Astérisque

JOSEPH OESTERLÉ

Quantification formelle des variétés de Poisson

Astérisque, tome 252 (1998), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 843, p. 211-229
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1997-1998__40__211_0>

Séminaire BOURBAKI Mars 1998
50ème année, 1997-98, n° 843

QUANTIFICATION FORMELLE DES VARIÉTÉS DE POISSON
[d'après Maxim Kontsevich]

par **Joseph OESTERLÉ**

1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME ET DES RÉSULTATS

1.1. Le cadre algébrique

Soient k un anneau commutatif, A une k-algèbre et t une indéterminée. Une *déformation à* $\mathrm{A}[[t]]$ *de la multiplication de* A est une loi de composition $k[[t]]$-bilinéaire $*$ sur $\mathrm{A}[[t]]$ dont la réduction $\bmod t$ est la multiplication de A. Une telle loi est continue pour la topologie t-adique, donc déterminée par sa restriction à $\mathrm{A} \times \mathrm{A}$:

$$a * b = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}_n(a,b) t^n \qquad (a, b \in \mathrm{A}), \tag{1}$$

où les B_n sont des applications k-bilinéaires de $\mathrm{A} \times \mathrm{A}$ dans A, avec $\mathrm{B}_0(a,b) = ab$. On écrit par abus $* = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}_n t^n$. Pour que $*$ soit associative, il faut et il suffit que, pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{i+j=n} \mathrm{B}_i(\mathrm{B}_j(a,b),c) = \sum_{i+j=n} \mathrm{B}_i(a, \mathrm{B}_j(b,c)) \qquad (a, b, c \in \mathrm{A}). \tag{2}$$

Deux déformations $* = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}_n t^n$ et $*' = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}'_n t^n$ de la multiplication de A sont dites *équivalentes* s'il existe un automorphisme g du $k[[t]]$-module $\mathrm{A}[[t]]$, congru $\bmod t$ à l'identité de A, tel que

$$g(u * v) = g(u) *' g(v) \qquad (\text{pour } u, v \in \mathrm{A}[[t]]). \tag{3}$$

L'automorphisme g est déterminé par sa restriction à A :

$$g(a) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(a) t^n \qquad (a \in \mathrm{A}), \tag{4}$$

où les g_n sont des applications k-linéaires de A dans A, avec $g_0(a) = a$; la relation (3) équivaut à la suite de relations

$$\sum_{r+s=n} g_r(\mathrm{B}_s(a,b)) = \sum_{i+j+l=n} \mathrm{B}'_l(g_i(a), g_j(b)) \qquad (a, b \in \mathrm{A}). \tag{5}$$

Remarque. — Lorsque l'algèbre A est associative et possède un élément unité 1, toute déformation associative à A[[t]] de la multiplication de A possède un élément unité, et est équivalente à une déformation pour laquelle cet élément unité est 1.

Supposons désormais l'algèbre A associative et *commutative.* Soit $* = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}_n t^n$ une déformation associative (mais pas nécessairement commutative) de la multiplication de A à A[[t]]. Pour a, b dans A, posons

$$\{a, b\} = \mathrm{B}_1(a,b) - \mathrm{B}_1(b,a). \tag{6}$$

On obtient ainsi un *crochet de Poisson* sur la k-algèbre A, *i.e.* une loi de composition k-bilinéaire sur A telle que

$$\{a, a\} = 0\,, \tag{7}$$

$$\{a, \{b, c\}\} + \{b, \{c, a\}\} + \{c, \{a, b\}\} = 0\,, \tag{8}$$

$$\{ab, c\} = a\{b, c\} + \{a, c\}b\,. \tag{9}$$

En effet, $(u, v) \mapsto [u, v] = (u * v - v * u)/t$ est un crochet de Lie sur le $k[[t]]$-module A[[t]] ; sa réduction $\bmod t$ est le crochet $(a, b) \mapsto \{a, b\}$ sur A, d'où (7) et (8). De même (9) résulte de l'identité $[u*v, w] = u*[v, w] + [u, w]*v$ (où u, v, w $\in$ A[[t]]).

Le crochet de Poisson (6) ne dépend que de la classe d'équivalence de la déformation $*$. En effet, si $*'$ est une déformation équivalente à $*$, il existe d'après (5) une application k-linéaire $g_1 : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ telle que $g_1(ab) + \mathrm{B}_1(a,b) = \mathrm{B}'_1(a,b) + g_1(a)b + ag_1(b)$, et l'on a donc $\mathrm{B}_1(a,b) - \mathrm{B}_1(b,a) = \mathrm{B}'_1(a,b) - \mathrm{B}'_1(b,a)$.

Tout crochet de Poisson sur A s'obtient-il de cette façon ? Le théorème de Kontsevich, objet de cet exposé et qui sera précisé en 1.4 et 1.5, affirme que oui lorsque A est l'algèbre des fonctions lisses sur une variété différentielle de classe C^∞. C'est d'autant plus surprenant que la réponse est négative pour certaines algèbres de dimension finie sur $\mathbf{C}$, ainsi que l'a montré O. Mathieu ([4]).

1.2. Variétés de Poisson

Sauf mention du contraire, les variétés différentielles considérées dans cet exposé sont de classe C^∞, localement de dimension finie, paracompactes et séparées. Les formes différentielles, champs de vecteurs ou de tenseurs, opérateurs différentiels, etc. sont supposés de classe C^∞.

DÉFINITION 1. — *Une* variété de Poisson *est une variété différentielle dont l'algèbre des fonctions de classe* C^∞ *est munie d'un crochet de Poisson.*

Toute dérivation de l'algèbre A des fonctions de classe C^∞ sur une variété différentielle X est de la forme $f \mapsto df(\xi)$, où ξ un champ de vecteurs sur X. Par suite, les applications $\mathbf{R}$-bilinéaires $(f,g) \mapsto \{f,g\}$ de $A \times A$ dans A qui satisfont les relations (7) et (9) sont celles qui s'écrivent

$$\{f,g\} = (df \wedge dg)(u)\,, \tag{10}$$

où u est un champ de bivecteurs sur X, *i.e.* une section (de classe C^∞) du fibré $\Lambda^2(T(X))$; pour qu'une telle application soit un crochet de Poisson, *i.e.* satisfasse la relation (8), il faut et il suffit que l'on ait

$$[u,u] = 0\,, \tag{11}$$

où $[\ ,\ ]$ est le crochet de Schouten-Nijenhuis (appendice, n° 3, exemple 3). On dit alors que u est *le champ de bivecteurs définissant la structure de Poisson.*

Exemple. — Les variétés symplectiques sont des cas particuliers de variétés de Poisson. En effet, soient X une variété différentielle, ω une 2-forme sur X dont la valeur en chaque point $x \in X$ est une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur l'espace tangent $T_x(X)$, et u le champ de bivecteurs qui, pour tout $x \in X$, définit sur $T_x(X)^*$ la forme bilinéaire inverse de la précédente. Pour que l'on ait $[u,u] = 0$, il faut et il suffit que l'on ait $d\omega = 0$.

1.3. Star-produits

Soient X une variété différentielle et A l'algèbre sur $\mathbf{R}$ des fonctions de classe C^∞ sur X. Une application $P : A^m \to A$ est un *opérateur multidifférentiel* si :

a) elle est *de nature locale*, *i.e.* la valeur de $P(f_1, \ldots, f_m)$ en un point ne dépend que des germes de $f_1, \ldots, f_m$ en ce point ;

b) la variété X possède un recouvrement par des cartes dans lesquelles P s'écrit $P(f_1, \ldots, f_m) = \sum a_{\nu_1,\ldots,\nu_m} \partial^{\nu_1} f_1 \ldots \partial^{\nu_m} f_m$, où les ν_i sont des multi-indices et $(a_{\nu_1,\ldots,\nu_m})$ une famille à support fini de fonctions de classe C^∞.

(En fait, toute application $\mathbf{R}$-multilinéaire $\mathrm{P} : \mathrm{A}^m \to \mathrm{A}$ qui est de nature locale est un opérateur multidifférentiel. Cela résulte d'un théorème de J. Peetre pour $m = 1$, et le cas général s'en déduit aisément.)

DÉFINITION 2. — *Un* star-produit *sur* X *est une déformation associative* $* = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}_n t^n$ *de la multiplication de* A *à* $\mathrm{A}[[t]]$, *où les* $\mathrm{B}_n : \mathrm{A} \times \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ *sont des opérateurs bidifférentiels.*

Deux star-produits sur X sont dits *équivalents* s'il existe une suite d'opérateurs différentiels $g_n : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$, avec $g_0 = \mathrm{Id}_\mathrm{A}$, pour lesquels les relations (3) et (4) sont satisfaites.

Remarque. — On trouve dans la littérature des variantes de ces définitions : certains auteurs exigent qu'un star-produit admette 1 pour élément unité, et qu'une équivalence entre star-produits provienne d'un automorphisme de $\mathrm{A}[[t]]$ qui fixe 1 ; une variante de la remarque de 1.1 permet de se ramener à ce cadre. D'autres auteurs exigent que les opérateurs multidifférentiels B_n et g_n soient globalement d'ordre borné ; ce que nous dirons dans la suite de cet exposé est aussi valable dans ce cas.

À tout star-produit sur X est associé un crochet de Poisson sur A, défini par la formule (6) : il exprime le défaut de commutativité à l'ordre 1 du star-produit, et ne dépend que de sa classe d'équivalence. On appelle *quantification formelle* d'une variété de Poisson X un star-produit sur X dont le crochet de Poisson associé est celui qui définit la structure de Poisson de X. Pour l'origine de cette terminologie et les motivations physiques, on pourra consulter [1] et [5].

Exemple 1. — Munissons $\mathbf{R}^2$ de la structure de Poisson définie par le champ de bivecteurs $\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$: on a $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$. Une quantification formelle de cette variété de Poisson est donnée par $f * g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{\partial^n g}{\partial y^n}\frac{t^n}{n!}$.

Exemple 2. — L'exemple 1 se généralise comme suit. Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie, X une partie ouverte d'un espace affine de direction V, et u un élément de $\mathbf{\Lambda}^2(\mathrm{V})$. On peut considérer u comme un champ de bivecteurs constant sur X ; il satisfait la relation $[u, u] = 0$ et définit donc une structure de Poisson sur X. Soient τ un antécédent de u dans $\mathbf{T}^2(\mathrm{V})$ et $\widetilde{\tau}$ l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{X} \times \mathrm{X})$ défini par $\widetilde{\tau}(\varphi) = (d_x\varphi \otimes d_y\varphi)(\tau)$. Posons $f * g = \exp(t\widetilde{\tau})(f(x)g(y))_{|x=y}$. Dans un système linéaire (x_i) de coordonnées sur X, cette formule s'écrit

$$f * g = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{i_1, j_1, \dots i_n, j_n} \tau_{i_1, j_1} \dots \tau_{i_n, j_n} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} \frac{\partial^n g}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_n}} \Big) \frac{t^n}{n!}. \tag{12}$$

On définit ainsi une quantification formelle de X. Sa classe d'équivalence ne dépend pas du choix de τ. Lorsque τ est l'antécédent antisymétrique de u dans $\mathsf{T}^2(\mathrm{V})$, le star-produit (12) s'appelle le *produit de Moyal-Weyl* associé à u.

1.4. Quantifications formelles des variétés de Poisson. Le cas affine

Disons qu'un atlas d'une variété différentielle est *affine* si les applications de changement de cartes coïncident au voisinage de chaque point avec des applications linéaires affines. Disons que deux atlas affines d'une même variété sont (affinement) *équivalents* si leur réunion est un atlas affine. Appelons *variété différentielle affine* une variété différentielle munie d'une classe d'atlas affines équivalents ou, ce qui est équivalent, d'une connexion plate et sans torsion sur la variété (celle qui dans les cartes des atlas considérés est triviale).

1.4.1. La quantification formelle canonique d'une variété de Poisson affine

THÉORÈME 1 (Kontsevich [3]). — *Sur une variété différentielle affine, toute structure de Poisson possède une quantification formelle canonique.*

Soient X une variété différentielle et A l'algèbre des fonctions de classe C^∞ sur X. Pour tout $n \geq 0$, notons $\mathcal{T}_n(\mathrm{X})$ l'espace vectoriel des champs de multivecteurs d'ordre n sur X (*i.e.* des sections de classe C^∞ du fibré $\mathbf{\Lambda}^n(\mathrm{T}(\mathrm{X}))$), et $\mathcal{P}_n(\mathrm{X})$ celui des opérateurs multidifférentiels de A^n dans A (cf. 1.3). La multiplication de A est un élément μ de $\mathcal{P}_2(\mathrm{X})$. Notons $[\ ,\ ]_\mathcal{T}$ le crochet de Schouten-Nijenhuis sur $\mathcal{T}(\mathrm{X}) = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} \mathcal{T}_n(\mathrm{X})$ et $[\ ,\ ]_\mathcal{P}$ celui de Gerstenhaber sur $\mathcal{P}(\mathrm{X}) = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} \mathcal{P}_n(\mathrm{X})$ (appendice, n$^{\text{os}}$ 2 et 3). L'injection canonique $\iota : \mathcal{T}(\mathrm{X}) \to \mathcal{P}(\mathrm{X})$ (appendice, n° 4) n'est pas compatible avec ces crochets.

Se donner un star-produit sur X équivaut à se donner un élément $\mathrm{B} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}_n t^n$ de $\mathcal{P}_2(\mathrm{X})[[t]]$ tel que $\mathrm{B}_0 = \mu$ et $[\mathrm{B},\mathrm{B}]_\mathcal{P} = 0$ (en notant encore $[\ ,\ ]_\mathcal{P}$ le prolongement $\mathbf{R}[[t]]$-bilinéaire du crochet de Gerstenhaber à $\mathcal{P}(\mathrm{X})[[t]]$), cette dernière condition traduisant l'associativité de B (appendice, n° 2, exemple).

L'idée de la démonstration du th. 1 est la suivante. S'il existait une série formelle canonique φ sur $\mathcal{T}(\mathrm{X})$, à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathrm{X})$, telle que $\varphi(0) = \mu$, $d_0\varphi = \iota$, $d_u\varphi([u,u]_\mathcal{T}) = [\varphi(u),\varphi(u)]_\mathcal{P}$, et qui sur $\mathcal{T}_2(\mathrm{X})$ était à valeurs dans $\mathcal{P}_2(\mathrm{X})$, toute structure de Poisson sur X posséderait une quantification formelle canonique, à savoir $\varphi(tu)$, où $u \in \mathcal{T}_2(\mathrm{X})$ est le champ de bivecteurs définissant la structure de Poisson : en effet, en écrivant $\varphi(tu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}_n t^n$, on aurait $\mathrm{B}_0 = \varphi(0) = \mu$, $\mathrm{B}_1 = (d_0\varphi)(u) = \iota(u)$ d'où $\mathrm{B}_1(a,b) = \frac{1}{2}\{a,b\}_u$ et $\mathrm{B}_1(a,b) - \mathrm{B}_1(b,a) = \{a,b\}_u$, et $[\varphi(tu),\varphi(tu)]_{\mathcal{P}} = (d_{tu}\varphi)([tu,tu]_{\mathcal{T}}) = t^2(d_{tu}\varphi)([u,u]_{\mathcal{T}}) = 0$ puisque $[u,u]_{\mathcal{T}} = 0$.

C'est essentiellement la démarche suivie par Kontsevich, à ceci près qu'au lieu des séries formelles usuelles, il utilise des variantes graduées gauches de ces séries. Précisons cela.

Soient V et W deux espaces vectoriels sur un corps infini k. Notons $\mathbf{T}(\mathrm{V}) = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{T}^n(\mathrm{V})$ l'espace vectoriel des tenseurs contravariants sur V ; il est muni d'une structure de cogèbre (appendice, n° 2). Le sous-ensemble $\mathbf{TS}(\mathrm{V}) = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{TS}^n(\mathrm{V})$ formé des tenseurs symétriques est une sous-cogèbre de $\mathbf{T}(\mathrm{V})$. Se donner une application polynomiale P, homogène de degré n, de V dans W équivaut à se donner une application k-linéaire $\widetilde{\mathrm{P}} : \mathbf{TS}^n(\mathrm{V}) \to \mathrm{W}$, ces deux applications étant liées par la relation $\mathrm{P}(x) = \widetilde{\mathrm{P}}(x\otimes\ldots\otimes x)$. Se donner une série formelle sur V à valeurs dans W équivaut donc à se donner une application k-linéaire de $\mathbf{TS}(\mathrm{V})$ dans W.

Soit maintenant $\mathrm{V} = \bigoplus_{p\in\mathbf{Z}} \mathrm{V}_p$ un k-espace vectoriel gradué de type $\mathbf{Z}$. On définit une opération du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbf{T}^n(\mathrm{V})$, associée au facteur de commutation ε sur $\mathbf{Z}$ défini par $\varepsilon_{p,q} = (-1)^{pq}$, en posant pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $x_1,\ldots,x_n$ éléments homogènes de V

$$\sigma(x_1\otimes\ldots\otimes x_n) = \Big(\prod_{\substack{i<j\\ \sigma(i)>\sigma(j)}} \varepsilon_{\deg x_i,\deg x_j}\Big)\, x_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\ldots\otimes x_{\sigma^{-1}(n)}\,. \tag{13}$$

Notons $\mathbf{TS}_g^n(\mathrm{V})$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{T}^n(\mathrm{V})$ formé des éléments invariants pour cette action. Munissons $\mathbf{T}(\mathrm{V})$ de la graduation déduite de celle de V (et non de celle définie par la décomposition en somme directe $\bigoplus_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{T}^n(\mathrm{V})$). Cette graduation est compatible avec la structure de cogèbre, et $\mathbf{TS}_g(\mathrm{V}) = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{TS}_g^n(\mathrm{V})$ est une sous-cogèbre graduée de $\mathbf{T}(\mathrm{V})$. Par analogie avec l'alinéa précédent, nous dirons qu'une application k-linéaire, graduée de degré 0, de $\mathbf{TS}_g(\mathrm{V})$ dans un espace vectoriel gradué W est une *série formelle graduée gauche sur* V *à valeurs dans* W. Une telle série définit par restriction une application k-linéaire de $\mathbf{TS}(\mathrm{V}_0)$ dans W_0, et donc une série formelle (au sens usuel) sur V_0 à valeurs dans W_0.

Soient X une variété différentielle *affine* et A l'algèbre $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{X})$. Notons V l'espace vectoriel $\mathcal{T}(\mathrm{X})$, muni de la graduation définie par $\mathrm{V}_p = \mathcal{T}_{p+2}(\mathrm{X})$ et W l'espace vectoriel $\mathcal{P}(\mathrm{X})$, muni de la graduation définie par $\mathrm{W}_p = \mathcal{P}_{p+2}(\mathrm{X})$. Kontsevich définit par des formules explicites, inspirées par la théorie des cordes, et que nous décrirons au §2, une série formelle graduée gauche canonique α sur V, à valeurs dans W, satisfaisant les conditions suivantes, où α_n désigne la restriction de α à $\mathsf{TS}_g^n(\mathrm{V})$:

a) On a $\alpha_0(1) = \mu$ (en identifiant $\mathsf{TS}_g^0(\mathrm{V})$ à $\mathbf{R}$).

b) L'application linéaire $\alpha_1 : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ est l'injection canonique $\iota : \mathcal{T}(\mathrm{X}) \to \mathcal{P}(\mathrm{X})$ (appendice, n° 4).

c) Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{TS}_g(\mathrm{V}) & \xrightarrow{(\alpha\otimes\alpha)\circ c} & \mathsf{TS}_g^2(\mathrm{W}) \\ {\scriptstyle \mathrm{D}_{\xi_\mathcal{T}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \xi_\mathcal{P}} \\ \mathsf{TS}_g(\mathrm{V}) & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{W} \end{array} \tag{14}$$

est commutatif. Précisons les notations employées :

– L'application linéaire $u\otimes v \mapsto (-1)^{\deg u}[u,v]_\mathcal{P}$ de $\mathrm{W}\otimes\mathrm{W}$ dans W est graduée de degré 1 et invariante pour l'opération de $\mathfrak{S}_2$ dans $\mathrm{W}\otimes\mathrm{W}$ définie par (13). On note $\xi_\mathcal{P}$ sa restriction à $\mathsf{TS}_g^2(\mathrm{W})$.

– L'application linéaire $u\otimes v \mapsto -(-1)^{\deg u}[v,u]_\mathcal{T}$ de $\mathrm{V}\otimes\mathrm{V}$ dans V est graduée de degré 1 et invariante pour l'opération de $\mathfrak{S}_2$ dans $\mathrm{V}\otimes\mathrm{V}$ définie par (13). On note $\xi_\mathcal{T}$ sa restriction à $\mathsf{TS}_g^2(\mathrm{V})$, et $\mathrm{D}_{\xi_\mathcal{T}}$ l'unique ε-codérivation de $\mathsf{TS}_g(\mathrm{V})$ dont la projection sur $\mathsf{TS}_g^1(\mathrm{V}) = \mathrm{V}$ coïncide avec $\xi_\mathcal{T}$ sur $\mathsf{TS}_g^2(\mathrm{V})$ et avec 0 sur $\mathsf{TS}_g^n(\mathrm{V})$ pour $n \neq 2$.

– On note c le coproduit de la cogèbre $\mathsf{TS}_g(\mathrm{V})$; il est induit par celui de $\mathsf{T}(\mathrm{V})$, dont la définition est rappelée dans la formule (3) de l'appendice, n° 2.

Le lecteur vérifiera que la commutativité du diagramme (14) est un analogue gradué gauche de la relation $d_u\varphi([u,u]_\mathcal{T}) = [\varphi(u),\varphi(u)]_\mathcal{P}$ intervenant dans l'approche heuristique ci-dessus.

La série formelle graduée gauche α définit une série formelle (au sens usuel) sur $\mathrm{V}_0 = \mathcal{T}_2(\mathrm{X})$ à valeurs dans $\mathrm{W}_0 = \mathcal{P}_2(\mathrm{X})$, à savoir

$$u \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}_n(u)\,, \qquad \text{où} \qquad \mathrm{B}_n(u) = \alpha(u^{\otimes n})\,. \tag{15}$$

On a $\mathrm{B}_0(u) = \mu$ d'après la condition a), et $\mathrm{B}_1(u) = \iota(u)$ d'après la condition b). En exprimant la commutativité de (14) pour $u^{\otimes n}$, où $u \in \mathcal{T}_2(\mathrm{X})$, on obtient

$$\sum_{i+j=n} [\alpha(u^{\otimes i}), \alpha(u^{\otimes j})]_{\mathcal{P}} = -\alpha(\sum_{i=0}^{n-2} u^{\otimes i} \otimes [u,u]_{\mathcal{T}} \otimes u^{\otimes(n-2-i)}) . \tag{16}$$

Supposons maintenant la variété différentielle affine X munie d'une structure de Poisson et notons u le champ de bivecteurs associé. On a $[u,u]_{\mathcal{T}} = 0$. La formule (16) s'écrit alors

$$\sum_{i+j=n} [\mathrm{B}_i(u), \mathrm{B}_j(u)]_{\mathcal{P}} = 0 . \tag{17}$$

Par suite $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}_n(u) t^n$ est un star-produit sur X, dont le crochet de Poisson associé est u. C'est la quantification formelle canonique de X évoquée dans le th. 1.

Remarque. — Lorsque X est un ouvert d'un espace affine et que la structure de Poisson est définie par un champ de bivecteurs constant (cf. 1.3, exemple 2), la quantification formelle canonique de X construite par Kontsevich n'est autre que le produit de Moyal-Weyl associé à u (*loc. cit.*) : cela résultera des formules explicites de 2.3.

1.4.2. Comparaison de deux foncteurs de déformation

Soient X une variété différentielle et A l'algèbre des fonctions de classe C^∞ sur X. Notons μ la multiplication de A. Considérons les deux foncteurs suivants, de la catégorie $\mathcal{R}$ des $\mathbf{R}$-algèbres artiniennes locales, de corps résiduel $\mathbf{R}$, dans la catégorie des ensembles :

a) *Le foncteur* $\mathrm{D}_0^{\mathrm{Poiss}}$ *des déformations du crochet de Poisson nul* : à un objet R de $\mathcal{R}$, d'idéal maximal $\mathfrak{m}_{\mathrm{R}}$, il associe l'ensemble des crochets de Poisson sur la R-algèbre $\mathrm{A}_{(\mathrm{R})}$ qui sont nuls $\mod \mathfrak{m}_{\mathrm{R}}$. Deux tels crochets de Poisson sont dits équivalents s'ils se déduisent l'un de l'autre par un automorphisme de la R-algèbre $\mathrm{A}_{(\mathrm{R})}$ congru à $1_{\mathrm{A}} \mod \mathfrak{m}_{\mathrm{R}}$. On note $\widetilde{\mathrm{D}}_0^{\mathrm{Poiss}}(\mathrm{R})$ l'ensemble des classes de cette relation d'équivalence.

b) *Le foncteur* $\mathrm{D}_\mu^{\mathrm{Ass}}$ *des déformations associatives (et bidifférentielles) de la multiplication de* A : à R il associe l'ensemble des lois de composition R-bilinéaires associatives sur le R-module $\mathrm{A}_{(\mathrm{R})}$ qui sont bidifférentielles (*i.e.* de la forme $(a,b) \mapsto \mathrm{B}(a,b)$, avec $\mathrm{B} \in \mathcal{P}_2(\mathrm{X})_{(\mathrm{R})}$) et se réduisent $\mod \mathfrak{m}_{\mathrm{R}}$ en la multiplication de A. Deux telles lois de composition sont dites équivalentes si elles se déduisent l'une de l'autre par un automorphisme du R-module $\mathrm{A}_{(\mathrm{R})}$, congru à $1_{\mathrm{A}} \mod \mathfrak{m}_{\mathrm{R}}$, et différentiel (*i.e.* de la forme $a \mapsto g(a)$, avec $g \in \mathcal{P}_1(\mathrm{X})_{(\mathrm{R})}$). On note $\widetilde{\mathrm{D}}_\mu^{\mathrm{Ass}}(\mathrm{R})$ l'ensemble des classes de cette relation d'équivalence.

Notons encore $[\ ,\ ]_{\mathcal{T}}$ et $[\ ,\ ]_{\mathcal{P}}$ les crochets sur $\mathcal{T}(\mathrm{X})_{(\mathrm{R})}$ et $\mathcal{P}(\mathrm{X})_{(\mathrm{R})}$ déduits par extension des scalaires des crochets de Schouten-Nijenhuis et de Gerstenhaber. Les éléments de $\mathrm{D}_0^{\mathrm{Poiss}}(\mathrm{R})$ correspondent bijectivement aux éléments u de $\mathcal{T}_2(\mathrm{X})_{(\mathrm{R})}$ tels que $[u,u]_{\mathcal{T}} = 0$, et qui sont nuls $\mod \mathfrak{m}_{\mathrm{R}}$. Les éléments de $\mathrm{D}_\mu^{\mathrm{Ass}}(\mathrm{R})$ correspondent bijectivement aux éléments B de $\mathcal{P}_2(\mathrm{X})_{(\mathrm{R})}$ tels que $[\mathrm{B},\mathrm{B}]_{\mathcal{P}} = 0$, et dont la réduction $\mod \mathfrak{m}_{\mathrm{R}}$ est μ.

Supposons que la variété différentielle X soit munie d'une structure affine. Alors $u \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}_n(u)$, où les B_n sont les applications polynomiales définies par (15), définit un morphisme canonique de foncteurs $\beta : \mathrm{D}_0^{\mathrm{Poiss}} \to \mathrm{D}_\mu^{\mathrm{Ass}}$. (Noter que pour u nul $\mod \mathfrak{m}_{\mathrm{R}}$, la famille $(\mathrm{B}_n(u))$ est à support fini, puisque l'idéal $\mathfrak{m}_{\mathrm{R}}$ est nilpotent.) Ce morphisme est compatible avec les relations d'équivalence considérées en a) et b), d'où un morphisme de foncteurs canonique $\widetilde{\beta} : \widetilde{\mathrm{D}}_0^{\mathrm{Poiss}} \to \widetilde{\mathrm{D}}_\mu^{\mathrm{Ass}}$.

THÉORÈME 2. — *Le morphisme de foncteurs $\widetilde{\beta} : \widetilde{\mathrm{D}}_0^{\mathrm{Poiss}} \to \widetilde{\mathrm{D}}_\mu^{\mathrm{Ass}}$ est un isomorphisme.*

C'est une conséquence formelle des résultats de 1.4.1 et du lemme suivant, qui est un analogue différentiable d'un théorème prouvé par Kostant-Hochschild-Rosenberg en géométrie algébrique :

Lemme. — Munissons le module gradué $\mathcal{T}[\mathrm{X}]$ de la différentielle nulle et le module gradué $\mathcal{P}[\mathrm{X}]$ de la différentielle $u \mapsto [\mu, u]_{\mathcal{P}}$. L'injection canonique $\iota : \mathcal{T}[\mathrm{X}] \to \mathcal{P}[\mathrm{X}]$ est un homologisme.

(Noter que la différentielle considérée sur $\mathcal{P}[\mathrm{X}]$ coïncide, à un signe près dépendant du degré, avec la différentielle induite par celle du complexe de Hochschild de A : cf. appendice, n° 2.)

1.4.3. Classification des star-produits sur une variété différentielle affine

Soient X une variété différentielle et A l'algèbre $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{X})$. Tout crochet de Poisson sur la $\mathbf{R}[[t]]$-algèbre $\mathrm{A}[[t]]$ est défini par un champ de bivecteurs formel $u \in \mathcal{T}_2(\mathrm{X})[[t]]$ tel que $[u,u]_{\mathcal{T}} = 0$. Le crochet de Poisson est nul $\mod t$ si et seulement si u est sans terme constant.

Supposons X munie d'une structure affine. L'application $u \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}_n(u)$, où les B_n sont les applications polynomiales définies par (15), associe à tout crochet de Poisson sur $\mathrm{A}[[t]]$ qui est nul $\mod t$ un star-produit. Elle définit par passage au quotient une bijection canonique de l'ensemble des classes d'équivalence (modulo le groupe des automorphismes de la $\mathbf{R}[[t]]$-algèbre $\mathrm{A}[[t]]$ congrus $\bmod t$ à l'identité de A) de structures de Poisson sur $\mathrm{A}[[t]]$ nulles $\bmod t$, sur l'ensemble des classes d'équivalence (au sens de 1.3) de star-produits sur X.

Cela résulte de 1.4.2, appliqué aux algèbres artiniennes $\mathbf{R}[[t]]/t^n\mathbf{R}[[t]]$, en passant à la limite projective.

1.5. Quantifications formelles des variétés de Poisson. Le cas général

Une fois connue l'existence d'une quantification formelle des variétés de Poisson affines, l'existence de quantifications formelles de toutes les variétés de Poisson devient un problème de recollement.

Dans le cas des variétés symplectiques, ce problème fut d'abord résolu par de Wilde et Lecomte [2], puis par d'autres auteurs, dont Fedosov. La méthode de Fedosov fut d'ailleurs exposée par A. Weinstein dans ce même séminaire en 1994 ([5]). (Noter que pour les variétés symplectiques, qui d'après un théorème de Darboux sont localement isomorphes à un espace affine muni d'une forme symplectique constante, l'existence de quantifications formelles locales résulte de l'exemple 2 de 1.3.)

Kontsevich, par des arguments voisins de ceux de Fedosov, démontre qu'il existe pour toute variété différentielle X une série formelle graduée gauche α sur $\mathcal{T}(\mathrm{X})$ à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ qui possède les propriétés décrites dans 1.4.1. Cette série dépend de certains choix, en particulier de celui d'une structure affine formelle sur X, mais l'isomorphisme entre les foncteurs $\widetilde{\mathrm{D}}_0^{\mathrm{Poiss}}$ et $\widetilde{\mathrm{D}}_\mu^{\mathrm{Ass}}$ qui s'en déduit comme en 1.4.2 n'en dépend pas. En conclusion :

THÉORÈME 4. — *Soient* X *une variété différentielle et* A *l'algèbre des fonctions de classe* C^∞ *sur* X. *Il existe un isomorphisme canonique entre le foncteur* $\widetilde{\mathrm{D}}_0^{\mathrm{Poiss}}$ *("classes d'équivalence de déformations de la structure de Poisson nulle sur* X*") et le foncteur* $\widetilde{\mathrm{D}}_\mu^{\mathrm{Ass}}$ *("classes d'équivalence de déformations associatives et bidifférentielles de la multiplication de* A*").*

COROLLAIRE 1. — *Il existe un isomorphisme canonique entre l'ensemble des classes d'équivalence de crochets de Poisson sur la* $\mathbf{R}[[t]]$*-algèbre* $\mathrm{A}[[t]]$ *congrus à* $0 \bmod t$ *(modulo le groupe des automorphismes de cette algèbre congrus à* $1_{\mathrm{A}} \bmod t$*), et l'ensemble des classes d'équivalence (au sens de* 1.3*) de star-produits sur* X.

Il suffit d'appliquer l'isomorphisme de foncteurs du th. 4 aux algèbres artiniennes $\mathbf{R}[[t]]/t^n\mathbf{R}[[t]]$ et de passer à la limite projective.

COROLLAIRE 2. — *Toute variété de Poisson possède une quantification formelle, canonique à équivalence près.*

En effet, soient X une variété de Poisson et u le champ de bivecteurs associé (cf. 1.2) ; alors ut définit un crochet de Poisson congru à 0 mod t sur la $\mathbf{R}[[t]]$-algèbre $A[[t]]$ (où $A = C^\infty(X)$). L'image de la classe d'équivalence de ut par l'isomorphisme du cor. 1 est la classe d'équivalence canonique de quantifications formelles de X.

2. FORMULES EXPLICITES

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie, et X une partie ouverte d'un espace affine de direction E. Nous allons définir une application $\mathbf{R}$-linéaire canonique, graduée de degré 0

$$\alpha : \mathsf{T}(\mathcal{T}(X)[2]) \to \mathcal{P}(X)[2] \tag{18}$$

dont la restriction à $\mathsf{TS}_g(\mathcal{T}(X)[2])$ satisfait les conditions de 1.4. (Rappelons que la graduation de $\mathsf{T}(\mathcal{T}(X)[2])$ est celle déduite de la graduation de $\mathcal{T}(X)[2]$.) Cette définition sera fonctorielle pour les automorphismes d'espaces affines, donc s'étendra par recollement à toute variété différentielle affine.

2.1. Calcul tensoriel

Soit I un ensemble fini. Pour tout $i \in I$, soient k_i un entier ≥ 0 et t_i un champ de tenseurs d'ordre k_i sur X, c'est-à-dire une application de classe C^∞ de X dans $\mathsf{T}^{k_i}(E)$. Notons S la somme disjointe des ensembles $\{1, \ldots, k_i\}$, *i.e.* l'ensemble des couples (i, j), où $i \in I$ et $1 \leq j \leq k_i$. Enfin, soit $\gamma : S \to I$ une application. Considérons les morphismes de fibrés sur X

$$X \times \bigotimes_{s\in S} E \xrightarrow{\;f\;} X \times \bigotimes_{i\in I} \mathsf{T}^{k_i}(E) \xrightarrow{\;g\;} X \times \bigotimes_{s\in S} E \tag{19}$$

où g se déduit de l'isomorphisme canonique d'associativité du produit tensoriel et f est défini par

$$f(x, \underset{s\in S}{\otimes} v_s) = (x, \underset{i\in I}{\otimes} (D_x^{m_i} t_i)(v_s)_{s\in\gamma^{-1}(i)}), \tag{20}$$

en notant m_i le cardinal de $\gamma^{-1}(i)$ et $(D_x^{m_i} t_i)(v_s)_{s\in\gamma^{-1}(i)})$ la dérivée m_i-ième de t_i au point x, évaluée sur la famille des m_i vecteurs $(v_s)_{s\in\gamma^{-1}(i)}$. La trace de $g \circ f$ (ou de $f \circ g$, cela revient au même) est une fonction de classe C^∞ sur X que nous noterons $r_\gamma((t_i)_{i\in I})$.

2.2. Les espaces de configuration $C_{n,m}$

Soient n et m deux entiers ≥ 0 tels que $2n+m \geq 2$. Notons $\mathrm{Conf}_{n,m}$ l'ensemble des configurations formées de n points distincts $x_1, \ldots, x_n$ du demi-plan de Poincaré $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et de m points $x_{n+1} < \ldots < x_{n+m}$ de la droite réelle. L'ensemble $\mathrm{Conf}_{n,m}$ est une partie ouverte de $\mathfrak{H}^n \times \mathbf{R}^m$. Le groupe G_0 des transformations affines de $\mathbf{C}$ de la forme $z \mapsto az+b$, avec a, b réels et $a > 0$, opère sur $\mathrm{Conf}_{n,m}$ sans points fixes. Notons $C_{n,m}$ l'ensemble des orbites. Il est muni d'une structure de variété (analytique réelle) quotient de celle de $\mathrm{Conf}_{n,m}$; sa dimension est $2n+m-2$.

On munit $\mathfrak{H}$ et $\mathbf{R}$ de leurs orientations naturelles, $\mathrm{Conf}_{n,m}$ de l'orientation induite par l'orientation produit sur $\mathfrak{H}^n \times \mathbf{R}^m$, G_0 de l'orientation déduite de celle de $\mathfrak{H}$ par la bijection $g \mapsto g(i)$ et $\mathrm{Conf}_{n,m}$ de l'orientation quotient de celle de $\mathrm{Conf}_{n,m}$ par celle de G_0.

Pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n+m$, $(2\pi)^{-1} d\mathrm{Arg}(\frac{x_j - x_i}{x_j - \overline{x_i}})$ est une forme différentielle de degré 1 sur $\mathrm{Conf}_{n,m}$ invariante par G_0. On note $\omega_{i,j}$ la forme différentielle sur $C_{n,m}$ qui s'en déduit par passage au quotient.

2.3. Formules explicites pour α

Se donner une application $\mathbf{R}$-linéaire $\alpha : \mathsf{T}(\mathcal{T}(\mathrm{X})[2]) \to \mathcal{P}(\mathrm{X})[2]$, graduée de degré 0, équivaut à se donner, pour toute suite finie $(k_1, \ldots, k_n)$ d'entiers ≥ 0 pour laquelle l'entier $m = 2 + \sum_{i=1}^{n} (k_i - 2)$ est ≥ 0, une application linéaire

$$\alpha_{k_1,\ldots,k_n} : \mathcal{T}_{k_1}(\mathrm{X}) \otimes \ldots \otimes \mathcal{T}_{k_n}(\mathrm{X}) \to \mathcal{P}_m(\mathrm{X}). \tag{21}$$

Fixons de tels entiers. Notons S l'ensemble des couples (i,j), où $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq k_i$. Pour $1 \leq i \leq n$, soit t_i un champ de tenseurs d'ordre k_i sur X, c'est-à-dire une application de classe C^∞ de X dans $\mathsf{T}^{k_i}(\mathrm{E})$, et soit $u_i \in \mathcal{T}_{k_i}(\mathrm{X})$ le champ de multivecteurs obtenu en composant t_i et la surjection canonique $\mathsf{T}^{k_i}(\mathrm{E}) \to \Lambda^{k_i}(\mathrm{E})$. On définit $\alpha_{k_1,\ldots,k_n}$ par

$$\alpha_{k_1,\ldots,k_n}(u_1 \otimes \ldots \otimes u_n)(f_1, \ldots f_m) = \frac{1}{n!} \sum_\gamma w_\gamma r_\gamma(t_1, \ldots, t_n, f_1, \ldots, f_m) \tag{22}$$

où la somme est étendue aux applications $\gamma : \mathrm{S} \to \{1, \ldots, n+m\}$, où

$$w_\gamma = \int_{C_{n,m}} \bigwedge_{(i,j)\in \mathrm{S}} \omega_{i,\gamma(i,j)}\,, \tag{23}$$

(le produit extérieur étant pris suivant l'ordre lexicographique sur S et l'orientation de $C_{n,m}$ étant celle définie en 2.2), et où $r_\gamma(t_1,\ldots,t_n,f_1,\ldots,f_m)$ est la fonction de classe C^∞ dont la définition a été donnée en 2.1 (en considérant les f_i comme des champs de tenseurs d'ordre 0). Cette définition appelle quelques commentaires :

— Le degré de la forme différentielle intégrée dans (23) est $k_1+\ldots+k_n = 2n+m-2$; il est égal à la dimension de la variété $C_{n,m}$.

— L'intégrale (23) est absolument convergente, parce qu'il existe une variété à coins compacte $\overline{C_{n,m}}$ dont $C_{n,m}$ est l'intérieur et sur laquelle chacune des formes différentielles $\omega_{(i,j)}$ (pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n+m$) a un prolongement de classe C^∞ (cf. 2.4).

— Le second membre de (22) est une fonction antisymétrique de chacun des champs de tenseurs t_i ; il ne dépend donc que des u_i, ce qui légitime la définition de α_Γ.

Il est facile de vérifier que l'application α que nous avons définie satisfait les conditions a) et b) de 1.4.1. La preuve de la commutativité du diagramme (14), par contre, est (pour l'instant) un calcul assez fastidieux qu'effectue Kontsevich et que nous ne reproduirons pas ici. Ce calcul se conclut par une application de la formule de Stokes à la variété à coins $\overline{C_{n,m}}$.

2.4. Compactifications des espaces de configurations

2.4.1. Configurations de points dans C

Soit I un ensemble fini de cardinal $n \geq 2$. Notons $\mathbf{C}^{I}_{\mathrm{inj}}$ l'ensemble des applications injectives de I dans $\mathbf{C}$. C'est une partie ouverte de $\mathbf{C}^{I}$. Le groupe G des transformations affines de $\mathbf{C}$ de la forme $z \mapsto az+b$, avec a réel >0 et $b \in C$, opère à gauche dans $\mathbf{C}^{I}_{\mathrm{inj}}$ par $(g,x) \mapsto g\circ x$. Cette opération est libre. L'ensemble $C_I = G\backslash\mathbf{C}^{I}_{\mathrm{inj}}$ est muni d'une structure de variété analytique réelle quotient, de dimension $2n-3$.

Nous allons construire une variété à coins compacte $\overline{C_I}$ telle que :

a) C_I s'identifie au complémentaire du bord de $\overline{C_I}$;

b) si J est une partie de I de cardinal ≥ 2, l'application $r_{J,I} : C_I \to C_J$ déduite par passage aux quotients de l'application de restriction $\mathbf{C}^{I}_{\mathrm{inj}} \to \mathbf{C}^{J}_{\mathrm{inj}}$ se prolonge en une application analytique réelle $\overline{r_{J,I}} : \overline{C_I} \to \overline{C_J}$.

Disons qu'une application $x : I \to \mathbf{C}$ est *normalisée* si l'on a $\sum x(i) = 0$ et $\sum |x(i)|^2 = 1$. L'ensemble $\mathbf{C}^{I}_{\mathrm{norm}}$ de ces applications est une sous-variété analytique réelle compacte de $\mathbf{C}^{I}$ (c'est la sphère unité d'un espace euclidien). L'application

$(g,x) \mapsto g \circ x$ est un difféomorphisme de $\mathrm{G} \times \mathbf{C}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{norm}}$ sur l'ouvert $\mathbf{C}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{nc}}$ de $\mathbf{C}^{\mathrm{I}}$ formé des applications non constantes de I dans $\mathbf{C}$. Il en résulte que la variété analytique réelle quotient $\mathrm{G}\backslash\mathbf{C}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{nc}}$ est isomorphe à $\mathbf{C}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{norm}}$, donc compacte. Il est clair que $\mathrm{C}_{\mathrm{I}} = \mathrm{G}\backslash\mathbf{C}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{inj}}$ s'identifie à une sous-variété ouverte dense de $\mathrm{G}\backslash\mathbf{C}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{nc}}$. Cependant, si J est une partie de I de cardinal ≥ 2, l'application $r_{\mathrm{J,I}} : \mathrm{C}_{\mathrm{I}} \to \mathrm{C}_{\mathrm{J}}$ ne se prolonge pas en général en une application continue de $\mathrm{G}\backslash\mathbf{C}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{nc}}$ dans $\mathrm{G}\backslash\mathbf{C}^{\mathrm{J}}_{\mathrm{nc}}$. C'est ce qui motive la construction qui suit.

Soit J une partie de I de cardinal ≥ 2. Nous dirons que les G-orbites de deux éléments $x \in \mathbf{C}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{nc}}$ et $y \in \mathbf{C}^{\mathrm{J}}_{\mathrm{nc}}$ sont *compatibles* si :

— soit x est constant sur J ;

— soit x n'est pas constant sur J, mais y appartient à la G-orbite de $x \mid \mathrm{J}$.

Notons $\overline{\mathrm{C}_{\mathrm{I}}}$ l'ensemble des familles $(x_{\mathrm{J}}) \in \prod(\mathrm{G}\backslash\mathbf{C}^{\mathrm{J}}_{\mathrm{nc}})$ (produit étendu aux parties J de I de cardinal ≥ 2) telles que x_{J} et x_{K} soient compatibles pour $\mathrm{K} \subset \mathrm{J}$. On démontre que $\overline{\mathrm{C}_{\mathrm{I}}}$ est une sous-variété à coins compacte et connexe de $\prod(\mathrm{G}\backslash\mathbf{C}^{\mathrm{J}}_{\mathrm{nc}})$. L'application $x \mapsto (x \mid \mathrm{J})$ de $\mathbf{C}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{inj}}$ dans $\prod \mathbf{C}^{\mathrm{J}}_{\mathrm{nc}}$ définit par passage aux quotients un difféormorphisme de C_{I} sur le complémentaire du bord de $\overline{\mathrm{C}_{\mathrm{I}}}$, d'où a) ; l'assertion b) est satisfaite par construction même de $\overline{\mathrm{C}_{\mathrm{I}}}$.

Remarque. — L'application $x \mapsto \frac{1}{2\pi}\mathrm{Arg}(x(2) - x(1))$ définit par passage au quotient un isomorphisme analytique réel de $\mathrm{C}_{\{1,2\}}$ sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Par suite, si i et j sont deux éléments distincts d'un ensemble fini I, l'application $x \mapsto \frac{1}{2\pi}\mathrm{Arg}(x(j) - x(i))$ de C_{I} dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ se prolonge en une application analytique réelle de $\overline{\mathrm{C}_{\mathrm{I}}}$ dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

2.4.2 Compactifications des espaces de configurations $\mathrm{C}_{n,m}$

Soient n et m deux entiers ≥ 0 tels que $2n + m \geq 2$. Si $(x_1, \ldots, x_{n+m})$ est un point de $\mathrm{Conf}_{n,m}$, *i.e.* une suite de n points distincts de $\mathfrak{H}$ suivie d'une suite strictement croissante de m points de $\mathbf{R}$, alors $(x_1, \overline{x_1}, \ldots, x_n, \overline{x_n}, x_{n+1} \ldots, x_{n+m})$ est une suite injective de $2n + m$ points de $\mathbf{C}$. On définit ainsi une application analytique réelle de $\mathrm{Conf}_{n,m}$ dans $\mathbf{C}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{inj}}$, où $\mathrm{I} = \{1, 2, \ldots, 2n + m\}$. On en déduit, par passage aux quotients, un plongement analytique réel de $\mathrm{C}_{n,m}$ dans C_{I}.

Munissons I de l'involution ι qui échange i et $n + i$ pour $1 \leq i \leq n$ et fixe j pour $2n + 1 \leq j \leq 2n + m$. Notons c la conjugaison complexe. L'involution $x \mapsto c \circ x \circ \iota$ de $\mathbf{C}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{inj}}$ définit par passage au quotient une involution σ de C_{I}, et $\mathrm{C}_{n,m}$ est une composante connexe de l'ensemble des points fixes de σ. L'involution σ se prolonge en une involution analytique $\overline{\sigma}$ de $\overline{\mathrm{C}_{\mathrm{I}}}$. On démontre que l'ensemble des points fixes de $\overline{\sigma}$ est une variété à coins. On note $\overline{\mathrm{C}_{n,m}}$ la composante connexe de cette variété qui contient $C_{n,m}$. C'est une variété à coins et $C_{n,m}$ est le complémentaire de son bord.

On peut donner une description très détaillée de $\overline{C_{n,m}}$ (stratification de son bord, cartes explicites au voisinage de chaque point, etc.). Les formes différentielles $\omega_{i,j}$ sur $C_{n,m}$ (cf 2.2), pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n+m$, admettent des prolongements analytiques réels à $\overline{C_{n,m}}$ d'après la remarque de 2.4.1.

APPENDICE

Dans cet appendice, k *désigne un anneau commutatif dans lequel* 2 *est inversible, et* ε *le facteur de commutation sur* $\mathbf{Z}$ *défini par* $\varepsilon_{p,q} = (-1)^{pq}$.

1. Algèbres de Lie graduées gauches

Une *algèbre de Lie graduée gauche* sur k est une algèbre $\mathfrak{g}$ sur k, graduée de type $\mathbf{Z}$, dont la multiplication $(u,v) \mapsto [u,v]$ satisfait les relations

$$[u,v] = -\varepsilon_{\deg u, \deg v}[v,u] \tag{1}$$

$$[u,[v,w]] = [[u,v],w] + \varepsilon_{\deg u, \deg v}[v,[u,w]] \tag{2}$$

pour u, v, w éléments homogènes de $\mathfrak{g}$. On prendra garde qu'une telle algèbre n'est en général pas une algèbre de Lie : ses éléments homogènes u de degré impair ne satisfont pas nécessairement la relation $[u,u] = 0$.

Exemples. — 1) Soit A une k-algèbre associative, graduée de type $\mathbf{Z}$. On munit A d'une structure d'algèbre de Lie graduée gauche en posant $[a,b] = ab - \varepsilon_{\deg a, \deg b} ba$ pour a, b homogènes (et en étendant ce crochet par linéarité aux éléments non homogènes). Ceci s'applique en particulier au cas où A est l'algèbre $\mathrm{Endgr}_k(\mathrm{V})$ des endomorphismes gradués d'un k-module V, gradué de type $\mathbf{Z}$.

2) Soit A une k-algèbre graduée de type $\mathbf{Z}$ et $\mathrm{Der}^{\varepsilon}_n(\mathrm{A})$ le k-module des ε-dérivations de A de degré n, *i.e.* des applications k-linéaires $d : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$, graduées de degré n, telles que $d(ab) = d(a)b + \varepsilon_{n, \deg a} a d(b)$ pour a, b éléments homogènes de A. Le k-module gradué $\mathrm{Der}^{\varepsilon}(\mathrm{A}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathrm{Der}^{\varepsilon}_n(\mathrm{A})$ est une sous-algèbre de Lie graduée gauche de $\mathrm{Endgr}_k(\mathrm{A})$ (cf. exemple 1).

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie graduée gauche. Pour tout $u \in \mathfrak{g}$, posons $\mathrm{ad}(u)(v) = [u,v]$. L'application $u \mapsto \mathrm{ad}(u)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie graduées gauches de $\mathfrak{g}$ dans $\mathrm{Der}^{\varepsilon}(\mathfrak{g})$.

Exemple 3. — Soit B une k-cogèbre graduée de type $\mathbf{Z}$. Le k-module gradué $\mathrm{Coder}^{\varepsilon}(\mathrm{B}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathrm{Coder}^{\varepsilon}_n(\mathrm{B})$, où $\mathrm{Coder}^{\varepsilon}_n(\mathrm{B})$ est l'ensemble des ε-codérivations de degré $-n$ de B, muni du crochet défini par $[d, d'] = d \circ d' - \varepsilon_{\deg d, \deg d'} d' \circ d$ pour d et d' homogènes, est une algèbre de Lie graduée gauche sur k.

2. Le crochet de Gerstenhaber

Soit V un k-module. Le k-module gradué $\mathsf{T}(\mathrm{V}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \mathsf{T}^n(\mathrm{V})$ des tenseurs contravariants sur V, muni du coproduit $c : \mathsf{T}(\mathrm{V}) \to \mathsf{T}(\mathrm{V}) \otimes \mathsf{T}(\mathrm{V})$ défini par

$$c(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = \sum_{m=0}^{n} (x_1 \otimes \ldots \otimes x_m) \otimes (x_{m+1} \otimes \ldots \otimes x_n) \tag{3}$$

est une k-cogèbre graduée coassociative.

Notons $\mathrm{C}_n(\mathrm{V})$ le k-module des applications multilinéaires de V^n dans V et posons $\mathrm{C}(\mathrm{V}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \mathrm{C}_n(\mathrm{V})$. Tout élément v de $\mathrm{C}_n(\mathrm{V})$ définit une application linéaire de $\mathsf{T}^n(\mathrm{V})$ dans V ; celle-ci se prolonge de manière unique en une ε-codérivation D_v de degré $1-n$ de la cogèbre $\mathsf{T}(\mathrm{V})$: on a

$$\mathrm{D}_v(x_1 \otimes \ldots \otimes x_m) = \sum_{i=0}^{m-n} (-1)^{i(n-1)} x_1 \otimes \ldots \otimes x_i \otimes v(x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}) \otimes x_{i+n+1} \otimes \ldots \otimes x_m . \tag{4}$$

L'application $v \mapsto \mathrm{D}_v$ est un isomorphisme de modules gradués de $\mathrm{C}(\mathrm{V})[1]$ sur $\mathrm{Coder}^{\varepsilon}(\mathsf{T}(\mathrm{V}))$ (n° 1, exemple 3). Le crochet sur $\mathrm{C}(\mathrm{V})[1]$ déduit par transport de structure de celui de $\mathrm{Coder}^{\varepsilon}(\mathsf{T}(\mathrm{V}))$ (*loc. cit.*) s'appelle le *crochet de Gerstenhaber* : si $u \in \mathrm{C}_m(\mathrm{V})$ et $v \in \mathrm{C}_n(\mathrm{V})$, $[u, v]$ est l'élément de $\mathrm{C}_{m+n-1}(\mathrm{V})$ défini par

$$[u, v] = u \circ v - (-1)^{(m-1)(n-1)} v \circ u , \tag{5}$$

où le produit (non associatif) $u \circ v$ est défini par

$$(u \circ v)(x_1, \ldots, x_{m+n-1}) = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{i(n-1)} u(x_1, \ldots, x_i, v(x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}), x_{i+n+1}, \ldots, x_{m+n-1}) . \tag{6}$$

Muni de ce crochet, $\mathrm{C}(\mathrm{V})[1]$ est une algèbre de Lie graduée gauche sur k.

Exemple. — Soit $u \in \mathrm{C}_2(\mathrm{V})$. On a $[u, u](a, b, c) = 2u(u(a, b), c) - 2u(a, u(b, c))$. Les éléments u de $\mathrm{C}_2(\mathrm{V})$ tels que $[u, u] = 0$ sont donc les lois de composition k-bilinéaires associatives sur V.

Soient A une k-algèbre associative et $\mu \in \mathrm{C}_2(\mathrm{A})$ sa multiplication. On a $[\mu, \mu] = 0$ d'après l'exemple; par suite $\mathrm{ad}(\mu)$ est une antidérivation de carré nul et de degré 1 de l'algèbre de Lie graduée gauche $\mathrm{C}(\mathrm{A})[1]$. Pour $u \in \mathrm{C}_n(\mathrm{A})$, on a $[\mu, u] = (-1)^{n+1} du$, où

$$\begin{aligned} du(a_1, \dots, a_{n+1}) = a_1 u(a_2, \dots, a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i u(a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_{n+1}) \\ +(-1)^{n+1} u(a_1, \dots, a_n) a_{n+1} \, . \end{aligned} \tag{7}$$

Le complexe $(\mathrm{C}(\mathrm{A}), d)$ n'est autre que le complexe de Hochschild de A à valeurs dans le (A, A)-bimodule A.

Soient maintenant X une variété différentielle et A la $\mathbf{R}$-algèbre des fonctions de classe C^∞ sur X. Notons $\mathcal{P}_n(\mathrm{X})$ l'espace vectoriel des opérateurs multidifférentiels de A^n dans A (cf. 1.3). L'espace vectoriel $\mathcal{P}(\mathrm{X}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{P}_n(\mathrm{X})$ est stable par le crochet de Gerstenhaber. Par suite $\mathcal{P}(\mathrm{X})[1]$, muni de ce crochet, est une algèbre de Lie graduée gauche.

3. Le crochet de Schouten-Nijenhuis

Soient X une variété différentielle, A l'algèbre $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{X})$ et $\mathcal{T}(\mathrm{X})$ l'espace vectoriel gradué des champs de multivecteurs sur X (cf. 1.4.1). Il existe sur $\mathcal{T}(\mathrm{X})$ une unique loi de composition $\mathbf{R}$-bilinéaire $(u, v) \mapsto [u, v]$, de nature locale, appelée le *crochet de Schouten-Nijenhuis*, possédant les propriétés suivantes :

a) on a $[u, v] \in \mathcal{T}_{m+n-1}(\mathrm{X})$ pour $u \in \mathcal{T}_m(\mathrm{X})$ et $v \in \mathcal{T}_n(\mathrm{X})$;

b) si ξ et η sont deux champs de vecteurs sur X, $[\xi, \eta]$ est leur crochet usuel;

c) si ξ est un champ de vecteurs et f une fonction de classe C^∞ sur X, on a $[\xi, f] = -[f, \xi] = df(\xi)$;

d) si u, v, w sont des éléments homogènes de degrés m, n, p de $\mathcal{T}(\mathrm{X})$, on a

$$[u, v \wedge w] = [u, v] \wedge w + (-1)^{(m-1)n} v \wedge [u, w] \tag{8}$$

$$[u \wedge v, w] = u \wedge [v, w] + (-1)^{n(p-1)} [u, w] \wedge v \, . \tag{9}$$

L'espace vectoriel gradué $\mathcal{T}(\mathrm{X})[1]$, muni du crochet de Schouten-Nijenhuis, est une algèbre de Lie graduée gauche : on a , pour $u \in \mathcal{T}_m(\mathrm{X})$, $v \in \mathcal{T}_n(\mathrm{X})$ et $w \in \mathcal{T}_p(\mathrm{X})$,

$$[u, v] = -(-1)^{(m-1)(n-1)} [v, u] \tag{10}$$

$$[u, [v, w]] = [[u, v], w] + (-1)^{(m-1)(n-1)} [v, [u, w]] \, . \tag{11}$$

Exemples. — 1) Si $u = \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_m$ et $v = \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_n$, où les ξ_i et η_j sont des champs de vecteurs, on a

$$[u,v] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [\xi_i, \eta_j] \wedge \xi_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\xi_i} \wedge \ldots \wedge \xi_m \wedge \eta_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\eta_j} \wedge \ldots \wedge \eta_n.$$

2) Dans une carte dans laquelle u et v s'écrivent $\sum_{i_1,\ldots,i_m} u_{i_1,\ldots,i_m} \partial_{i_1} \wedge \ldots \wedge \partial_{i_m}$ et $\sum_{j_1,\ldots,j_n} v_{j_1,\ldots,j_n} \partial_{j_1} \wedge \ldots \wedge \partial_{j_n}$ (avec $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$), on a

$$[u,v] = u \bullet v - (-1)^{(m-1)(n-1)} u \bullet v,$$

où $u \bullet v$ est par définition égal à

$$\sum_{i_1,\ldots,i_m} \sum_{j_1,\ldots,j_n} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} u_{i_1 \ldots i_m} \partial_{i_k}(v_{j_1 \ldots j_n}) \partial_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{\partial_{i_k}} \wedge \ldots \wedge \partial_{i_m} \wedge \partial_{j_1} \wedge \ldots \wedge \partial_{j_n}.$$

Pour $u \in \mathcal{T}_n(\mathrm{X})$ et $f_1, \ldots, f_n$ dans A, posons

$$\{f_1, \ldots, f_n\}_u = (df_1 \wedge \ldots \wedge df_n)(u). \tag{12}$$

On a alors, pour $u \in \mathcal{T}_m(\mathrm{X})$ et $v \in \mathcal{T}_n(\mathrm{X})$,

$$\begin{aligned} \{f_1, \ldots, f_{m+n-1}\}_{[u,v]} &= \sum \varepsilon(\sigma) \{f_{\sigma(1)}, \ldots, f_{\sigma(m-1)}, \{f_{\sigma(m)}, \ldots, f_{\sigma(m+n-1)}\}_v\}_u \\ &\quad -(-1)^{(m-1)(n-1)} \sum \varepsilon(\sigma) \{f_{\sigma(1)}, \ldots, f_{\sigma(n-1)}, \{f_{\sigma(n)}, \ldots, f_{\sigma(m+n-1)}\}_u\}_v \end{aligned} \tag{13}$$

où dans la première (resp. seconde) somme, σ parcourt l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, m+n-1\}$ qui sont croissantes sur $\{1, \ldots, m-1\}$ et $\{m, \ldots, m+n-1\}$ (resp. sur $\{1, \ldots, n-1\}$ et $\{n, \ldots, m+n-1\}$) et où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ ; la première (resp. seconde) somme est omise si $m = 0$ (resp. $n = 0$).

Exemple 3. — On a $\{a,b,c\}_{[u,u]} = 2(\{a,\{b,c\}_u\}_u + \{b,\{c,a\}_u\}_u + \{c,\{a,b\}_u\}_u)$ pour $u \in \mathcal{T}_2(\mathrm{X})$ et a, b, c dans A.

4. L'injection canonique de $\mathcal{T}(\mathrm{X})$ dans $\mathcal{P}(\mathrm{X})$

Conservons les notations du n° 3. On définit une injection canonique ι de $\mathcal{T}(\mathrm{X})$ dans $\mathcal{P}(\mathrm{X})$, graduée de degré 0, en posant

$$\iota(u)(f_1, \ldots, f_n) = \frac{1}{n!} \{f_1, \ldots, f_n\}_u \tag{12}$$

pour $u \in \mathcal{T}_n(\mathrm{X})$ et $f_1, \ldots, f_n$ dans A. On a

$$[\mu, \iota(u)] = 0 \tag{13}$$

en notant $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathrm{X})$ la multiplication de A : cela résulte de la formule (7) et du fait que $\iota(u) : \mathrm{A}^n \to \mathrm{A}$ est une dérivation par rapport à chacune des variables.

On prendra garde que ι n'est pas compatible avec les crochets (de Schouten-Nijenhuis sur $\mathcal{T}(\mathrm{X})$, de Gerstenhaber sur $\mathcal{P}(\mathrm{X})$), même à une constante multiplicative près.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. BAYEN, M. FLATO, C. FRONSDAL, A. LICHNEROWICZ et D. STERNHEIMER – *Deformation theory and quantization, I and II*, Ann. Phys. **111** (1977), 61-151.

[2] M. DE WILDE et P. LECOMTE – *Existence of star-products and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds*, Lett. Math. Phys. **7** (1983), 487-496.

[3] M. KONTSEVICH – *Deformation quantization of Poisson manifolds, I*, prépublication de l'IHÉS, octobre 1997.

[4] O. MATHIEU – *Homologies associated with Poisson structures*, dans : Deformation theory and symplectic geometry (Ascona, 1996), Math. Phys. Stud. **20**, Kluwer Akad. Publ., Dordrecht, 1997, 177-199.

[5] A. WEINSTEIN – *Deformation quantization*, Séminaire Bourbaki 1993-94, exposé n° 789, Astérisque **227** (1995), 389-409.

Joseph OESTERLÉ

Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
F-75005 PARIS
Adresse électronique : oesterle@ihp.jussieu.fr