Astérisque

PETER LITTELMANN

Bases canoniques et applications

Astérisque, tome 252 (1998), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 847, p. 287-306
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1997-1998__40__287_0>

Séminaire BOURBAKI
50ème année, 1997-98, n° 847

Juin 1998

BASES CANONIQUES ET APPLICATIONS

par **Peter LITTELMANN**

0. INTRODUCTION

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe semi-simple, et $U(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante. Il est naturel de chercher à construire une base explicite de chaque $\mathfrak{g}$-module V de dimension finie. Fixons une décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, où $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ une sous-algèbre de Borel. Notons $V(\lambda)$ le module simple de plus haut poids λ, et fixons aussi un vecteur v_λ de plus haut poids λ. La première étape consiste à construire une base de $U(\mathfrak{n}^-)$. Une méthode classique est fournie par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, mais la base obtenue dépend à la fois du choix d'une base de $\mathfrak{n}^-$ et d'un ordre sur cette base. En 1990, M. Kashiwara et G. Lusztig ont donné (indépendamment) une construction d'une base canonique $\mathbb{B}$ de $U(\mathfrak{n}^-)$ qui satisfait en outre l'importante propriété de compatibilité suivante. Pour tout λ, il est évident que $\mathbb{B}.v_\lambda = \{bv_\lambda \mid b \in \mathbb{B}\}$ engendre $V(\lambda)$; en fait un théorème de Kashiwara et Lusztig affirme que l'ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{B}.v_\lambda$, noté ${}_\lambda\mathbb{B}$, en est une base. On l'appelle base canonique de $V(\lambda)$ (ou, plus précisement, du couple $(V(\lambda), v_\lambda)$).

Nous présenterons deux développements récents de la théorie des bases canoniques. Le premier est la notion, due à Lusztig, de totale positivité d'un élément d'un groupe algébrique semi-simple (déployé). Le second est l'apparition des polynômes de Kazhdan-Lusztig comme coefficients de matrices de passages entre les bases canoniques et d'autres bases naturelles.

Rappelons qu'une matrice carrée réelle $g \in GL_n(\mathbb{R})$ est dite totalement positive si ses mineurs sont tous > 0. Cette propriété peut être reformulée en termes de représentations : soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base naturelle de $\mathbb{R}^n$, soit $\mathbb{B}$ la base correspondante de l'algèbre extérieure $\Lambda\mathbb{R}^n$, et soit $\Lambda g : \Lambda\mathbb{R}^n \to \Lambda\mathbb{R}^n$ l'application linéaire induite. Les coefficients de la matrice de Λg dans la base $\mathbb{B}$ sont les mineurs de g ; ainsi $g \in GL_n(\mathbb{R})$ est une matrice totalement positive si et seulement si la matrice de Λg dans la base $\mathbb{B}$

est une matrice à coefficients > 0. Par analogie, G. Lusztig caractérise (pour G de type ADE) les éléments totalement positifs par la positivité de leurs coefficients dans la base canonique des modules simples.

Pour vérifier qu'une matrice g est totalement positive, il n'est pas nécessaire de calculer tous ses mineurs (voir section 1). Dans le cas général, A. Berenstein, S. Fomin et A. Zelevinsky ([BFZ], [BZ], [FZ]) ont developpé une méthode pour déterminer un système minimal d'inégalités à vérifier pour qu'un élément soit totalement positif. En particulier, pour $G = GL_n(\mathbb{R})$, ils retrouvent les résultats classiques de M. Fekete et C. Cryer (sections 1 et 4).

L'étude des matrices de passage de la base canonique à d'autres bases "naturelles" a permis d'obtenir certains polynômes de Kazhdan-Lusztig, ainsi que des matrices de décomposition pour les représentations des algèbres de Hecke aux racines de l'unité (sur les travaux de S. Ariki, I. Grojnowski, A. Lascoux, B. Leclerc et J. Y. Thibon, voir l'exposé de M. Geck [Ge]). Considérons la représentation standard du groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ sur le $\mathbb{Q}(q)$-espace vectoriel V de dimension n, munie de la base canonique $\mathbb{B}_n := \{e_1, \ldots, e_n\}$. Le produit tensoriel $V^{\otimes m}$ est un $U_q(\mathfrak{sl}_n)$-module, muni de deux bases : la base "naturelle" donnée par les produits tensoriels des éléments de $\mathbb{B}_n$, mais aussi la base canonique définie par Lusztig pour le produit tensoriel de modules simples. I. Frenkel, M. Khovanov et A. Kirillov ont montré que certains polynômes de Kazhdan-Lusztig apparaissent naturellement comme coefficients de la matrice de passage entre ces deux bases.

Je voudrais remercier Stéphanie Cupit et Olivier Mathieu de l'aide qu'ils m'ont apportée au cours de la rédaction de ces notes.

1. LES MATRICES TOTALEMENT POSITIVES

Dans cette section nous rappelons la théorie classique des matrices totalement positives dans le cas du groupe $GL_n(\mathbb{R})$ (pour un travail de synthèse voir [A]). Soit $g = (g_{i,j}) \in GL_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée réelle d'ordre n. Notons $I(r,n)$ l'ensemble des suites de $\{1, \ldots, n\}$, strictement croissantes, de longueur r :

$$I(r,n) := \{(i_1, \ldots, i_r) \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n\}.$$

Pour $\underline{i}, \underline{j} \in I(r,n)$, on note $g_{\underline{i},\underline{j}}$ la matrice carrée d'ordre r:

$$g_{\underline{i},\underline{j}} := (g_{i_k,j_l})_{1 \leq k,l \leq r},$$

et $\Delta_{\underline{i},\underline{j}}(g)$ le mineur de la matrice g, $\Delta_{\underline{i},\underline{j}}(g) = \det(g_{\underline{i},\underline{j}})$.

Les mineurs $\Delta_{\underline{i},\underline{j}}$ apparaissent naturellement comme coefficients matriciels dans la théorie des représentations de $GL_n(\mathbb{R})$. Soit $g \in GL_n(\mathbb{R})$, et soient $v_1, \ldots, v_r$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. L'application naturelle:

$$\Lambda^r g : v_1 \wedge \ldots \wedge v_r \mapsto g v_1 \wedge \ldots \wedge g v_r$$

induit un automorphisme de $\Lambda^r \mathbb{R}^n$. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base naturelle de $\mathbb{R}^n$, et $\mathbb{B}_r = \{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n\}$ la base associée de $\Lambda^r \mathbb{R}^n$. La matrice de $\Lambda^r g$ dans cette base est la matrice dont les coefficients sont les mineurs de la matrice g.

DÉFINITION 1 (I. Schoenberg [Sc], F. Gantmacher et M. Krein [GK]).— a) *Une matrice réelle $g \in GL_n(\mathbb{R})$ est dite* totalement non-négative *si $\Delta_{\underline{i},\underline{j}}(g) \geq 0$, $\forall \underline{i}, \underline{j} \in I(r,n)$, $r = 1, \ldots, n$.*

b) *Une matrice réelle $g \in GL_n(\mathbb{R})$ est dite* totalement positive *si $\Delta_{\underline{i},\underline{j}}(g) > 0$, $\forall \underline{i}, \underline{j} \in I(r,n)$, $r = 1, \ldots, n$.*

Une notion intermédiaire est celle de matrice oscillatoire : une matrice complètement non-négative g est dite oscillatoire, s'il existe un nombre naturel m tel que g^m soit une matrice totalement positive. F. Gantmacher et M. Krein [GK] ont observé que les valeurs propres d'une matrice oscillatoire sont toutes positives et simples.

Le produit de deux matrices carrées à coefficients ≥ 0 (à coefficients > 0) est une matrice à coefficients ≥ 0 (à coefficients > 0). Grâce à l'interprétation des mineurs comme coefficients d'une matrice, on voit immédiatement que les ensembles :

$$\begin{aligned} & G_{\geq 0} := \{g \in GL_n(\mathbb{R}) \mid g \text{ totalement non-négative}\} \\ \text{et} \quad & G_{>0} := \{g \in GL_n(\mathbb{R}) \mid g \text{ totalement positive}\} \end{aligned}$$

sont des sous-semi-groupes du groupe $GL_n(\mathbb{R})$. M. Fekete, puis C. Cryer, M. Gasca et J. M. Peña ont montré qu'il n'est pas nécessaire de considérer tous les mineurs. On dit que $\Delta_{\underline{i},\underline{j}}$ est un mineur solide si les suites $\underline{i}, \underline{j} \in I(r,n)$ sont des suites consécutives : $\underline{i} = (i, i+1, \ldots, i+r-1)$, $\underline{j} = (j, j+1, \ldots, j+r-1)$.

THÉORÈME 1 ([F], [Cr], [GP]).— *Pour qu'une matrice carrée réelle g soit totalement positive, il suffit que pour tous mineurs solides tels que $1 \in \{\underline{i} \cup \underline{j}\}$ on ait $\Delta_{\underline{i},\underline{j}}(g) > 0$.*

Notons qu'il y a seulement $n^2 = \dim GL_n(\mathbb{R})$ mineurs de ce type, tandis que le nombre total des mineurs est $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} - 1 \sim 4^n/\sqrt{\pi n}$.

Lors de la démonstration du théorème, on obtient une description de $G_{\geq 0}$ en termes de générateurs. Pour $1 \leq i \leq n-1$, notons $x_i(s)$, $s \in \mathbb{R}$, la matrice carrée suivante : $x_i(s) = (x_{k,l}) \in GL_n(\mathbb{R})$, où $x_{k,k} = 1$ pour $1 \leq k \leq n$, $x_{i,i+1} = s$, et $x_{k,l} = 0$, $\forall\ (k,l) \neq (i,i+1)$, $k \neq l$. Donc $x_i(s)$ est une matrice de la forme

$$x_i(s) := \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & s & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons $y_i(s) := x_i(s)^t$ la matrice transposée de $x_i(s)$. Soit $T_{>0}$ le sous-groupe des matrices diagonales de $GL_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs sur la diagonale.

THÉORÈME 2 (C. Loewner [Lo], A. Whitney [W]).— *$G_{\geq 0}$ est le sous-semi-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ engendré par $T_{>0}$ et les $x_i(s), y_i(s)$, $1 \leq i \leq n-1$ et $s \geq 0$.*

2. LA BASE CANONIQUE

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j \leq n}$ la matrice de Cartan d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ simple complexe. Rappelons que $\mathfrak{g}$ (ou le groupe algébrique G complexe, simple et simplement connexe) est dite simplement lacée si sa matrice de Cartan $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique (autrement dit, si $\mathfrak{g}$ est de type ADE). Dans ce cas, on a $a_{i,j} = 0$ ou -1 pour $i \neq j$. Pour simplifier, dans la suite de cet exposé, nous ne considérerons que le cas simplement lacé. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ associée à une telle matrice est engendrée par $3n$ éléments X_i, Y_i et H_i ($1 \leq i \leq n$), et $\mathfrak{g}$ est définie par les relations: 1) $[H_i, H_j] = 0$, 2) $[H_i, X_j] = a_{i,j}X_j$, $[H_i, Y_j] = -a_{i,j}Y_j$, $[X_i, Y_j] = \delta_{i,j}H_i$, et les relations de Serre : 3) $[X_i, X_j] = 0$ et $[Y_i, Y_j] = 0$ si $a_{i,j} = 0$, et $ad^2(X_i)(X_j) = ad^2(Y_i)(Y_j) = 0$ si $a_{i,j} = -1$.

Dans cette section, nous rappelons brièvement la construction et quelques propriétés importantes de la base canonique. Pour plus de détails, voir l'exposé de O. Mathieu [Ma] ; voir [Lu1], [Lu7] et [Ka1], [Ka2] pour une étude approfondie.

Soit $U_q(\mathfrak{g})$ le q-analogue de l'algèbre enveloppante. Rappelons que $U_q(\mathfrak{g})$ est la $\mathbb{Q}(q)$-algèbre engendrée par les $4n$-symboles K_i, K_i^{-1}, F_i, E_i, soumis aux relations $K_iK_j = K_jK_i$, $K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1$, $K_iE_jK_i^{-1} = q^{a_{i,j}}E_j$, $K_iF_jK_i^{-1} = q^{-a_{i,j}}F_j$, $[E_i, F_j] = \delta_{i,j}(K_i - K_i^{-1})/(q - q^{-1})$, ainsi qu'au q-analogue des relations de Serre.

Notons U_q^- la sous-algèbre engendrée par les F_i, et soit $U_{q,\mathbb{Q}}^-$ la forme (restreinte) de Lusztig de U_q^- définie sur $\mathbb{Q}[q,q^{-1}]$. Rappelons brièvement la construction élémentaire algébrique de G. Lusztig. Soit W le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$, et notons w_0 l'élément le plus grand pour l'ordre de Bruhat. Pour chaque décomposition réduite de w_0, G. Lusztig construit une base B de $U_{q,\mathbb{Q}}^-$. Une telle base peut être considérée comme q-analogue d'une base de type Poincaré-Birkhoff-Witt. La base B dépend du choix de la décomposition réduite de w_0, mais le $\mathbb{Q}[q^{-1}]$-réseau L engendré par B n'en dépend pas. De plus, l'image B_0 de B dans $L/q^{-1}L$ est une base de $L/q^{-1}L$, indépendante du choix de la décomposition.

Soit $^-$ le $\mathbb{Q}$-automorphisme de $U_q(\mathfrak{g})$ défini par $\overline{q} = q^{-1}$, $\overline{F_i} = F_i$, $\overline{E_i} = E_i$ et $\overline{K_i} = K_i^{-1}$. Lusztig a montré que l'application $L \cap \overline{L} \to L/q^{-1}L$ est un isomorphisme de $\mathbb{Q}$-modules. L'image réciproque $\mathbb{B}$ de B_0 par cet isomorphisme est la base canonique de Lusztig de $U_{q,\mathbb{Q}}^-$.

En fait, la positivité de certains coefficients (voir ci-dessous) ne peut être obtenue qu'à partir d'une autre construction de la base canonique, aussi due à Lusztig ; cette positivité repose sur des résultats très profonds de géométrie algébrique (théorème de décomposition, conjectures de Weil) ([BBD]).

Soit P le réseau des poids de $\mathfrak{g}$ et P^+ l'ensemble des poids dominants. Pour tout $\lambda \in P^+$, on note $V_q(\lambda)$ le module simple de $U_q(\mathfrak{g})$ de plus haut poids λ. Fixons un vecteur de plus haut poids $v_\lambda \in V_q(\lambda)$.

Soit $\mathbb{B}$ la base canonique de $U_{q,\mathbb{Q}}^-$. Nous donnons ci-dessous une liste des propriétés de $\mathbb{B}$ dont on aura besoin plus tard. Nous nous étions restreint au cas $\mathfrak{g}$ simplement lacée ; mais, à l'exception des propriétés de positivité, les propriétés suivantes sont valables pour la base canonique d'une algèbre de Kac-Moody symétrisable quelconque :

THÉORÈME 1 .— a) *$\mathbb{B}$ est une base de $U_{q,\mathbb{Q}}^-$ comme $\mathbb{Q}[q,q^{-1}]$-module et une base de U_q^- comme $\mathbb{Q}(q)$-espace vectoriel.*

b) *Soit $(V_q(\lambda), v_\lambda)$ comme ci-dessus. Décomposons $\mathbb{B}$ en $\mathbb{B} = \mathbb{B}^\lambda \sqcup \mathbb{B}_\lambda$, où $bv_\lambda = 0$ pour $b \in \mathbb{B}^\lambda$, et $bv_\lambda \neq 0$ pour $b \in \mathbb{B}_\lambda$. Alors, ${}_\lambda\mathbb{B} := \{bv_\lambda \mid b \in \mathbb{B}_\lambda\}$ est une base de $V_q(\lambda)$: on l'appelle base canonique de $(V_q(\lambda), v_\lambda)$.*

c) *Le produit de deux éléments de la base canonique est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{B}$ à coefficients dans $\mathbb{N}[q,q^{-1}]$.*

d) *Les coefficients des matrices des applications $E_i, F_i : V_q(\lambda) \to V_q(\lambda)$, écrites dans la base canonique, sont dans $\mathbb{N}[q,q^{-1}]$.*

Retournons au cas classique : soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simplement lacée et déployée, définie sur un corps k de caractéristique 0. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$ la décomposition triangulaire de Cartan. En spécialisant à $q = 1$, on obtient une base canonique $\mathbb{B}$ de $U_k(\mathfrak{n}^-)$ avec les mêmes propriétés que précédemment. On note $V(\lambda)$ un $U_k(\mathfrak{g})$-module simple de plus haut poids λ, et v_λ un vecteur de plus haut poids. Notons X_i, Y_i les images de E_i, F_i dans la spécialisation. On obtient:

THÉORÈME 1′.— a) *Soit* $(V(\lambda), v_\lambda)$ *comme ci-dessus. Décomposons* $\mathbb{B}$ *en* $\mathbb{B} = \mathbb{B}^\lambda \sqcup \mathbb{B}_\lambda$, *où* $bv_\lambda = 0$ *pour* $b \in \mathbb{B}^\lambda$, *et* $bv_\lambda \neq 0$ *pour* $b \in \mathbb{B}_\lambda$. *Alors,* ${}_\lambda\mathbb{B} := \{bv_\lambda \mid b \in \mathbb{B}_\lambda\}$ *est une base de* $V(\lambda)$ *: on l'appelle base canonique de* $(V(\lambda), v_\lambda)$.

b) *Les coefficients des matrices des applications* $X_i, Y_i : V(\lambda) \to V(\lambda)$, *écrites dans la base canonique, sont dans* $\mathbb{N}$.

3. LA DÉFINITION DE $G_{>0}$ D'APRÈS LUSZTIG

Pour généraliser la notion d'élément totalement non-négatif à d'autres groupes algébriques, Lusztig considère $G_{\geq 0}$ comme le sous-semi-groupe de G engendré par certains éléments “non-négatifs”. Grâce au théorème 1.2, pour le cas classique, cette définition est équivalente à la définition donnée à la section 1.

3.1. Épinglage

Pour un corps K de caractéristique 0, notons K^* le sous-groupe multiplicatif $K - \{0\}$. Soit $K_{>0} \subset K^*$ un sous-ensemble ayant les propriétés suivantes : $1 \in K_{>0}$, et si $a, b \in K_{>0}$, les éléments $a + b$, ab et $1/b$ sont aussi dans $K_{>0}$.

Exemple 1.— i) $K = \mathbb{R}$, $K_{>0} = \mathbb{R}_{>0} := \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$.

ii) $K = \mathbb{R}((t))$ et $K_{>0}$ est le sous-ensemble des séries formelles de la forme $f = a_s t^s + a_{s+1} t^{s+1} + \ldots$ telles que $a_s > 0$.

Soit G un groupe algébrique semi-simple, simplement connexe, défini et déployé sur K. Nous ne considérons que le cas où G est simplement lacé. Fixons un tore maximal T, déployé sur K, et deux sous-groupes de Borel opposés B^+ et B^- tels que $T \subset B^+, B^-$. On note P le groupe abélien des homomorphismes de groupes algébriques $T \to K^*$, et $\check{P}$ le groupe abélien des homomorphismes de groupes algébriques $K^* \to T$. Soit $\langle , \rangle : P \times \check{P} \to Z$ l'accouplement naturel défini par $x(y(s)) = s^{\langle x,y \rangle}$ pour $s \in K^*$. On note $K_{\geq 0} = K_{>0} \cup \{0\}$.

Si α est une racine simple, nous notons $\chi_\alpha \in \check{P}$ sa co-racine. Soit U^+ (respectivement U^-) le radical unipotent de B^+ (de B^-). Nous notons $U_\alpha \subset U^+$ et $U_{-\alpha} \subset U^-$

les sous-groupes unipotents associés à la racine simple α. On fixe des isomorphismes $x_\alpha : K \to U_\alpha$ et $y_\alpha : K \to U_{-\alpha}$ tels que les applications

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ & 1 \end{pmatrix} \mapsto x_\alpha(a), \begin{pmatrix} s & \\ & s^{-1} \end{pmatrix} \mapsto \chi_\alpha(s), \begin{pmatrix} 1 & \\ b & 1 \end{pmatrix} \mapsto y_\alpha(b)$$

définissent un homomorphisme $\phi_\alpha : SL_2(K) \to G$.

La donnée de $(T, B^+, B^-, (x_\alpha, y_\alpha))$, α décrit l'ensemble des racines simples, est un *épinglage* de G.

Exemple 2.— Soit $G = SL_3(\mathbb{R})$ et $\alpha = \epsilon_1 - \epsilon_2$, $\gamma = \epsilon_2 - \epsilon_3$. Les applications définies par

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ & 1 \end{pmatrix} \mapsto x_\alpha(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a' \\ & 1 \end{pmatrix} \mapsto x_\gamma(a') = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & a' \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ b & 1 \end{pmatrix} \mapsto y_\alpha(b) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ b & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ b' & 1 \end{pmatrix} \mapsto y_\gamma(b') = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & b' & 1 \end{pmatrix},$$

et $$\begin{pmatrix} s & \\ & s^{-1} \end{pmatrix} \mapsto \chi_\alpha(s) = \begin{pmatrix} s & & \\ & s^{-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s' & \\ & s'^{-1} \end{pmatrix} \mapsto \chi_\gamma(s') = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & s' & \\ & & s'^{-1} \end{pmatrix}$$

sont un épinglage de $SL_3(\mathbb{R})$.

On note $U^+_{\geq 0}$ le sous-semi-groupe de U^+ engendré par les éléments $x_\alpha(a)$, où $a \in K_{\geq 0}$ et α parcourt l'ensemble des racines simples. De façon similaire, on note $U^-_{\geq 0}$ le sous-semi-groupe de U^- engendré par les éléments $y_\alpha(a)$, où $a \in K_{\geq 0}$ et α parcourt l'ensemble des racines simples. Soit $T_{>0}$ le sous-semi-groupe de T engendré par les éléments $\chi(s)$, où $s \in K_{>0}$ et χ parcourt les éléments de $\check{P}$. Un calcul explicite montre :

Lemme 1.— *Soit α, γ deux racines simples.*

a) *Les $x_\alpha(a)$ et $y_\gamma(b)$, $a, b \in K$, commutent pour $\alpha \neq \gamma$. Pour $t \in T$ et $a \in K$, on a : $ty_\alpha(a) = y_\alpha(\alpha(t)a)t$ et $ty_\alpha(a) = x_\alpha(\alpha(t)^{-1}a)t$. Pour $s \neq 0$ et $ab + s^2 \neq 0$, on a : $y_\alpha(b)\chi_\alpha(s^{-1})x_\alpha(a) = x_\alpha(a')\chi_\alpha(s')y_\alpha(b')$, où $a' = a/(ab+s^2)$, $b' = b/(ab+s^2)$, et $s' = s/(ab+s^2)$.*

b) *Si $\gamma \neq \alpha$ sont des racines simples telles que $s_\alpha s_\gamma s_\alpha = s_\gamma s_\alpha s_\gamma$, on a pour $a + c \neq 0$: $x_\alpha(a)x_\gamma(b)x_\alpha(c) = x_\gamma(bc/(a+c))x_\alpha(a+c)x_\gamma(ab/(a+c))$.*

On en déduit facilement que $U^+_{\geq 0}T_{>0}U^-_{\geq 0} = U^-_{\geq 0}T_{>0}U^+_{\geq 0}$, et que cet ensemble est un sous-semi-groupe de G, on le note $G_{\geq 0}$. Ses éléments sont, par définition, les éléments *totalement non-négatifs* de G.

3.2. Le sous-semi-groupe des éléments totalement positifs

Pour $w \in W$, soit $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ une décomposition réduite où s_{i_j} dénote la réflexion associée à la racine simple α_{i_j}. On utilisera aussi la notation x_{i_j}, y_{i_j} au lieu de $x_{\alpha_{i_j}}, y_{\alpha_{i_j}}$. Considérons l'application

$$\Phi_w : K^r_{>0} \longrightarrow U^+_{\geq 0}, \quad (a_1, \dots, a_r) \mapsto x_{i_1}(a_1) \dots x_{i_1}(a_r).$$

PROPOSITION 1.— *Φ_w est une application injective dont l'image $U^+(w) = \operatorname{Im} \Phi_w$ est indépendante du choix de la décomposition réduite de w. En outre, $U^+_{\geq 0} = \bigsqcup_{w \in W} U^+(w)$ est la réunion disjointe des $U^+(w)$.*

La démonstration se fait par récurrence sur la longueur de w. On y utilise la décomposition de Bruhat et le lemme 1.

De même, on définit $U^-(w)$. Soit w_0 l'élément le plus grand dans W. En fait, on peut montrer que $U^-(w_0)T_{>0}U^+(w_0)$ est un sous-semi-groupe de $G_{\geq 0}$, on le note $G_{>0}$.

DÉFINITION 1.— *Les éléments* totalement positifs *de G sont les éléments de $G_{>0}$.*

Soit $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G (sur K). Soit X_i, Y_i, H_i un système de générateurs de $U(\mathfrak{g})$ tel que l'action de G sur $V(\lambda)$ est donnée par $x_i(a) = \exp(aX_i)$ et $y_i(a) = \exp(aY_i)$. Soit $\mathbb{B}$ la base canonique de $U(\mathfrak{n}^-)$ (théorème 2.1'). Fixons un vecteur v_λ de plus haut poids λ et soit ${}_\lambda\mathbb{B}$ la base canonique associée à $(V(\lambda), v_\lambda)$. La matrice d'une application linéaire $V(\lambda) \to V(\lambda)$ est toujours calculée dans la base canonique.

La démonstration de la proposition suivante est basée sur la positivité de l'action des X_i et Y_i (théorème 2.1').

PROPOSITION 2.— *Soit $g \in G_{\geq 0}$.*

a) *Les coefficients de la matrice de $g : V(\lambda) \to V(\lambda)$ sont dans $K_{\geq 0}$.*

b) *Le produit des coefficients diagonaux de cette matrice est dans $1 + K_{\geq 0}$.*

c) *Si $g \in G_{>0}$, les coefficients de la matrice de $g : V(\lambda) \to V(\lambda)$ sont dans $K_{>0}$.*

Remarque.— Pour simplifier l'exposé, on n'a considéré que des groupes simplement lacés. La définition d'un épinglage, et donc celles de $U^{\pm}_{\geq 0}, U^{\pm}_{>0}$, $T_{>0}$ et de $G_{\geq 0}, G_{>0}$, s'étendent de manière évidente à tous les groupes semi-simples. La proposition 1 reste valable dans le cas général, mais pas la proposition 2.

3.3. Une version infinitésimale de $G_{\geq 0}$

Dans cette section, on suppose $K = \mathbb{R}$ et $K_{>0} = \mathbb{R}_{>0}$. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Pour une racine simple α, soient X_α, Y_α les dérivées de x_α et y_α en zéro. Notons $\mathfrak{g}_{\geq 0}$ le sous-espace

$$\mathfrak{g}_{\geq 0} := \{t + \sum_{\alpha \text{ simple}} (a_\alpha X_\alpha + b_\alpha Y_\alpha) \mid t \in \operatorname{Lie} T, a_\alpha, b_\alpha \geq 0\}.$$

Exemple 3.— Pour $G = SL_3(\mathbb{R})$, on a

$$\mathfrak{g}_{\geq 0} = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} s_1 & a & \\ b & s_2 & c \\ & d & s_3 \end{pmatrix}, s_1 + s_2 + s_3 = 0,\ a, b, c, d \geq 0\}.$$

Le sens "$\Rightarrow$" de l'équivalence suivante a été démontré par G. Lusztig [Lu2], sa réciproque par K. Rietsch [R1]; dans le cas $GL_n(\mathbb{R})$, celle-ci remonte à C. Loewner [Lo].

l'algèbre de utilise, a_α, b_α sont > 0.

PROPOSITION 3.— *Soit $X \in \mathfrak{g}$ un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. On a*

$$X \in \mathfrak{g}_{\geq 0} \iff \forall s > 0 : \exp(sX) \in G_{\geq 0}.$$

Idée de la démonstration. Pour montrer $\Rightarrow$, on se ramène aux générateurs de $G_{\geq 0}$ en utilisant la formule (voir [Bo]) $\exp(y + z) = \lim_{n\to\infty}(\exp(y/n)\exp(z/n))^n$, et le fait que $G_{\geq 0}$ est fermé dans G (voir 3.4). La démonstration de $\Leftarrow$ se fait par un calcul explicite. ◇

On peut définir de façon analogue le sous-espace

$$\mathfrak{g}_{>0} := \{t + \sum_{\alpha \text{ simple}} (a_\alpha X_\alpha + b_\alpha Y_\alpha) \mid t \in \operatorname{Lie} T, a_\alpha, b_\alpha > 0\}.$$

B. Kostant [Ko] a montré que les éléments de $\mathfrak{g}_{>0}$ sont semi-simples, réguliers et déployés sur $\mathbb{R}$. Le résultat de Kostant peut être considéré comme une version infinitésimale du résultat de Gantmacher et Krein [GK] pour $GL_n(\mathbb{R})$. G. Lusztig [Lu8] a montré :

PROPOSITION 4.— *Soit $X \in \mathfrak{g}$ un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. On a*

$$X \in \mathfrak{g}_{>0} \iff \forall s > 0 : \exp(sX) \in G_{>0}.$$

3.4. $G_{>0}$ et cellules ouvertes opposées

On suppose $K = \mathbb{R}$, $K_{>0} = \mathbb{R}_{>0}$, et la topologie est induite par la structure euclidienne de $\mathbb{R}$. Notons Ω^+ la cellule ouverte B^+nB^+ de G, où $n \in G$ est un représentant de w_0 dans le normalisateur de T. On note Ω^- la cellule opposée B^-nB^-. Dans [L2], Lusztig donne une description topologique de $G_{>0}$:

$U^+_{>0}$ est la composante connexe de $U^+ \cap \Omega^-$ qui contient les éléments de type a) de la proposition 4.

$U^-_{>0}$ est la composante connexe de $U^- \cap \Omega^+$ qui contient les éléments de type b) de la proposition 4.

$T_{>0}$ est la composante connexe de T qui contient 1.

$G_{>0}$ est la composante connexe de $\Omega^+ \cap \Omega^-$ qui contient les éléments de type c) de la proposition 4.

$U^+_{\geq 0}$ est l'adhérence de $U^+_{>0}$ dans U^+, et $U^-_{\geq 0}$ est l'adhérence de $U^-_{>0}$ dans U^-.

$G_{\geq 0}$ est l'adhérence de $G_{>0}$ dans G. En particulier, $G_{\geq 0}$ est un ensemble fermé dans G.

Remarques sur les démonstrations : On voit aisément que l'application $\Phi_{w_0} : \mathbb{R}^N_{\geq 0} \to U^+$ (voir 3.2, $N =$ la dimension de U^+) est une application propre, donc $U^+_{\geq 0}$ (et donc aussi $U^-_{\geq 0} \subset U^-$) est un sous-ensemble fermé. Soit λ un poids dominant régulier et v_λ un vecteur de plus haut poids λ dans $V(\lambda)$. Notons ${}_\lambda\mathbb{B}$ la base canonique de $(V(\lambda), v_\lambda)$. Pour $g \in G$, soit $s(g)$ le produit des coefficients diagonaux de $g : V(\lambda) \to V(\lambda)$. On a $s(g) \geq 1$ pour $g \in \overline{G_{\geq 0}}$ (proposition 2). En utilisant la décomposition de Bruhat, on peut montrer que $s(g) = 0$ pour $g \notin U^+TU^-$, donc $\overline{G_{\geq 0}} \subset U^+TU^-$. Mais $U^-_{\geq 0} \subset U^-$, $U^+_{\geq 0} \subset U^+$ et $T_{>0} \subset T$ sont fermés. On en déduit facilement que $G_{\geq 0}$ est fermé. Notons encore une fois que la positivité des matrices joue un rôle important dans la démonstration.

3.5. Un théorème de régularité.

On suppose $K = \mathbb{R}$ et $K_{>0} = \mathbb{R}_{>0}$. Rappelons que F. Gantmacher et M. Krein [GK] ont montré que les matrices totalement positives ont des valeurs propres réelles et simples. On a un résultat analogue pour les éléments de $G_{>0}$.

THÉORÈME 1.— *Soit $g \in G_{>0}$. Il existe un unique tore maximal S de G, déployé sur $\mathbb{R}$, tel que $g \in S$.*

Idée de la démonstration. Soit λ un poids dominant régulier et soit ${}_\lambda\mathbb{B}$ la base canonique de $(V(\lambda), v_\lambda)$. Soit $\mathbb{P}_{\geq 0}$ ($\mathbb{P}_{>0}$) l'ensemble des droites dans $V(\lambda)$ engendrées par un vecteur à coefficients dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ($\mathbb{R}_{>0}$). Si $g \in G_{>0}$, les coefficients de la matrice de $g : V(\lambda) \to V(\lambda)$ sont dans $\mathbb{R}_{>0}$, donc $\mathbb{P}_{\geq 0}$ et $\mathbb{P}_{>0}$ sont stables par l'action de $G_{>0}$. Le théorème de Perron implique que g admet une valeur propre simple positive a telle que a est supérieure à la valeur absolue des autres valeurs propres. De plus, la droite D_g engendrée par les vecteurs propres de valeur propre a est un élément de $\mathbb{P}_{>0}$, et tout sous-ensemble fermé $Z \subset \mathbb{P}_{\geq 0}$, stable par g, contient D_g. Par conséquent, l'orbite de la droite $\mathbb{R}v_\lambda$ dans $P_{\geq 0}$ contient D_g, et donc il existe un sous-groupe de Borel B, défini sur $\mathbb{R}$, tel que $g \in B$. Soit g_s la partie semi-simple de g. Pour montrer que $g = g_s$ est un élément semi-simple et régulier, on utilise le fait que la valeur propre a est simple. $\diamond$

Soit $\mathfrak{B}$ la variété des sous-groupes de Borel de G, définie sur $\mathbb{R}$. G. Lusztig a montré [Lu2] que les deux sous-ensembles $\{uB^+u^{-1} \mid u \in U^-_{>0}\}$ et $\{uB^-u^{-1} \mid u \in U^+_{>0}\}$ coïncident; notons cet ensemble $\mathfrak{B}_{>0}$, et soit $\mathfrak{B}_{\geq 0}$ l'adhérence de $\mathfrak{B}_{>0}$ dans $\mathfrak{B}$.

THÉORÈME 2 ([Lu2]).— a) *Soit $g \in G_{>0}$. Il existe un unique sous-groupe de Borel $B \in \mathfrak{B}_{>0}$ tel que $g \in B$.*

b) *L'application $G_{>0} \to \mathfrak{B}_{>0}$, $g \mapsto B$ (B comme dans a)), est continue.*

c) *Soit $\mathfrak{B}^+$ (resp. $\mathfrak{B}^-$) l'ensemble des sous-groupes de Borel dans $\mathfrak{B}$ opposés à B^+ (resp. à B^-). $\mathfrak{B}_{>0}$ est une composante connexe de l'intersection $\mathfrak{B}^+ \cap \mathfrak{B}^-$.*

d) *Soient $(V(\lambda), v_\lambda)$, $\mathbb{P}_{>0}$ et ${}_\lambda\mathbb{B}$ comme ci-dessus. Pour $B \in \mathfrak{B}$, on a $B \in \mathfrak{B}_{>0}$ si et seulement si l'unique droite dans $V(\lambda)$, stable par B, est un élément de $\mathbb{P}_{>0}$.*

Remarques.— a) Les deux théorèmes précédents restent valables pour un groupe semi-simple quelconque, à l'exception du théorème 2 *d*).

b) Dans [Lu4], Lusztig définit la "partie positive" d'une variété (réelle) de drapeaux partiels. Le théorème 2 peut être reformulé dans ce contexte plus général.

c) K. Rietsch [R2] a décrit une décomposition cellulaire de $\mathfrak{B}_{\geq 0}$ en cellules $C_{w,w'}$, indexées par les paires (w, w') d'éléments de W telles que $w \geq w'$, et de dimension $l(w) - l(w')$.

d) K. Rietsch [R3] a construit un graphe dont les composantes connexes sont en bijection avec celles de $\mathfrak{B}^+ \cap \mathfrak{B}^-$. G. Lusztig a montré que ce graphe est un quotient du graphe paramétrant la base canonique de U_q^-.

3.6. $G_{\geq 0}$ et la base canonique

On a vu que les coefficients de la matrice $g : V(\lambda) \to V(\lambda)$ (dans la base canonique de $(V(\lambda), v_\lambda)$) sont > 0 pour $g \in G_{>0}$, respectivement ≥ 0 pour $g \in G_{\geq 0}$. En fait, ces propriétés caractérisent les éléments de $G_{>0}$ et $G_{\geq 0}$. Soit $\pi : G \to G^{op}$ ($= G$ muni de la structure de groupe opposé) l'unique isomorphisme tel que $\pi(x_\alpha(a)) = x_\alpha(a)$ et $\pi(y_\alpha(a)) = y_\alpha(a)$ pour toutes les racines simples et tout $a \in K$, et $\pi(t) = t^{-1}$ pour tout $t \in T$. On note $v_{w_0\lambda} \in {}_\lambda\mathbb{B}$ l'unique élément de poids $w_0(\lambda)$, où $w_0 \in W$ est le plus grand élément de W. Le théorème suivant ne se généralise pas au cas non-simplement lacé.

THÉORÈME 3 ([Lu3]).— *Soit $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \subset P^+$ une famille génératrice de P.*

a) *$g \in G_{>0}$ si et seulement si pour tout i, $gv_{w_0(\lambda_i)}$ et $\pi(g)v_{\lambda_i}$ sont des combinaisons linéaires d'éléments de ${}_\lambda\mathbb{B}$ à coefficients > 0.*

b) *g est élément de $G_{\geq 0}$ si et seulement si, pour tout i, les coordonnées de $gv_{w_0(\lambda_i)}$ et $\pi(g)v_{\lambda_i}$ dans ${}_\lambda\mathbb{B}$ sont positives, la coordonnée d'indice $v_{w_0(\lambda_i)}$ de $gv_{w_0(\lambda_i)}$ ainsi que celle d'indice v_{λ_i} de $\pi(g)v_{\lambda_i}$ étant strictement positives.*

4. DOUBLES–CELLULES DE BRUHAT ET MINEURS GÉNÉRALISÉS

On a deux caractérisations du sous-semi-groupe $G_{\geq 0}$ des matrices totalement positives de $GL_n(\mathbb{R})$: c'est le sous-semi-groupe engendré par les matrices élémentaires positives de Jacobi, ou l'ensemble des matrices dont tous les mineurs sont ≥ 0.

A. Berenstein, S. Fomin et A. Zelevinsky [BZ,FZ] ont introduit la notion de mineur pour un élément d'un groupe algébrique semi-simple complexe. Soit $(V(\omega), v_\omega)$ une représentation fondamentale de plus haut poids ω, de vecteur de plus haut poids v_ω. Pour $u \in W$, soit $v_{u\omega}$ l'unique élément de la base canonique de poids $u\omega$. Notons $V(\omega)^*$ l'espace dual de $V(\omega)$. Pour $w \in W$, soit $\xi_{w\omega} \in V(\omega)^*$ l'unique élément de la base duale à la base canonique de $V(\omega)$ de poids $-w\omega$. Les mineurs généralisés peuvent être vus (à normalisation près) comme des fonctions du type $g \mapsto \xi_{w\omega}(gv_{u\omega})$, où ω parcourt l'ensemble des poids fondamentaux de G, et $(u\omega, w\omega)$ parcourt l'ensemble $\{(u\omega, w\omega) \mid u, w \in W\}$.

Pour donner une définition plus précise, rappelons qu'on a supposé G déployé sur $\mathbb{R}$ et qu'on en a fixé un épinglage. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ l'ensemble des racines simples. Pour $\alpha = \alpha_i$, notons $\phi_i : SL_2(\mathbb{R}) \to G$ l'application correspondante. Posons $\overline{s}_i := \phi_i(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$ et $\overline{\overline{s}}_i := \phi_i(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$. Ces deux éléments du normalisateur de T représentent la réflexion simple $s_i \in W$. Pour $u, v \in W$, soient $u = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ et

$v = s_{i_1} \cdots s_{i_t}$ des décompositions réduites. On peut montrer que $\overline{u} = \overline{s}_{i_1} \cdots \overline{s}_{i_r} \in G$ et $\overline{\overline{v}} = \overline{\overline{s}}_{i_1} \cdots \overline{\overline{s}}_{i_t} \in G$ sont indépendants du choix de la décomposition.

Chaque élément $g \in U^+TU^-$ admet une décomposition $g = [g]_+[g]_0[g]_-$ unique avec $[g]_+ \in U^+$, $[g]_0 \in T$ et $[g]_- \in U^-$. La fonction $U^+TU^- \to \mathbb{R}$, définie par $g \mapsto \omega([g]_0)$, peut être étendue à une fonction Δ^ω définie sur G. Pour $u, v \in W$, A. Berenstein, S. Fomin et A. Zelevinsky définissent:

$$\Delta_{u\omega, v\omega} : G \to \mathbb{R}, \quad g \mapsto \Delta^\omega(\overline{u} g \overline{\overline{v}}).$$

On peut montrer que $\Delta_{v\omega, w\omega}$ dépend seulement des poids $v\omega$ et $w\omega$, pas de v, w. Pour $G = SL_n(\mathbb{R})$, les fonctions $\Delta_{u\omega, v\omega}$, $(u, v) \in W \times W$, sont les mineurs d'une matrice carrée. Le premier résultat de S. Fomin et A. Zelevinsky est :

THÉORÈME 1 ([FZ]).— *Soit $g \in G$. Alors, g est totalement positif si et seulement si $\Delta_{u\omega, v\omega}(g) > 0$ pour tout poids fondamental ω et tout élément $(u, v) \in W \times W$.*

Pour le reste de cette section, on suppose $K = \mathbb{C}$ et $K_{>0} = \mathbb{R}_{>0}$. Rappelons qu'on a deux décompositions de Bruhat : $G = \bigcup_{w \in W} B^+ w B^+$ et $G = \bigcup_{v \in W} B^- v B^-$. Pour $u, v \in W$, on note

$$G^{u,v} := B^+ u B^+ \cap B^- v B^-$$

la *double cellule* de Bruhat. Cette variété est birégulièrement isomorphe à un sous-ensemble Z de $\mathbb{C}^{l(u)+l(v)+r}$, où Z est ouvert pour la topologie de Zariski [FZ]. Ici $l(v), l(u)$ sont les longueurs des éléments v, u de W, et r est le rang de G.

Il est évident que G est la réunion disjointe des $G^{u,v}$. Donc $G_{\geq 0}$ est la réunion disjointe des $G^{u,v}_{>0} := G_{\geq 0} \cap G^{u,v}$. (Cette décomposition de $G_{\geq 0}$ en cellules a déjà été donnée par Lusztig dans [Lu2], 2.11.) Pour deux éléments $u, v \in W$, nous écrivons $u \prec v$ si $l(v) = l(u) + l(u^{-1}v)$, et nous posons:

$$F(u, v) := \{\Delta_{u'\omega, v'\omega} \mid (u', v) \in W \times W, \ u' \prec u, v' \prec v^{-1}, \ \omega \text{ poids fondamental}\}.$$

THÉORÈME 2 ([FZ]).— *Soit $g \in G^{u,v}$. Alors, g est totalement non-négative si et seulement si $\Delta_{u'\omega, v'\omega}(g) > 0$ pour tout élément de $F(u, v)$.*

Mieux, S. Fomin et A. Zelevinsky ont généralisé le résultat de M. Fekete, C. Cryer, M. Gasca et J. M. Peña (section 1) : pour vérifier la positivité totale d'un élément, il suffit de la vérifier pour un certain sous-ensemble de mineurs généralisés.

Pour décrire un tel sous-ensemble, nous considérons une décomposition réduite $s_{i_1} \cdots s_{i_m}$ de $(u, v) \in W \times W$. Pour distinguer les réflexions simples dans la première et dans la deuxième copie de W, nous utilisons comme système d'indice l'alphabet $I = \{1, 2, \ldots, r, \overline{1}, \ldots, \overline{r}\}$. Une décomposition réduite de (u, v) est donc le résultat d'un battage d'une décomposition réduite de $u = s_{j_1} \cdots s_{j_n}$, $j_t \in \{1, 2, \ldots, r\}$ et d'une décomposition réduite de $v = s_{\overline{l}_1} \cdots s_{\overline{l}_k}$, $\overline{l}_t \in \{\overline{1}, \ldots, \overline{r}\}$. Dans W, s_i et $s_{\overline{i}}$ représentent le même élément, nous le noterons $s_{|i|}$.

Fixons une décomposition réduite $s_{i_1} \cdots s_{i_m}$ de (u, v). Nous associons à cette décomposition la suite $S := \{i_1, \ldots, i_m, i_{m+1}, \ldots, i_{m+r}\}$, où $i_{m+j} := \overline{j}$ pour $1 \leq j \leq r$. Pour $0 \leq k \leq m + r$, soit $\epsilon_k = 0$ si $i_k \in \{\overline{1}, \ldots, \overline{r}\}$, et soit $\epsilon_k = 1$ si $i_k \in \{1, \ldots, r\}$ ou $k = 0$. Nous posons :

$$u_{\geq k} := s_{|i_m|}^{1-\epsilon_m} s_{|i_{m-1}|}^{1-\epsilon_{m-1}} \cdots s_{|i_k|}^{1-\epsilon_k}, \quad v_{<k} := s_{|i_1|}^{\epsilon_1} s_{|i_2|}^{\epsilon_2} \cdots s_{|i_{k-1}|}^{\epsilon_{k-1}},$$

où $u_{\geq k} = e$ et $v_{<k} = v$ pour $k > m$. Considérons les $(m + k)$ mineurs généralisés $\Delta_{k,S} := \Delta_{u_{\geq k}\omega_{|i_k|}, v_{<k}\omega_{|i_k|}}$, $1 \leq k \leq m + r$.

THÉORÈME 3 ([FZ]).— *Fixons une décomposition réduite $s_{i_1} \cdots s_{i_m}$ de $(u, v) \in W \times W$, et soit S la suite associée ci-dessus. Un élément $g \in G^{u,v}$ est totalement non-négatif si et seulement si $\Delta_{k,S}(g) > 0$ pour $1 \leq k \leq m + r$.*

Idée de la démonstration. On a fixé un épinglage de G. Pour simplifier, notons $y_j(t)$ par $x_{\overline{j}}(t)$. Soit $\Psi : H \times (\mathbb{C}^*)^m \to G^{u,v}$ le morphisme défini par $(h, t_1, \ldots, t_m) \mapsto hx_{i_1}(t_1) \ldots x_{i_m}(t_1)$ (rappelons que $i_1, \ldots, i_m \in \{1, 2, \ldots, r, \overline{1}, \ldots, \overline{r}\}$). Ce morphisme est un isomorphisme de $H \times (\mathbb{C}^*)^m$ sur un ouvert dans $G^{u,v}$, dense pour la topologie de Zariski.

L'étape la plus importante est la construction explicite de l'inverse de Ψ. Soit $g = hx_{i_1}(t_1) \ldots x_{i_m}(t_m)$. S. Fomin et A. Zelevinsky montrent que les paramètres $t_1, \ldots, t_m, \omega_1(h), \ldots, \omega_r(h)$ de g sont liés par une transformation monômiale inversible aux valeurs des mineurs généralisés $\Delta_{1,S}(g), \ldots, \Delta_{m+r,S}(g)$. La positivité des $\Delta_{j,S}$ est donc équivalente à la non-négativité de g. Pour être plus précis, ces auteurs construisent un isomorphisme $\phi^{u,v} : G^{u,v} \to G^{u^{-1},v^{-1}}$, et montrent que les paramètres de $\phi^{u,v}(g)$ sont liés aux valeurs des mineurs généralisés dans g. Mais cette application $\phi^{u,v}$ préserve la non-négativité, donc la non-négativité de $\phi^{u,v}(g)$ est équivalente à celle de g. On voit facilement que les théorèmes 1 et 2 sont des cas particuliers du théorème 3. ◇

Le théorème suivant explique pourquoi on n'a pas besoin de l'ensemble de tous les mineurs généralisés.

THÉORÈME 4 ([FZ]).— *Pour toute décomposition réduite $s_{i_1} \cdots s_{i_m}$ de $(u, v) \in W \times W$, l'ensemble des mineurs $C = \{\Delta_{k,S} \mid 1 \leq k \leq m + r\}$ forme une base du* *corps des fonctions rationnelles complexes $\mathbb{C}(G^{u,v})$. De plus, tout mineur généralisé de $F(u,v)$ s'exprime comme quotient de deux polynômes à coefficients ≥ 0 en les $\Delta_{k,S}$, $1 \leq k \leq m+r$.*

S. Fomin et A. Zelevinsky donnent un algorithme pour calculer $\Delta_{u\omega,w\omega}$ comme fonction rationnelle des $\Delta_{1,S}, \ldots, \Delta_{m+r,S}$. Cet algorithme est basé sur une liste d'identités fondamentales, qui peuvent être considérées comme des généralisations de certaines identités classiques pour les déterminants. Par exemple, supposons que $G = GL_n(\mathbb{C})$ et $p \leq n-2$. Soient $\underline{i} \in I(p+1,n), \underline{j} \in I(p,n)$, et soient $r,s,t,u \in \{1,\ldots,n\}$ tels que $r < s < t$, r,s,t n'appartiennent pas à la suite $\underline{i}$, et u n'appartient pas à la suite $\underline{j}$. Nous notons $\underline{i}r$ la suite croissante formée des éléments de $\underline{i}$ et de r. On retrouve des identités prouvées par P. Desnanot en 1819 [De], voir aussi [Mu], pp. 140-142:

$$\Delta_{\underline{i}u,\underline{j}rt}\Delta_{\underline{i},\underline{j}s} = \Delta_{\underline{i}u,\underline{j}rs}\Delta_{\underline{i},\underline{j}t} + \Delta_{\underline{i}u,\underline{j}st}\Delta_{\underline{i},\underline{j}r}.$$

5. MATRICE DE PASSAGE, POLYNÔMES DE KAZHDAN–LUSZTIG

Considérons la représentation standard du groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_k)$ sur $V_q := \mathbb{Q}(q)^k$, défini sur le corps $\mathbb{Q}(q)$. Cet espace vectoriel est muni d'une base canonique $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$, et l'action des générateurs $F_1, \ldots, F_k$, $K_1^{\pm}, \ldots, K_k^{\pm}$ et $E_1, \ldots, E_k$ de $U_q(\mathfrak{sl}_k)$ s'écrit :

$$E_i\mathbf{e}_{i+1} = \mathbf{e}_i,\ E_i\mathbf{e}_j = 0 \text{ pour } j \neq i+1, \quad F_i\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i+1},\ F_i\mathbf{e}_j = 0 \text{ pour } j \neq i,$$

$$K_i^{\pm}\mathbf{e}_i = q^{\pm}\mathbf{e}_i,\ K_i^{\pm}\mathbf{e}_{i+1} = q^{\mp}\mathbf{e}_{i+1} \text{ et } K_i^{\pm}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j \text{ pour } j \neq i, i+1.$$

Cette base est la base canonique de $(V_q, \mathbf{e}_1)$ au sens du théorème 2.1. Rappelons que $U_q(\mathfrak{sl}_k(\mathbb{Q}))$ est muni d'une structure d'algèbre de Hopf. La co-multiplication $\Delta : U_q(\mathfrak{sl}_k(\mathbb{Q})) \to U_q(\mathfrak{sl}_k(\mathbb{Q})) \otimes U_q(\mathfrak{sl}_k(\mathbb{Q}))$ est définie par

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, \quad \Delta(F_i) = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i,$$

et $\Delta(K_i) = K_i \otimes K_i$. Muni de cette co-multiplication, le produit tensoriel $V_q^{\otimes n}$, $n \geq 2$, est un $U_q(\mathfrak{sl}_k)$-module. Le $\mathbb{Q}(q)$-espace vectoriel $V_q^{\otimes n}$ est muni de deux bases "naturelles" : la première, formée des produits tensoriels des éléments de la base canonique de V_q, est $\mathbb{B} := \{\mathbf{e}_{\underline{i}} = \mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_n} \mid \underline{i} = (i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, k\}^n\}$.

Soit $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_k) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^k$ tel que $p_1 + \ldots + p_k = n$, on note $\underline{i}_{\mathbf{p}}$ l'élément $(k, \ldots, k, \ldots, 1, \ldots, 1)$ de $\{1, \ldots, k\}^n$ où l'entier i apparaît avec la multiplicité p_i.

Le sous-espace $V_q^{\otimes n}(\mathbf{p}) = \{u \in V_q^{\otimes n} \mid K_i u = q^{p_i}u, 1 \leq i \leq k\}$, est appelé espace des vecteurs de poids $\mathbf{p}$. On note $S_{n,\mathbf{p}} = S_{p_k} \times \ldots \times S_{p_1}$ le fixateur de $\underline{i}_{\mathbf{p}}$ dans S_n, et $S_n^{\mathbf{p}} \subset S_n$ l'ensemble des représentants de longueur minimale des éléments de $S_n/S_{n,\mathbf{p}}$. L'ensemble des vecteurs $\{\mathbf{e}_{w(\underline{i}_{\mathbf{p}})} \mid w \in S_n^{\mathbf{p}}\}$ est une base de $V_q^{\otimes n}(\mathbf{p})$.

La deuxième base est obtenue en utilisant le $\mathbb{Q}$-automorphisme $^-$ défini à la section 2. Cet automorphisme induit une involution $^-$ sur V_q pour laquelle la base canonique de $(V_q, \mathbf{e}_1)$ est formée de vecteurs fixes de $^-$. En utilisant le co-produit Δ, on peut construire une involution $^-$ sur $V_q^{\otimes n}$.

Remarque.— Soit $U_q(\mathfrak{g})$ le q-analogue de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$. La construction de $^-$ sur un produit tensoriel de $U_q(\mathfrak{g})$-modules simples, ainsi que la construction d'une base canonique d'un produit tensoriel, sont dues à Lusztig [Lu1]. Le théorème suivant est ainsi un cas particulier de [Lu1], théorème 27.3.2.

THÉORÈME 1.— *Pour chaque $\underline{i} \in \{1, \ldots, k\}^n$, il existe un unique élément $\mathbf{b}_{\underline{i}} \in V_q^{\otimes n}$ tel que $\overline{\mathbf{b}_{\underline{i}}} = \mathbf{b}_{\underline{i}}$, et $\mathbf{b}_{\underline{i}} - \mathbf{e}_{\underline{i}}$ est une combinaison linéaire des $\mathbf{e}_{\underline{i}'}$ de même poids que $\mathbf{e}_{\underline{i}}$, à coefficients dans $q^{-1}\mathbb{Z}[q^{-1}]$.*

Cette base est appelée la *base canonique* $\mathbb{B}^+$ de $V_q^{\otimes n}$. Elle est compatible avec les sous-espaces $V_q^{\otimes n}(\mathbf{p})$. En fait, $\{\mathbf{b}_{w(\underline{i}_{\mathbf{p}})} \mid w \in S_n^{\mathbf{p}}\}$ est une base de $V_q^{\otimes n}(\mathbf{p})$.

Pour étudier la matrice de passage entre ces deux bases, rappelons que dans le cas classique, l'action du groupe $SL_k(\mathbb{Q})$ sur le produit tensoriel $(\mathbb{Q}^k)^{\otimes n}$ commute à l'action du groupe symétrique S_n, opérant par permutation sur les copies de $\mathbb{Q}^k$. Dans notre situation, on doit remplacer le groupe symétrique par son q-analogue : l'algèbre de Hecke $\mathcal{H} = \mathcal{H}(S_n)$. Pour ne pas confondre le groupe quantique et l'algèbre de Hecke, on utilisera la variable $v = q^{-1/2}$ dans $\mathcal{H}$. Rappelons que $\mathcal{H}$ est une algèbre associative, engendrée sur $\mathbb{Q}(v)$ par les éléments $T_1, \ldots, T_{n-1}$, soumis aux relations $T_iT_j = T_jT_i$ pour $|i-j| > 1$, $T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-2$, et $(T_i + 1)(T_i - v^2) = 0$.

M. A. Jimbo [J] a défini une action de $\mathcal{H}$ sur $V_q^{\otimes n}$. Soit $\sigma : V_q \otimes V_q \to V_q \otimes V_q$ l'automorphisme défini par :

$$\sigma(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = -v^{-1} \begin{cases} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i + (v - v^{-1})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j & \text{si } i < j, \\ \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i & \text{si } i > j, \\ v\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Soit σ_i l'endomorphisme de $V_q^{\otimes n}$ qui opère comme σ sur le i-ième et le $i+1$-ième facteur et fixe les autres facteurs. L'application $T_i \mapsto \sigma_i$ définit une action de $\mathcal{H}$ sur

$V_q^{\otimes n}$ qui commute à l'action de $U_q(\mathfrak{sl}_k)$. Les sous-espaces de type $V_q^{\otimes n}(\mathbf{p})$ sont stables par l'action de $\mathcal{H}$.

Soit $M_{\mathbf{p}}$ un $\mathbb{Q}(v)$-espace vectoriel de base $\mathbb{B}_0 = \{m_w \mid w \in S_n^{\mathbf{p}}\}$. V.V. Deodhar [D] définit une action de $\mathcal{H}$ sur $M_{\mathbf{p}}$: $T_i m_w = -m_w$ si $l(s_i w) > l(w)$ mais $s_i w \notin S_n^{\mathbf{p}}$, $T_i m_w = v^{-1} m_{s_i w}$ si $l(s_i w) > l(w)$ et $s_i w \in S_n^{\mathbf{p}}$, et $T_i m_w = v^{-1} m_{s_i w} + (v^{-2} - 1) m_w$ si $l(s_i w) < l(w)$.

D. Kazhdan et G. Lusztig [KL] définissent une involution $^-$ sur $\mathcal{H}$, similaire à celle donnée pour les groupes quantiques dans la section 2. Cette involution est anti-linéaire, c'est-à-dire que pour $f(v) \in \mathbb{Q}(v)$, on a $\overline{f(v)m} = \overline{f(v)}\overline{m}$, où $\overline{f(v)} := f(v^{-1})$. V.V. Deodhar l'a utilisée pour définir une involution $^-$ sur $M_{\mathbf{p}}$. De plus, il a montré que, pour chaque $w \in S_n^{\mathbf{p}}$, il existe un unique élément $c_w \in M_{\mathbf{p}}$, tel que c_w soit un vecteur fixe de l'involution $^-$ et tel que, si l'on exprime c_w dans la base $\mathbb{B}_0$, on ait:

$$c_w = \sum_{v \in S_n^{\mathbf{p}}, v \leq w} a_{v,w} m_v, \text{ où } a_{w,w} = 1 \text{ et } a_{v,w} \in v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}] \text{ pour } v < w.$$

On en déduit que $\mathbb{B}_{KL} := \{c_w \mid w \in S_n^{\mathbf{p}}\}$ est une base de $M_{\mathbf{p}}$. Cette base est appelée base de Kazhdan-Lusztig de $M_{\mathbf{p}}$. Les coefficients $a_{w,v}$ qui apparaissent ci-dessus sont, à renormalisation près, les polynômes paraboliques de Kazhdan-Lusztig $P_{v,w}^{\mathbf{p}}$ [D]. Plus précisément:

$$a_{v,w} = (-v)^{l(v)-l(w)} \overline{P_{v,w}^{\mathbf{p}}}.$$

Considérons l'isomorphisme d'espaces vectoriels $\Psi : M_{\mathbf{p}} \to V_q^{\otimes n}(\mathbf{p})$ défini par $m_w \mapsto (-1)^{l(w)} \mathbf{e}_{w(\underline{i}_{\mathbf{p}})}$.

THÉORÈME 2 [FKK].— a) *Ψ est un isomorphisme de $\mathcal{H}$-modules.*

b) *Ψ est compatible aux involutions de $M_{\mathbf{p}}$ et $V_q^{\otimes n}$: $\Psi(\overline{m}) = \overline{\Psi(m)}$.*

c) *L'image de la base de Kazhdan-Lusztig $\mathbb{B}_{KL}$ par Ψ est, à renormalisation près, la base canonique de $V_q^{\otimes n}(\mathbf{p})$: on a $\Psi(c_w) = (-1)^{l(w)} \mathbf{b}_{w(\underline{i}_{\mathbf{p}})}$.*

On obtient donc la matrice de passage de la base canonique $\mathbb{B}^+$ à la base $\mathbb{B}$:

COROLLAIRE 1.—

$$\mathbf{b}_{w(\underline{i}_{\mathbf{p}})} = \sum_{v \in S_n^{\mathbf{p}}, v \leq w} v^{l(v)-l(w)} \overline{P_{v,w}^{\mathbf{p}}}\, \mathbf{e}_{v(\underline{i}_{\mathbf{p}})}.$$

On peut utiliser cette approche pour calculer les polynômes de Kazhdan-Lusztig. Pour le cas $k = 2$ (voir [FKK] et [FK]), on retrouve les formules obtenues par A. Lascoux, M. Schützenberger [LS], et A. Zelevinsky [Z].

L'espace $V_q^{\otimes n}$ est muni d'une troisième base "naturelle" : la base canonique duale. Celle-ci est construite de la même façon que la base canonique, mais avec un choix différent de la co-multiplication. Elle a aussi une interprétation en termes de représentation de l'algèbre de Hecke (voir [FKK]).

BIBLIOGRAPHIE

[A] T. Ando, *Totally positive matrices*, Linear Alg. Appl. **90**, (1987), 165–219.

[Bo] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, Ch. 2,3*, Hermann, Paris, (1972).

[BBD] A. Beilinson, J. Bernstein et P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Astérisque **100**, (1982).

[BFZ] A. Berenstein, S. Fomin et A. Zelevinsky, *Parametrizations of canonical bases and totally positive matrices*, Adv. Math. **122**, (1996), 49–149.

[BZ] A. Berenstein et A. Zelevinsky, *Total positivity in Schubert varieties*, Comment. Math. Helv. **72**, (1997), 128–166.

[CP] V. Chari et A. Pressley, *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, (1994).

[Cr] C. Cryer, *The LU-factorization of totally positive matrices*, Linear Algebra Appl. **7**, (1973), 83–92.

[D] V.V. Deodhar, *On some geometric aspects of Bruhat orderings II. The parabolic analogue of Kazhdan-Lusztig polynomials*, J. Algebra **111** (1987), 483–506.

[De] P. Desnanot, *Complément de la théorie des équations du premier degré*, Volland jeune, Paris, (1819).

[F] M. Fekete, *Über ein Problem von Laguerre, Briefwechsel zwischen M. Fekete und G. Pólya*, Rendiconti del Circ. Mat. Palermo **34** (1912), 89–100, 110–120.

[FZ] S. Fomin et A. Zelevinsky, *Double Bruhat cells and total positivity*, Prépublication de l'I.R.M.A. **8**, Strasbourg (1998).

[FK] I. Frenkel et M. Khovanov, *Canonical bases in tensor products and graphical calculus for $U_q(\mathfrak{sl}_2)$*, Duke Math. J. **87** (1997), 409–480.

[FKK] I. Frenkel, M. Khovanov et A. Kirillov Jr., *Kazhdan-Lusztig polynomials and canonical basis*, à paraître dans J. Transf. Groups.

[GK] F. Gantmacher et M. Krein, *Sur les matrices oscillatoires*, C. R. Acad. Sci. Paris **201** (1935), 577–579.

[GP] M. Gasca, et J. M. Peña, *On the characterization of totally positive matrices*, Approximation theory, spline functions and applications, Kluwer, (1992), 357–

364.

[Ge] M. Geck, *Representations of Hecke Algebras at Roots of Unity*, Sém. Bourbaki, exp. n° 836, novembre 1997, à paraître dans Astérisque.

[J] M. A. Jimbo, *A q-analogue of* $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, *Hecke algebra and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **11** (1986), 247–252.

[Ka1] M. Kashiwara, *On the crystal bases of the q-analogue of universal enveloping algebras*, Duke Math. J. **63** (1991), 465-516.

[Ka2] M. Kashiwara, *Crystal bases of modified quantized enveloping algebras*, Duke Math. J. **73** (1994), 383-413.

[KL] D. Kazhdan et G. Lusztig, *Representation of Coxeter groups and Hecke algebras*, Inv. Math. **53** (1979), 165–184.

[Ko] B. Kostant, *The solution to a generalized Toda lattice and representation theory*, Adv. in Math. **34** (1979), 195–338.

[LS] A. Lascoux et M.-P. Schützenberger, *Polynômes de Kazhdan-Lusztig pour les grassmanniennes*, Astérisque **87–88** (1981), 249–266.

[Lo] C. Loewner, *On totally positive matrices*, Math. Z. **63** (1955), 338–340.

[Lu1] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Progress in Math. **110**, Birkhäuser, Boston, 1993.

[Lu2] G. Lusztig, *Total positivity in reductive groups*, Lie Theory and Geometry: in honor of Bertran Kostant, Progress in Math. **123**, Birkhäuser, Boston (1994), 531–568.

[Lu3] G. Lusztig, *Total positivity and canonical bases*, Algebraic groups and Lie Groups, Austr. Math. Soc. Lect. Series **9**, Cambridge Univ. Press (1997), 281–295.

[Lu4] G. Lusztig, *Total positivity in partial flag manifolds*, Representation Theory **2** (1998), 70–78.

[Lu5] G. Lusztig, *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras II*, Common trends in mathematics and quantum field theories, Progr. Theor. Phys. Suppl. **102** (1990), 175–201.

[Lu6] G. Lusztig, *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*, JAMS. **3** (1990), 447–498.

[Lu7] G. Lusztig, *Quivers, perverse sheaves and quantum enveloping algebras*, JAMS **4** (1991), 365–421.

[Lu8] G. Lusztig, *Introduction to total positivity*, prépublication (1998).

[Ma] O. Mathieu, *Bases des représentations des groupes simples complexes*, Sém. Bourbaki, exp. n° 743, Astérisque **201–203** (1991), 421–442.

[Mu] T. Muir, *The theory of determinants in the historical order of development*, 2nd edition, vol. 1, Macmillan, London (1906).

[R1] K. Rietsch, *The infinitesimal cone of a totally positive semigroup*, Proc. AMS **125** (1997), 2565–2570.

[R2] K. Rietsch, *An algebraic cell decomposition of the nonnegative part of a flag variety*, à paraître dans J. Algebra.

[R3] K. Rietsch, *Intersections of Bruhat cells in real flag varieties*, Internat. Math. Res. Notices **13** (1997), 623–640.

[Sc] I. Schoenberg, *Über variationsvermindernde lineare Transformationen*, Math. Z. **32** (1930), 321–322.

[W] A. M. Whitney, *A reduction theorem for totally positive matrices*, J. d'Analyse Math. **2** (1952), 88–92.

[Z] A. Zelevinsky, *Small resolutions of Schubert varieties*, Funk. Anal. App. **17** (1983), 75–77.

Peter LITTELMANN

Université Louis Pasteur et
Institut universitaire de France
I.R.M.A.
UMR 7501 du CNRS
7, rue Descartes
F–67084 STRASBOURG CEDEX

E–mail : littelma@math.u-strasbg.fr