JEAN-CLAUDE SIKORAV

Construction de sous-variétés symplectiques

Astérisque, tome 252 (1998), Séminaire Bourbaki,
exp. n^{o} 844, p. 231-253
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1997-1998__40__231_0>

Séminaire BOURBAKI
50ème année, 1997-98, n° 844

Mars 1998

CONSTRUCTION DE SOUS–VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES [d'après S.K. Donaldson et D. Auroux]

par **Jean–Claude SIKORAV**

INTRODUCTION

La géométrie des variétés symplectiques compactes apparaît de plus en plus comme l'intermédiaire naturel entre la topologie différentielle et la géométrie algébrique complexe. Une illustration de ce fait est donnée par la théorie des courbes pseudoholomorphes de M. Gromov [Gr2] et ses développements : cohomologie quantique [Aud], invariants de Gromov-Witten, relation avec les équations de Seiberg-Witten [Kot]. Les travaux dont nous allons parler, dûs à S.K. Donaldson avec d'importants compléments de D. Auroux, explorent un nouvel aspect de la comparaison avec la géométrie algébrique : au lieu d'objets de dimension complexe 1 (courbes), on considère des objets de codimension complexe 1 (hypersurfaces). Bien sûr, dans le cas le plus fascinant où la variété est de dimension complexe 2 (réelle 4), c'est pareil mais même alors le point de vue est complètement nouveau.

Le premier résultat est la construction de tels objets, plus précisément de sous-variétés symplectiques de codimension 2 analogues aux sections hyperplanes de la géométrie algébrique.

THÉORÈME 1 (Donaldson 1996 [D]).— *Soit (V,ω) une variété symplectique compacte. On suppose que $\frac{[\omega]}{2\pi}$ est l'image d'une classe entière $h \in H^2(V;\mathbb{Z})$, duale à $H \in H_2(V;\mathbb{Z})$. Alors pour k assez grand, il existe une sous-variété symplectique Z_k homologue à kH.*

Commentaire.— Les précédents résultats d'existence de sous-variétés symplectiques étaient de deux types :

1) Pour une variété symplectique quelconque, le h-principe de Gromov permet de construire des sous-variétés symplectiques dans certaines classes d'isotopie : si $f : W^{2m} \to (V^{2n},\omega)$ est un plongement tel que $f^*[\omega^{2m}] \neq 0$ et df est homotope à

une injection linéaire symplectique, alors f est isotope à un plongement symplectique pourvu que $2m \leq 2n-4$. Dans le cas de codimension 2, la méthode permet d'obtenir seulement une immersion symplectique. Quitte à changer la variété W par chirurgie, on pourrait la lisser dans le cadre symplectique sous une hypothèse de positivité d'intersection, mais celle-ci n'a pas de raison d'avoir lieu en général.

2) En dimension 4, les travaux de C. Taubes [Ta] [Kot] sur les relations entre équations de Seiberg-Witten et courbes pseudoholomorphes montrent l'existence de surfaces symplectiques, en fait de J-courbes, dans beaucoup de cas : par exemple, si $b^+(V) \geq 2$ et si $c_1(J) \neq 0$ où J est une structure presque complexe calibrée par ω, il existe une J-courbe duale à $-c_1(J)$. Ou encore : si $a \in H^2(V;\mathbb{Z})$ est non nulle et a un invariant de Seiberg-Witten non nul, il existe une J-courbe duale à a.

L'hypothèse du théorème 1 rappelle bien sûr celle du théorème de plongement de Kodaira [Kod1] : rappelons que celui-ci affirme que si V est de plus kählérienne et si L est un fibré de classe de Chern h, alors L est ample. Autrement dit, L^k a des sections holomorphes pour k grand, et celles-ci engendrent un plongement de V dans un espace projectif $\mathbb{P}^N$, $N = h^0(L^k) - 1$. L'image réciproque d'un hyperplan générique est alors une hypersurface ayant les propriétés du théorème.

La preuve du théorème 1 donne un résultat beaucoup plus précis. Pour l'énoncer, introduisons quelques notations.

D'abord, J désignera une structure presque complexe calibrée par ω : $\omega(X, JY)$ est une métrique hermitienne. Rappelons que de telles structures existent toujours, et forment un espace contractile. Ensuite, L est un fibré en droites complexes de classe de Chern h. On le munit d'une connexion hermitienne ∇ de courbure $-i\omega$. Ceci donne une connexion (encore notée ∇) sur L^k, de courbure $-ik\omega$. Si s est une section de L^k, on peut donc définir ∇s et $\overline{\partial}_J s = \frac{1}{2}(\nabla s + i\nabla s J)$.

Convention.— Pour mesurer les dérivées d'une section de L^k, on munit V de la métrique $g_k = kg$ où g est une métrique fixe. Ceci a pour effet de multiplier la norme de ∇s, $\overline{\partial}_J s$ par $k^{-1/2}$, et plus généralement celle de $\nabla^r s$, $\nabla^r \overline{\partial}_J s$ par $k^{-r/2}$.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat obtenu par Donaldson.

COMPLÉMENT AU THÉORÈME 1.— *Il existe une suite de sections s_k de L^k et des constantes positives C et δ avec les propriétés suivantes :*

(1) $$|\overline{\partial}_J s_k|_{C^1} \leq Ck^{-1/2}\,,\ |s_k| \leq C.$$

(2) $$\{|s_k(z)| \leq \delta\} \Rightarrow |\nabla s_k| \geq \delta.$$

Ceci implique le théorème 1. En effet, pour k assez grand on aura $Ck^{-1/2} < \delta$, donc on peut appliquer le lemme d'algèbre linéaire suivant :

Lemme.— Soit $u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. On suppose $|u^{0,1}| < |u^{1,0}|$ où $u^{1,0}$ et $u^{0,1}$ sont ses composantes complexe et anticomplexe. Alors u est surjectif et son noyau est un sous-espace symplectique.

Remarque.— L'espace tangent à Z_k tend donc vers un sous-espace J-complexe. Or, si l'on part d'une variété symplectique quelconque (V, ω'), on peut trouver J calibrant ω' et approximer ω' par $\lambda\omega$ où $\frac{\omega}{2\pi}$ est intégrale. Donc on peut appliquer le théorème 1 à ω, et les sous-variétés Z_k seront aussi ω'-symplectiques.

Une suite de sections ayant la propriété (1) sera dite *asymptotiquement J-holomorphe* (J-AH en abrégé, ou AH si J est fixé). Si elle vérifie (2), on dira qu'elle est *uniformément transverse* à la section nulle.

Ces définitions se généralisent à $E \otimes L^k$ où E est un fibré hermitien de rang r sur V. La propriété (2) doit être remplacée par la suivante : si $|s_k(z)| \leq \delta$, alors $\partial s_k(z)$ est *δ-surjectif*, c'est-à-dire a un inverse à droite $\leq \delta^{-1}$ en norme d'opérateur.

Le lemme ci-dessus se généralise à une application linéaire $u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^r$ telle que $|u^{0,1}| < \delta$ et que $u^{1,0}$ est δ-surjectif. Donc si (s_k) est une suite de sections de $E \otimes L^k$ qui est J-AH et uniformément transverse à la section nulle, alors $Z_k = s_k^{-1}(0)$ est encore une sous-variété symplectique pour k assez grand, maintenant de codimension $2r$. Sa classe d'homologie est duale à $c_r(E \otimes L^k) = (kh)^r + \sum_{i=1}^r c_i(E)\,(kh)^{r-i}$.

Nous pouvons maintenant énoncer la double généralisation de D. Auroux : fibrés de rang supérieur et version à un paramètre réel.

THÉORÈME 2 [Aur1].— *Soit E un fibré complexe de rang r sur V, et soit (s_k) une suite de sections J-AH de $E \otimes L^k$. Alors, pour k assez grand, (s_k) peut être C^1-approximée par $(\tilde{s}_k)$ qui est uniformément transverse à la section nulle.*

De plus, si (J_t), $t \in [0,1]$ est un chemin de structures calibrées par ω et $(s_{k,t})$ une suite de chemins de sections qui sont J_t-AH, celle-ci peut être C^1-approximée par un chemin $(\tilde{s}_{k,t})$ uniformément transverse à la section nulle.

La contractilité de l'espace des structures calibrées implique l'unicité à isotopie près des sous-variétés ainsi construites :

COROLLAIRE.— *Il existe une classe d'isotopie canonique de sous-variétés symplectiques de codimension $2r$ duales à $(kh)^r + \sum_{i=1}^r c_i(E)\,(kh)^{r-i}$.*

En particulier, il existe une classe d'isotopie canonique de sous-variétés symplectiques homologues à kH ("sections hyperplanes").

Plus récemment, Donaldson a montré que l'on peut obtenir deux suites de sections comme dans le théorème 1, dont le quotient est une application "presque méromorphe" avec des singularités de Morse :

THÉORÈME 3 ([D2]).— *Il existe une suite de sections* $(s_k) = (s_k^0, s_k^1)$ *de* $L^k \oplus L^k$ *avec les propriétés suivantes :*

1) (s_k) *est J-AH et uniformément transverse à la section nulle. Donc* $s_k^{-1}(0) = B_k$ *est une sous-variété symplectique de codimension* 4.

2) *L'application* $\varphi_k = [s_k^0 : s_k^1] : V \backslash B_k \to \mathbb{CP}^1$ *est telle que* $\partial\varphi_k$ *est uniformément transverse à la section nulle.*

De plus, il existe une classe d'homotopie canonique de telles suites.

Une conséquence spectaculaire est la suivante : *pour* k *assez grand, les sous-variétés symplectiques* $Z_{k,t} = \varphi_k^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{CP}^1$, *ont une structure de pinceau de Lefschetz, de fibre homologue à* kH *et de lieu de base* B_k. De plus cette structure est canoniquement définie à isotopie près. Tout ceci suppose l'intégralité de $\frac{\omega}{2\pi}$, mais la remarque faite plus haut montre que la structure de pinceau de Lefschetz symplectique existe pour toute variété symplectique.

Etant donné une telle structure de pinceau, on peut éclater B_k et obtenir une nouvelle variété symplectique munie d'une *fibration de Lefschetz* $\tilde{V} \to \mathbb{CP}^1$. Cette fibration, et la classe de déformation de la structure symplectique sur $\tilde{V}$, sont entièrement décrites par la structure symplectique sur la fibre lisse (qui ne varie pas à cause du lemme de Moser) et des données de monodromie (théorie de Picard-Lefschetz). En dimension 4, on obtient ainsi une description "concrète" de toutes les variétés symplectiques à déformation et éclatement de points près (voir la section 4).

Il est clair qu'un tel théorème aura des répercussions considérables sur la topologie des variétés symplectiques compactes. A priori, elles devraient être de deux sortes :

1) Restrictions supplémentaires sur la topologie. Actuellement, la situation est la suivante : en dimension ≥ 6, on ne sait pas s'il existe une variété "formellement symplectique" (V a une structure presque complexe et une classe $a \in H^2(V;\mathbb{R})$ telle que $a^n > 0$) qui n'ait pas de structure symplectique. En dimension 4, Taubes a donné beaucoup de restrictions supplémentaires (cf. [Kot]). Une question ouverte importante est celle de l'irréductibilité des variétés symplectiques minimales (sans courbes exceptionnelles). Autres questions en dimension 4 : validité de l'inégalité de Miyaoka-Yau pour les variétés symplectiques qui ne sont pas des surfaces réglées, construction de variétés avec $[\omega]|\pi_2(V) = 0$.

2) Nouveaux invariants des variétés symplectiques, notamment en dimension 4, définis en termes de monodromie. Un certain nombre d'applications ont été annoncées sur ce point (Donaldson, Bogomolov-Katzarkov [Bo-Ka]).

Remerciements. L'auteur remercie Denis Auroux pour ses explications éclairantes sur ses travaux et ceux de Donaldson.

1. LA CONSTRUCTION PRINCIPALE

La preuve de tous ces résultats repose sur une construction presque explicite des sections cherchées. Nous l'exposons ici dans le cas le plus simple : celui de $E \otimes L^k$ où E est de rang 1 et où il n'y a pas de paramètre.

On construit d'abord des sections $\sigma_{k,p}$ de $E \otimes L^k$ qui sont AH et concentrées en un point p. Pour alléger les notations, on omettra l'indice k dans la suite. Puis on considère toutes les combinaisons linéaires $s = \sum_i w_i \sigma_{p_i}$ où les p_i sont les centres d'un recouvrement "régulier" par des boules B_i en nombre $\sim k^n$. Alors si les $|w_i|$ sont ≤ 1, s est encore AH. Il s'agit ensuite de montrer que pour un choix convenable des w_i on peut la rendre uniformément transverse.

Pour cela, on montre d'abord comment la rendre ε-transverse sur une boule B_i par une perturbation de taille contrôlée. L'ingrédient essentiel est une version effective du théorème de Sard pour les fonctions presque holomorphes. À son tour, ceci vient d'un résultat analogue pour les fonctions polynomiales, raffinant un théorème de Y. Yomdin [Y].

Si l'on ajoute les perturbations obtenues sur les boules B_i, on risque de perdre tout contrôle, car leur nombre ($\sim k^n$) est trop grand. Pour y remédier, on regroupe les boules par "couleur", obtenant ainsi un recouvrement (U_α, $1 \leq \alpha \leq N$). Les deux points clés sont :

1) Deux boules d'une même couleur sont séparées d'une distance au moins D.

2) Le nombre N de couleurs est $O(D^{2n})$.

La première propriété garantit que la perturbation associée à chaque boule dominera sur celle-ci la somme des contributions des autres boules, pourvu toutefois qu'elle ne soit pas trop petite. Ceci permet de rendre la section ε_α-transverse simultanément sur toutes les boules de la couleur α, successivement pour $\alpha = 1, 2, \cdots$. À chaque étape, on doit réduire ε_α donc il n'est pas évident a priori qu'on puisse aller jusqu'à N. La deuxième propriété garantira que c'est possible pourvu que D soit choisi assez grand (mais indépendant de k). Finalement, on obtient la δ-transversalité sur V avec $\delta = \varepsilon_N$.

1.1. Sections localisées

L'observation initiale est la suivante : si l'on munit le fibré trivial $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la connexion hermitienne donnée par la 1-forme $A = \frac{1}{4}(z.d\overline{z} - \overline{z}.dz)$, alors la courbure est $dA = -i\omega_0$ et la section $f(z) = e^{-|z|^2/4}$ est holomorphe et à décroissance rapide, ainsi que ses dérivées. Plus précisément, on a

$$\overline{\partial}_A f = \overline{\partial} f + A^{0,1} f = 0$$
$$|\nabla_A^r f| \leq C(1 + |z|^r) e^{-|z|^2/4} \quad (\forall r \geq 0).$$

Soit maintenant k un entier fixé. On considère le fibré $L^k \to V$, muni de la métrique hermitienne et de la connexion A_k induites par celles de L. On notera $\nabla_{A_k} = \nabla$ et $\overline{\partial}_J = \frac{1}{2}(\nabla + i\nabla J)$ sa composante anticomplexe. La courbure de A_k est donc $-ik\omega$. On choisit ρ tel qu'il existe une famille de cartes de Darboux pour ω, $\chi_p : (\mathbb{B}_n(\rho), 0) \to (U_p, p)$, J-holomorphes à l'origine.

On note $\tilde{\chi}_p(z) = \chi_p(k^{-1/2} z)$, qui est un symplectomorphisme de $(\mathbb{B}_n(k^{1/2}\rho), \omega_0)$ sur $(U_p, k\omega)$. On relève $(\tilde{\chi}_p)^{-1}$ à une trivialisation $T_p : L^k_{|U_p} \to \mathbb{B}_n(k^{1/2}\rho) \times \mathbb{C}^n$ via le transport parallèle radial. *Cette trivialisation envoie A_k sur la connexion de matrice A.* En effet, la matrice B de la connexion sur $\mathbb{B}_n(k^{1/2}\rho) \times \mathbb{C}^n$ est uniquement définie par les propriétés $dB = (\tilde{\chi}_p)^{-1*}(k\omega) = \omega_0$, $B(\frac{\partial}{\partial r}) = 0$, $B(0) = 0$. Comme A les vérifie aussi, on a bien $A = B$.

Remarque.— Soit s une section de L^k sur U, représentée par une fonction g dans la trivialisation T_p. À des constantes près, les normes des dérivées de s par rapport à g_k et de g par rapport à la métrique standard sur $\mathbb{C}^n$ sont équivalentes.

Soit alors s_p la section de L^k sur U_p correspondant à f. Nous allons évaluer s_p, $\overline{\partial}_J s_p$ et leurs dérivées dans la trivialisation T_p. Pour s_p, il est facile de montrer qu'on a $|\nabla^r s_p(q)| \leq C_r(1 + |z|^r)\, e^{-|z|^2/4}$ pour tout r. Pour $\overline{\partial}_J s_p$, on utilise la représentation de Cayley $J = (1+q)\, i\, (1+q)^{-1}$ où q est une application de la boule $\mathbb{B}_n(k^{1/2}\rho)$ à valeurs dans les endomorphismes anticomplexes de $\mathbb{C}^n$. La “renormalisation” due à $\tilde{\chi}_p$ implique

$$|q| = O(k^{-1/2}|z|]) \ , \ |D^r q| = O(k^{-r/2}) \ (r \geq 1).$$

Dans la trivialisation T_p, $\overline{\partial}_J s$ correspond à $(\overline{\partial}_A f + (\partial_A f) q)\,(1+q)^{-1}$. Or $\overline{\partial}_A f = 0$ et $\partial_A f = \frac{1}{2} e^{-|z|^2/4}\, \overline{z}.dz$. On en déduit que pour tout $r \geq 0$ on a

$$|\nabla^r \overline{\partial}_J s_p(q)| \leq C_r k^{-r/2} (1 + |z|^{r+2})\, e^{-|z|^2/4}.$$

Pour obtenir une section définie sur V, on utilise une fonction plateau lisse $\beta : \mathbb{R} \to [0,1]$, telle que $\beta(t) = 1$ si $t < 1$, 0 si $t > 2$. On pose

$$\sigma_p(q) = \begin{cases} \beta(k^{-1/6}z)\, s_p(q) & \text{si } q \in U_p \ , \ q = \chi_p(z) \\ 0 & \text{si } q \notin U_p. \end{cases}$$

Cette section est à support dans $\tilde{\chi}_p(B(2k^{1/6}))$, qui est contenu dans $B_{g_k}(p, k^{1/4})$ pour k assez grand.

Nous rassemblons ci-dessous les propriétés essentielles de cette construction.

PROPOSITION 1.— *Pour tout $p \in V$ il existe une section σ_p de L^k qui vérifie les inégalités suivantes pour la métrique $g_k = kg$:*

$$|\nabla^r \bar{\partial}_J \sigma_p(q)| \leq C_r k^{-1/2}(1 + d_k(p,q)^{r+2})\, e^{-d_k(p,q)^2/5} \quad (\forall r \geq 0)$$
$$|\nabla^r \sigma_p(q)| \leq C_r (1 + d_k(p,q)^r)\, e^{-d_k(p,q)^2/5}$$
$$|\sigma_p(p)| = 1.$$

Remarque.— Si E est un fibré en droites complexes sur V, alors on peut construire des sections $\tilde{\sigma}_p$ de $E \otimes L^k$ ayant exactement les mêmes propriétés : il suffit de considérer le produit $u_p \otimes \sigma_p$ où u_p est une section de E indépendante de k, holomorphe au point p, et de norme 1 en p. Si E est de rang > 1, on peut aussi trouver $\sigma_{p,i}$, $1 \leq i \leq r$, qui forment une base unitaire en p. Ceci donne une section $\tilde{\sigma}_p$ de $\oplus_{i=1}^r (E \otimes L^k) = (E \otimes L^k) \otimes \mathbb{C}^r$. Ceci permet de définir $f.\sigma_p$ pour $f : V \to \mathbb{C}^r$.

1.2. Recouvrements réguliers et combinaisons linéaires

La variété V, munie de g_k, devient de plus en plus proche de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{2n}$ quand k tend vers l'infini. En considérant des recouvrements de ce dernier par des boules centrées sur $\mathbb{Z}^{2n}$, on montre qu'il existe un ensemble fini $\{p_i\}_{i \in I}$ de points de V, en nombre $\sim k^n$, tel que les $B_i = \tilde{\chi}_{p_i}(\mathbb{B}_n)$ recouvrent V et qu'on ait la propriété suivante :

$(*)$ *Pour tout $p \in V$, le nombre de points p_j qui sont à distance $\geq R$ de p est au plus CR^{2n}.*

Remarque.— Ici et dans la suite C désigne une constante indépendante de k, qui peut varier d'un énoncé à l'autre.

Notation.— Si $\underline{w} = (w_i)$ est un élément de $\mathbb{C}^{(I)}$, on pose $s_{\underline{w}} = \sum_i w_i\, \sigma_{p_i}$, section de $E \otimes L^k$.

Les inégalités sur les σ_p, plus la propriété (*), impliquent que pour tout $\underline{w}$ tel que $|w_i| \leq 1$ et tout $r \geq 0$ on a, pour des constantes C_r indépendantes de k,

$$|\bar{\partial}_J s_{\underline{w}}|_{C^r} \leq C_r\, k^{-1/2} \quad , \quad |s_{\underline{w}}|_{C^{r+1}} \leq C_r .$$

Remarque et définition. Dans cette section on aura besoin des inégalités ci-dessus seulement pour $r = 0$ ou 1. On dira que s est C-holomorphe si elle les vérifie avec $C_0 = C_1 = C$. En particulier, les sections $s_{\underline{w}}$ sont donc C-holomorphes pour tout $\underline{w}$ tel que $|w_i| \leq 1$.

Le théorème 1 résultera de la proposition suivante, prouvée en 1.5.

PROPOSITION 2.— *Soit s une section de $E \otimes L^k$ qui est C-holomorphe. Alors pour k assez grand et ε assez petit (en fonction de C), il existe $\underline{w}$ tel que $|w_i| \leq 1$ et $s + s_{\underline{w}}$ est ε-transverse à zéro.*

1.3. Lemme de Sard effectif pour les fonctions polynomiales

DÉFINITIONS.— *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ une application différentiable. On dit que $z \in U$ est un point ε-critique si $df(z)$ n'est pas ε-surjectif. Son image $w = f(z)$ est alors une valeur ε-critique. On note $\Sigma_\varepsilon(f,U) \subset U$ le lieu ε-critique, et et $C_\varepsilon(f,U) = f(\Sigma_\varepsilon(f,U))$ l'ensemble des valeurs ε-critiques.*

Noter que f est ε-transverse à w si et seulement si la boule $B(w,\varepsilon)$ est disjointe de $C_\varepsilon(f,U)$.

PROPOSITION 3 [D, prop. 25].— *Soit $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale de degré $d \geq 2$. Alors $C_\varepsilon(P, \mathbb{B}_n)$ est contenu dans l'union de $d^{p(n)}$ disques de rayon ε.*

Commentaire.— Yomdin [Y] donne ce résultat avec $N(n,d)$ au lieu de $d^{p(n)}$; il est énoncé pour un polynôme réel, mais la preuve marche aussi dans le cas complexe. La valeur plus précise de N est démontrée dans [D].

La preuve repose sur l'étude du lieu ε-critique $\Sigma_\varepsilon(P, \mathbb{B}_n)$. C'est un ensemble semi-algébrique dans $\mathbb{R}^{2n}$, défini par deux inéquations de degré 2 et $2d-2$. D'après les inégalités de Petrovskii-Oleinik-Thom-Milnor (cf. [Be-Ri], [Bo-Co-R]), il a au plus $(4d)^{2n}$ composantes connexes par arcs. Yomdin montre comment majorer leur diamètre pour la métrique de longueur. Sa méthode, valable pour n'importe quel ensemble semi-algébrique, fournit une borne $N(n,d)$ difficile à expliciter. Reprenant une idée de Gromov ([G], p. 214) basée sur le lemme de Crofton, Donaldson montre $N(n,d) \leq d^{a(n)}$.

Comme par définition on a $|dP| \leq \varepsilon$ sur Σ_ε, il résulte de tout ceci que $C_\varepsilon = P(\Sigma_\varepsilon)$ est contenu dans $(4d)^{2n}$ boules de rayon $d^{a(n)}\varepsilon$, ce qui implique la proposition.

1.4. Lemme de Sard effectif pour les fonctions presque holomorphes

Une fonction holomorphe sur un polydisque est bien approximée C^1 par des polynômes sur un polydisque plus petit. Il en est de même si $\overline{\partial} f$ est C^1-petit. En combinant avec la proposition 3, on obtient :

PROPOSITION 4.— *Soit $f : \mathbb{D}(3)^n \to \mathbb{D}$ une application telle que $|\overline{\partial} f|_{C^1} \leq C_n^{-1}\varepsilon$. Alors $C_\varepsilon(f, \mathbb{B}_n)$ est contenu dans une réunion de $(\log \varepsilon^{-1})^p$ boules de rayon ε, avec $p = p(n)$.*

Démonstration.— On peut écrire $f = h + r$ avec h holomorphe et $|r|_{C^1} \leq C|\overline{\partial} f|_{C^1} \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ sur $\mathbb{D}(2)^n$, par exemple via la formule de Bochner-Martinelli [He-Lei]. Si P est le développement de Taylor de h d'ordre d en 0, le fait que h est holomorphe et bornée sur $\mathbb{D}(2)^n$ implique $|h - P|_{C^1(\mathbb{B}_n)} \leq C2^{-d}$. Ici et dans la suite, C désigne une constante qui ne dépend que des dimensions, mais qui peut varier d'une inégalité à l'autre.

Prenant $d = \log_2 \varepsilon^{-1}$, il vient $|f - P|_{C^1(\mathbb{B}_n)} \leq C\varepsilon$, ce qui implique que $C_\varepsilon(f, \mathbb{B}_n)$ est contenu dans le $C\varepsilon$-voisinage de $C_{C\varepsilon}(P, \mathbb{B}_n)$. Par la proposition 3, ce dernier est contenu dans $(\log_2 \varepsilon^{-1})^p$ boules de rayon $C\varepsilon$. Mettant tout cela ensemble, on voit que $C_\varepsilon(f, \mathbb{B}_n)$ est contenu dans $(\log_2 \varepsilon^{-1})^p$ boules de rayon $C\varepsilon$. Ceci donne la proposition 4, quitte à augmenter p.

On utilisera en fait la conséquence suivante.

COROLLAIRE 1.— *Sous l'hypothèse de la proposition 4, tout demi-disque de $\mathbb{C}$ de rayon ε contient un point w tel que f est $\varphi_p(\varepsilon)$-transverse à w sur $\mathbb{B}_n$, où*

$$\varphi_p(\varepsilon) = \varepsilon\,(\log \varepsilon^{-1})^{-p}.$$

Ou encore : $f - w$ est $\varphi_p(\varepsilon)$-transverse à zéro.

Remarque.— Dans la suite, on aura besoin d'augmenter la valeur de p, mais il devra rester indépendant de k.

1.5. Coloriage et transversalité sur les boules d'une même couleur

Nous allons regrouper les boules B_i par "couleur". Pour cela, soit D un entier positif fixé. On pense à D comme étant grand mais indépendant de k, sa valeur sera précisée plus tard. En répartissant les points de $\mathbb{Z}^{2n}$ suivant leurs classes dans $(\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^{2n}$, on construit une partition $I = \coprod I_\alpha$, $1 \leq \alpha \leq N(D)$, telle que

$$i, j \in I_\alpha \Rightarrow d_k(p_i, p_j) \geq D \tag{3}$$

$$N(D) \leq CD^{2n}. \tag{4}$$

De plus :

(**) *Le nombre des points de I_α à distance $\leq R$ est au plus $C\left(\frac{R}{D}\right)^{2n}$.*

Donnons d'abord une version du corollaire 1 sur V.

Lemme 2.— Soit s une section C-holomorphe de $E \otimes L^k$. Soit $E \subset \mathbb{C}$ un demi-disque de rayon $C^{-1}\varepsilon$. Alors pour tout i il existe $w \in E$ tel que $s + w\sigma_i$ est $2\varphi_p(\varepsilon)$-transverse à zéro sur B_i.

Démonstration.— On applique le corollaire 1 à $\frac{s}{\sigma_i} : \Delta_i^+ \to \mathbb{C}$, où $\Delta_i^+ = \tilde{\chi}_i(\mathbb{D}(3)^n)$. On trouve $w_i \in D_i$ tel que $\frac{s}{\sigma_i} + w_i$ est $\varphi_p(C^{-1}\varepsilon)$-transverse à zéro sur B_i pour la métrique de $\mathbb{C}^n$. Comme σ_i est approximativement constante sur B_i, ceci implique que $s + \sigma_i w_i$ est $C^{-1}\varphi_p(C^{-1}\varepsilon)$-transverse à zéro sur B_i pour la métrique g_k. Quitte à augmenter p, elle est donc $2\varphi_p(\varepsilon)$-transverse. Noter que p dépend maintenant de V et de la constante C d'holomorphicité asymptotique, mais pas de k.

En utilisant les propriétés (3), (*) et l'inégalité $\sum_{R=D}^{\infty}\left(\frac{R}{D}\right)^{2n} e^{-R^2/5} \leq 2e^{-D^2/5}$, on montre :

Lemme 3.— On a

$$\Big|\sum_{j \in I_\alpha \setminus \{i\}} w_j \sigma_j\Big|_{C^1} \leq Ae^{-D^2/5} \max |w_j| \text{ sur } \Delta_i^+.$$

Nous pouvons maintenant énoncer la transversalisation sur la réunion U_α des boules de la couleur α.

PROPOSITION 5.— *Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ et*

$$(\log \varepsilon^{-1})^{-p} \geq 2Ae^{-D^2/5}, \tag{5}$$

où A est la constante du lemme 3. Soit s une section de $E \otimes L^k$ telle que $|s| \leq C$ et $|\overline{\partial}_J s|_{C^1} \leq Ck^{-1/2}$. Soit α fixé et soient $D_i \subset \mathbb{C}$, $i \in I_\alpha$, des demi-disques centrés en 0 de rayon $C^{-1}\varepsilon$.

Alors il existe $(w_i) \in \prod D_i$ tel que la section $\tilde{s} = s + \sum_{i \in I_\alpha} w_i \sigma_i$ est $\varphi_p(\varepsilon)$-transverse à 0 sur U_α. De plus elle est ε-proche de s en norme C^1.

Démonstration.— Le lemme 2 donne des $w_i \in D_i$ tels que $s + w_i\sigma_i$ est $2\varphi_p(\varepsilon)$-transverse sur B_i. Or $\tilde{s} - (s + w_i\sigma_i)$ est $\leq Ae^{-D^2/5}\varepsilon$ par le lemme 3. Donc l'hypothèse (5) implique que $\tilde{s}$ est $\varphi_p(\varepsilon)$-transverse à zéro sur B_i. De plus $|\tilde{s} - s|_{C^1}$ est $\leq C \max |w_i| \leq \varepsilon$, ce qui achève la preuve.

1.6. Preuve de la proposition 2

Définissons $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ et par récurrence $\varepsilon_{\alpha+1} = \varphi_p(\varepsilon_\alpha)$. Autrement dit, $\log(\varepsilon_{\alpha+1}^{-1}) = \log \varepsilon_\alpha^{-1} + p \log\log \varepsilon_\alpha^{-1}$. On en déduit $\log \varepsilon_\alpha^{-1} \leq C\alpha \log \alpha$.

Puisque $N = O(D^{2n})$, on a $(CN \log N)^p \ll e^{D^2/5}$, donc pour D assez grand

$$(\log \varepsilon_\alpha^{-1})^{-p} \geq 10Ae^{-D^2/5} \ (\forall \alpha \leq N). \tag{6}$$

Notons que pour cela il est essentiel que $\varphi_p(\varepsilon)$ soit “à peine plus petit” que ε. Avec ε^2, ça ne marcherait pas !

On fixe maintenant D tel que (6) soit vrai. On va construire par récurrence une suite de sections $(s_\alpha = s + s_{\underline{w}_\alpha})$ telle que s_α est ε_α-transverse sur $V_\alpha = U_1 \cup \cdots U_\alpha$.

On part de $s_0 = s$. Supposant s_α construite, on applique la proposition 5 avec $s = s_\alpha$ et $\varepsilon = C^{-1}\varepsilon_\alpha$. On trouve des points w_i, $i \in I_\alpha$, tels que $|w_i| \leq C^{-1}\varepsilon_\alpha$ et $s_{\alpha+1} = s_\alpha + \sum_{i \in I_\alpha} w_i\sigma_i$ est $\varepsilon_{\alpha+1}$-transverse sur $U_{\alpha+1}$. Alors $s_{\alpha+1}$ a la forme voulue $s + s_{\underline{w}_{\alpha+1}}$, de plus on peut imposer $|w_{\alpha+1,i}| < 1$ puisque les $w_{\alpha+1,i}$ qui ont changé sont de la forme $w_{\alpha,i} + w_i$ avec $|w_i| \leq 1$ et dans un demi-plan arbitraire.

Enfin, on a $|s_{\alpha+1} - s_\alpha|_{C^1} \leq C\varepsilon_\alpha$. Puisque s_α est ε_α-tranvserse sur V_α et que $\varepsilon_{\alpha+1} \leq \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha$, on en déduit que $s_{\alpha+1}$ est aussi $\varepsilon_{\alpha+1}$-transverse sur V_α et donc sur $V_{\alpha+1}$, ce qui prouve la proposition 2.

2. GÉNÉRALISATIONS ET VARIANTES

La construction expliquée dans la section précédente est très souple. Nous expliquons ici comment l'adapter pour obtenir : la généralisation au rang supérieur, la version à un paramètre réel, la “morsification” du quotient de deux sections.

2.1. Fibrés de rang supérieur

La proposition 3 se généralise telle quelle au rang quelconque, à condition de prendre des w_i dans $\mathbb{C}^r$ et de remplacer $w_i\sigma_i$ par $w_i.\tilde{\sigma}_i$ où $\tilde{\sigma}_i = (\sigma_{i,1}, \cdots, \sigma_{i,r})$ (cf. remarque à la fin de la construction des sections localisées).

Pour cette généralisation, on utilise une version de la proposition 3 pour les valeurs presque critiques.

PROPOSITION 6.— *Soit $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^r$ une application polynomiale de degré d. Alors, pour un entier $p = p(n,r)$ convenable, $C_\varepsilon(P, \mathbb{B}_n)$ est contenu dans un voisinage de taille ε d'une hypersurface algébrique de degré d^p.*

La preuve s'obtient par récurrence sur r à partir de la proposition 3 (étendue aux fonctions algébriques) en imitant une preuve de Sard, cf. aussi les arguments de la preuve de [Aur1]. Esquissons une preuve directe pour une application $P = (P_1, P_2)$ de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$.

L'ensemble des points ε-critiques de (P_1, P_2) est contenu dans 4 ensembles du type

$$E = \left\{ z \in \mathbb{B}_2 \mid |Jac(P)| \leq 2\varepsilon \left| \frac{\partial P_1}{\partial z_2} \right| \right\}.$$

L'image par P de E est contenue dans la réunion des $\{w_1\} \times P_2(E_{w_1})$, où $E_{w_1} = E \cap P_1^{-1}(w_1)$. Or E_{w_1} a au plus d^p composantes, de longueur au plus d^p (p une constante absolue), et l'on a $|dP_2| \leq 2\varepsilon |dz_1|$ sur TE_{w_1}. Donc l'intersection de $P(E)$ avec chaque verticale $w_1 =$ cste est contenue dans d^p disques de rayon ε. Ceci montre déjà que $P(E)$ a un volume $O(d^p \varepsilon^2)$. Le caractère "semi-algébrique"de $P(E)$ permet d'en déduire qu'il est contenu dans le ε-voisinage d'une courbe de degré d^p quitte à augmenter p.

Comme plus haut, ceci implique un résultat pour les applications presque holomorphes.

COROLLAIRE 2.— *Soit $f : \mathbb{D}(3)^n \to \mathbb{B}_r$ telle que $|\bar{\partial} f|_{C^1} \leq \varepsilon$. Alors*

(i) *L'ensemble $C_\varepsilon(f, \mathbb{B}_n)$ est contenu dans un voisinage de taille ε d'une hypersurface algébrique de degré $(\log \varepsilon^{-1})^p$.*

(ii) *Toute demi-boule de $\mathbb{C}^r$ de rayon $\varepsilon(\log \varepsilon^{-1})^{2p}$ contient un point w tel que $f + w$ est ε-transverse à zéro sur $\mathbb{B}_n$. Ou : toute demi-boule de rayon ε contient un point w tel que $f + w$ est $\varepsilon(\log \varepsilon^{-1})^{-2p}$-transverse à zéro sur $\mathbb{B}_n$.*

(iii) *Si f_t est un chemin de fonctions avec les mêmes propriétés, alors on peut trouver w_t continue en t.*

Démonstration.— La preuve du (i) est identique à celle de la proposition 4. Pour prouver (ii), soit Σ l'hypersurface du 1, de sorte que $C_\varepsilon \subset V_\varepsilon(\Sigma)$. Estimons le volume de $V_{2\varepsilon}(\Sigma) \cap B$ où B est une boule de rayon $r = \varepsilon(\log \varepsilon^{-1})^{2p}$. C'est au plus $4\pi\varepsilon^2$ fois le $2n-2$-volume de $\Sigma \cap B$ où Σ est une hypersurface algébrique de degré $d = (\log \varepsilon^{-1})^p$. Ce $2n-2$-volume est $\leq dCr^{2n-2}$, donc on a

$$\mathrm{vol}\,(V_{2\varepsilon}(\Sigma) \cap B) \leq C\varepsilon^{2n} (\log \varepsilon^{-1})^{p+(2n-2)2p}.$$

Ceci est beaucoup plus petit que le volume de B ou d'une moitié B' de B qui est environ $\varepsilon^{2n}(\log\varepsilon^{-1})^{4np}$. Donc B' contient un point w de $B \setminus V_{2\varepsilon}(\Sigma)$. La boule de centre ε en w est disjointe de $C_\varepsilon(f, \mathbb{B}_n)$, donc $f - w$ est bien ε-transverse à zéro, cqfd.

2.2. Version à paramètres

Pour prouver (ii) dans la proposition 2, on remplace le corollaire 2 par sa version à paramètres :

PROPOSITION 7 ([Aur1]).— *Soit $f_t : \mathbb{D}(3)^n \to \mathbb{B}_r$ une famille d'applications de classe C^2, paramétrée par une variété compacte T de dimension ≤ 1, et continue en t pour la topologie C^2. On suppose que $|\bar\partial f_t|_{C^1} \leq \varepsilon$ pour tout t.*

Soit $B' \subset \mathbb{B}_r$ une demi-boule de rayon $\varepsilon(\log\varepsilon^{-1})^{4p}$. Alors il existe une application continue $w : T \to E$ telle que $w(t)$ est une valeur ε-régulière de f_t pour tout t.

Esquisse de preuve (cf. [Aur1], p. 976-977). D'après le corollaire 2, (i), il suffit de trouver $w(t) \in B'$, continu en t tel que $w(t) \notin V_{2\varepsilon}(\Sigma_t)$. On a vu que $B' \setminus V_{2\varepsilon}(\Sigma_t)$ est non vide. S'il était connexe par arcs, il serait facile de trouver $w(t)$ continu. Ce n'est pas le cas mais il a exactement une seule "grande" composante $U(t)$, qui remplit presque tout B', ce qui permet de trouver $w(t) \in U(t)$ continu :

1) Si $r = 1$, donc Σ_t est un ensemble d'au plus $(\log\varepsilon^{-1})^p$ points, on montre que toutes les composantes sauf au plus une sont *petites*, c'est-à-dire de diamètre $\leq C\varepsilon(\log\varepsilon^{-1})^p$. En effet, l'intersection du bord de chacune dans l'intérieur de B' a une longueur au plus $\leq 2\pi\varepsilon(\log\varepsilon^{-1})^p$, donc c'est clair pour celles qui sont dans l'intérieur. Quant à celles qui rencontrent $\partial B'$, si C_1 et C_2 sont deux d'entre elles, alors il existe un morceau du bord de C_1 dans $\mathrm{Int}B'$ qui sépare les deux composantes. Comme sa longueur est $\leq 2\pi\varepsilon$, C_1 ou C_2 a un diamètre $\leq (\varepsilon\log\varepsilon^{-1})^p$. L'existence de $U(t)$ suit par un argument de volume.

2) Si $r > 1$, on a un argument analogue en définissant "petite" comme "ayant un volume $\leq C\varepsilon^{2n}(\log\varepsilon^{-1})^{p+(2n-2)2p}$", de sorte que le volume total de toutes les composantes petites est encore très inférieur à celui de B'.

Il faut bien sûr aussi remplacer σ_p par $\sigma_{p,t}$, section J_t-AH ayant toutes les propriétés de σ_p et variant continûment en t. Ceci ne pose aucun problème, il faut seulement remarquer que l'on doit travailler avec des métrique g_t et $g_{k,t} = kg_t$. Mais comme $[0,1]$ est compact toutes ces estimations sont les mêmes à une constante près.

2.3. Morsification

Nous allons maintenant prouver le théorème 3, c'est-à-dire rendre φ_k uniformément de Morse.

DÉFINITION.— *Une application $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est ε-Morse si $|\overline{\partial} f|_{C^2} \leq \varepsilon$ et si $\partial f : U \to \mathbb{C}^n$ est ε-transverse à zéro.*

La morsification sur une boule est facile : il suffit d'ajouter une petite application linéaire.

PROPOSITION 8.— *Soit $f = (f_1, f_2) : \mathbb{D}(3)^n \to \mathbb{D}^2$ une application telle que $|\overline{\partial} f|_{C^2} \leq \varepsilon$. On suppose de plus que $|f_2| \geq r$, où r est fixe quand ε tend vers 0. Alors toute demi-boule de rayon ε de* $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^2)$ *contient un point w tel que $\frac{f_1 + w(z) f_2}{f_2}$ est $\varphi_p(\varepsilon)$-Morse, où $p = p(n, r)$.*

Ceci résulte immédiatement de la proposition 3 appliquée à la dérivée $\partial(\frac{f_1}{f_2}) : \mathbb{D}(3)^n \to \mathbb{C}^n$.

La morsification sur une couleur est un peu plus compliquée. Elle ne marche que pour des sections s de $L^k \oplus L^k$ ayant la forme

$$s_{\underline{F}} = \sum_{i \in I} f_i . \sigma_i,$$

où $f_i : V \to \mathbb{C}^2$ est *modérée*, c'est-à-dire à dérivées $O(N) = O(D^{2n})$. Par ailleurs, nous utiliserons “très petit” pour signifier “à dérivées $O(e^{-D^2/5})$”.

On considère une telle section $s = (s^0, s^1)$ qui est uniformément transverse à zéro, donc δ-transverse pour un certain δ. Quitte à multiplier la métrique sur V par un facteur C grand mais indépendant de k, on peut supposer que sur chaque boule B_i les normes $|s^i|$ varient d'au plus $\frac{r}{10}$. Nous allons décrire une perturbation $s + \sum_{i \in I_\alpha} p_i$ qui sera ε-Morse sur U_α (analogue de la proposition 5).

Considérons les boules B_i pour $i \in I_\alpha$. Si $|s| \leq r$ sur B_i, on pose $p_i = 0$. S'il existe $z \in B_i$ tel que $|s(z)| > r$, alors il y a deux cas.

a) Il existe $z \in B_i$ tel que $|s_1(z)| > r/\sqrt{2}$. On note A l'ensemble de ces i.

b) Il existe $z \in B_i$ tel que $|s_2(z)| > r/\sqrt{2}$ (et 2a n'est pas vrai). On note B l'ensemble de ces i.

Supposons qu'on est dans le cas a). Considérons l'application de coordonnées $z_i = \tilde{\chi}_i^{-1} : U(p_i) \to \mathbb{C}^n$, qui est une carte presque holomorphe pas trop loin de p_i. Plus précisément, on a $\overline{\partial}_J z_i \approx q(z_i)$, donc $|\overline{\partial}_J z_i|_{C^r} \leq C_r k^{-1/2}$. On multiplie z_i par la même fonction $\beta(k^{-1/6} z_i)$ que plus haut et l'on obtient ainsi $\zeta_i : V \to \mathbb{C}^n$ qui est presque holomorphe sur V et coïncide avec z_i sur toute boule de rayon borné autour de p_i.

Par hypothèse, $s^1 = \sum_j f_j\sigma_j$ avec les f_j modérées. Ne gardant que les termes tels que $d_k(p_j,p_i) \leq \frac{D}{2}$, on obtient une section $(s^1)_i$ qui est très proche de s^1 sur B_i, asymptotiquement holomorphe, et très petite à distance $\geq \frac{D}{2}$.

De même, dans le cas b) on définit la section $(s^0)_i$. Ensuite on pose $(s)_i = ((s^0)_i, 0)$ ou $(0,(s^1)_i)$ suivant que $i \in A$ ou $i \in B$.

Soit maintenant $w = (w_i)_{i\in A\cup B}$ une famille de formes linéaires $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^2$. On définit la perturbation

$$s_{\underline{w}} = s + \sum_{i\in A\cup B} w_i(\zeta_i).(s)_i.$$

Notons que c'est de la forme $s_{\underline{G}}$ avec $|g_i|_{C^1} \leq C \max|w_i|$.

On montre alors presque sans changement un analogue de la proposition 5.

PROPOSITION 9.— *Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \ll \delta$ et*

$$(\log\varepsilon^{-1})^{-p} \geq Ae^{-D^2/5}.$$

Soit $s = \sum f_i\sigma_i$ une section de $L^k \oplus L^k$, avec $|f_i|_{C^1} \leq C$. On suppose que s est δ-transverse à zéro. Alors il existe des w_i inférieurs à ε, tels que $s + s_{\underline{w}}$ soit projectivement $\varphi_p(\varepsilon)$-Morse sur chaque B_i pour $i \in A\cup B$.

On achève alors la preuve comme en 1.6. avec une petite différence : quand on itère la proposition pour obtenir $s_\alpha = s_{\underline{F}} + s_{\underline{G}_1} + \cdots s_{\underline{G}_\alpha}$, la norme de $G_1 + \cdots + G_\alpha$ n'est plus a priori majorée par 1 mais par $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_\alpha$. Heureusement, on a $\sum \varepsilon_\alpha \leq N\varepsilon_1 = O(D^{2n}\varepsilon_1)$, ce qui permet de partir de $\varepsilon_1 = \delta(CN)^{-1}$ et de garder la propriété essentielle $(\log\varepsilon_N^{-1})^{-p} \geq Ae^{-D^2/5}$, ainsi que la $\frac{\delta}{2}$-transversalité de s_α pour tout α.

3. PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

Nous indiquons ici quelques propriétés des sous-variétés Z_k construites par la méthode du 1 (pour plus de détails, voir [D1], section 6).

3.1. Théorème de Lefschetz

PROPOSITION 10.— *Pour k assez grand, l'inclusion $Z_k \to V$ induit un isomorphisme $\pi_p(Z_k) \to \pi_p(V)$ pour $p \leq n-2$ et une surjection si $p = n-1$.*

Par exemple, si $n = 2$ alors Z_k est connexe, d'où la primitivité des fibres du pinceau de Lefschetz construit plus haut.

Démonstration. On adapte la preuve du théorème classique par la théorie de Morse. Pour cela, on considère la fonction $\psi_k = \log |s_k|^2$. Il suffit de prouver que ses points critiques ont un indice $\leq n$, et pour cela que ψ_k est psh. Autrement dit, il suffit de montrer que la partie $(1,1)$ du hessien est strictement positive sur les bivecteurs (v, Jv). Or Hess ${\psi_k}^{1,1} = \overline{\partial}_J \partial_J \psi_k$. Comme s_k est J-AH, ceci vaut $k\omega + \frac{O(k^{-1/2})}{|s_k|}$.

Comme s_k est uniformément transverse à la section nulle, un point critique z de ψ_k satisfait $|s_k(z)| \gg (k^{-1/2})$, donc $(\mathrm{Hess}\psi_k)^{1,1} = k\omega + o(1)$, ce qui est évidemment strictement positif sur (v, Jv).

3.2. Faible courbure

Pour la métrique g_k, on a $|\partial s_k| \approx |\nabla s_k| \geq \delta$ sur Z_k et $|\nabla^2 s_k| \leq C$. Il en résulte que la seconde forme fondamentale de Z_k pour g_k est bornée indépendamment de k. Puisque $g_k = kg$, ceci implique que sa seconde forme fondamentale de Z_k pour g est $O(k^{1/2})$. Ce résultat est optimal car il implique une majoration en $O(k)$ du tenseur de courbure R_{Z_k} (via le theorema egregium), or l'intégrale $\int$ Ric $Z_k \wedge \omega^{n-2}$ est minorée par $C^{-1}k^2$ et majorée par $Ck \max |R_{Z_k}|$.

3.3. Cas algébrique

Supposons maintenant V kählérienne et L holomorphe. Alors d'après Kodaira L^k admet des sections holomorphes pour k assez grand. La construction ci-dessus plus un lemme d'approximation de sections AH par des sections holomorphes permet de retrouver ce résultat. De plus, les sections holomorphes obtenues restent uniformément transverses, donc les hypersurfaces complexes associées sont "relativement peu courbées".

PROPOSITION 11.—*Pour k assez grand, il existe s_k section holomorphe de $E \otimes L^k$ qui est uniformément transverse à la section nulle.*

Le point crucial de la preuve est de construire des sections σ_p de L^k qui sont localisées et *holomorphes.* Pour cela, on construit d'abord s_p holomorphe sur la boule de rayon $k^{1/3}$ et AH sur V, puis on trouve σ_p en résolvant le $\overline{\partial}$. Pour pouvoir utiliser des estimations L^2, il faut faire un peu attention puisque le volume de V pour g_k croît comme k^n. On s'en tire en obtenant une estimée $|\overline{\partial}\,\sigma_p|_{C^1} \leq Ce^{-ak^\alpha}$.

3.4. Densité asymptotique

Pour $k \to \infty$, la sous-variété Z_k tend à remplir uniformément V. Précisément :

PROPOSITION 12.—*Si $Z_k = s_k^{-1}(0)$ où (s_k) est AH et uniformément transverse à la section nulle, alors $\frac{Z_k}{k}$ converge comme courant vers le dual de Poincaré de $\frac{\omega}{2\pi}$.*

Pour prouver ce résultat, on doit montrer que $\frac{1}{k}\int_{Z_k}\psi$ tend vers $\frac{1}{2\pi}\int_V \omega\wedge\psi$ pour tout $\psi\in\Omega^{2n-2}(V)$. On montre qu'en fait la différence est $O(k^{-1/2}|d\psi|_{L\infty})$.

On considère T_k le $2n-1$-courant dual à $\frac{\nabla s_k}{ks_k}$. Alors on a $dT_k = \frac{Z_k}{k} - \frac{1}{2\pi}PD(\omega)$ (Poincaré-Lelong). Il s'agit donc de montrer $\int_V |\frac{\nabla s_k}{ks_k}|d\mu = O(k^{-1/2})$. Cette fois la norme est prise par rapport à la métrique g et non plus g_k. Pour la métrique g_k, ça devient $k^{-1/2}\int_V |\frac{\nabla s_k}{ks_k}|_{g_k}d\mu$. On termine avec la formule de co-aire.

4. FIBRATIONS DE LEFSCHETZ EN DIMENSION 4

4.1. Description topologique

Nous décrivons ici la topologie d'une fibration de Lefschetz $V^4\to S^2$.

S'il n'y a pas de valeur critique, alors on a une vraie fibration différentiable. Celle-ci est triviale sauf si $g\le 1$, auquel cas elle est classée par un élément de $\pi_1\mathrm{Diff}F$ (cf. [Hi]).

Supposons maintenant que l'ensemble $S=\{t_1,\cdots,t_k\}$ des valeurs critiques est non vide. Cette description est celle de Picard-Lefschetz dans le cadre topologique [Le] [Ar-V] [Moi] [Mats].

Soit t_0 un point différent des t_i, alors $p^{-1}(0)=F$ est une surface lisse de genre g (fibre générique). Soient D_i des disques disjoints contenant les t_i. Choisissons des arcs $\alpha_i\subset S^2\setminus\cup D_i$ disjoints reliant t_0 aux bords ∂D_i. On ordonne les t_i de sorte que, si ℓ_i est un lacet positif paramétrant ∂D_i, on a

$$\prod_{i=1}^{r}\alpha_i\ell_i\alpha_i^{-1}\simeq 1. \tag{7}$$

Alors à chaque valeur critique t_i est associé un *cycle évanescent* : c'est une courbe fermée simple sur F bien définie à homotopie près, telle que F_i s'obtienne à partir de F en pinçant γ_i. La restriction $p:p^{-1}(D_i)\to D_i$ admet un modèle différentiable $U(\gamma_i)\to\mathbb{D}$ déterminé par γ_i. Explicitement, $U(\gamma_i)=(F\setminus A_i)\times\mathbb{D}\cup U_0/_\sim$, où A_i est un anneau autour de γ_i et U_0 est le voisinage standard

$$U_0=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid |x^2+y^2|\le 1 \text{ et } |xy|\le 1\}.$$

Le recollement se fait le long de la partie du bord $\partial_0U_0=\{(x,y)\in U_0\mid |xy|=1\}$, qu'on identifie à $\partial A_i\times\mathbb{D}$.

Cette description implique que la monodromie de la restriction $p^{-1}(\partial D_i)\to\partial D_i$ est le *twist de Dehn négatif* T_{γ_i} le long de γ_i. En particulier, homologiquement on a

$T_\gamma(\delta) = \delta - (\gamma.\delta)\,\gamma$. Nous considérerons T_{γ_i} comme un élément de $\pi_0(\mathrm{Diff}^+ F)$, qui n'est autre que le *mapping class group* $\mathcal{M}_g$.

Remarque.— Modulo l'action de Diff$F$ il y a $[g/2]+1$ possibilités pour γ_i suivant qu'elle est non homologue à zéro ou qu'elle coupe la fibre singulière F_i en deux morceaux $F_{i,1}$, $F_{i,2}$ de genres $g_1 \leq [g/2]$, $g_2 = g - g_1$. Si γ_i est contractile, alors $g_1 = 0$. De plus, les égalités homologiques $F_i^2 = 0 = F_i.F_{i,1}$ impliquent $F_{i,1}^2 = -1$ c'est-à-dire que $F_{i,1}$ est une courbe exceptionnelle. On peut la contracter et arriver ainsi en répétant cette opération à une fibration de Lefschetz *relativement minimale*, c'est-à-dire sans courbe exceptionnelle dans les fibres. Si de plus la fibration est symplectique, alors cette opération peut se faire dans le cadre symplectique. On ne perdra donc rien à se limiter aux fibrations relativement minimales.

La relation (7) implique que les γ_i vérifient $\prod_{i=1}^{r} T_{\gamma_i} = 1$. Réciproquement, si on se donne des courbes $\gamma_1, \cdots, \gamma_r$ telles que $\prod T_{\gamma_i} = 1$, alors cela définit une fibration de Lefschetz unique à isomorphisme près : on la construit d'abord sur un disque U voisinage régulier de la réunion des α_i. La monodromie le long du bord ∂U est alors $\prod T_{\gamma_i}$, donc la fibration est triviale au-dessus de ∂U. Elle peut s'étendre en une fibration triviale au-dessus de $S^2 \setminus U$, l'extension étant unique si $g \geq 2$ (pour avoir $\pi_1(\mathrm{Diff}F) = 1$).

La suite ordonnée des courbes γ_i (ou plutôt leurs classes d'homotopie) dépend du choix des α_i à homotopie près. Si l'on change ceux-ci, on remplace cette suite par une suite équivalente, où l'équivalence est engendrée par les opérations élémentaires

$$E_i : \begin{cases} \gamma_j \to \gamma_j & j \neq i, i+1 \\ \gamma_i \to T_{\gamma_i}(\gamma_{i+1}) \\ \gamma_{i+1} \to \gamma_i. \end{cases}$$

Autrement dit : si $B = S^2 \setminus \cup D_i$, la monodromie $h : \pi_1 B \to \pi_0 \,\mathrm{Diff}\, F$ peut être remplacée par $h \circ \psi$ où ψ est un automorphisme du groupe libre $\pi_1 B$.

On arrive ainsi à la classification des fibrations de Lefschetz ayant au moins une fibre singulière.

PROPOSITION 13 [Mats].— *Les classes d'isomorphisme de fibrations de Lefschetz $V \to S^2$ ayant $r \geq 1$ fibres singulières et dont la fibre générique F est de genre $g \geq 2$, sont en bijection avec les classes d'équivalence de r-uples $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ de courbes fermées simples sur F, tels que* $\prod_{i=1}^{r} T_{\gamma_i} = 1$.

Remarque.— Dans cette proposition il s'agit de l'isomorphisme *marqué* : $(V, F) \to (V', F')$. Pour avoir l'isomorphisme non marqué, on élargit l'équivalence en ajoutant l'action de $\pi_0 \operatorname{Diff} F$.

En résumé, pour construire une fibration de Lefschetz de genre $g \geq 2$, il faut partir d'une relation $T_1 \cdots T_k = 1$ ne faisant intervenir que des twists à une puissance positive dans $\mathcal{M}_g$. En principe, on peut espérer les trouver grâce à la présentation de $\mathcal{M}_g$ donnée par Gervais et Luo [Lu] : il est engendré par tous les twists, et les relations sont celles qui ont lieu dans une sous-surface de type $S_{0,4}$ (sphère à 4 trous) ou $S_{1,1}$ (tore à un trou).

Pour des exemples explicites dans $\mathcal{M}_2$, voir [Mats].

4.2. Réalisation et description globale

Nous montrons ici un résulat de Gompf : presque toute fibration de Lefschetz $V \to S^2$ a une structure symplectique compatible, c'est-à-dire une forme symplectique ω qui est strictement positive sur les fibres, lisses ou non. La preuve est une variante singulière de la construction des fibrations symplectiques de Thurston [Th].

PROPOSITION 14.— *Soit $V \to S^2$ une fibration de Lefschetz de genre g. Alors, sauf si $g = 1$ et si la fibration est régulière et non triviale, il existe une structure symplectique compatible.*

Si le genre est zéro, alors d'après les résultats de McDuff [McD] [La-Mc], la structure symplectique est déterminée à isotopie près par l'aire symplectique des fibres et celle d'une section [qui existe toujours]. En général, elle est déterminée à déformation près.

Démonstration.— On peut supposer la fibration relativement minimale. Nous allons distinguer 3 cas suivant le genre de la fibre générique.

1) Si $g = 0$, alors la minimalité implique qu'il n'y a aucune fibre singulière, donc on a une vraie fibration différentiable (orientée) de base et de fibre S^2. Il y en a exactement deux (cf. [Hi]), la non triviale étant isomorphe aux surfaces de Hirzebruch Σ_n avec n impair. Celles-ci étant algébriques, le résultat est immédiat.

2) Si $g = 1$ et s'il n'y a pas de fibre singulière, alors p est une vraie fibration, classée par un élément de $\pi_1 \operatorname{Diff} F$. À isotopie près, cet élément est une rotation de n tours autour d'un des facteurs S^1. Si $n \neq 0$, alors $H_2(V; \mathbb{Q}) = 0$ (par exemple, si $n = 1$ on a $V = S^1 \times S^3$) donc V n'a pas de structure symplectique.

Sinon, d'après A. Kas et B. Moishezon [Ka] [Mo], V est isomorphe à une somme directe de k exemplaires de $V_1 = \mathbb{CP}^2 \# 9\overline{\mathbb{CP}^2}$, où V_1 est la fibration obtenue à partir d'un pinceau de cubiques en éclatant les 9 points base. L'unicité de la somme directe n'est pas évidente a priori car $\pi_1 \operatorname{Diff} F$ est non nul, mais elle est vraie. Comme V_1 est algébrique, elle a une structure symplectique compatible et il en est de même de tous les V_k.

Notons que l'on peut réaliser V_k comme surface algébrique elliptique (cf. [Go]) (en particulier, V_2 se réalise comme surface K3). Par ailleurs, V_k est irréductible si $k \geq 2$ [Go]. Donc elle n'est pas associée à un pinceau de Lefschetz hyperplan !

3) Supposons maintenant $g \geq 2$. S'il n'y a pas de fibre singulière, on a une fibration triviale, donc il y a bien une structure symplectique compatible.

Supposons maintenant qu'il y a des fibres singulières. Alors l'image réciproque de $B = S^2 \backslash \cup_{i=0}^{r} D_i$ est isomorphe à $\widetilde{B} \times F / \pi_1(B)$, où $\pi_1(B)$ agit sur F via la monodromie $\rho : \pi_1(B) = F_r \to \operatorname{Diff}(F)$, qui envoie ∂D_i sur le twist de Dehn T_{γ_i}. Comme on peut réaliser ces twists par des difféomorphismes préservant l'aire, la 2-forme d'aire ω_F existe sur $\pi^{-1}(B)$.

Il reste à recoller les voisinages U_i des G_i. Notons que ce recollement est unique à isotopie près à cause de la trivialité de $\pi_1 \operatorname{Diff}(F)$. Comme U_i a un modèle kählérien (obtenu en partant d'une courbe algébrique ayant un point double et en la déformant dans l'espace modulaire $\mathfrak{M}_g$), elle est munie d'une forme ω_i positive sur les fibres. L'unicité du recollement plus le lemme de Moser impliquent que, si l'on a normalisé de sorte que les fibres aient la même aire pour ω_i et ω_F, alors celles-ci sont isotopes sur un voisinage du bord. Donc on peut faire le recollement de sorte qu'elles coïncident, ce qui permet d'étendre ω_F à une forme symplectique sur V tout entier.

4.3. Un contre-exemple

L'existence d'une structure de pinceau de Lefschetz sur toute variété symplectique entière montre qu'il n'y a pas de preuve topologique du théorème de Lefschetz "vache" ($\wedge \omega$ est un isomorphisme de $H^1(V;\mathbb{Q})$ sur $H^3(V,\mathbb{Q})$). En effet, il y a beaucoup de variétés symplectiques V^4 ne vérifiant pas cette propriété, par exemple la variété de Kodaira-Thurston ou plus généralement toute variété à b_1 impair (cf. [Math]).

Ceci donne une réponse négative à une question de Kas (problème 4.38 dans [Ki]) : il existe un $g \geq 2$ et des courbes $\gamma_1, \cdots, \gamma_r$ sur la surface Σ de genre g, tels que les twists de Dehn associés vérifient $T_1 \cdots T_r = 1$, mais le sous-espace $\Gamma \subset H_1(\Sigma;\mathbb{Q})$ engendré par les $[\gamma_i]$ n'est pas symplectique, ou même est de dimension impaire.

Remarques finales. Tout récemment [juillet 1998], Auroux a obtenu un nouveau résultat séduisant en poussant "un cran plus loin" la construction de Donaldson (trois sections au lieu de deux) : toute variété symplectique de dimension 4 est un revêtement de $\mathbb{CP}^2$ ramifié au-dessus d'une courbe J-holomorphe à singularités points doubles et cusps ordinaires, pour un J calibré par la forme symplectique standard.

Signalons aussi deux preprints : celui de R. Paoletti [Pao], qui raffine le résultat d'Auroux sur les fibrés de rang supérieur, et celui d'Amoros et al. [Am-Bo] qui construit "à la main" (c'est-à-dire en donnant explicitement la monodromie) des fibrations de Lefschetz en dimension 4 réalisant n'importe quel groupe fondamental.

BIBLIOGRAPHIE

[Am-Bo] J. AMORÓS, F. BOGOMOLOV, L. KATZARKOV, T. PANTEV - *Symplectic Lefschetz fibrations with arbitrary fundamental groups*, preprint math/9810042.

[Ar-V] V. ARNOLD, A. VARCHENKO, S. GOUSSEIN-ZADÉ - *Singularités des applications différentiables*, Mir, Moscou 1986.

[Aud] M. AUDIN - *Cohomologie quantique*, Sém. Bourbaki, exp. n° 806, nov. 1995, Astérisque **241** (1997), 29-58.

[Aur1] D. AUROUX - *Asymptotically holomorphic families of symplectic submanifolds*, GAFA **7** (1997), 971-995.

[Aur2] D. AUROUX - *Symplectic 4-manifolds as branched coverings of* $\mathbb{CP}^2$, prépublication Ecole Polytechnique, 1998.

[Be-Ri] R. BENEDETTI, J.-J. RISLER - *Real algebraic and semi-algebraic sets*, Hermann, 1990.

[Bi] J. BIRMAN - *Braids, links and the mapping class group*, Princeton Ann. Math. Stud. 82, 1975.

[Bo-K] F. BOGOMOLOV, L. KATZARKOV - *Symplectic four-manifolds and projective surfaces*, Topology and its Appl. **88** (1998), 79-109.

[D1] S.K. DONALDSON - *Symplectic submanifolds and almost-complex geometry*, J. Diff. Geom. **44** (1996), 666-705.

[D2] S.K. DONALDSON - en préparation.

[Ge] S. GERVAIS - *Presentations and central extensions of mapping class groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 3097-3132.

[Go] R. GOMPF - *New constructions of symplectic manifolds*, Annals of Math. **142** (1995), 527-595.

[Gri-Ha] P. GRIFFITHS, J. HARRIS - *Principles of algebraic geometry*, Wiley, 1978.

[Gr1] M. GROMOV - *Partial differential relations*, Springer Ergebnisse **9**, 1986.

[Gr2] M. GROMOV - *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 307-347.

[He-Lei] G.M. HENKIN, J. LEITERER - *Theory of functions on complex manifolds*, Akademie-Verlag, Berlin 1984.

[Hi] J.A. HILLMAN - *The algebraic characterization of geometric* 4*-manifolds*, London Math. Soc. Lect. Notes **198**, Cambridge Univ. Press., 1994.

[Ka] A. KAS - *On the deformation type of regular elliptic surfaces*, Complex analysis and algebraic geometry, ed. by W.L. Bailey and T. Shioda, Iwanami-Shoten and Cambridge Univ. Press 1978, 107-112.

[Ki] R. KIRBY - *Problems in low-dimensional topology*, Geometric topology 2, W.H. Kazez ed., Studies in Advanced Math., Amer. Math. Soc. and International Press 1997, 35-473.

[Kod1] K. KODAIRA - *On Kähler varieties of restricted type. An intrinsic characterization of algebraic varieties*, Annals of Math. **60** (1954), 28-48.

[Kod2] K. KODAIRA - *On the structure of compact complex analytic surfaces*, Amer. J. Math. **86** (1964), 751-798.

[Kot] D. KOTSCHICK - *The Seiberg-Witten invariants of symplectic four-manifolds (after C.H. Taubes)*, Sém. Bourbaki, exp. n° 812, fév. 1996, Astérisque **241** (1997), 195-220.

[La-Mc] F. LALONDE, D. MCDUFF - *J-curves and the classification of symplectic four-manifolds*, Contact and symplectic geometry, ed. C.C. Thomas, Publ. Newton Inst. 8 (1996), Cambridge Univ. Press.

[Lef] S. LEFSCHETZ - *L'analysis situs dans la géométrie algébrique*, Gauthier-Villars 1924.

[Lu] F. LUO, *A presentation of the mapping class groups*, Math. Res. Letters **4** (1997), 735-739.

[Math] O. MATHIEU - *Harmonic cohomology classes of symplectic manifolds*, Comment. Math. Helv. **70** (1995), 1-9.

[Mats] Y. MATSUMOTO - *Lefschetz fibrations of genus two - A topological approach*, Proc. of the 37th Taniguchi Symposium on Topology and Teichmüller spaces, World 1996, 123-148.

[McD] D. MCDUFF - *Notes on ruled symplectic* 4*-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc.

645 (1994), 623-639.

[Mo] B. MOISHEZON - *Complex surfaces and connected sums of complex projective planes*, Springer Lect. Notes in Math. **603**, 1977.

[Pao] R. PAOLETTI, *Symplectic subvarieties of projective fibrations over symplectic manifolds*, preprint, Universitá di Pavia, 1998.

[Ta] C.H. TAUBES - *SW $\Rightarrow$ Gr, From the Seiberg-Witten equations to pseudoholomorphic curves*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 845-918.

[Th] W. THURSTON - *Some simple examples of symplectic manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **55** (1976), 467-468.

[Y] Y. YOMDIN - *The geometry of critical and near-critical values of differentiable mappings*, Math. Annalen **264** (1983), 495-515.

Jean–Claude SIKORAV
Université Paul Sabatier
Laboratoire Émile Picard
UMR 5580 du CNRS
118, route de Narbonne
F–31062 TOULOUSE Cedex 4
E–mail : sikorav@picard.ups-tlse.fr