AHMED ABBES

Hauteurs et discrétude

Astérisque, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 825, p. 141-166

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__141_0>

Séminaire BOURBAKI — Mars 1997
49ème année, 1996-97, n° 825

HAUTEURS ET DISCRÉTUDE
[d'après L. Szpiro, E. Ullmo et S. Zhang]

par **Ahmed ABBES**

1 INTRODUCTION

Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K. Fixons une clôture algébrique $\overline{K}$ de K et une hauteur de Néron–Tate $h : A(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ associée à un faisceau inversible ample et symétrique sur A. Soit X une sous-variété de A définie sur une extension finie L de K (i.e. un sous-schéma fermé intègre et géométriquement connexe de $A \times_K L$). On définit pour tout réel $\varepsilon \geq 0$, l'ensemble

$$X\{\varepsilon\} = \{x \in X(\overline{K}) \mid h(x) \leq \varepsilon\} \subset X(\overline{K}).$$

DÉFINITION 1.1 .— *Une sous-variété X de A est dite de torsion si elle est translatée d'une sous-variété abélienne par un point de torsion.*

L'objet principal de cet exposé est de rapporter sur les travaux récents qui ont permis de démontrer la conjecture suivante due à Bogomolov :

THÉORÈME 1.2 (CONJECTURE DE BOGOMOLOV) .— *Soit X une sous-variété de A qui n'est pas de torsion. Alors, il existe une constante $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $X\{\varepsilon\}$ ne soit pas Zariski-dense dans X.*

La conjecture originelle de Bogomolov [5] se limite au cas d'une courbe plongée dans une variété abélienne. Elle a été démontrée dans ce cas par E. Ullmo [43]. La généralisation aux dimensions supérieures est due à S. Zhang [44]. Ces deux travaux font suite à une collaboration entre ces deux auteurs et L. Szpiro [42] dans laquelle ils ont mis en évidence un phénomène d'équidistribution des petits points d'une variété abélienne. Ces résultats sont fondamentalement basés sur des techniques arakeloviennes dont L. Szpiro était l'initiateur. Il était en particulier le premier à voir le lien entre la conjecture de Bogomolov et des énoncés de positivité en théorie d'Arakelov [36, 39].
Avant d'esquisser les grandes lignes de la démonstration du théorème 1.2 et par suite celle de l'exposé, nous signalons le corollaire suivant dont l'énoncé a été conjecturé par S. Lang et démontré par M. Raynaud [31, 32] (voir aussi l'exposé d'Oesterlé dans ce séminaire [28]).

COROLLAIRE 1.3 .— *Soit* X *une sous-variété de* A *qui n'est pas de torsion. Alors, l'ensemble* $X(\overline{K}) \cap A(\overline{K})_{tor}$ *des points de* $X(\overline{K})$ *qui sont de torsion dans* A *n'est pas Zariski-dense dans* X.

Un point de torsion sur une variété abélienne, définie sur un corps de nombres, est caractérisé par la nullité d'une (et de toute) hauteur de Néron–Tate associée à un faisceau inversible ample et symétrique. On construit grâce à la théorie des intersections arithmétique d'Arakelov de Gillet et Soulé [18, 19] une théorie des hauteurs pour les sous-variétés d'une variété arithmétique. Quand la variété ambiante est abélienne, on peut normaliser ces hauteurs par rapport aux isogénies multiplication par des entiers par un procédé limite analogue à celui de Tate. On retrouve en particulier pour les points la hauteur de Néron–Tate. La conjecture de Bogomolov, désignée dans la suite par (B), peut s'interpréter comme un analogue en dimensions supérieures de la caractérisation précédente des points de torsion, désignée par (T), à savoir : *une sous-variété d'une variété abélienne est de torsion si et seulement si sa hauteur normalisée est nulle.* Cette caractérisation des sous-variétés de torsion a été conjecturée pour la première fois par P. Philippon [30]-I. Dans un travail récent et indépendant des travaux cités plus haut, S. David et P. Philippon [11] prouvent la conjecture de Bogomolov en minorant effectivement la hauteur d'une sous-variété qui n'est pas de torsion.

La démonstration générale de la conjecture de Bogomolov ne suit pas l'approche précédente. Elle est plutôt un raffinement de la preuve de l'équivalence (B)$\leftrightarrow$(T) qu'un corollaire de celle-ci. Plus précisément, nous introduisons une deuxième notion de hauteur d'une sous-variété d'une variété abélienne pour laquelle l'équivalence (B)$\leftrightarrow$(T) est automatique. Pour déduire cette équivalence pour la première hauteur, on la comparera à la seconde. On prouvera en particulier que la première hauteur est plus petite que la deuxième. Comment caractériser les sous-variétés pour lesquelles les deux hauteurs coïncident? C'est en particulier le cas des sous-variétés X tel que $X\{\varepsilon\}$ est dense pour tout $\varepsilon > 0$. La réponse à cette question est apportée par Szpiro, Ullmo et Zhang [42]. La décrire précisément alourdirait l'introduction par beaucoup de notations. Disons simplement que l'égalité des hauteurs force un phénomène d'équirépartition de certaines suites de points. Il est alors plus accessible de contredire ce phénomène d'équirépartition pour une sous-variété qui n'est pas de torsion que de contredire la simple densité de ces suites de points. Pour cela, on considérera un morphisme entre deux puissances de la variété abélienne et on appliquera l'équirépartition à la source et à l'aboutissement de ce morphisme.

Nous introduisons la théorie des hauteurs et celle des hauteurs normalisées dans les deux premiers chapitres. L'équirépartition des petits points est introduite à la fin de chacun de ces chapitres. La démonstration du théorème 1.2 est donnée dans le troisième chapitre. Le dernier chapitre est consacré au cas des courbes. Nous avons réuni dans deux appendices les pré-requis de théorie d'Arakelov nécessaires à la preuve de la conjecture de Bogomolov. À part ces deux appendices, le texte de la preuve se veut "self-contained" ou presque.

Notations : On désigne par $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K et par S l'ensemble des places infinies de K modulo la conjugaison complexe. Pour chaque place $\sigma \in S$, on fixe $\overline{\sigma}$ un plongement de $\overline{K}$ dans $\mathbb{C}$ qui prolonge σ. On pose $\varepsilon_\sigma = 1$ et $K_\sigma = \mathbb{R}$ si σ est réelle et $\varepsilon_\sigma = 2$ et $K_\sigma = \mathbb{C}$ si σ est complexe. Le groupe de Galois de $\overline{K}$ sur K est noté G.

Terminologie : Un point désigne toujours un point fermé. Une suite (x_n) de points d'un schéma intègre X est dite *générique* si elle converge pour la topologie de Zariski vers le point générique de X. Autrement dit, si pour tout Y sous-schéma fermé stricte de X, il existe n_0 tel que $x_n \notin Y$ pour $n \geq n_0$.
Une suite (x_n) de points d'une variété abélienne est une suite de petits points si la suite $h(x_n)$ converge vers zéro pour une hauteur h de Néron–Tate associée à un faisceau inversible ample et symétrique sur A.

2 HAUTEUR D'UNE SOUS–VARIÉTÉ D'UNE VARIÉTÉ ARITHMÉTIQUE

Nous présentons deux notions de hauteur d'une sous–variété d'une variété arithmétique relativement à un faisceau inversible ample métrisé. La première, inspirée par la géométrie algébrique, est basée sur la théorie des intersections arithmétiques de Gillet et Soulé. La deuxième consiste à coder les hauteurs, relativement au faisceau ample, des points de la sous–variété. Le théorème principal de cette section consiste à les comparer.

On se fixe dans la suite une variété arithmétique $\mathfrak{X}$ sur $\mathcal{O}_K$. C'est-à-dire un schéma intègre propre et plat sur $\mathcal{O}_K$ dont la fibre générique X est lisse sur K. On se fixe aussi un faisceau inversible ample $\mathcal{L}$ sur $\mathfrak{X}$ qu'on munit en chaque place $\sigma \in S$ d'une métrique hermitienne à courbure $c_1(\mathcal{L}_\sigma, \| \, \|_\sigma)$ positive. On désigne par $\hat{c}_1(\mathcal{L})$ la première classe de Chern arithmétique du faisceau métrisé $(\mathcal{L}, (\| \, \|_\sigma)_{\sigma \in S})$. Soit Y une sous–variété de X de dimension d (dans ce chapitre et dans le suivant, une sous–variété de X désigne un sous–schéma intègre fermé de X).

Première notion : Une désingularisation générique de Y notée $D(Y, \widetilde{\mathfrak{Y}}, f)$ est la donnée d'une désingularisation $\widetilde{Y}$ de Y, d'un modèle $\widetilde{\mathfrak{Y}}$ propre et plat de $\widetilde{Y}$ sur $\mathcal{O}_K$ et d'une application $f : \widetilde{\mathfrak{Y}} \to \mathfrak{X}$ prolongeant l'application naturelle $\widetilde{Y} \to X$.

PROPOSITION-DÉFINITION 2.1 .— *Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux faisceaux inversibles métrisés sur $\mathfrak{X}$ et i un entier compris entre 0 et $d+1$. Alors, le nombre réel $\hat{c}_1(f^*\mathcal{L}_1)^i \hat{c}_1(f^*\mathcal{L}_2)^{d+1-i}$ ne dépend pas de la désingularisation générique $D(Y, \widetilde{\mathfrak{Y}}, f)$.*
On le note $(\hat{c}_1(\mathcal{L}_1)^i \hat{c}_1(\mathcal{L}_2)^{d+1-i} | Y)$ et on prolonge par additivité cette définition aux cycles.
On définit la hauteur de Y relativement au faisceau ample $\mathcal{L}$ par

$$h_{\mathcal{L}}(Y) = \frac{(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1} | Y)}{(d+1)[K : \mathbb{Q}] \deg_{\mathcal{L}}(Y)}$$

où $\deg_{\mathcal{L}}(Y) = \deg c_1(\mathcal{L}_K)^d \cap [Y]$.

Cette proposition représente le point de départ de l'exposé. Nous avons choisi de ne pas remonter plus haut dans les fondements de la théorie d'Arakelov de Gillet et Soulé. Nous renvoyons le lecteur aux papiers originaux de cette théorie. La proposition 2.1

est démontrée précisément dans [47] et [9]. Pour la commodité du lecteur, nous avons réuni dans l'appendice A les principales propriétés de cette hauteur que nous utiliserons dans la suite. Il existe deux façons alternatives de définir les hauteurs. D'une part la théorie d'Elkik [14, 15], inspirée par la philosophie de Deligne [12], associe à des fibrés inversibles métrisés sur un schéma arithmétique un fibré intersection métrisé sur la base dont le degré redonne le nombre d'intersection des fibrés de départ. D'autre part, Philippon introduit dans [30]-I des hauteurs qui généralisent les hauteurs des points à la Weil. La compatibilité de ces hauteurs avec celles introduites plus haut est démontrée dans [33] et [30]-I.

EXEMPLE.— L'application ainsi définie sur $X(\overline{K})$ est une hauteur de Weil associée à $\mathcal{L}_K$.

Deuxième notion : On définit

$$e_{\mathcal{L}}(Y) = \sup_{\substack{Z \subset Y \\ \mathrm{codim}\, Z = 1}} \inf_{x \in (Y-Z)(\overline{K})} h_{\mathcal{L}}(x)$$

a priori dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, mais nous montrons que cet invariant est fini. Pour tout réel a, on désigne par $Y_{\mathcal{L}}\{a\}$ l'ensemble $\{x \in Y(\overline{K}) \mid h_{\mathcal{L}}(x) \leq a\}$. L'invariant $e_{\mathcal{L}}(Y)$ vérifie les deux propriétés suivantes :

(H1) Si $a > e_{\mathcal{L}}(Y)$, alors $Y_{\mathcal{L}}\{a\}$ est Zariski–dense dans Y.

(H2) Si $a < e_{\mathcal{L}}(Y)$, alors $Y_{\mathcal{L}}\{a\}$ n'est pas Zariski–dense dans Y.

Nous avons besoin d'introduire les notations suivantes : soit $\mathcal{Y}$ la fermeture schématique de Y dans $\mathfrak{X}$. Le plongement canonique

$$\Gamma = H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L}|_{\mathcal{Y}}) \longrightarrow V = H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L}|_{\mathcal{Y}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

fait de Γ un réseau dans V. En outre, on a l'identification canonique

$$V \simeq \bigoplus_{\sigma \in S} H^0(Y, \mathcal{L}|_Y) \otimes_\sigma K_\sigma.$$

La norme sup sur V est définie comme le maximum des normes sup de ses composantes et pour $s \in H^0(Y, \mathcal{L}|_Y) \otimes_\sigma K_\sigma \subset H^0(Y_\sigma, \mathcal{L}|_{Y_\sigma})$,

$$\|s\|_{\mathrm{sup}} = \sup_{P \in Y_\sigma(\mathbb{C})} (|s(P)|),$$

où $Y_\sigma = Y \times_\sigma \mathbb{C}$.

PROPOSITION 2.2 .— *Pour toute sous-variété Y de X, l'invariant $e_{\mathcal{L}}(Y)$ est fini.*

PREUVE.— En vue de la propriété (H1), il suffit de démontrer qu'il existe un nombre réel a tel que $Y_{\mathcal{L}}\{a\}$ soit Zariski–dense. Pour cela on se ramène, en considérant une puissance de $\mathcal{L}$, au cas $\mathfrak{X} = \mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}$ et $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$. Comme par le lemme A.3 deux métriques de $\mathcal{O}(1)$ induisent des hauteurs comparables, on suppose que $\mathcal{O}(1)$ est muni en chaque place $\sigma \in S$ de la métrique de Fubini–Study qui donne pour toute section $s \in H^0(\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}(1))$ la norme :

$$\|s\|(x_0 : \ldots : x_N) = \frac{1}{2} \frac{|s(x_0 : \ldots : x_N)|}{\sqrt{x_0^2 + \ldots + x_N^2}} .$$

Soit Y une sous-variété de $\mathbb{P}^N_K$ de dimension d. Supposons que $Y_{\mathcal{L}}\{(d+1)h_{\mathcal{L}}(Y)\}$ n'est pas Zariski-dense. Soit Z un diviseur de Cartier de Y qui contient cet ensemble. On prouvera dans la suite qu'on peut trouver des entiers positifs $n_1, \ldots, n_d$ et des sections $s_1, \ldots, s_d$ avec $s_i \in H^0(\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}, \mathcal{O}(n_i))$ tels que

$$i) \quad Z \cap \bigcap_{i=1}^{d} \operatorname{div}((s_i)_K) = \emptyset,$$

$$ii) \quad \dim(Y \cap \bigcap_{i=1}^{d} \operatorname{div}((s_i)_K)) = 0,$$

$$iii) \quad \|s_i\|_{\sup} \leq 1 \quad \text{pour tout } i.$$

L'intersection $[Y.\operatorname{div}((s_1)_K) \ldots \operatorname{div}((s_d)_K)]$ est représentée par un cycle effectif Y' à support dans $Y \cap \bigcap_{i=1}^{d} \operatorname{div}((s_i)_K)$. Le corollaire A.2 implique que

$$(\hat{c}_1(\mathcal{L})|Y') \leq (\hat{c}_1(\mathcal{L}).\hat{c}_1(\mathcal{L}^{n_1}) \ldots \hat{c}_1(\mathcal{L}^{n_d})|Y).$$

Comme $\deg_{\mathcal{L}}(Y') = n_1 \ldots n_d \deg_{\mathcal{L}}(Y)$, on obtient que

$$h_{\mathcal{L}}(Y') \leq (d+1)h_{\mathcal{L}}(Y) \tag{1}$$

Choisissons un point y de Y' tel que $h_{\mathcal{L}}(y) \leq h_{\mathcal{L}}(Y')$. Ce point appartient à Z à cause de (1) mais ceci n'est pas possible car $Y' \cap Z = \emptyset$. Il reste à justifier l'existence des sections s_i vérifiant $i)$, $ii)$ et $iii)$. Comme Z est un diviseur de Cartier sur Y, la condition $i)$ implique la condition $ii)$. La construction de ces sections se fait par récurrence sur i. On suppose construit $s_1, \ldots s_i$ avec $i < d$ tel que

$$\dim(Z \cap \operatorname{div}((s_1)_K) \cap \ldots \cap \operatorname{div}((s_i)_K)) = d - i - 1.$$

On fixe un point dans chaque composante irréductible de $Z \cap \operatorname{div}((s_1)_K) \cap \ldots \cap \operatorname{div}((s_i)_K)$. Le lemme qui suit nous permet de trouver une section s_{i+1} de norme sup ≤ 1 qui ne s'annule en aucun des points fixés. Il découle alors que

$$\dim(Z \cap \operatorname{div}((s_1)_K) \cap \ldots \cap \operatorname{div}((s_{i+1})_K)) = d - i - 2$$

si $i + 1 < d$ et que cet ensemble est vide si $i + 1 = d$.

LEMME 2.3 .— *Soient $r \geq 1$ un entier et $\varepsilon > 0$ un réel. Alors, il existe un entier $n \geq 0$ tels que pour tout ensemble $P_1, \ldots, P_r$ de r points distincts de $\mathbb{P}^N(\overline{K})$, il existe une section $s \in H^0(\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}, \mathcal{O}(n))$ vérifiant $\|s\|_{\sup} \leq \varepsilon$ et $s(P_i) \neq 0$ pour tout i.*

PREUVE.— Elle se fait par récurrence sur r. Si $r = 1$, il existe une section t parmi $X_0, \dots, X_N$ qui ne s'annule pas en P_1. On prend $s = t^n$ où n est fixé tel que $(0.5)^n < \varepsilon$. Supposons le lemme prouvé pour tout choix de r points et considérons $P_1, \dots, P_{r+1}$ $(r+1)$ points. Par hypothèse de récurrence, on trouve un entier n tels que pour tout $1 \leq i \leq r+1$, il existe une section $s_i \in H^0(\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}, \mathcal{O}(n))$ vérifiant $\|s_i\|_{\sup} \leq \varepsilon$ et $s_i(P_j) \neq 0$ pour tout $j \neq i$. On suppose que pour tout i, $s_i(P_i) = 0$ (sinon la preuve est terminée). On prend

$$s = \sum_{i=1}^{r+1} \prod_{j \neq i} s_j \in H^0(\mathbb{P}^N_{\mathcal{O}_K}, \mathcal{O}(rn)).$$

Il est clair que $s(P_i) = \prod_{j \neq i} s_j(P_i) \neq 0$ et que $\|s\|_{\sup} \leq (r+1)\varepsilon^r$. Ce qui termine la récurrence.

□

Le résultat principal dans cette section est la comparaison de ces deux notions de hauteur. Posons

$$m_{\mathcal{L}}(Y) = \inf_{x \in Y(\overline{K})} h_{\mathcal{L}}(x).$$

THÉORÈME 2.4 .— *Pour toute sous-variété Y de X, on a*

$$m_{\mathcal{L}}(Y) \leq h_{\mathcal{L}}(Y) \leq e_{\mathcal{L}}(Y).$$

PREUVE.— L'ingrédient de base dans cette démonstration est le théorème de Hilbert–Samuel arithmétique et son corollaire sur l'existence de petites sections (voir appendice B). Commençons par l'inégalité $h_{\mathcal{L}}(Y) \leq e_{\mathcal{L}}(Y)$. Pour tout réel a, on désigne par $\mathcal{L}(a)$ le faisceau $\mathcal{L}$ sur $\mathfrak{X}$ muni des métriques $\| \ \|'_\sigma = \| \ \|_\sigma e^{-a}$. Il est facile de voir que $h_{\mathcal{L}(a)}(Y) = h_{\mathcal{L}}(Y) + a$. Prenons $a = -h_{\mathcal{L}}(Y) + \varepsilon$ où $\varepsilon > 0$. Alors, $h_{\mathcal{L}(a)}(Y) = \varepsilon > 0$. Le corollaire B.2 permet donc de trouver pour n assez grand une section s non nulle de $H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L}(a)^{\otimes n}|_{\mathcal{Y}})$ tel que $\|s\|_{\sup} < 1$. Soient $s_K \in H^0(Y, \mathcal{L}^{\otimes n}|_Y)$ la section induite par s sur la fibre générique Y de $\mathcal{Y}$ et Z le diviseur de s_K. Pour tout point $x \in (Y - Z)(\overline{K})$, $h_{\mathcal{L}(a)}(x) \geq 0$. On en déduit que :

$$e_{\mathcal{L}}(Y) \geq \inf_{x \in (Y-Z)(\overline{K})} h_{\mathcal{L}}(x) = \inf_{x \in (Y-Z)(\overline{K})} h_{\mathcal{L}(a)}(x) + h_{\mathcal{L}}(Y) - \varepsilon \geq h_{\mathcal{L}}(Y) - \varepsilon.$$

Ceci termine la preuve de la première inégalité. En multipliant les métriques de $\mathcal{L}$ par $\exp(m_{\mathcal{L}}(Y))$, on ramène la deuxième inégalité au lemme suivant :

LEMME 2.5 .— *Si pour tout $x \in Y(\overline{K})$ $h_{\mathcal{L}}(x) \geq 0$, alors $h_{\mathcal{L}}(Y) \geq 0$.*

PREUVE.— C'est une récurrence sur la dimension d de Y. Pour $d = 0$ le lemme est trivial. Supposons qu'il soit prouvé pour toute sous–variété Y de X de dimension $< d$. Considérons une sous–variété Y de X de dimension d et désignons par $\mathcal{Y}$ sa fermeture schématique dans $\mathfrak{X}$.

LEMME 2.6 .— *Il existe sur $\mathfrak{X}$ un faisceau inversible ample $\mathcal{M}$ muni à l'infini de métriques hermitiennes positives et des sections $s_1, \dots, s_{d+1}$ de $H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{M}|_{\mathcal{Y}})$ tels que*

$\|s_i\|_{\sup} < 1$ *pour* $1 \leq i \leq d+1$ *et si* $(s_i)_K$ *designe la restriction de* s_i *à la fibre générique* Y*, alors* $\bigcap_i \mathrm{div}((s_i)_K) = \emptyset$*. Pour un tel faisceau, on a*

i) $(\hat{c}_1(\mathcal{M})^{d+1}|Y) > 0$*,*

ii) pour tout entier $1 \leq i \leq d$*, il existe des sous-variétés* $Z_{i,k}$ *de codimension* i *dans* Y *et des entiers* $m_{i,k} > 0$ *tels que*

$$(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1-i}\hat{c}_1(\mathcal{M})^i|Y) \geq \sum_k m_{i,k}(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1-i}|Z_{i,k}).$$

On termine la récurrence modulo la preuve de ce lemme. Supposons que $(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1}|Y) < 0$. On considère un faisceau $\mathcal{M}$ sur $\mathfrak{X}$ comme dans le lemme 2.6 et on pose

$$p(t) = \left((\hat{c}_1(\mathcal{L}) + t\hat{c}_1(\mathcal{M}))^{d+1}|Y\right) = a_{d+1} + a_d t + \ldots + a_0 t^{d+1}.$$

On a donc $a_{d+1} = \left(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1}|Y\right)$, $a_d = (d+1)\left(\hat{c}_1(\mathcal{L})^d\hat{c}_1(\mathcal{M})|Y\right) \ldots a_0 = \left(\hat{c}_1(\mathcal{M})^{d+1}|Y\right)$. Par le lemme 2.6, $a_0 > 0$ et par notre hypothèse $a_{d+1} < 0$. Il existe donc un réel $t_0 > 0$ tels que $p(t_0) = 0$ et $p(t) > 0$ pour $t > t_0$. Soient a et b deux entiers positifs tels que $b/a > t_0$. Posons $\mathcal{L}' = \mathcal{L}^{\otimes a} \otimes \mathcal{M}^{\otimes b}$. On a $\left(\hat{c}_1(\mathcal{L}')^{d+1}|Y\right) = a^{d+1}p(\frac{b}{a}) > 0$. Le corollaire B.2 nous permet alors de trouver, pour n assez grand, une section s son nulle de $H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L}'^{\otimes n}|_{\mathcal{Y}})$ de norme sup < 1. On en déduit, en utilisant le corollaire A.2 et l'hypothèse de récurrence, que $\left(\hat{c}_1(\mathcal{L})^d\hat{c}_1(\mathcal{L}')|Y\right) \geq 0$. D'où

$$\left(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1}|Y\right) + \frac{b}{a}\left(\hat{c}_1(\mathcal{L})^d\hat{c}_1(\mathcal{M})|Y\right) \geq 0.$$

Comme ce résultat est valable pour tout $b/a > t_0$, on obtient que

$$\left(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1}|Y\right) + t_0\left(\hat{c}_1(\mathcal{L})^d\hat{c}_1(\mathcal{M})|Y\right) \geq 0.$$

Mais $p(t_0) = 0$, donc $\frac{d}{d+1}a_d t_0 + \ldots + a_0 t_0^{d+1} \leq 0$. Ceci est impossible car $t_0 > 0$, $a_0 > 0$ (par le lemme 2.6) et $a_i \geq 0$ pour $1 \leq i \leq d$ (par le lemme 2.6–ii) et l'hypothèse de récurrence).

□

PREUVE du lemme 2.6.— On se donne un faisceau $\mathcal{M}$ vérifiant les propriétés du lemme. On prouvera d'abord le *ii*). En appliquant ensuite *ii*) à $\mathcal{L} = \mathcal{M}$, on trouve des sous-variétés $Z_{d,k}$ de Y de dimension 0 et des entiers $m_{d,k} > 0$ tels que $\left(\hat{c}_1(\mathcal{M})^{d+1}|Y\right) \geq \sum_k m_{d,k}h_{\mathcal{M}}(Z_{d,k})$. Pour tout k, $h_{\mathcal{M}}(Z_{d,k}) > 0$. En effet, $Z_{d,k}$ est une somme des conjugués d'un point $P_{d,k}$ dans Y par le groupe de Galois de $\overline{K}/K$. Donc $h_{\mathcal{M}}(Z_{d,k}) = h_{\mathcal{M}}(P_{d,k})$. Par ailleurs, il existe une section s_i non nulle sur $P_{d,k}$. Comme $\|s_i\|_{\sup} < 1$, alors $h_{\mathcal{M}}(P_{d,k}) > 0$. Ceci donne *i*). On prouve maintenant *ii*). La construction des $Z_{i,k}$ se fait par récurrence. Pour $i = 1$, on prend $\sum_k m_{1,k}Z_{1,k} = \mathrm{div}((s_1)|_Y)$. Le corollaire A.2 implique pour tout $1 \leq j \leq d+1$

$$\left(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1-j}\hat{c}_1(\mathcal{M})^j|Y\right) \geq \sum_k m_{1,k}\left(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1-j}\hat{c}_1(\mathcal{M})^{j-1}|Z_{1,k}\right).$$

On suppose construits les $Z_{i,k}$ tels que pour tout $i \leq j \leq d+1$,

$$(2) \qquad \left(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1-j}\hat{c}_1(\mathcal{M})^j|Y\right) \geq \sum_k m_{i,k}\left(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1-j}\hat{c}_1(\mathcal{M})^{j-i}|Z_{i,k}\right).$$

Il existe pour chaque k une section de $\{s_1, \ldots, s_{d+1}\}$ non identiquement nulle sur $Z_{i,k}$. Choisissons-en une qu'on note $s_{i,k}$. On définit les $Z_{i+1,k'}$ par la relation

$$\sum_k m_{i,k}\mathrm{div}((s_{i,k})|_{Z_{i,k}}) = \sum_{k'} m_{i+1,k'}Z_{i+1,k'}.$$

Le corollaire A.2 implique pour tout $i+1 \leq j \leq d+1$,

$$\begin{aligned}\left(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1-j}\hat{c}_1(\mathcal{M})^j|Y\right) &\geq \sum_k m_{i,k}\left(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1-j}\hat{c}_1(\mathcal{M})^{j-i}|Z_{i,k}\right)\\ &\geq \sum_{k'} m_{i+1,k'}\left(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1-j}\hat{c}_1(\mathcal{M})^{j-i-1}|Z_{i+1,k'}\right).\end{aligned}$$

Ceci termine la récurrence. En prenant dans (2) $i = j$, on trouve les inégalités du *ii*). Il reste à trouver un faisceau satisfaisant les propriétés du lemme 2.6. On prend un faisceau $\mathcal{M}$ très ample sur $\mathfrak{X}$ et $(d+1)$ sections $s_1, \ldots, s_{d+1}$ de $H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{M}|_{\mathcal{Y}})$ qui ne s'annulent pas en même temps sur Y. On équipe $\mathcal{M}$ en chaque place $\sigma \in S$ d'une métrique positive qui donne $\|s_i\|_{\sup} < 1$ pour tout i. □

Le théorème 2.4 compare les deux notions de hauteur dans un seul sens. Il est toutefois suffisant pour la preuve de la conjecture de Bogomolov. Le théorème qui suit établit la comparaison dans l'autre sens, nous l'énonçons sans démonstration.

THÉORÈME 2.7 .— *Pour toute sous-variété Y de dimension d de X, on a*

$$\frac{1}{d+1}e_{\mathcal{L}}(Y) + \frac{d}{d+1}m_{\mathcal{L}}(Y) \leq h_{\mathcal{L}}(Y) \leq e_{\mathcal{L}}(Y).$$

REMARQUE.— La preuve du lemme 2.2 donne une démonstration de ce théorème pour des sous-variétés d'un espace projectif relativement au fibré $\mathcal{O}(1)$ muni d'une métrique de Fubini–Study. La preuve dans le cas général suit les même idées sauf qu'il est beaucoup plus difficile de trouver les sections $s_1, \ldots, s_d$ (voir preuve du lemme 2.2 pour les notations). L'existence de ces sections est assurée par le théorème de Nakai–Moishezon arithmétique ([47] théorème 4.2).

On déduit du théorème 2.4 que $h_{\mathcal{L}}(Y)$ vérifie la propriété (H2), c'est-à-dire :

COROLLAIRE 2.8 .— *Soit Y une sous-variété de X. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $Y_{\mathcal{L}}\{h_{\mathcal{L}}(Y) - \varepsilon\}$ n'est pas Zariski-dense dans Y. Par conséquent, toute suite générique (x_n) de points de $Y(\overline{K})$ vérifie :*

$$\liminf h_{\mathcal{L}}(x_n) \geq h_{\mathcal{L}}(Y).$$

On se propose maintenant de caractériser les suites génériques (x_n) pour lesquelles $h_{\mathcal{L}}(x_n)$ converge vers $h_{\mathcal{L}}(Y)$. Notons que l'existence d'une telle suite est équivalente à l'égalité $h_{\mathcal{L}}(Y) = e_{\mathcal{L}}(Y)$. Introduisons les notations suivantes : pour tout point $x \in X(\overline{K})$, $O(x)$ désigne l'orbite sous le groupe de Galois G du point x dans $X(\overline{K})$. Pour toute place $\sigma \in S$, $\mu(\sigma, x)$ désigne la distribution de $X_\sigma(\mathbb{C})$ définie par

$$\mu(\sigma, x) = \frac{1}{\#O(x)} \sum_{y \in O(x)} \delta_y$$

où δ_y est la distribution de Dirac en y (l'ensemble $O(x)$ est considéré comme sous-ensemble de $X_\sigma(\mathbb{C})$ au moyen de $\overline{\sigma}$). Nous disons qu'une suite (x_n) de points de $Y(\overline{K})$ est équidistribuée dans $Y_\sigma(\mathbb{C})$ par rapport à une mesure μ, si pour toute fonction f continue sur $Y_\sigma(\mathbb{C})$, la suite $\frac{1}{\#O(x_n)} \sum_{y \in O(x_n)} f(y)$ converge vers $\int_{Y_\sigma(\mathbb{C})} f(y)\mu$.

PROPOSITION 2.9 .— *Soient Y une sous-variété de X de dimension d et (x_n) une suite générique de points de $Y(\overline{K})$ tels que $h_{\mathcal{L}}(x_n)$ converge vers $h_{\mathcal{L}}(Y)$. Alors, pour toute place $\sigma \in S$, la suite (x_n) est équidistribuée dans $Y_\sigma(\mathbb{C})$ par rapport à la mesure*

$$\mu_\sigma = \frac{c_1(\mathcal{L}_\sigma, \| \|_\sigma)^d}{\deg_{\mathcal{L}}(Y)} |_{Y_\sigma(\mathbb{C})}.$$

PREUVE.— Remarquons d'abord que toute fonction continue sur $Y_\sigma(\mathbb{C})$ est limite uniforme de fonctions C^∞ sur $X_\sigma(\mathbb{C})$ (voir par exemple [44] lemme 2.2). Soit f une fonction C^∞ de $X_\sigma(\mathbb{C})$ telle que la suite

$$u_n = \frac{1}{\#O(x_n)} \sum_{y \in O(x_n)} f(y) - \int_{Y_\sigma(\mathbb{C})} f(y) \frac{c_1(\mathcal{L}_\sigma, \| \|_\sigma)^d}{\deg_{\mathcal{L}}(Y)}$$

ne converge pas vers 0. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que u_n converge vers une limite $C \neq 0$. Pour tout réel λ, notons $\mathcal{L}(\lambda f)$ le faisceau $\mathcal{L}$ muni des métriques initialement fixées sur $\mathcal{L}$ en toutes les places $\tau \in S$ différentes de σ et de la métrique $\| \|'_\sigma$ en la place σ définie par $\| \|'_\sigma = \| \|_\sigma \exp(-\lambda f)$ où $\| \|_\sigma$ est la métrique originale sur $\mathcal{L}$. Pour λ assez petit, la courbure de $\mathcal{L}(-\lambda f)_\sigma$ est positive. On en déduit par le corollaire 2.8 que

$$h_{\mathcal{L}(\lambda f)}(Y) \leq \liminf h_{\mathcal{L}(\lambda f)}(x_n). \tag{3}$$

Pour tout point x,

$$h_{\mathcal{L}(\lambda f)}(x) = h_{\mathcal{L}}(x) + \varepsilon_\sigma \frac{\lambda}{[K:\mathbb{Q}]\ \#O(x)} \sum_{y \in O(x)} f(y).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}(\hat{c}_1(\mathcal{L}(\lambda f))^{d+1}|Y) &= \sum_{i=0}^{d+1} \binom{d+1}{i} (\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1-i}\hat{c}_1(\mathcal{O}(\lambda f))^i|Y) \\ &= (\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1}|Y) + (d+1)\lambda\varepsilon_\sigma \int_{Y_\sigma(\mathbb{C})} f(y)c_1(\mathcal{L}_\sigma, \| \|_\sigma)^d + P(\lambda)\end{aligned}$$

où $P(\lambda) = a_2\lambda^2+\ldots+a_{d+1}\lambda^{d+1}$. Ce calcul se fait grâce à la proposition A.1 en considérant la section 1 de $\mathcal{O}(\lambda f)$. On déduit de (3) et de l'égalité $\lim h_{\mathcal{L}}(x_n) = h_{\mathcal{L}}(Y)$ que

$$\lambda C\varepsilon_\sigma \geq \frac{P(\lambda)}{(d+1)\deg_{\mathcal{L}}(Y)},$$

ce qui est absurde. Ceci achève la preuve. □

3 HAUTEUR NORMALISÉE D'UNE SOUS–VARIÉTÉ D'UNE VARIÉTÉ ABÉLIENNE

Soit A une variété abélienne sur K. Pour tout entier $n \neq 0$, $[n] : A \to A$ désigne l'isogénie multiplication par n. On associe à tout faisceau inversible ample et symétrique L sur A (i.e. $[-1]^*L \simeq L$) une hauteur normalisée $\hat{h}_L : A(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ appelée hauteur de Néron–Tate. C'est l'unique hauteur de Weil associée à L qui satisfait la relation $\hat{h}([n]x) = n^2\hat{h}(x)$ pour tout point x de $A(\overline{K})$. Les objectifs de cette section sont d'une part la réalisation de la hauteur de Néron–Tate comme une hauteur arakelovienne et d'autre part la définition d'une hauteur normalisée d'une sous–variété de A qui généralise la hauteur de Néron–Tate sur les points. Il n'est pas toujours possible de réaliser la hauteur de Néron–Tate comme une hauteur arakelovienne. Toutefois, on montrera qu'elle est une limite de telles hauteurs. Nous définissons alors la hauteur normalisée d'une sous–variété par le même procédé limite. Nous étendons enfin les résultats de la section précédente à cette hauteur normalisée.

Métriques du cube : Soient A une variété abélienne sur $\mathbb{C}$ et L un faisceau inversible sur A. Soit $\mathcal{D}_3(L)$ le faisceau inversible sur A^3 défini par

$$\mathcal{D}_3(L) = p_{1,2,3}^*L \otimes p_{1,2}^*L^{-1} \otimes p_{2,3}^*L^{-1} \otimes p_{1,3}^*L^{-1} \otimes p_1^*L \otimes p_2^*L \otimes p_3^*L$$

où $p_I : A^3 \to A, (x_1, x_2, x_3) \to \sum_{i\in I} x_i$ pour tout $I \subset \{1,2,3\}$. Le théorème du cube affirme que $\mathcal{D}_3(L)$ est trivial. Toute métrique de L qui induit une métrique constante sur $\mathcal{D}_3(L) \simeq \mathcal{O}_{A^3}$ est appelée *métrique du cube.* On montre que les métriques du cube sont toutes multiples de l'une d'entre elles et qu'elles sont les seules métriques à courbure invariante par translation [26].

Bonne réduction : Soient $\mathcal{A}$ un schéma abélien sur $\mathcal{O}_K$ (i.e. un schéma en groupes propre et lisse sur $\mathcal{O}_K$) et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible ample et symétrique sur $\mathcal{A}$. Par le théorème du cube, $\mathcal{D}_3(\mathcal{L})$ est trivial. Fixons un isomorphisme $\varphi : \mathcal{O}_{\mathcal{A}^3} \to \mathcal{D}_3(\mathcal{L})$. On munit $\mathcal{L}_\sigma$ pour toute place $\sigma \in S$ de la métrique du cube $\| \|_\sigma$ qui induit par φ la métrique triviale sur $\mathcal{O}_{\mathcal{A}^3}$. Remarquons qu'un autre choix de l'isomorphisme φ aurait multiplié les métriques $\| \|_\sigma$ par $|l|_\sigma$ où l est une unité de $\mathcal{O}_K$. Grâce à la formule du produit, les hauteurs définies par $\mathcal{L}$ ainsi métrisé ne dépendent pas du choix de φ. D'autre part, on peut choisir un isomorphisme $\psi : [-1]^*\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ qui soit une isométrie en chaque place $\sigma \in S$. Il découle de l'existence des isométries φ et ψ que la hauteur définie par $\mathcal{L}$ est quadratique. C'est donc la hauteur de Néron–Tate associée à $\mathcal{L}_K$.

Cas général : On se donne une variété abélienne A définie sur K et L un faisceau inversible ample et symétrique sur A. Fixons un modèle $\mathcal{A}$ de A propre et plat sur

$\mathcal{O}_K$, un faisceau $\mathcal{L}$ inversible ample sur $\mathcal{A}$ qui étend L et pour chaque place $\sigma \in S$, une métrique hermitienne à courbure positive sur L_σ.

LEMME 3.1 .— *Pour tout entier positif m, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute sous-variété Y de A de dimension d, on ait*

$$|h_{\mathcal{L}}([m]_*[Y]) - m^2 h_{\mathcal{L}}(Y)| \leq C .$$

PREUVE.— Soit $\mathcal{A}'$ la normalisation de $\mathcal{A}$ par le morphisme $[m] : A \to A$ de telle sorte qu'on ait le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}' \arrow[d, "{[m]}"'] & A \arrow[l] \arrow[d, "{[m]}"] \\ \mathcal{A} \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

On dispose de deux modèles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ de A et de deux faisceaux inversibles métrisés $\mathcal{L}^{\otimes m^2}$ et $[m]^*\mathcal{L}$ qui étendent le même faisceau $L^{\otimes m^2}$ respectivement à $\mathcal{A}$ et à $\mathcal{A}'$. Le lemme A.3 donne par suite une constante $C > 0$ tel que

$$|h_{[m]^*\mathcal{L}}(Y) - h_{\mathcal{L}^{\otimes m^2}}(Y)| \leq C .$$

Le lemme 3.1 en découle en remarquant que $h_{[m]^*\mathcal{L}}(Y) = h_{\mathcal{L}}([m]_*[Y])$ et $h_{\mathcal{L}^{\otimes m^2}}(Y) = m^2 h_{\mathcal{L}}(Y)$.

□

PROPOSITION-DÉFINITION 3.2 .— *La suite $\frac{1}{4^n} h_{\mathcal{L}}([2^n]_*[Y])$ converge uniformément vers une limite finie appelée hauteur normalisée de Y et notée $\hat{h}_L(Y)$. Cette limite ne dépend pas des choix de $\mathcal{A}$, de $\mathcal{L}$ et de ses métriques. Elle coïncide sur les points de $A(\overline{K})$ avec la hauteur de Néron–Tate de L.*

PREUVE.— Par le lemme 3.1, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute sous-variété Y de A, $|h_{\mathcal{L}}([2]_*[Y]) - 4h_{\mathcal{L}}(Y)| \leq C$. On applique cette inégalité au cycle $[2^n]_*[Y]$ (elle est en fait valable pour tout cycle qui est un multiple entier d'un cycle intègre vu la normalisation de la hauteur). On obtient

$$|\frac{1}{4^{n+1}} h_{\mathcal{L}}([2^{n+1}]_*[Y]) - \frac{1}{4^n} h_{\mathcal{L}}([2^n]_*Y)| \leq \frac{C}{4^n} .$$

La convergence uniforme de $\frac{1}{4^n} h_{\mathcal{L}}([2^n]_*[Y])$ s'ensuit. Le lemme A.3 permet de voir que la limite est indépendante des choix du modèle, du faisceau et des métriques. □

Il est plus commode pour la suite de fixer les données et de réécrire la proposition 3.2 comme suit : Fixons un isomorphisme $\psi : [2]^*L \to L^{\otimes 4}$. Il existe pour toute place $\sigma \in S$ une seule métrique du cube $\|\ \|_\sigma$ sur L_σ qui fait de ψ_σ une isométrie. Soient $\mathcal{A}$ un modèle propre et plat sur $\mathcal{O}_K$ de A et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible ample sur $\mathcal{A}$ qui étend L. On définit une suite $\mathcal{A}_n$ de $\mathcal{O}_K$-modèles propres et plats de A et de faisceaux inversibles amples $\mathcal{L}_n \in \mathrm{Pic}(\mathcal{A}_n) \otimes \mathbb{Q}$ qui étendent L, par : $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$, $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$ et, pour

$n > 0$, $\mathcal{A}_n$ est la normalisation de $\mathcal{A}$ par le morphisme $[2^n] : A \to A$ de telle sorte qu'on ait le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_n & \longleftarrow & A \\ {\scriptstyle [2^n]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [2^n]} \\ \mathcal{A} & \longleftarrow & A \end{array}$$

et $\mathcal{L}_n = \frac{1}{4^n}[2^n]^*\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{A}_n) \otimes \mathbb{Q}$. La fibre générique de $\mathcal{L}_n$ s'identifie au moyen de l'isomorphisme ψ à L. Le faisceau $\mathcal{L}_n$ est donc muni aux places infinies de K des métriques du cube précédemment fixées sur L. La proposition 3.2 peut se réécrire sous la forme suivante : pour toute sous-variété Y de A,

$$\hat{h}_L(Y) = \lim_{n \to +\infty} h_{\mathcal{L}_n}(Y).$$

En effet, $\frac{1}{4^n} h_{\mathcal{L}}([2^n]_*[Y]) = h_{\mathcal{L}_n}(Y)$. On définit aussi

$$\hat{e}_L(Y) = \sup_{\substack{Z \subset Y \\ \mathrm{cod} Z = 1}} \ \inf_{x \in (Y-Z)(\overline{K})} \hat{h}_L(x).$$

THÉORÈME 3.3 .— *Pour toute sous-variété Y de A, on a*

$$0 \leq \hat{h}_L(Y) \leq \hat{e}_L(Y).$$

PREUVE.— Les notations $h_{\mathcal{L}_n}(Y)$, $e_{\mathcal{L}_n}(Y)$ et $m_{\mathcal{L}_n}(Y)$ désignent les invariants de Y définis dans la section précédente relativement à la variété arithmétique $\mathcal{A}_n$ et au faisceau $\mathcal{L}_n$. Remarquons que $\mathcal{L}_n$ est ample car la normalisation $\mathcal{A}_n \to \mathcal{A}$ est finie et $\mathcal{L}$ est ample. Par conséquent, le théorème 2.4 implique que

$$m_{\mathcal{L}_n}(Y) \leq h_{\mathcal{L}_n}(Y) \leq e_{\mathcal{L}_n}(Y).$$

Comme la convergence des hauteurs $h_{\mathcal{L}_n}$ est uniforme, $e_{\mathcal{L}_n}(Y)$ converge vers $\hat{e}_L(Y)$ et $m_{\mathcal{L}_n}(Y)$ converge vers $\inf_{x \in Y(\overline{K})} \hat{h}_L(x)$. Pour achever la preuve du théorème, il suffit de remarquer que la hauteur de Néron–Tate est positive sur les points. □

Le théorème suivant prolonge la comparaison du théorème 2.7 aux hauteurs normalisées :

THÉORÈME 3.4 .— *Pour toute sous-variété Y de A de dimension d, on a*

$$\frac{1}{d+1}\hat{e}_L(Y) \leq \hat{h}_L(Y) \leq \hat{e}_L(Y).$$

Ce théorème, qui ne sera pas utilisé dans la preuve de la conjecture de Bogomolov, implique l'équivalence (B)$\leftrightarrow$(T) annoncée dans l'introduction : la conjecture de Bogomolov est équivalente à la caractérisation suivante des sous-variétés de torsion : *soit Y une sous-variété de A, alors $\hat{h}_L(Y) = 0$ si et seulement si Y est une sous-variété de torsion.*

Le dernier résultat de cette section est l'analogue de la proposition 2.9 pour les hauteurs normalisées. Il s'agit de caractériser le cas d'égalité $\hat{h}_L(Y) = \hat{e}_L(Y)$. On rappelle que pour toute sous-variété Y de A et tout réel positif a, $Y_L\{a\}$ désigne l'ensemble $\{x \in Y(\overline{K}) \mid \hat{h}_L(x) \leq a\}$. On pose pour chaque place $\sigma \in S$, $\omega_\sigma = c_1(L_\sigma, \| \|_\sigma)$ la courbure de la métrique du cube fixée sur L_σ. C'est aussi la courbure de toute autre métrique du cube sur L_σ.

PROPOSITION 3.5 .— *Soit Y une sous-variété de A de dimension d.*

i) Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $Y_L\{\hat{h}_L(Y)-\varepsilon\}$ n'est pas Zariski-dense. Par conséquent, toute suite générique (x_n) de points de $Y(\overline{K})$ vérifie

$$\liminf \hat{h}_L(x_n) \geq \hat{h}_L(Y).$$

ii) Soit (x_n) une suite générique de $Y(\overline{K})$ telle que la suite $\hat{h}_L(x_n)$ converge vers $\hat{h}_L(Y)$. Alors, pour toute place $\sigma \in S$, la suite (x_n) est équidistribuée dans $Y_\sigma(\mathbb{C})$ par rapport à la mesure $\mu_\sigma = \dfrac{\omega_\sigma^d}{\deg_{\mathcal{L}}(Y)}|_{Y_\sigma(\mathbb{C})}$.

PREUVE.— Le premier point découle, comme dans la section précédente, de l'inégalité $\hat{h}_L(Y) \leq \hat{e}_L(Y)$ établie dans le théorème 3.3. La démonstration du *ii)* ne découle pas directement de son analogue de la section précédente. Soit f une fonction C^∞ de $A_\sigma(\mathbb{C})$ telle que la suite

$$u_n = \frac{1}{\#O(x_n)} \sum_{y \in O(x_n)} f(y) - \int_{Y_\sigma(\mathbb{C})} f(y) \frac{\omega_\sigma^d}{\deg_L(Y)}$$

ne converge pas vers 0. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que u_n converge vers une limite $C \neq 0$. On introduit les faisceaux $\mathcal{L}_m(\lambda f)$ comme dans la preuve de 2.9. Ces faisceaux coïncident sur les fibres génériques des $\mathcal{A}_m$ avec $L(\lambda f)$. Ils sont par suite à courbure positive pour λ assez petit. Il découle aussi l'existence d'un polynôme $P(\lambda) = a_2\lambda^2 + \ldots + a_{d+1}\lambda^{d+1}$ indépendant de m tel que

$$(\hat{c}_1(\mathcal{L}_m(\lambda f))^{d+1}|Y) = (\hat{c}_1(\mathcal{L}_m)^{d+1}|Y) + \lambda\varepsilon_\sigma(d+1)\int_{Y_\sigma(\mathbb{C})} f(y)\omega_\sigma^d + P(\lambda).$$

La convergence uniforme de $h_{\mathcal{L}_m}$ vers la hauteur normalisée donne pour tout $\varepsilon > 0$ un entier N tel que pour tout $m \geq N$,

* $\sup_{x \in A(\overline{K})} |h_{\mathcal{L}_m}(x) - \hat{h}_L(x)| \leq \varepsilon$
* $|h_{\mathcal{L}_m(\lambda f)}(Y) - \hat{h}_L(Y) - \dfrac{\lambda\varepsilon_\sigma}{[K:\mathbb{Q}]}\displaystyle\int_{Y_\sigma(\mathbb{C})} f(y)d\mu_\sigma(y) - \dfrac{P(\lambda)}{(d+1)[K:\mathbb{Q}]\deg_L(Y)}| \leq \varepsilon.$

La proposition 2.8 implique que $\liminf h_{\mathcal{L}_N(\lambda f)}(x_n) \geq h_{\mathcal{L}_N(\lambda f)}(Y)$. Comme $\lim \hat{h}_L(x_n) = \hat{h}_L(Y)$, on obtient l'inégalité :

$$\liminf \frac{\lambda\varepsilon_\sigma}{\#O(x_n)} \sum_{y \in O(x_n)} f(y) \geq \lambda\varepsilon_\sigma \int_{Y_\sigma(\mathbb{C})} f(y)d\mu_\sigma(y) + \frac{P(\lambda)}{(d+1)\deg_L(Y)} - 2\varepsilon[K:\mathbb{Q}].$$

D'où $\lambda C\varepsilon_\sigma \geq \dfrac{P(\lambda)}{(d+1)\deg_L(Y)} - 2\varepsilon[K:\mathbb{Q}]$. Cette relation est valable pour tout $\varepsilon > 0$, elle implique par suite que $\lambda C\varepsilon_\sigma \geq \dfrac{P(\lambda)}{(d+1)\deg_L(Y)}$, ce qui n'est pas possible. Ceci achève la preuve de la proposition. □

REMARQUE.— Les hauteurs normalisées sur les variétés abéliennes sont construites indépendamment par Zhang [48], Philippon [30] et Gubler [21].

4 PREUVE DE LA CONJECTURE DE BOGOMOLOV

La preuve du théorème 1.2 est divisée en deux parties. La première est algébrique. Elle consiste à traduire pour une sous–variété le fait de ne pas être de torsion en terme de birationalité d'un certain morphisme. La deuxième partie, qualifiée d'arithmétique, est une application des résultats de la section précédente à la source et à l'aboutissement de ce morphisme. Ces derniers sont des sous–variétés de deux puissances de la variété abélienne.

Soient A une variété abélienne sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et X une sous–variété de A. On définit le groupe algébrique $G(X)$ comme le fixateur de X dans A. C'est-à-dire, le sous–groupe des éléments $a \in A$ tel que $a + X = X$. Considérons pour tout entier $m \geq 2$ l'application

$$\begin{array}{cccc} \alpha_m : & X^m & \longrightarrow & A^{m-1} \\ & (x_1,\ldots,x_m) & \longrightarrow & (x_2 - x_1,\ldots,x_m - x_{m-1}) \end{array}$$

et notons $Y_m = \alpha_m(X^m)$ l'image de X^m.

LEMME 4.1 .— *Soit X une sous-variété de A dont le fixateur $G(X)$ est trivial. Alors, pour m assez grand, l'application $\alpha_m : X^m \to Y_m$ est birationnelle.*

PREUVE.— Elle se fait en trois étapes.

a) Pour m suffisamment grand, $\alpha_m : X^m \to Y_m$ est génériquement finie. Il suffit pour cela de trouver une fibre de α_m réduite à un point. Pour tout point $x \in X$, soit $G(x)$ le sous–schéma fermé de A formé par les points a tels que $a + x \in X$. On a

$$\bigcap_{x\in X} G(x) = G(X) = 1.$$

Il s'ensuit que, pour m assez grand, il existe $(x_1,\ldots,x_m) \in X^m$ tel que $G(x_1) \cap \ldots \cap G(x_m) = 1$. Le résultat annoncé en découle en remarquant que la fibre de $\alpha_m : X^m \to Y_m$ qui contient $(x_1,\ldots,x_m)$ est isomorphe à $G(x_1) \cap \ldots \cap G(x_m)$.

b) On fixe m_0 suffisamment grand pour satisfaire a). Il existe un ouvert non vide U de X^{m_0} tel que $\alpha_{m_0} : U \to Y_{m_0}$ soit lisse. Cette application est étale à cause de a). De plus, pour tout $m \geq m_0$, l'application $\alpha_m : U \times X^{m-m_0} \to Y_m$ est aussi étale.

c) Soit $(x_1,\ldots,x_{m_0})$ un point de U. Il existe $n \geq 0$ et des points $(y_1,\ldots,y_n) \in X^n$ tels que

$$G(x_1) \cap \ldots \cap G(x_{m_0}) \cap G(y_1) \cap \ldots \cap G(y_n) = 1.$$

Par suite, la fibre de $\alpha_{m_0+n} : X^{m_0+n} \to Y_{m_0+n}$ qui contient $(x_1, \dots, x_{m_0}, y_1, \dots, y_n)$ est réduite à ce point. On en déduit par b) que, pour $m \geq m_0 + n$, l'application $\alpha_m : U \times X^{m-m_0} \to Y_m$ est birationnelle car elle est étale et possède une fibre réduite à un élément. □

On fixe maintenant une variété abélienne A sur K et L un faisceau inversible ample et symétrique sur A. On fixe aussi un isomorphisme $\psi : [2]^*L \to L^{\otimes 4}$ et pour chaque place $\sigma \in S$, la métrique du cube $\| \ \|_\sigma$ sur L_σ qui fait de ψ_σ une isométrie. On note $\omega_\sigma = c_1(L_\sigma, \| \ \|_\sigma)$ la courbure de $(L_\sigma, \| \ \|_\sigma)$. Soit $\hat{h}$ la hauteur normalisée associée à L. Soit $m \geq 2$ un entier. On désigne par $\pi_i : A^m \to A$ la i–ième projection de A^m dans A et par L_m le faisceau inversible sur A^m donné par $L_m = \otimes_i \pi_i^* L$. On fixe d'une part l'isomorphisme $\psi_m : [2]^*L_m \to L_m^{\otimes 4}$ induit par ψ, et d'autre part les métriques du cube $\| \ \|_{m,\sigma}$ sur L_m induites par celles de L. Alors, l'isomorphisme ψ_m est une isométrie et la courbure $\omega_{m,\sigma}$ de $(L_m, \| \ \|_{m,\sigma})$ est donnée par $\omega_{m,\sigma} = \sum_{i=1}^m \pi_i^* \omega_\sigma$. On note $\hat{h}_m$ la hauteur normalisée sur A^m définie par L_m. Elle est donnée par $\hat{h}_m(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m \hat{h}(x_i)$.

La preuve de la conjecture de Bogomolov se fait par l'absurde. Soit X une sous–variété de A qui n'est pas de torsion et qui contient une suite (x_n) de petits points Zariski–denses. Quitte à élargir le corps de base, on suppose que X est définie sur K.

Première étape : Soit $G = G(X)$ le sous–groupe algébrique de A qui fixe X. On définit les deux variétés abéliennes $A' = A/G$ et A'' la composante connexe réduite de G contenant le neutre. Le quotient $X' = X/G$ est une sous–variété de $A' = A/G$ de fixateur trivial. Deux cas se présentent : soit X' est un point, il n'est pas alors de torsion car X n'est pas de torsion dans A. Soit X' est de dimension > 0, et dans ce cas X' n'est pas une sous–variété de torsion dans A' car son fixateur est trivial. Dans les deux cas, X' n'est pas une sous–variété de torsion de A'.
Fixons une isogénie $s : A \to A' \times A''$. La conjecture de Bogomolov ne dépend pas du choix du faisceau L sur A. On peut donc supposer que $L = s^*(\mathrm{pr}_1^* L' \otimes \mathrm{pr}_2^* L'')$ où L' et L'' sont deux faisceaux inversibles amples et symétriques sur respectivement A' et A''. L'image de la suite dense des petits points (x_n) de $X(\overline{K})$ dans $X'(\overline{K})$ est une suite dense de petits points. La sous–variété X' de A' fournit par suite un contre–exemple à la conjecture de Bogomolov dont le fixateur est trivial.

Deuxième étape : On suppose $G(X)$ trivial et on fixe m assez grand pour satisfaire la conclusion du lemme 4.1. Par suite, il existe un ouvert non vide V_m de Y_m tel que, si $U_m = \alpha_m^{-1}(V_m)$ désigne l'image inverse de V_m, alors $\alpha_m : U_m \to V_m$ est un isomorphisme. Ces ouverts peuvent être pris rationnels sur K.

LEMME 4.2 .— *Il existe des sous-suites (x_{i_n}) de (x_n) $(1 \leq i \leq m)$ telles que la suite $u_n = (x_{1_n}, \dots, x_{m_n})$ appartienne à U_m et soit générique dans X^m.*

PREUVE.— Les sous–variétés strictes de X^m sont dénombrables, on les fixe dans une suite $(Z_n, n \in \mathbb{N})$. La construction des sous–suites (x_{i_n}) se fait par récurrence. On suppose construit l'élément $u_{n-1} \in U_m$. La suite des points $(x_{n_i})_{1 \leq i \leq m} \in X^m(\overline{K})$ est dense dans X^m. Il existe par suite un élément $u_n = (x_{1_n}, \dots, x_{m_n}) \in U_m$ tel que $u_n \notin \bigcup_{1 \leq j \leq n} Z_j$ et $1_n > 1_{n-1}, \dots, m_n > m_{n-1}$. La suite u_n ainsi construite est générique dans X^m. □

Il découle donc du lemme 4.2, de la proposition 3.5-i) et du théorème 3.3 que

$$0 \leq \hat{h}_m(X^m) \leq \lim_n \hat{h}_m(u_n) = 0.$$

D'où $\hat{h}_m(X^m) = \lim_n \hat{h}_m(u_n) = 0$. La proposition 3.5-$ii$) implique par conséquent que pour toute place $\sigma \in S$, la suite des distributions $\mu(\sigma, u_n)$ converge sur $X_\sigma^m(\mathbb{C})$ vers la mesure

$$\mu_\sigma = \frac{(\omega_{m,\sigma})^{dm}}{\deg_{L_m}(X^m)}|_{X_\sigma^m(\mathbb{C})}.$$

La suite $\alpha_m(u_n)$ est aussi générique dans Y_m. Il découle donc de la proposition 3.5-i) que

$$0 \leq \hat{h}_{m-1}(Y_m) \leq \lim_n \hat{h}_{m-1}(\alpha_m(u_n)) = 0.$$

On obtient comme précédemment que, pour toute place $\sigma \in S$, la suite des distributions $\mu(\sigma, \alpha_m(u_n))$ converge sur $Y_{m,\sigma}(\mathbb{C})$ vers la mesure

$$\nu_\sigma = \frac{(\omega_{m-1,\sigma})^{dm}}{\deg_{L_{m-1}}(Y_m)}|_{Y_{m,\sigma}(\mathbb{C})}.$$

Comme $\alpha_m : U_m \to V_m$ est un isomorphisme et $u_n \in U_m$ ainsi que son orbite sous le groupe de Galois G, l'égalité $\alpha_m^*\mu(\sigma, \alpha_m(u_n)) = \mu(\sigma, u_n)$ s'établit entre distributions sur U_m. On en déduit l'égalité $\alpha_m^*\nu_\sigma = \mu_\sigma$ des distributions limites sur U_m. C'est aussi une égalité entre formes différentielles aux signes près d'abord sur U_m et par suite sur $X_\sigma^m(\mathbb{C})$. Soit x un point lisse de $X_\sigma(\mathbb{C})$. La forme μ_σ est non nulle en le point $(x, x \ldots, x) \in X_\sigma^m(\mathbb{C})$. Par ailleurs, l'application α_m envoie la diagonale de X^m sur 0.

Il s'ensuit que $\alpha_m^*\nu_\sigma$ s'annule en $(x, x \ldots, x)$. C'est la contradiction qui termine la preuve du théorème 1.2. □

Nous terminons cette section par quelques résultats liés à la conjecture de Bogomolov. Le premier est une reformulation du théorème 1.2. À toute sous-variété X de A, on associe l'ensemble $T(X)$ de ses sous-variétés de torsion maximales.

THÉORÈME 4.3 .— *Soit X une sous-variété de A. Alors,*

i) $T(X)$ est fini, et

ii) il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle qu'on ait $X\{\varepsilon\} = \bigcup_{Y \in T(X)} Y\{\varepsilon\}$.

En particulier, si X ne contient aucune sous-variété de torsion, alors il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que $X\{\varepsilon\}$ soit vide.

PREUVE.— On utilise une récurrence sur d la dimension de X. Le théorème 4.3 est évident pour $d = 0$. On suppose qu'il est démontré pour les sous-variétés de dimension $\leq d$. Soit X une sous-variété de dimension $d+1$. L'énoncé 4.3 est trivialement vérifié si X est de torsion. Supposons donc que X ne soit pas de torsion. Par le théorème 1.2, il existe $\varepsilon > 0$ et Z un fermé strict de X tels que $X\{\varepsilon\} = Z\{\varepsilon\}$. Soient $Z_1, \ldots, Z_r$ les composantes irréductibles de Z. L'hypothèse de récurrence implique que les ensembles $T(Z_i)$ sont finis et que $X\{\varepsilon'\} = \bigcup_{Y \in \cup_i T(Z_i)} Y\{\varepsilon'\}$ pour $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. On en déduit que

$$\bigcup_{Y \in T(X)} Y\{\varepsilon'\} = X\{\varepsilon'\} = \bigcup_{Y \in \cup_i T(Z_i)} Y\{\varepsilon'\}.$$

La propriété $ii)$ en découle ainsi que l'égalité $T(X) = \cup_i T(Z_i)$ qui donne le premier point.

□

COROLLAIRE 4.4 .— *Soit $(x_n) \in A(\overline{K})$ une suite de petits points.*

i) Alors, (x_n) est Zariski-dense dans une sous-variété de torsion de A.

ii) Si de plus aucune sous-suite de (x_n) n'est contenue dans une sous-variété stricte de torsion de A. Alors pour toute place $\sigma \in S$, la suite (x_n) est équidistribuée dans $A_\sigma(\mathbb{C})$ par rapport à la mesure de Haar μ_σ.

PREUVE.— Le premier point est une reformulation du théorème 1.2. Pour prouver $ii)$, on montrera d'abord que (x_n) est générique. Pour qu'une suite soit générique dans A, il faut et il suffit que toute sous-suite soit Zariski-dense dans A. Sous les hypothèses de $ii)$, aucune sous-suite de (x_n) n'est contenue dans une sous-variété stricte de torsion. On obtient donc par $i)$ que toutes les sous-suites de (x_n) sont Zariski-denses dans A. Si on remarque de plus que

$$\hat{h}_L(A) = \lim_n \hat{h}_L(x_n) = 0,$$

on obtient grâce à la proposition 3.5-$ii)$ l'équidistribution recherchée. □

REMARQUE.— Nous ne pouvons pas fournir un seul exemple de sous-variété Y de A non isomorphe à une sous-variété abélienne pour laquelle $\hat{e}_L(Y) = \hat{h}_L(Y)$. Ceci limite l'application de la proposition 3.5 sur l'équirépartition des petits points aux variétés abéliennes. La question suivante reste ouverte : étant donné $(\mathfrak{X}, \mathcal{L})$ comme au début de la section 2. Quelles sont les sous-variétés de $\mathfrak{X}$ pour lesquelles $h_\mathcal{L}$ et $e_\mathcal{L}$ coïncident?

REMARQUE.— David et Philippon [11] prouvent la conjecture de Bogomolov de façon effective : pour des variétés abéliennes qui sont plongées comme des sous-variétés projectivement normales d'espaces projectifs par des diviseurs symétriques, les deux auteurs donnent une borne inférieure effective de la hauteur d'une sous-variété qui n'est pas translatée d'une sous-variété abélienne. Des résultats partiels sur la conjecture de Bogomolov sont dûs à Zhang [48], Philippon pour des produits de courbes elliptiques [30]-III et Bombieri-Zannier [7] et David-Philippon [11] pour les variétés abéliennes à multiplications complexes. Ces derniers ont aussi un aspect plus effectif que le résultat général. L'analogue de la conjecture de Bogomolov pour les tores $(\mathbb{G}_m)^n$ a été résolu par Zhang [47] et Bombieri-Zannier [6] et l'analogue de l'équirépartition est démontré par Bilu [3]. Nous donnerons dans le chapitre suivant d'autres références relatives au cas des courbes.

5 DUALISANT RELATIF DES COURBES

La conjecture de Bogomolov a été d'abord formulée pour une courbe plongée dans sa jacobienne. Ce cas a suscité beaucoup de travaux que nous résumons dans cette section. Soient C une courbe propre, lisse et géométriquement connexe de genre $g \geq 2$ sur le corps de nombres K et J sa jacobienne. À tout diviseur D de C de degré 1, on associe φ_D le plongement de la courbe dans sa jacobienne donné par

$$\begin{array}{rccc} \varphi_D : & C & \longrightarrow & J \\ & x & \longrightarrow & \mathrm{cl}(x-D). \end{array}$$

Nous considérons en particulier des diviseurs D dont le multiple $(2g-2)D$ est un diviseur canonique de la courbe. Soit D_0 un tel diviseur.
Il existe sur J une polarisation principale canonique définie par le diviseur thêta. On désigne par h la hauteur normalisée associée à cette polarisation et construite dans la section 3. Le théorème 1.2 affirme que pour tout diviseur D de degré 1, il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que l'ensemble $\{x \in X(\overline{K}) \mid h(\mathrm{cl}(x-D)) \leq \varepsilon\}$ soit fini. Comme nous l'avons remarqué dans la section 3, ce résultat est équivalent à la proposition suivante :

PROPOSITION 5.1 .— *Soient C une courbe propre, lisse et géométriquement connexe de genre $g \geq 2$ sur le corps K et D un diviseur de degré 1 de C. Alors, $h(\varphi_D(C)) > 0$.*

On se propose de redéfinir la hauteur $h(\varphi_D(C))$ comme invariant arakelovien de la courbe ne faisant pas intervenir sa jacobienne. Nous introduisons pour cela l'auto–intersection en théorie d'Arakelov du dualisant relatif de la courbe. Nous déduisons ensuite de la proposition 5.1 la stricte positivité de ce nombre.

Soit $\mathcal{C}$ le modèle régulier minimal de C sur $\mathcal{O}_K$. Le dualisant relatif ω du morphisme $\pi : \mathcal{C} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ est un faisceau inversible. Pour en faire un faisceau arakelovien, nous l'équiperons de métriques hermitiennes à l'infini. Il suffit pour cela de considérer une courbe C sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Le faisceau ω coïncide alors avec le faisceau des formes différentielles holomorphes $\Omega^1_{C/\mathbb{C}}$. Soit $\nu_1, \ldots, \nu_g$ une base de $H^0(C, \Omega^1_{C/\mathbb{C}})$ orthonormée pour le produit hermitien défini par $\frac{i}{2}\int_{C(\mathbb{C})} \alpha \wedge \overline{\beta}$. On définit la métrique d'Arakelov sur C par

$$\mu = \frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g} \nu_i \wedge \overline{\nu}_i.$$

Nous appelons métrique permise sur un faisceau inversible toute métrique hermitienne dont la courbure est proportionnelle à μ. Deux telles métriques sur le même faisceau diffèrent par la multiplication par une constante [26]. La théorie originelle d'Arakelov se limite à définir le produit d'intersection de deux faisceaux inversibles sur $\mathcal{C}$ munis de métriques permises [2]. Le faisceau $\Omega^1_{C/\mathbb{C}}$ est canoniquement équipé d'une métrique permise définie comme suit :

1) Pour tout point $P \in C(\mathbb{C})$, le faisceau $\mathcal{O}_C(P)$ est canoniquement muni d'une métrique permise donnée par

$$\|s\|(Q) = \exp(g_{Ar}(P,Q))$$

où s est la section canonique de $\mathcal{O}_C(P)$ et $g_{Ar}(P,Q)$ est la fonction de Green–Arakelov : c'est l'unique fonction réelle de $C(\mathbb{C}) \times C(\mathbb{C})$ privé de sa diagonale, vérifiant [13]

i) $\partial_z\overline{\partial}_z g_{Ar}(z,w) = i\pi(\mu(z) - \delta_w)$ où δ_w est la distribution de Dirac en w,

ii) $\displaystyle\int_{C(\mathbb{C})} g_{Ar}(z,w)\mu(z) = 0$ pour tout w.

2) On considère sur $\Omega^1_{C/\mathbb{C}}$ la métrique hermitienne qui fait de l'isomorphisme résidu pour tout point $P \in C(\mathbb{C})$

$$\mathrm{Res}_P : \Omega^1_{C/\mathbb{C}}(P)|_P \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$

une isométrie quand $\mathcal{O}_C(P)$ est muni de sa métrique du 1) et $\mathbb{C}$ de sa métrique canonique. La métrique ainsi définie sur $\Omega^1_{C/\mathbb{C}}$ est permise.
On note $(\omega.\omega)$ l'auto–intersection du faisceau ω ainsi métrisé.

THÉORÈME 5.2 .— *On suppose que $\mathcal{C}$ est lisse sur $\mathcal{O}_K$. Alors*

$$h(\varphi_D(C)) = \frac{1}{8(g-1)[K:\mathbb{Q}]}(\omega.\omega) + (1-\frac{1}{g})h(\mathrm{cl}(D-D_0))$$

où D_0 est un diviseur sur la courbe C dont le multiple $(2g-2)D_0$ est un diviseur canonique.

PREUVE.— Les deux membres de cette égalité sont invariants par extension du corps de base. C'est évident pour les deux hauteurs. Soient L une extension finie de K et $\mathcal{O}_L$ son anneau d'entiers. Le schéma $\mathcal{C} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$ est lisse sur $\mathcal{O}_L$. C'est donc le modèle régulier minimal de $C \times_K L$ sur $\mathcal{O}_L$. Le dualisant relatif de $\mathcal{C} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$ sur $\mathcal{O}_L$ est le pull–back de ω. L'invariance de $\dfrac{(\omega.\omega)}{[K:\mathbb{Q}]}$ s'ensuit. On peut donc supposer que D et D_0 sont K–rationnels. On choisit deux diviseurs sur $\mathcal{C}$ qui prolongent D et D_0. On les note aussi D et D_0. À tout point $P \in C(K)$, on associe la section E_P de $\pi : \mathcal{C} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ qui le prolonge. Le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(E_P)$ est muni de ses métriques permises du 1). Pour ce choix, la formule d'adjonction suivante vaut :

$$(E_P.E_P) = (\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(E_P).\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(E_P)) = -(\omega.\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(E_P)) = -(\omega.E_P).$$

La lissité de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{O}_K$ intervient dans les trois points suivants :

a) Le foncteur de Picard relatif $\mathrm{Pic}_n(\mathcal{C}/\mathcal{O}_K)$, paramétrisant les classes d'isomorphismes de faisceaux inversibles sur $\mathcal{C}$ de degré n sur les fibres, est représentable par un schéma $\mathcal{J}_n$ propre et lisse sur $\mathcal{O}_K$ [26]. En particulier, le schéma abélien $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0$ fournit un modèle de J. Soit Θ le diviseur théta canonique sur $\mathcal{J}_{g-1}$; posons

$$\Theta^{(D)} = \Phi_D^*\mathcal{O}_{\mathcal{J}_{g-1}}(\Theta)$$

où $\Phi_D : \mathcal{J} \to \mathcal{J}_{g-1}$ est l'isomorphisme translation par $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}((g-1)D)$. Le faisceau inversible symétrique $\mathcal{L} = \Theta^{(D)} \otimes [-1]^*\Theta^{(D)}$ induit sur la fibre générique J de $\mathcal{J}$ le double du diviseur théta. Par suite, la hauteur h coïncide avec la moitié de la hauteur $h_{\mathcal{L}}$ définie par $\mathcal{L}$ (voir début de la section 3).

b) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau inversible sur $\mathcal{C}$ dont le degré sur la fibre générique est nul. On munit $\mathcal{F}$ de métriques permises et on lui associe l'intersection $(\mathcal{F}.\mathcal{F})$. Ce nombre ne dépend pas des métriques permises choisies à cause du degré nul de $\mathcal{F}$. Faltings et Hriljac [16, 22] ont établi la relation

$$(\mathcal{F}.\mathcal{F}) = -2[K:\mathbb{Q}]h(\mathrm{cl}(\mathcal{F}_K))$$

où $\mathrm{cl}(\mathcal{F}_K)$ est la classe de $\mathcal{F}_K$ dans la jacobienne J.

c) Le morphisme $\varphi_D : C \to J$ se prolonge par propriété universelle des modèles de Néron en un unique morphisme $\varphi_D : \mathcal{C} \to \mathcal{J}$.

Il est possible de munir $\mathcal{O}_\mathcal{C}(D)$ de métriques permises à l'infini de telle sorte que $(D.D) = 0$ car le degré de D sur la fibre générique est non nul. On a alors pour tout point $P \in C(K)$:

$$\begin{aligned} -2[K:\mathbb{Q}]h(\mathrm{cl}(P-D)) &= (E_P - D.E_P - D) \\ &= (E_P.E_P) - 2(E_P.D) + (D.D) \\ &= -(E_P.\omega + 2D) \end{aligned} \tag{4}$$

Considérons le faisceau inversible métrisé sur $\mathcal{C}$

$$\mathcal{E} = \varphi_D^*(\mathcal{L}^*) \otimes \omega \otimes \mathcal{O}_\mathcal{C}(2D)$$

où $\mathcal{L}^*$ est le dual de $\mathcal{L}$. Le pull-back d'une métrique du cube par φ_D est une métrique permise [26]. Les métriques de $\mathcal{E}$ sont par suite permises.

Un faisceau inversible $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{C}$ muni à l'infini de métriques permises est dit numériquement équivalent à zéro si pour tout faisceau inversible $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{C}$ muni à l'infini de métriques permises, on a $(\mathcal{E}.\mathcal{F}) = 0$.

LEMME 5.3 .— *Le faisceau $\mathcal{E}$ est numériquement équivalent à zéro.*

PREUVE.— On suppose, quitte à élargir le corps de base, que le faisceau $\mathcal{F}$ est associé à un diviseur de la forme $\sum_i \alpha_i E_{P_i}$ où les P_i sont des points K-rationnels. Comme le degré de $\mathcal{E}$ sur la fibre générique est nul, on peut supposer que $\mathcal{F}$ est équipé de la métrique permise induite par le diviseur $\sum_i \alpha_i E_{P_i}$. Dans ce cas, $(\mathcal{E}.\mathcal{F}) = \sum_i h_\mathcal{E}(P_i) = 0$ par la relation (4). □

On peut maintenant terminer la preuve du théorème 5.2. On tire du lemme 5.3 les deux relations $(\mathcal{E}.\mathcal{E}) = 0$ et $(\varphi_D^*(\mathcal{L}).\mathcal{E}) = 0$. On en déduit :

$$\begin{aligned} (\varphi_D^*(\mathcal{L}).\varphi_D^*(\mathcal{L})) &= \omega^2 + 4(\omega.D) \\ &= \frac{g}{g-1}\omega^2 + 4(1-g)(D - \frac{\omega}{2g-2})^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} h(\varphi_D(C)) &= \frac{1}{2}h_\mathcal{L}(\varphi_D(C)) = \frac{(\varphi_D^*(\mathcal{L}).\varphi_D^*(\mathcal{L}))}{8[K:\mathbb{Q}]g} \\ &= \frac{1}{8(g-1)[K:\mathbb{Q}]}\omega^2 + (1-\frac{1}{g})h(\mathrm{cl}(D-D_0)) \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 5.4 .— *Si $\mathcal{C}$ est lisse sur $\mathcal{O}_K$ alors* $(\omega.\omega) > 0$.

PREUVE.— Il suffit de prendre dans le théorème 5.2 $D = D_0$ et d'appliquer la proposition 5.1. □

REMARQUE.— Comment changent ces résultats si $\mathcal{C}$ n'est pas lisse sur $\mathcal{O}_K$?
Quand $\mathcal{C}$ a réduction semi-stable sur $\mathcal{O}_K$ (i.e. les fibres fermées de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{O}_K$ sont réduites avec au plus des points doubles ordinaires comme points singuliers), Zhang [45] introduit un accouplement, dit *accouplement admissible*, qui raffine l'intersection d'Arakelov. Il diffère de cette dernière seulement en les mauvaises places. Le théorème 5.2 est alors valable si on remplace (ω, ω) par l'intersection admissible (ω_a, ω_a) du dualisant relatif ω_a défini dans cette théorie. Il découle alors de la proposition 5.1 que $(\omega_a, \omega_a) > 0$. Par ailleurs, Zhang [45] prouve que $\omega^2 \geq \omega_a^2$ et que l'égalité s'établit si et seulement si C est elliptique ou a bonne réduction partout. Ceci implique la stricte positivité de (ω, ω) dans le cas de mauvaise réduction.

REMARQUE.— La positivité de ω^2 a été établie par Faltings [16]. L'équivalence entre la stricte positivité de ω^2 et la conjecture de Bogomolov dans le cas lisse a été établie par Szpiro ([36] et [39] théorème 3) et ceci modulo une question de parties fixes dans les puissances du dualisant relatif. Cette dernière a été indépendamment résolue par Kim [23] et Zhang [46]. Ainsi, pour démontrer la conjecture de Bogomolov pour les courbes, la stratégie a été pour longtemps la démonstration de la stricte positivité de ω^2. Cet objectif a été réalisé par Burnol [10] pour les courbes lisses dont la jacobienne est à multiplication complexe et par Zhang [45] pour d'autres cas.

Une borne supérieure de ω^2 est liée au problème de Mordell effectif [27, 29]. Il est connu que de telles bornes conjecturales sont équivalentes à une variante de la conjecture des petits points de Szpiro énoncée dans [40] (voir [39] et [27] corollaire 3.5). Des liens avec d'autres conjectures arithmétiques (conjecture de Szpiro sur le discriminant des courbes elliptiques, conjecture abc...) sont établis dans [27]. Soulé [35] a prouvé un théorème d'annulation pour les surfaces arithmétiques conjecturé par Szpiro, dont une conséquence est une borne supérieure de ω^2 en fonction de la norme d'une certaine section dans un groupe de cohomologie ([35] théorème 3). Ces résultats ouvrent des perspectives dans la direction des conjectures citées plus haut, analogues à ceux développés dans le cadre géométrique [41].

A NOMBRES D'INTERSECTION

Soient $\mathfrak{X}$ une variété arithmétique, X sa fibre générique et $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux faisceaux inversibles métrisés sur $\mathfrak{X}$. Bost, Gillet et Soulé définissent dans [9] un accouplement qui permet d'associer à tout cycle $\mathcal{Z}$ de dimension $d+1$ de $\mathfrak{X}$ et tout entier i compris entre 0 et $d+1$ le nombre d'intersection $(\hat{c}_1(\mathcal{L}_1)^i \hat{c}_1(\mathcal{L}_2)^{d+1-i} | \mathcal{Z})$. Leur proposition 2.3.1 donne trois façons équivalentes de définir ces nombres, dont celle que nous avons choisie. Soient Y une sous-variété de X de dimension d et $\mathcal{Y}$ sa fermeture schématique dans

$\mathfrak{X}$. Le nombre $(\hat{c}_1(\mathcal{L}_1)^i\hat{c}_1(\mathcal{L}_2)^{d+1-i}|Y)$, introduit dans la proposition 2.1, coïncide dans les notations de [9] avec $(\hat{c}_1(\mathcal{L}_1)^i\hat{c}_1(\mathcal{L}_2)^{d+1-i}|\mathcal{Y})$. La proposition suivante donne quelques propriétés de cet accouplement qui sont utilisées dans cet exposé.

PROPOSITION A.1 ([9] PROPOSITION 2.3.1) .—

i)Soient $f : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ un morphisme de variétés arithmétiques sur $\mathcal{O}_K$ et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible métrisé sur $\mathfrak{X}$. Pour tout cycle $\mathcal{Z}$ de dimension $d+1$ de $\mathfrak{X}'$, on a

$$(\hat{c}_1(f^*\mathcal{L})^{d+1}|\mathcal{Z}) = (\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1}|f_*[\mathcal{Z}]).$$

ii) Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux faisceaux inversibles métrisés sur $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Z}$ une sous-variété de dimension $d+1$ de $\mathfrak{X}$. Soient n un entier et s une section non nulle de $\mathcal{L}_2^{\otimes n}$ sur $\mathcal{Z}$. Alors, pour tout entier $1 \leq i \leq d+1$, on a :

$$\begin{aligned} n(\hat{c}_1(\mathcal{L}_1)^{d+1-i}\hat{c}_1(\mathcal{L}_2)^i|\mathcal{Z}) &= (\hat{c}_1(\mathcal{L}_1)^{d+1-i}\hat{c}_1(\mathcal{L}_2)^{i-1}|\operatorname{div}(s)) \\ &- \sum_{\sigma \in S} \varepsilon_\sigma \int_{\mathcal{Z}_\sigma(\mathbb{C})} \log \|s\|_\sigma c_1(\mathcal{L}_{1,\sigma}, \|\ \|_{1,\sigma})^{d+1-i} c_1(\mathcal{L}_{2,\sigma}, \|\ \|_{2,\sigma})^{i-1}. \end{aligned}$$

Avec les notations de cet exposé, on tire :

COROLLAIRE A.2 .— *On reprend les hypothèses de la proposition A.1–ii) et on suppose de plus que $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont amples. Soient Y une sous-variété de X de dimension d et $\mathcal{Y}$ sa fermeture schématique dans $\mathfrak{X}$. Soient s une section non nulle de $\mathcal{L}_2^{\otimes n}$ sur $\mathcal{Y}$ et s_K sa restriction à la fibre générique Y. Alors, pour tout entier $1 \leq i \leq d+1$,*

$$\begin{aligned} n(\hat{c}_1(\mathcal{L}_1)^{d+1-i}\hat{c}_1(\mathcal{L}_2)^i|Y) &\geq (\hat{c}_1(\mathcal{L}_1)^{d+1-i}\hat{c}_1(\mathcal{L}_2)^{i-1}|\operatorname{div}(s_K)) \\ &- \sum_{\sigma \in S} \varepsilon_\sigma \int_{Y_\sigma(\mathbb{C})} \log \|s\|_\sigma c_1(\mathcal{L}_{1,\sigma}, \|\ \|_{1,\sigma})^{d+1-i} c_1(\mathcal{L}_{2,\sigma}, \|\ \|_{2,\sigma})^{i-1}. \end{aligned}$$

PREUVE.— Le corollaire découle de la proposition A.1–ii) en remarquant que les composantes verticales de div(s) donnent des contributions positives car $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont amples. □

LEMME A.3 ([9] PROPOSITION 3.2.2) .— *Soient $\mathfrak{X}_1$ et $\mathfrak{X}_2$ deux modèles propres et plats sur $\mathcal{O}_K$ de X et $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux faisceaux inversibles amples sur respectivement $\mathfrak{X}_1$ et $\mathfrak{X}_2$ qui sont isomorphes sur la fibre générique X. On munit $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ à l'infini de métriques hermitiennes à courbures positives. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute sous-variété Y de X, on ait*

$$|h_{\mathcal{L}_1}(Y) - h_{\mathcal{L}_2}(Y)| \leq C\ .$$

B THÉORÈME DE HILBERT–SAMUEL ARITHMÉTIQUE

Soient $\mathfrak{X}$ une variété arithmétique, X sa fibre générique et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible ample sur $\mathfrak{X}$ muni en chaque place $\sigma \in S$ d'une métrique hermitienne $\|\ \|_\sigma$ à courbure $c_1(\mathcal{L}_\sigma, \|\ \|_\sigma)$ positive. Soient Y une sous-variété de X de dimension d et $\mathcal{Y}$ sa fermeture schématique dans $\mathfrak{X}$. Le plongement canonique de $\Gamma_n = H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\mathcal{Y}})$ dans $V_n = H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\mathcal{Y}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ fait du premier un réseau dans le second. On désigne par B_n la boule unité de V_n pour sa norme sup.

THÉORÈME B.1 .— *Avec les hypothèses et notations précédentes, on a*

$$\chi_{\text{sup}}(\Gamma_n) = -\log(\text{vol}(V_n/\Gamma_n)) + \log(\text{vol}(B_n)) = n^{d+1}\frac{(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1}|Y)}{(d+1)!} + o(n^{d+1}) .$$

En utilisant le théorème de Minkowski, on obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE B.2 .— *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, il existe une section non nulle $l \in H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\mathcal{Y}})$ avec*

$$\|l\|_{\text{sup}} \leq \exp(n\varepsilon - n\frac{(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1}|Y)}{(d+1)\deg_{\mathcal{L}}(Y)}) .$$

Le théorème B.1 a été d'abord considéré pour la variété tout entière $Y = X$. On dispose dans ce cas de deux démonstrations. La première est due à Gillet et Soulé [17] (voir aussi l'exposé de Bost dans ce séminaire [8]). Le théorème B.1 est un corollaire à une forme faible de leur théorème de Riemann–Roch arithmétique [20] et d'un résultat d'analyse de Bismut–Vasserot [4] sur le développement de la torsion analytique d'une puissance d'un faisceau inversible. Nous avons ensuite donné avec T. Bouche [1] une preuve directe du théorème de Hilbert–Samuel arithmétique qui ne passe pas par le théorème de Riemann–Roch arithmétique. Le théorème de Hilbert–Samuel arithmétique pour toute sous-variété Y de X est démontré par Zhang ([48] théorème 1.4). Il considère pour cela une désingularisation générique de la sous-variété et se ramène au cas précédent. Enfin, deux autres résultats établissent l'existence d'un développement asymptotique de $\chi_{\text{sup}}(\Gamma_n)$ sous la forme de $cn^{d+1} + o(n^{d+1})$ mais sans donner de lien entre c et la hauteur de Y relativement à $\mathcal{L}$. Le premier est celui de Lau, Rumely et Varley [25] qui est valable sous des conditions plus faibles que celles du théorème B.1. Le second est prouvé par Laurent [24] mais pour d'autres métriques.

References

[1] A. ABBES, T. BOUCHE, *Théorème de Hilbert-Samuel "arithmétique"*, Ann. de l'Inst. Fourier Tome **45** (1995), 375–401.

[2] S. JU. ARAKELOV, *Intersection theory of divisors on arithmetic surface*, Math. USSR Izvestija, Vol.**8** (1974) N° 6, 1167–1180.

[3] Y. BILU, *Limit distribution of small points on algebraic tori*, preprint (1996).

[4] J.-M. BISMUT, E. VASSEROT, *Comportement asymptotique de la torsion analytique associée aux puissances d'un fibré en droites*, C. R. Acad. Sci. Paris, **307** (1988), 799–781.

[5] F. A. BOGOMOLOV, *Points of finite order on an abelian variety*, Math. USSR Izv. **17** (1981).

[6] E. BOMBIERI, U. ZANNIER, *Algebraic points on subvarieties of* $(\mathbb{G}_m)^n$, Internat. Math. Res. Notices, t. **7** (1995), 333–347.

[7] E. BOMBIERI, U. ZANNIER, *Heights of algebraic points on subvarieties of abelian varieties*, prépublication (1996).

[8] J.-B. BOST, *Théorie d'intersection et théorème de Riemann-Roch arithmétiques*, Séminaire Bourbaki, exp. N° 731 (1990–91), Astérisque **201–202–203** (1991), 43–88.

[9] J.-B. BOST, H. GILLET, C. SOULÉ, *Heights of projective varieties and positive Green forms*, J. of the AMS, vol **7** (1994), 903–1027.

[10] J.-F. BURNOL, *Weierstrass points on arithmetic surfaces*, Invent. Math. **107** (1992), 421–432.

[11] S. DAVID, P. PHILIPPON, *Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes*, prépublication 88 de l'Univ. Paris VI (1996).

[12] P. DELIGNE, *Le déterminant de la cohomologie*, dans Current trends in arithmetical algebraic geometry (K. Ribet ed.), Contemporary Math. **67** (1987), 93–177.

[13] R. ELKIK, *Fonctions de Green, Volumes de Faltings, Application aux surfaces arithmétiques*, dans Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell, Astérisque **127** (1985), 89–112.

[14] R. ELKIK, *Fibrés d'intersections et intégrales de classes de Chern*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **22** (1989), 195–226.

[15] R. ELKIK, *Métriques sur les fibrés d'intersection*, Duke **61** (1990), 303–328.

[16] G. FALTINGS, *Calculus on arithmetic surfaces*, Ann. of Math. **119** (1984), 387–424.

[17] H. GILLET, C. SOULÉ, *Amplitude arithmétique*, C. R. Acad. Sci. Paris, **307** (1988), 887–890.

[18] H. GILLET, C. SOULÉ, *Arithmetic intersection theory*, Publ. IHES, **72** (1990), 94–174.

[19] H. GILLET, C. SOULÉ, *Characteristic classes for algebraic vector bundles with hermitian metrics I, II*, Ann. of Math. **131** (1992), 163–203 et 205–238.

[20] H. GILLET, C. SOULÉ, *An arithmetic Riemann-Roch theorem*, Invent. Math. **110** (1992), 473–543.

[21] W. GUBLER, *Hohentheorie*, Math. Ann. **298** (1994), 427–455.

[22] P. HRILJAC, *Heights and Arakelov's intersection theory*, Amer. J. of Math. **107** (1985), 23–38.

[23] M. KIM, *Small points on constant arithmetic surfaces*, Duke. Math. J. **61** (1990), 828–833.

[24] M. LAURENT, *Hauteur de matrices d'interpolation*, dans Approximations Diophantiennes et Nombres Transcendants, Luminy 1990, 215–239.

[25] C. F. LAU, R. RUMELY, R. VARLEY, *Existence of sectional capacity*, University of Georgia, Mathematics preprint series N. 25, vol I (1993).

[26] L. MORET-BAILLY, *Métriques permises*, dans Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell, Astérisque **127** (1985), 29–87.

[27] L. MORET-BAILLY, *Hauteurs et classes de Chern sur les surfaces arithmétiques*, dans Séminaire sur les pinceaux de courbes elliptiques (à la recherche de "Mordell effectif"), éditeur L. Szpiro, Astérisque **183** (1990), 37-57.

[28] J. OESTERLÉ, *Courbes sur une variété abélienne (d'après M. Raynaud)*, Séminaire Bourbaki, exposé N° 625 (1983), Astérisque **121–122** (1985), 213–224.

[29] A. N. PARSHIN, *The Bogomolov-Miyaoka-Yau inequality for arithmetical surfaces and its applications*, Séminaire de théorie des nombres de Paris 1986–87. Progress in Math. Birkhäuser vol. **75**.

[30] P. PHILIPPON, *Sur les hauteurs alternatives I; II; III*, Math. Ann., t. **289** (1991), 255–283; Ann. Inst. Fourier, t. **44** (1994), 1043-1065; J. Math. Pures Appl., t. **74** (1995), 345-365.

[31] M. RAYNAUD, *Courbes sur une variété abélienne et points de torsion*, Invent. Math. **71** (1983), 207–233.

[32] M. RAYNAUD, *Sous-variétés d'une variété abélienne et points de torsion*, dans Arithmetic and Geometry 1, éditeurs: J. Coates et S. Helgason, Birkhauser (1983).

[33] C. SOULÉ, *Géométrie d'Arakelov et théorie des nombres transcendants*, J. Arithmétiques de Luminy (17–21 Juillet 1989), Astérisque **198–200** (1991), 355–371.

[34] C. SOULÉ, *Géométrie d'Arakelov des surfaces arithmétiques*, Séminaire Bourbaki exposé N° 713 (1988–89), Astérisque **177–178** (1989), 327–343.

[35] C. SOULÉ, *A vanishing theorem on arithmetic surfaces*, Invent. Math. **116** (1994), 577–599.

[36] L. SZPIRO, *Small points and torsion points*, Contemporary Mathematics **58** (1986), 251–260.

[37] L. SZPIRO, *Présentation de la théorie d'Arakelov*, Contemporary Mathematics **67** (1987).

[38] L. SZPIRO, *Degré, Intersections, Hauteurs*, dans Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell, Astérisque **127** (1985), 11–28.

[39] L. SZPIRO, *Sur les propriétés numériques du dualisant relatif d'une surface arithmétique*, dans le Grothendieck Festschrift, Vol **3** (1990), Basel Boston Berlin, Birkhauser, 229–246.

[40] L. SZPIRO, *Un peu d'effectivité*, dans Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell, Astérisque **127** (1985), 275–287.

[41] L. SZPIRO, *Propriétés numériques du faisceau dualisant relatif*, dans Séminaire de courbes de genre au moins deux, Astérisque **86** (1981),44–77.

[42] L. SZPIRO, E. ULLMO, S. ZHANG, *Équidistribution des petits points*, Invent. Math. **127** (1997), 337–347.

[43] E. ULLMO, *Positivité et discrétion des points algébriques des courbes*, preprint (1996), à paraître dans Ann. of Math..

[44] S. ZHANG, *Equidistribution of small points on abelian varieties*, preprint (1996), à paraître dans Ann. of Math..

[45] S. ZHANG, *Admissible pairing on a curve*, Invent. Math. **112** (1993), 171–193.

[46] S. ZHANG, *Positive line bundles on arithmetic surfaces*, Ann. of Math. **136** (1992), 569–587.

[47] S. ZHANG, *Positive line bundles on arithmetic varieties*, J. of the AMS, Vol **8** (1995), 187–221.

[48] S. ZHANG, *Small points and adelic metrics*, J. of Alg. Geom. **4** (1995), 281–300.

Ahmed ABBES

Université de Paris–Nord
URA 742 du CNRS
Institut Galilée
Département de Mathématiques
F–93430 VILLETANEUSE

E–mail : abbes@math.univ-paris13.fr