsi le résultat du numéro 6.3.

Le groupe $SL(n, \mathbb{Z})$ est engendré par les éléments $I + e_{ij}$, $i \neq j$. Il est possible, pour $n \geqslant 3$, de ranger ces générateurs dans une suite dont les éléments consécutifs commutent. En prenant pour B_j les algèbres de von Neumann engendrées par ces générateurs, le théorème s'applique encore (lorsque n est impair $L(SL(n, \mathbb{Z}))$ est un facteur). Rappelons que le groupe $PSL(2, \mathbb{Z})$ ne vérifie pas la propriété de Kazhdan, et que le facteur qu'il engendre est isomorphe à un facteur de groupe libre à « 7/6 générateurs » (cf. [Sk]).

9. CONCLUSION

La définition à la Boltzmann de l'entropie libre présente des difficultés, dues à la complexité des ensembles de micro-états matriciels, dont il n'est pas aisé d'estimer le volume. Cela a conduit Voiculescu [V6] à introduire une autre notion d'entropie libre, plus intrinsèque, qui passe par la définition d'une information de Fisher libre. Cette nouvelle entropie libre possède de nombreuses propriétés en commun avec la première, mais se comporte mieux sous certains aspects (cf. [NSS1], [NSS2], [Sh3]). Il serait donc important d'arriver à relier les deux notions. On a des raisons probabilistes de penser qu'une telle relation existe mais on ne dispose pas encore de résultats définitifs ([BS], [CDG]).

RÉFÉRENCES

[BG] G. Ben Arous, A. Guionnet – *Large deviations for Wigner's law and Voiculescu's non-commutative entropy.* Probab. Theory Related Fields 108, no. 4 : 517–542, 1997.

[BS] P. Biane, R. Speicher – *Free diffusions, free entropy and free Fisher information.* Ann. Inst. H. Poincaré, Prob. Stat., **37** no. 5, 581–606, 2001.

[BV] P. Biane, D. Voiculescu – *A free probability analogue of the Wasserstein metric on the trace-state space.* Geom. and Funct. Anal., **11** :1125–1138, 2001.

[C1] A. Connes – *Classification of injective factors.* Ann. Math. **104** : 73–115, 1976.

[C2] A. Connes – *A factor of type II_1 with countable fundamental group.* J. Op. Theory **4** : 151–153, 1980.

[C3] A. Connes – *Classification des facteurs.* Proc. Symp. Pure Math. *Operator algebras and applications*, **Vol 38**, Part 2 :43–110, 1982.

[CDG] T. Cabanal-Duvillard, A. Guionnet – *Large deviations upper bounds and non commutative entropies for some matrices ensembles.* Ann. Prob, à paraître.

[Di] J. DIXMIER – *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien.* 2ème édition, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[Dy1] K.J. DYKEMA – *Free products of hyperfinite von Neumann algebras and free dimension.* Duke Math. J. **69** no. 1 : 97–119, 1993.

[Dy2] K.J. DYKEMA – *Two applications of free entropy.* Math. Ann. **308**, no. 3 : 547–558, 1997.

[DS] J.D. DEUSCHEL, D.W. STROOCK – *Large deviations.* Pure and Applied Mathematics, **137**, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1989.

[DZ] A. DEMBO, O. ZEITOUNI – *Large deviations techniques and applications.* Second edition. Applications of Mathematics, **38**, Springer-Verlag, New York, 1998.

[FM] J. FELDMAN, C.C. MOORE – *Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. II.* Trans. Amer. Math. Soc. **234**, no. 2 : 325–359, 1977.

[Ga] D. GABORIAU – *Coût des relations d'équivalence et des groupes.* Invent. Math. **139**, no. 1 : 41–98,2000.

[G1] LIMING GE – *Applications of free entropy to finite von Neumann algebras I.* Amer. J. Math. **119** :467–485, 1997.

[G2] LIMING GE – *Applications of free entropy to finite von Neumann algebras II.* Ann. Math. **147** :143–157, 1998.

[GN] V. YA. GOLODETS, N. I. NESSONOV – *T-property and nonisomorphic full factors of types* II *and* III. J. Funct. Anal. **70** no. 1 : 80–89, 1987.

[GS] LIMING GE, JUNHAO SHEN – *Free entropy and property T factors.* Proc. Nat. Acad. Sc. **97** no. 18 : 9881–9885, 2000.

[McD] D. MC DUFF – *Uncountably many II_1 factors*, Ann. Math. **90** :372–378, 1969.

[Me] M.L. MEHTA – *Random matrices.* Second edition. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1991.

[MvN] F. J. MURRAY, J. VON NEUMANN – *On rings of operators IV.* Ann. Math. **44** :716–708, 1943.

[vN1] J. VON NEUMANN – *On rings of operators III.* Ann. Math. **41** :94–161, 1940.

[vN2] J. VON NEUMANN – *On rings of operators. Reduction theory.* Ann. Math. **50** :401–485, 1949.

[NSS1] A. NICA, D. SHLYAKHTENKO, R. SPEICHER – *Maximality of the microstates free entropy for R-diagonal elements.* Pacific J. Math. **187** no. 2, 333–347, 1999.

[NSS2] A. NICA, D. SHLYAKHTENKO, R. SPEICHER – *Some minimization problems for the free analogue of the Fisher information.* Adv. Math. **141** no. 2, 282–321, 1999.

[P] S. POPA – *Orthogonal pairs of $*$-subalgebras in finite von Neumann algebras.* J. Operator theory **9**, 253–268, 1983.

[PV] L. PASTUR, V. VASILCHUK – *On the law of addition of random matrices.* Comm. Math. Phys. **214** : 249–286, 2000.

[R] F. RĂDULESCU – *Random matrices, amalgamated free products and subfactors of the von Neumann algebra of a free group, of noninteger index.* Invent. Math. **115** no. 2, 347–389, 1994.

[Sh1] D. SHLYAKHTENKO – *Prime type III factors.* Proc. Nat. Acad. Sc. **97** no. 23 : 12439–12441, 2000.

[Sh2] D. SHLYAKHTENKO – *Microstates free entropy and cost of equivalence relations.* math.OA/9912224.

[Sh3] D. SHLYAKHTENKO – *Free entropy with respect to a completely positive map.* Amer. J. Math. **122** no. 1, 45–81, 2000.

[Sk] G. SKANDALIS – *Algèbres de von Neumann de groupes libres et probabilités non commutatives (d'après Voiculescu, etc.).* Séminaire Bourbaki, Exp. n° 764, Vol. 1992/93. Astérisque No. **216** (1993), 87–102.

[Sp1] R. SPEICHER – *Combinatorial theory of the free product with amalgamation and operator-valued free probability theory.* Mem. Amer. Math. Soc. **132** (1998), no. 627.

[Sp2] R. SPEICHER – *Free probability theory and non-crossing partitions.* Sém. Lothar. Combin. 39 (1997), Art. B39c, 38 pp. http ://www.mat.univie.ac.at/ slc/

[St1] M. ŞTEFAN – *The primality of subfactors of finite index in the interpolated free group factors.* Proc. Amer. Math. Soc. **126** no. 8 : 2299–2307, 1998.

[St2] M. ŞTEFAN – *The indecomposability of free group factors over nonprime subfactors and abelian subalgebras.* Preprint, 1999.

[Sz] S. SZAREK – *Nets of Grassmann manifold and orthogonal group.* Proceedings of Research Workshop on Banach space Theory, Iowa Coty, Iowa : 169–185, 1981.

[V1] D. VOICULESCU – *Symmetries of some reduced free product C^*-algebras.* Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory (Buşteni, 1983), Lecture Notes in Math., 1132 : 556–588, Springer, Berlin-New York, 1985.

[V2] D. VOICULESCU – *Limit laws for random matrices and free products.* Inv. Math. **104** :201–220, 1983.

[V3] D. VOICULESCU – *The analogue of entropy and of Fisher's information theory in free probability theory II.* Inv. Math. **118** :411–440, 1994.

[V4] D. VOICULESCU – *The analogue of entropy and of Fisher's information theory in free probability theory III : the absence of Cartan subalgebra.* Geom. And Funct. Anal. **Vol 6** No 1 :411–440, 1996.

[V5] D. VOICULESCU – *The analogue of entropy and of Fisher's information theory in free probability theory IV : maximum entropy and freeness.* in *Free probability*, D. Voiculescu, ed., Fields Inst. Communications, **Vol 12** :293–302, AMS Providence, 1997.

[V6] D. VOICULESCU – *The analogue of entropy and of Fisher's information theory in free probability theory V : non commutative Hilbert transform.* Inv. Math. **132** :182–227, 1998.

[V7] D. VOICULESCU – *A strengthened asymptotic freeness result for random matrices with applications to free entropy.* Internat. Math. Res. Notices no. 1, 41–63,1998.

[V8] D. VOICULESCU – *Free entropy dimension* $\leqslant 1$ *for some generators of property* T *factors of type* II_1. J. Reine Angew. Math. **514** 113–118, 1999.

Philippe BIANE

CNRS, D.M.A.
École normale supérieure
45 rue d'Ulm
F-75230 Paris Cedex 05
E-mail : `Philippe.Biane@ens.fr`