DANIEL BENNEQUIN

Monopôles de Seiberg-Witten et conjecture de Thom

Astérisque, tome 241 (1997), Séminaire Bourbaki, exp. nº 807, p. 59-96
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__59_0>

Séminaire BOURBAKI
48ème année, 1995-96, n° 807

Novembre 1995

MONOPÔLES DE SEIBERG-WITTEN ET CONJECTURE DE THOM
[d'après Kronheimer, Mrowka et Witten]

par **Daniel BENNEQUIN**

1. SURVOL

À nouveau l'autodualité, l'étoile de Hodge, mais l'apparition des spineurs de Dirac et Cartan, la géométrie spin^c d'Atiyah et Penrose, racine carrée de la géométrie euclidienne ; éclairé par de nouvelles dualités en théorie quantique des champs, Witten a découvert un raccourci profond qui mène au trésor de la dimension 4.

Soit X une variété compacte orientée de dimension 4 ; le produit extérieur définit une structure conforme canonique de signature $(3,3)$ sur le fibré $\Lambda^2 T^*(X)$ des formes de degré 2. Toute décomposition orthogonale $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$, avec Λ^2_+ dans le cône positif, correspond à une structure conforme sur X. L'opérateur $*$ de Hodge vaut $+1$ sur Λ^2_+ et -1 sur Λ^2_-. Une métrique riemannienne compatible sur X est déterminée par la donnée supplémentaire d'un élément de volume dans Λ^4 (*cf.* [Be], [D.K.]).

Un théorème topologique de Whitney ([Wh]), à l'origine de la théorie des classes caractéristiques, se traduit en ces termes :

Il existe deux fibrés vectoriels complexes de rang 2 sur X, E_+ et E_-, munis de structures hermitiennes définies positives et d'un isomorphisme unitaire des déterminants $\Lambda^2(E_-) \to \Lambda^2(E_+)$, tels que Λ^2_+ et Λ^2_- soient respectivement isomorphes aux fibrés $su(E_+)$ et $su(E_-)$ des endomorphismes anti-hermitiens sans trace.

Le fibré tangent $T(X)$ s'identifie canoniquement à un sous-fibré réel de $\mathrm{Hom}(E_-, E_+)$ (*cf.* § 4).

Les fibrés E_+, E_- relèvent le groupe structural SO_3 de Λ^2_+, Λ^2_- au groupe unitaire U_2. Ils permettent de relever le groupe structural SO_4 de $T(X)$ à l'unique fibré en cercle non-trivial $Spin^c_4 = Spin_4 \times_{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}} S^1 \to SO_4$.

La donnée de E_+, E_-, comme dans l'énoncé de Whitney, forme une spin^c-structure sur X ; les sections de E_+ (resp. E_-) sont les champs de spineurs positifs (resp. négatifs). Le fibré en droite complexe $L = \Lambda^2 E_+ (\approx \Lambda^2 E_-)$ est le fibré caractéristique de la structure ; sa première classe de Chern est congrue modulo 2 à la deuxième classe de Stiefel-Whitney de X.

Les classes d'équivalence de spin^c-structures associées à une métrique et une orientation sur X forment un ensemble homogène principal $\Sigma^c(X)$ pour le groupe de cohomologie $H^2(X;\mathbf{Z})$; l'action sur $c_1(L)$ est $c \mapsto c_1(L) + 2c$ (*cf.* [L.M.]).

(Les §§ 2 à 4 détailleront les rapports de spin^c avec l'autodualité.)

D'une occulte physique, les recherches de Seiberg et Witten sur la renormalisation des théories de Yang-Mills $N = 2$-supersymétriques twistées (*cf.* § 8), Witten ([Wi4]) a su extraire une équation des monopôles spin^c :

Fixons une métrique riemannienne et une structure spin^c sur X ;

l'inconnue est le couple d'une connexion unitaire A sur L et d'une section Φ de E_+ ;

à la connexion A est associé un opérateur de Dirac :

$$D_A^+ : \Gamma(E_+) \longrightarrow \Gamma(E_-),$$

au champ de spineurs Φ un endomorphisme de E_+ :

$$\sigma(\Phi,\Phi)(\psi) = \langle \Phi, \psi \rangle \Phi - \frac{1}{2} \langle \Phi, \Phi \rangle \psi,$$

hermitien de trace 0, donc une 2-forme auto-duale $\sigma(\Phi,\Phi) \in i\Omega_+^2 = \Gamma(i\Lambda_+^2)$;

l'équation est le couple :

$$\text{(SW)} \qquad D_A^+ \cdot \Phi = 0 \quad , \quad F_A^+ = \sigma(\Phi,\Phi).$$

Dans la seconde équation, F_A est la courbure de A, section de $i\Lambda^2$ et F_A^+ désigne sa projection auto-duale.

Les deux équations sont quasi-linéaires du premier ordre, toutes deux non--linéaires de degré 2 à l'ordre zéro. À cause de la deuxième, le système n'est pas conformément invariant.

Lorsque (A,Φ) est solution, beaucoup d'autres solutions s'en déduisent par transformation de jauge et changement de phase de Φ : si h est une fonction de X dans le cercle $S^1 \subset \mathbf{C}$, on peut remplacer (A,Φ) par $h\cdot(A,\Phi) = (A - 2d\log h\,,\, h\Phi)$.

En un point fixe $h\cdot(A,\Phi) = (A,\Phi)$, on a $h \equiv 1$ ou $\Phi \equiv 0$. Lorsque Φ est identiquement nulle, on dit que la solution est réductible. S'il existe une solution réductible, le groupe de jauge $\mathcal{G}$ n'agit pas librement. Mais dans tous les cas, si l'on choisit un point $x_0 \in X$, le sous-groupe $\mathcal{G}_0$ des h valant 1 en x_0 agit librement.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des connexions sur L, $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des champs de spineurs positifs, $\mathcal{S} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{E}_+$ l'ensemble des monopôles de Seiberg-Witten, $\mathcal{B} = \mathcal{A} \times \mathcal{E}_+/\mathcal{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence de jauge, $\mathcal{B}^*$ l'ensemble des irréductibles, $\mathcal{M} = \mathcal{S}/\mathcal{G}$ l'espace des modules de monopôles, $\mathcal{M}^*$ les irréductibles, $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{A} \times \mathcal{E}_+/\mathcal{G}_0$, $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{S}/\mathcal{G}_0$ les classes restreintes. Pour toutes les bonnes topologies, par exemple Sobolev L^2_k pour $\mathcal{A}$ et $\mathcal{E}_+$, L^2_{k+1} pour $\mathcal{G}$, $k \geq 2$, l'action de $\mathcal{G}$ est lisse, $\mathcal{B}$ est séparé, $\mathcal{B}^*$ et $\widetilde{\mathcal{B}}$ sont des variétés, $\mathcal{M}$ et $\widetilde{\mathcal{M}}$ sont fermés dans $\mathcal{B}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}$. Le premier fait remarquable, qui va donner un avantage aux monopôles sur les instantons, est le suivant :

Si X est compacte sans bord, l'espace des modules $\mathcal{M}$ est compact.

Cela résulte de l'estimation géométrique suivante ([Wi4], [K.M.3]) :

Soit s la fonction courbure scalaire sur X ; en tout point x où $\|\Phi\|$ atteint un maximum local, on a :

$$\|\Phi(x)\|^2 \leq \sup(0, -s(x)).$$

L'origine de cette inégalité, et de bien d'autres propriétés de (SW), est la formule de Weitzenböck-Bochner-Lichnerowicz :

$$D_A^- D_A^+ \cdot \Phi = \nabla_A^* \nabla_A \cdot \Phi + \frac{s}{4}\Phi + \frac{1}{2} F_A^+(\Phi).$$

L'opérateur $D_A^- : \Gamma(E_-) \to \Gamma(E_+)$ est l'adjoint formel D_A^{+*} de D_A^+. Selon les désirs originels de Dirac, l'opérateur du premier ordre $\begin{pmatrix} 0 & D_A^- \\ D_A^+ & 0 \end{pmatrix}$ est une racine carrée du laplacien $-\Delta_A = \nabla_A^* \nabla_A$ de $\Gamma(E_- \oplus E_+)$ modulo un opérateur d'ordre 0 ; mais c'est justement le terme d'ordre zéro qui a des conséquences topologiques. Lichnerowicz l'a remarqué en premier (*cf.* [Li] et [G.L.1]).

L'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A} \times \mathcal{E}_+$ et l'opérateur SW de $\mathcal{A} \times \mathcal{E}_+$ dans $\Gamma(E_-) \times i\Omega^2_+$ qui à (A, Φ) associe $(D_A^+\Phi, F_A^+ - \sigma(\Phi,\Phi))$ font une sorte de complexe elliptique non-linéaire. Supposons X compacte sans bord.

Sur un ouvert dense des métriques riemanniennes de X, SW est une submersion en tout point de $\mathcal{M}^*$; l'espace $\mathcal{M}^*$ associé est une variété de dimension finie ([E.F.]).

On peut faire appel au théorème de l'indice d'Atiyah-Singer pour calculer la dimension virtuelle de $\mathcal{M}^*$. Supposons X connexe :

L'indice réel de SW est égal au nombre d'Euler χ_+ du fibré orienté de rang 4 *réel sous-jacent au fibré E_+.* Si $\mathcal{M}^* \neq \emptyset$, $\dim_{\mathbf{R}} \mathcal{M}^* = \chi_+$.

Si χ est la caractéristique d'Euler de X et σ sa signature, on a :

$$\chi_+ = \frac{1}{4}(c_1(L)^2 - 2\chi - 3\sigma).$$

La dimension de $\widetilde{\mathcal{M}}$ est 1 de plus ; $\widetilde{\mathcal{M}}^*$ est un fibré en cercle sur $\mathcal{M}^*$.

Il peut être utile de perturber les équations de Seiberg-Witten en ajoutant au second membre de la seconde équation une forme autoduale fixe $i\omega$ (*cf.* [Wi4], [K.M.3], [T1]). Pour ω générique, $\mathcal{M}^*_\omega$ et $\widetilde{\mathcal{M}}^*_\omega$ sont des variétés. Leurs dimensions sont encore χ_+ et $1+\chi_+$.

La définition d'invariants de la structure différentiable orientée de X à partir des espaces $\mathcal{M}$ réclame une élimination convenable des monopôles réductibles :

Le type de la forme d'intersection sur $H^2(X,\mathbf{R})$ est déterminé par les nombres b_2^+ et b_2^- ($\sigma = b_2^+ - b_2^-$, $b_2 = b_2^+ + b_2^-$).

Si $b_2^+ \geq 1$, pour une métrique générique de X, $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}$.

Et si $b_2^+ > 1$, deux métriques génériques peuvent être déformées l'une dans l'autre par un chemin qui évite les réductibles. D'où une fonction de $\Sigma^c(X)$ dans l'anneau de cobordisme non–orienté du point, Ω_*^O.

Comme avait fait Donaldson ([D3]) pour orienter les espaces de modules des équations de Yang-Mills, il est possible d'orienter canoniquement $\mathcal{M}^*$ en choisissant une orientation de l'homologie de X, c'est-à-dire une demi-droite dans $\mathrm{Det}(H^1(X,\mathbf{R}))^* \otimes \mathrm{Det}(H^2_+(X,\mathbf{R}))$. On obtient ainsi une fonction à valeur dans l'anneau de cobordisme orienté Ω_*^{SO}, dès que $b_2^+ > 1$.

(Question : a-t-on une fonction de $\Sigma^c(X)$ dans $\Omega_*^{Spin^c}$?)

Si l'on souhaite des invariants numériques, on peut prendre la classe d'Euler du fibré $\widetilde{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$, et l'élever à la puissance qu'il faut pour intégrer sur $\mathcal{M}$. Alors, si $S \in \Sigma^c(X)$ est une classe de structure spin^c, dont le nombre χ_+ est pair, on pose $sw(S) = \langle c_1(\widetilde{\mathcal{M}})^{\frac{\chi_+}{2}}, [\mathcal{M}]\rangle$ (quantité qui dépend de l'orientation d'homologie), et si χ_+ est impair, on pose $sw(S) = 0$. (Bien que χ_+ dépende de S via $c_1(L)$, sa parité ne dépend que de X.)

Cependant, *il n'y a qu'un nombre fini de classes de structures spin^c sur X dont les invariants de Seiberg-Witten ne sont pas vides* (*cf.* § 6).

Il semble que les plus pertinentes des structures spin^c sur X soient celles dont le χ_+ vaut 0.

Dans ce cas, une section jamais nulle de E_+ donne un isomorphisme de $T(X)$ avec E_- ; la structure presque–complexe sur $T(X)$ qu'on en déduit est compatible avec la métrique. Inversement, une structure presque–complexe sur X fournit une structure spin^c canonique, pour laquelle $E_+ = \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2} = 1 \oplus K^{-1}$, $E_- = \Lambda^{0,1} = T'(X)$, $L = \Lambda^{0,2}$ $(= \Lambda^2(E_+) = \Lambda^2(E_-))$, donc $c_1(L) = c_1(X)$. Les autres structures s'obtiennent en tordant celle-là par un fibré complexe de rang 1 quelconque.

D'après [Wu], les classes d'homotopie de structures presque-complexes sur X sont en bijection avec les classes caractéristiques $c_1(L)$ telles que $\chi_+ = 0$ (*i.e.* les $c_1 \in H^2(X, \mathbf{Z})$ telles que $c_1 \equiv W_2$ modulo 2 et $c_1^2 = 2\chi + 3\sigma$).

On choisit des métriques adaptées, presque-Kähler, pour écrire les équations (SW). Si la métrique est de Kähler, $D_A^+ = \sqrt{2}\,(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)$.

Witten a montré que les surfaces kählériennes complexes telles que $b_2^+ > 1$ ont des invariants non nuls. On rencontre la théorie classique des systèmes linéaires en géométrie algébrique. Et chaque fois que les invariants sont stablement non–vides, on a $\chi_+ = 0$ (*i.e.* $c_1(L)^2 = c_1(X)^2$) (*cf.* [Wi4]). C'est ce que Taubes étend à présent aux variétés symplectiques.

Les classes c_1 fournissant des invariants de Seiberg-Witten non-vides sont dites basiques (au sens des monopôles).

Une question ouverte sur les monopôles : préciser le rapport entre les invariants de Seiberg-Witten et les invariants de Donaldson ([D4]). Cette question semble aussi importante pour les physiciens que pour les mathématiciens (*cf.* § 8).

Les classes basiques de Seiberg–Witten semblent coïncider avec les classes basiques (au sens des instantons) de Kronheimer–Mrowka décrivant les polynômes de Donaldson des variétés simples (*cf.* [K.M.2], [B3]).

Cependant, Taubes [T1,2,3] a établi le lien entre les invariants de Seiberg-Witten et ceux de Gromov (*cf.* [G], [B1,2]) pour les variétés symplectiques de dimension 4. Le corollaire le plus frappant : il n'y a qu'une classe d'isomorphisme de structure symplectique de volume donné sur le plan projectif complexe.

Lorsque $\chi_+(S) = 0$, le nombre $sw(S)$ compte algébriquement le nombre de points de $\mathcal{M}$.

Mais déjà, sans orienter l'homologie, le nombre de points de $\mathcal{M}$ (générique) compté modulo 2 s'avère très puissant, suffisant pour résoudre un problème de topologie de dimension 4 qui avait mérité le nom de "conjecture de Thom" :

Dans le plan projectif complexe $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, toute courbe algébrique complexe lisse C de degré d est de genre $\frac{1}{2}\,(d-1)(d-2)$; la conjecture promettait que le genre de toute surface réelle orientée connexe Σ plongée dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ homologue à C est supérieur à celui de C. ("Économie analytique".)

Pour $d = 1$ ou 2, il n'y a rien à prouver. Si $d = 3$, le genre algébrique est 1, le problème fut résolu par Kervaire et Milnor ([Ke.Mi.]). Pour $d = 4$ ou 5, il fallut attendre l'usage de la signature équivariante par Rohlin et Hsiang & Szczarba (*cf.* [B.We.], [Ro], [Hs.Sz.]) ; le résultat vient d'une inégalité générale $g(\Sigma) \geq \frac{1}{4}\,d^2 - 1$ (au lieu du $\frac{1}{2}\,d^2 - \frac{3}{2}\,d + 1$ espéré). Avec $d = 6$ surviennent les invariants de Donaldson entre les mains de Kotschick et Matič (*cf.* [Ko.Ma.]). Au-delà ? Kronheimer et Mrowka font appel aux équations de Seiberg-Witten :

THÉORÈME ([K.M.3]).— *$g(\Sigma) \geq g(C)$ en tout degré.*

Avec les modules d'instantons singuliers, Kronheimer et Mrowka avaient réussi à établir l'inégalité pour les surfaces Σ qui coupent une droite projective $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ en d points géométriques (*cf.* [K.M.1], [B3]). C'était un corollaire d'un théorème valable sur toute surface projective complexe avec $b_2^+ \geq 3$: à l'exception des sphères Σ d'auto–intersection 0 et -1, on a $g(\Sigma) \geq \frac{1}{2}\Sigma \cdot \Sigma + 1$.

La "conjecture de Thom généralisée" énonce que sur toute surface projective complexe de diviseur canonique K, toute surface réelle plongée orientée connexe Σ homologue à une courbe algébrique complexe lisse vérifie $g(\Sigma) \geq 1 + \frac{1}{2}\Sigma \cdot \Sigma + \frac{1}{2}K \cdot \Sigma$. On ignore encore la réponse, mais d'ores et déjà, la théorie de Seiberg-Witten a permis d'établir un grand nombre de cas de la conjecture généralisée ; ce sont les travaux récents de Kronheimer, Mrowka, Morgan, Szabó, Taubes, Auckley (*cf.* [Au]).

Pour démontrer le théorème, Kronheimer et Mrowka accèdent au terme $K \cdot \Sigma$ sous l'hypothèse $\Sigma \cdot \Sigma = 0$.

Le mécanisme de la démonstration (qui sera reprise au § 7) :

En éclatant $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ sur d^2 points, on arrive à une surface X simplement connexe telle que $b_2^+ = 1$, $b_2^- = d^2$. Sa forme d'intersection a le type $(1, -1, \cdots, -1)$ sur $\mathbf{Z}$. Soit H la classe d'homologie dans X d'une droite $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ qui évite les d^2 points, et $E_1, \cdots, E_{d^2}$ les diviseurs exceptionnels ; notre attention se porte sur une surface réelle orientée connexe plongée Σ homologue à $dH - E_1 - \cdots - E_{d^2}$. Alors $\Sigma \cdot \Sigma = 0$. La classe canonique K de X, opposée de la première classe de Chern $c_1(X)$, vaut $(d-3)H - \Sigma$. Le théorème à démontrer équivaut à $g(\Sigma) \geq 1 + \frac{1}{2}K \cdot \Sigma$.

Comme X est analytique complexe, elle possède une structure spin^c canonique, pour laquelle $E_+ = \mathbf{1} \oplus K^{-1}$, $E_- = T'(X)$ et $c_1(L) = c_1(X)$; c'est celle-là que nous retenons.

Pour chaque métrique riemannienne g sur X, il existe une unique 2-forme harmonique auto-duale ω_g dont la classe de cohomologie réelle $[\omega_g]$ vérifie $[\omega_g] \cdot [\omega_g] = 1$ et $[\omega_g] \cdot H > 0$. Le signe de $[\omega_g] \cdot c_1(L)$ sera existentiel pour les monopôles. L'ensemble des métriques est découpé en régions par les murs d'équation $[\omega_g] \cdot c_1 = 0$. Dans chaque composante connexe par arc du complémentaire des murs (une région de "bonnes métriques"), il est possible de définir à nouveau des invariants de Seiberg–Witten. Celui qui va jouer un rôle maintenant est le nombre de points modulo 2 de $\mathcal{M}$. (Nous sommes dans le cas où $\chi_+ = 0$.)

1) (Une propriété d'annulation)

La première sorte de métrique considérée sur X est construite en réunissant les métriques standard de Fubini-Study sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ et sur les exemplaires de $\overline{\mathbf{P}^2(\mathbf{C})}$, qui entourent les diviseurs exceptionnels, par de petits colliers d'âme S^3. Gromov et Lawson ([G.L.2]) ont montré que la courbure scalaire de ce genre de métriques est partout strictement positive ; il n'y a donc pas de monopôles de Seiberg-Witten pour elles (ni pour aucune métrique proche).

2) Pour ces métriques, si de plus les S^3 ont de tout petits diamètres, la forme canonique auto-duale ω possède une intégrale voisine de 1 sur H et voisine de 0 sur chaque cycle E_j. Donc $c_1(L) \cdot \omega > 0$.

3) Soit $Y \approx \Sigma \times S^1$ le bord d'un voisinage tubulaire de la surface Σ dans X ; Y découpe X en deux pièces X_0, X_1. La deuxième sorte de métrique utile sur X réunit des métriques bornées sur X_0 et X_1 par un très long tube $Y \times [-R, R]$, produit d'une métrique bornée de Y par la métrique usuelle sur l'intervalle $[-R, R]$ dans $\mathbf{R}$. Notons $\omega(R)$ la forme canonique autoduale d'une telle métrique :

Si $d > 3$, pour R suffisamment grand, on a $c_1(L) \cdot \omega(R) < 0$ (*cf.* §7).

4) (Le théorème d'existence)

Considérons un chemin C^∞ générique, g_t, $t \in [0,1]$ de métriques sur X et soit ω_t le chemin de 2-formes canoniques associées ; supposons que la fonction $c_1(L) \cdot \omega_t$ de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ change de signe une fois entre 0 et 1 ; alors, les nombres de Seiberg-Witten modulo 2 sur (X, g_0) et sur (X, g_1) sont différents.

(Génériquement, il n'y a qu'un monopôle réductible pour une métrique où $c_1(L) \cdot \omega = 0$; elle correspond à une bifurcation centrale de $\widetilde{\mathcal{M}}$.)

Conséquence : pour une métrique du type $X(R) = X_0 \cup (Y \times [-R, R]) \cup X_1$ avec R assez grand et si $d > 3$, il y a stablement des monopôles de Seiberg-Witten.

5) Quand R tend vers l'infini, d'une famille de solutions des équations de Seiberg-Witten sur les variétés allongées $X(R)$, il est possible de déduire une solution invariante par translation sur le produit compact $Y \times [0,1]$. (Ici intervient une intégrale à la Chern-Simons.)

6) Un monopôle invariant par translation sur $Y \times [0,1]$ correspond à une solution des équations de Seiberg-Witten en dimension 3 :

Identifions Y à $Y \times \{0\} \subset Y \times [0,1]$; pour la métrique produit, le long de Y, $\Lambda^2_+(T^*(Y \times [0,1]))$ et $\Lambda^2_-(T^*(Y \times [0,1]))$ s'identifient canoniquement à $\Lambda^2(T^*(Y))$

(qui est naturellement isomorphe à $T(Y)$) (avec un facteur conforme $\sqrt{2}$) ; E_+ et E_- s'identifient tous les deux à un fibré de spineurs hermitien E au-dessus de Y. (E est le produit tensoriel d'un fibré complexe de rang 2, qui relève à SU_2 le groupe structural SO_3 de $T(Y)$, avec un fibré en droites complexes dont le carré est la restriction de L à Y.)

Les équations de dimension 3 portent sur une connexion unitaire $\vec{A}$ sur L et sur une section Φ de E :

$$(\mathrm{SW}_3) \qquad D_{\vec{A}}\Phi = 0 \quad , \quad F_{\vec{A}} = \sigma(\Phi, \Phi).$$

La première est l'équation de Dirac stationnaire avec potentiel vecteur ; dans la seconde, $F_{\vec{A}}$ est la courbure de $\vec{A}$ et $\sigma(\Phi, \Phi) = \overline{\Phi} \otimes \Phi - \frac{1}{2}|\Phi|^2$.

Remarque ([E.F.]) : en descendant encore d'une dimension, on tombe sur des équations analogues à celles de Ginzburg-Landau en supraconductivité.

La conclusion utilise la précision des estimations *a priori* :

On peut supposer $d > 3$ grâce à Kervaire et Milnor. Choisissons sur $Y \approx \Sigma \times S^1$ la métrique produit d'une métrique de courbure constante $2\pi\chi(\Sigma)$ sur Σ et de la métrique ordinaire sur le cercle $S^1 \subset \mathbf{C}$; si bien que l'aire totale d'un $\Sigma \times \{\theta\}$ vaut 1 et que la courbure scalaire en chaque point de Y égale $4\pi\chi(\Sigma)$. Soit $(\vec{A}, \Phi)$ un monopôle pour cette métrique (et pour E) ; on sait qu'il en existe au moins un d'après les étapes précédentes.

L'inégalité clef dit qu'en tout point :

$$\|\Phi\|^2 \leq -4\pi\chi(\Sigma).$$

Mais dans $\Lambda^2(T^*(Y)) = su(E)$, on a :

$$\|\sigma(\Phi, \Phi)\| = \frac{1}{2}\|\Phi\|^2,$$

donc la seconde équation de (SW_3) entraîne la majoration ponctuelle :

$$\|F_{\vec{A}}\| \leq 2\pi|\chi(\Sigma)|.$$

Par ailleurs, le nombre de Chern $c_1(L) \cdot \Sigma$ est égal à $\frac{i}{2\pi}\int_\Sigma F_{\vec{A}}$. Donc :

$$|c_1(L) \cdot \Sigma| \leq |\chi(\Sigma)|.$$

C.Q.F.D.

2. STRUCTURE SPIN^c, LA MÈRE

Pour le moment, n désigne un entier supérieur ou égal à 3. Le groupe fondamental de GL_n^+ (matrices réelles $n \times n$ de déterminant > 0) est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$; il agit sur le revêtement universel $G_n = \widetilde{GL_n^+}$. Le demi-tour donne une action de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ sur S^1. Le groupe G_n^c est défini comme quotient de $G_n \times S^1$ par l'action diagonale. C'est un revêtement non-trivial à deux feuillets de $GL_n^+ \times S^1$.

La cohomologie singulière de GL_n^+ : $H^0(GL_n^+;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$, $H^1(GL_n^+;\mathbf{Z}) = 0$, mais $H^1(GL_n^+;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$; $H^2(GL_n^+;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, mais $H^2(GL_n^+;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0$ (*cf.* [Bo]).

$G_n^c \xrightarrow{\rho} GL_n^+$ est l'unique fibré en cercle non-trivial sur GL_n^+.

Les mêmes choses se font pour le compact maximal $SO_n \subset GL_n^+$, qui est un rétract par déformation, la construction de G_n donne $Spin_n$ et celle de G_n^c le groupe $Spin_n^c$.

Soit $P \xrightarrow{\xi} B$ un fibré principal (à droite) de groupe structural GL_n^+ (ou SO_n) ($n \geq 3$) au-dessus d'une variété B.

DÉFINITION.— *Une* structure spin^c *sur ξ est une paire (η, f) formée d'un fibré principal $Q \xrightarrow{\eta} B$ en groupe G_n^c (resp. $Spin_n^c$)* et *d'une application $Q \xrightarrow{f} P$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc} Q \times G_n^c & \longrightarrow & Q & & \\ & & & \searrow & \\ \Big\downarrow f \times \rho & & f \Big\downarrow & & B \\ & & & \nearrow & \\ P \times GL_n^+ & \longrightarrow & P & & \end{array} \qquad \text{(resp. ...)}$$

(Les flèches horizontales sont les translations à droite.)

Une structure spin^c, (η', f') sur ξ est équivalente à (η, f) s'il existe un G_n^c-isomorphisme g de Q' dans Q tel que $f \circ g = f'$.

Soit ξ un SO_n-fibré principal ; un peu d'oubli en fait un GL_n^+-fibré principal ξ', et tout GL_n^+-fibré principal possède une réduction ξ à SO_n ; le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt fournit une bijection naturelle entre les classes d'équivalence de spin^c-structures sur ξ et sur ξ', *cf.* Milnor [Mi1,Mi2]. En mettant G_n à la place de G_n^c, on obtient la définition de *structure spin* sur ξ ; en remplaçant GL_n^+ par GL_n et G_n par le sous-groupe GL_n^+ (et ρ par l'inclusion), on a la définition d'une orientation de ξ.

Suivant le modèle de Milnor, il y a la définition alternative :

Une classe d'équivalence de structure spin^c *sur* ξ *est une* classe de cohomologie *dans* $H^2(P;\mathbf{Z})$ *dont la restriction à chaque fibre est le générateur du groupe cyclique* $H^2(GL_n^+,\mathbf{Z})$.

Une telle classe détermine une fibration en cercle $Q \xrightarrow{f} P$; quel que soit $x \in B$, la condition de restriction à $H^2(P_x;\mathbf{Z})$ garantit que $Q_x \to P_x$ est isomorphe à ρ : $G_n^c \to GL_n^+$. La structure de G_n^c-fibré principal est construite par cocycle.

LEMME.— *Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une structure spin*^{c} *sur* ξ *est l'annulation de la troisième classe de Stiefel-Whitney* $W_3(P) \in H^3(B;\mathbf{Z})$. *Et si* $W_3(P) = 0$*, l'ensemble des classes de structures spin*^{c} *sur* ξ *est un espace affine du groupe* $H^2(B;\mathbf{Z})$ *: l'action est* $(\lambda, S) \mapsto \xi^*(\lambda) + S$*, pour* $\lambda \in H^2(B;\mathbf{Z})$, $S \in H^2(P;\mathbf{Z})$.

En effet, on peut supposer B connexe ; la suite spectrale de Leray-Serre de la fibration principale ξ à coefficients entiers fournit un isomorphisme $H^1(B;\mathbf{Z}) \xrightarrow{\xi^*} H^1(P;\mathbf{Z})$ et une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^2(B;\mathbf{Z}) \xrightarrow{\xi^*} H^2(P;\mathbf{Z}) \xrightarrow{j^*} H^2(GL_n^+,\mathbf{Z}) \xrightarrow{d_3} H^3(B;\mathbf{Z}).$$

La troisième flèche est induite par l'injection de la fibre. Or l'image de d_3 est engendrée par $W_3(P)$ ([Bo]), d'où le résultat.

La définition analogue pour spin est une classe dans $H^1(P,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ qui se restreint au générateur de $H^1(GL_n^+,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. La même démonstration avec la suite spectrale modulo 2 et le d_2, *cf.* [Mi1], dit que l'existence d'une structure spin équivaut à $W_2(P) = 0$ dans $H^2(B,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, et si $W_2(P) = 0$, l'ambiguïté est $H^1(B,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. (Si $W_3(P) = 0$, l'annulation de $W_2(P)$ équivaut à $H^2(P;\mathbf{Z}) \approx H^2(B;\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.)

Dans le cas de l'orientation, partant de $H^0(P,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, on rencontre $W_1(P)$ et l'ambiguïté $H^0(B,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

La fonction $(u,z) \mapsto z^2$ de $G_n \times S^1$ dans S^1 définit (par passage au quotient) un homomorphisme de G_n^c dans le cercle. Si bien qu'à toute structure spin^c sur un fibré $P \xrightarrow{\xi} B$ est associé un fibré en cercle $L \xrightarrow{\lambda} B$, appelé *fibré caractéristique.*

LEMME.— *La réduction modulo* 2 *de la première classe de Chern* $c_1(L) \in H^2(B;\mathbf{Z})$ *est la classe* $W_2(P) \in H^2(B,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

La composée de $G_n^c \to GL_n^+ \times S^1$ et de l'inclusion $GL_n^+ \times S^1 \subset GL_{n+2}^+$ se remonte au revêtement à deux feuillets $G_{n+2} \to GL_{n+2}^+$. Soit $\xi : P \to B$ et $(\eta : Q \to B$,

$f : Q \to P$) une structure spin^c sur ξ, $\lambda : L \to B$ son fibré caractéristique ; le fibré $\xi \times \lambda$ s'étend en un GL^+_{n+2}-fibré principal $\xi_1 : P_1 \to B$. L'extension de η à G_{n+2} fournit une structure spin à ξ_1. Donc $W_2(P_1) = 0$; mais $W_2(P_1) = W_2(P) + W_2(L)$.

La suite exacte des coefficients $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ donne en cohomologie l'homomorphisme $\beta : H^2(B, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to H^3(B; \mathbf{Z})$ (le dit Bockstein) et $W_3 = \beta(W_2) + W_1 \cdot W_2$ (*cf.* [Mi.St.]). Ici $W_1(P) = 0$, donc $W_3(P) = 0$ si et seulement si $W_2(P)$ est réduction d'une classe entière.

Les groupes G_n et $Spin_n$ sont (naturellement isomorphes à) des sous-groupes de G^c_n et $Spin^c_n$, donc toute structure spin sur un fibré principal ξ donne une structure spin^c sur ξ (association compatible avec le Bockstein $H^1(B, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to H^2(B; \mathbf{Z})$). Les structures spin^c venant de spin sont celles qui ont un fibré caractéristique L trivial.

Quand B est simplement connexe, $H^2(B; \mathbf{Z})$ est libre et les structures spin^c sont classées par les relèvements entiers de $W_2(P)$, et s'il y a une structure spin, elle est unique.

Comme dans [Mi2] pour spin, lorsque B est réunion de deux ouverts B_1, B_2, si $\xi_{|B_1}$ et $\xi_{|B_2}$ possèdent des structures spin^c équivalentes au-dessus de $B_1 \cap B_2$, il existe (au moins) une structure spin^c sur ξ équivalente aux données au-dessus de B_1, B_2.

La théorie s'étend joliment à $n = 1$ et 2.

Si $n = 1$, $SO_1 = \{1\}$, $Spin_1 = \{-1, 1\} \subset Spin^c_1 = S^1$ (et $GL^+_1 = \mathbf{R}^{+\times}$, $G_1 = \mathbf{R}^\times \subset G^c_1 = \mathbf{C}^\times$, $\rho(z) = |z|$ de G^c_1 dans GL^+_1). On peut recopier la définition initiale de structure spin^c et de structure spin. Dans ce cas, $\xi = Id_B$; la théorie spin est celle des revêtements à deux feuillets quelconques de B ; ils sont classés par les éléments de $H^1(B, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Et la théorie spin^c est celle des fibrations en cercle orientées (ou des fibrés en plans orientés), classés par les éléments de $H^2(B, \mathbf{Z})$.

Pour $n = 2$, identifions SO_2 à $S^1 \subset \mathbf{C}$; $Spin_2$ est l'unique revêtement double non-trivial $z \mapsto z^2$ de S^1 dans S^1. $Spin^c_2$ est le produit de deux cercles $S^1 \times S^1$, l'application $\rho : Spin^c_2 \to SO_2$ est $(z, w) \mapsto z\bar{w}$, son sous-groupe $Spin_2$ est donné par $z = \bar{w}$. L'application caractéristique $Spin^c_2 \to S^1$ est donc $(z, w) \to zw$.

Une structure spin^c sur un fibré en cercle $P \xrightarrow{\xi} B$ équivaut à la donnée de deux fibrés en cercle α, β au-dessus de B dont les classes d'Euler dans $H^2(B, \mathbf{Z})$ vérifient $e(\alpha) - e(\beta) = e(\xi)$ (l'action libre et transitive de $H^2(B, \mathbf{Z})$ étant $\gamma \mapsto (\alpha \otimes \gamma\, ,\, \beta \otimes \gamma^*)$). Le fibré caractéristique L correspond à $e(\alpha) + e(\beta)$; on voit que $e(L) \equiv e(\xi)$ mod. 2.

Une structure spin sur ξ sera un revêtement double de P, non-trivial au-dessus de chaque fibre de ξ. La structure spin^c associée doit vérifier $\beta = \alpha^*$; α est une racine de ξ.

Les revêtements doubles de $SO_2 \times S^1$ forment le groupe $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $Spin_2^c$ correspond à l'élement diagonal $(1,1)$ (Abel-Jacobi). Une structure spin^c donne un fibré principal en tores T^2 sur B : c'est le $\eta : Q \to B$.

D'après la suite de Gysin : $H^0(B,\mathbf{Z}) \xrightarrow{e(\xi)} H^2(B,\mathbf{Z}) \xrightarrow{\xi^*} H^2(P,\mathbf{Z}) \xrightarrow{\tau} H^1(B,\mathbf{Z})$, les deux fibrés α, β donnent le même élément de $H^2(P,\mathbf{Z})$; c'est le $f : Q \to P$; il ne suffit plus à déterminer la structure.

Exercice : étant données des structures spin^c (resp. spin) sur deux des trois fibrés ξ_1, ξ_2, $\xi_1 \times \xi_2$ au-dessus de B, quand est-ce qu'il y a une unique structure spin^c (resp. spin) compatible sur le troisième (*cf.* [Mi2] pour spin) ?

DÉFINITION.— *Une variété* spin^c (resp. spin) *est une variété orientée munie d'une classe de structure* spin^c (resp. spin) *du fibré des repères tangents directs.*

Pour chaque métrique riemannienne sur une variété spin^c (ou spin), on obtient une structure spin^c (ou spin) sur le fibré des repères orthonormés directs.

Une variété connexe compacte orientée Σ de dimension 2 possède toujours au moins une structure spin, puisque sa classe d'Euler est paire ($2-2g$ ou 0) ; c'est une racine du fibré tangent orienté. Elle possède aussi une structure spin^c canonique : α est le tangent, β le fibré trivial. Les autres structures spin^c s'en déduisent en tordant par les éléments de $H^2(\Sigma;\mathbf{Z})$ ($=\mathbf{Z}$ ou 0).

En dimension 3, $Spin_3^c = U_2$ et $Spin_3 = SU_2$. Une structure spin identifie chaque espace tangent à l'espace de la représentation adjointe d'un groupe spécial unitaire.

THÉORÈME (Stiefel).— *Toute variété de dimension* 3 *compacte et orientée possède une structure* spin.

Voir [Mi.St.] ; en fait, toute M^3 orientable est parallélisable.

THÉORÈME (Whitney).— *Toute variété de dimension* 4 *compacte et orientée possède une structure* spin^c.

Indiquons la raison de $W_3(X) = 0$ selon [Hi.Ho.] (voir aussi [Wh], [E.F]).

Puisqu'en doublant une variété compacte orientée à bord, on obtient une variété orientée fermée, on va supposer X fermée. On peut aussi la supposer connexe.

Tout élément C de $H_2(X,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ se représente par une surface connexe non-orientable, donc par la réunion d'une surface orientable à bord et d'une bande de Möbius. L'âme A de cette bande est un cycle de degré 1 dans X dont le double vaut 0 dans $H_1(X,\mathbf{Z})$. (En particulier, A est homologue à $-A$ et l'orientation de A importe peu.) C'est ainsi qu'on peut définir l'homomorphisme de Bockstein en homologie $\beta : H_2(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to H_1(X, \mathbf{Z})$. Le noyau de β est l'image de $H_2(X, \mathbf{Z})$ par la réduction modulo 2 et l'image de β est l'ensemble des éléments d'ordre 2 de $H_1(X, \mathbf{Z})$ (*cf.* [Wh]). Si C ne provient pas de $H_2(X, \mathbf{Z})$, A n'est pas homologue à 0. La dualité de Poincaré-Whitney dit que la forme d'enlacement sur la torsion de l'homologie est non-dégénérée à valeurs dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ (*cf.* [Wh]) ; il existe donc une surface orientée B (singulière) dans X, d'ordre 2 dans $H_2(X, \mathbf{Z})$, disjointe de A, qui enlace A un nombre impair de fois. L'intersection de B avec C vaut 1 modulo 2. Or d'après Wu ([Mi.St.]), la classe duale de $W_2(X)$ dans $H_2(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est telle que l'intersection modulo 2, $W_2 \cdot B$ soit égale à $B \cdot B$ pour toutes les surfaces fermées B, orientables ou non. Mais, lorsque B est orientée et d'ordre 2 dans $H_2(X, \mathbf{Z})$, son auto-intersection à valeur dans $\mathbf{Z}$ est nulle, donc $W_2 \cdot B$ est pair. En faisant $C = W_2(X)$, on voit que $W_2(X)$ provient d'une classe entière. C.Q.F.D.

3. L'ALGÈBRE DE CLIFFORD ET LA PUISSANCE EXTÉRIEURE

V est un espace vectoriel réel euclidien de dimension n, $n \in \mathbf{N}$. L'algèbre de Clifford $C(V)$ est le quotient de l'algèbre tensorielle $T(V) = \mathbf{R} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus \cdots$ par les relations, $\forall x \in V$, $x \otimes x + (x \mid x)1 = 0$. En tant qu'espace vectoriel, avec action du groupe orthogonal $O(V)$, $C(V)$ est canoniquement isomorphe à l'algèbre extérieure $\Lambda(V)$: $x \in V$ va sur x, $x \wedge y$ sur $\frac{1}{2}(xy - yx)$, $x \wedge y \wedge z$ sur $\frac{1}{6}(xyz + yzx + zxy - yxz - xzy - zyx)$ et cetera. La parité du degré des tenseurs donne une graduation d'algèbre $C = C^{(0)} \oplus C^{(1)}$ compatible avec la décomposition $\Lambda = \Lambda^{(0)} \oplus \Lambda^{(1)}$ en multi-vecteurs pairs et impairs.

Si $n = 1$, C est isomorphe à $\mathbf{C}$; pour $n = 2$, on trouve le corps des quaternions $\mathbf{H}$, $n = 3$ le produit direct $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$, $n = 4$ l'algèbre des matrices 2×2 sur $\mathbf{H}$...

Soit $C_{(\mathbf{C})}(V)$ l'algèbre complexifiée $C(V) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$; pour n pair, $n = 2m$, $C_{(\mathbf{C})}$ est isomorphe à l'algèbre des matrices $2^m \times 2^m$ sur $\mathbf{C}$, $M_{2^m}(\mathbf{C})$, et la sous–algèbre $C^{(0)}_{(\mathbf{C})}$ au produit direct $M_{2^{m-1}}(\mathbf{C}) \times M_{2^{m-1}}(\mathbf{C})$; pour n impair, $n = 2m+1$, $C_{(\mathbf{C})}$ est isomorphe au produit $M_{2^m}(\mathbf{C}) \times M_{2^m}(\mathbf{C})$ et $C^{(0)}_{(\mathbf{C})}$ à $M_{2^m}(\mathbf{C})$. (Voir [Bbk], [A.B.S.], [A], [C].)

L'antipodie de V, $x \mapsto -x$, se prolonge en un unique anti-automorphisme anti-$\mathbf{C}$-linéaire, $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$, de l'algèbre $C_{(\mathbf{C})}$. Par exemple, pour $x, y, z \in V$, $\overline{xy} = yx$, $\overline{ixy} = -iyx$, $\overline{xyz} = -zyx$, ...

Le groupe spin^c, $Spin^c(V)$, est le groupe des éléments inversibles α de la partie paire $C^{(0)}_{(\mathbf{C})}(V)$ satisfaisant à $\alpha\overline{\alpha} = 1$ et $\forall x \in V$, $\alpha x \alpha^{-1} \in V$.

Le sous-groupe $Spin(V)$ est l'intersection avec la partie réelle $C^{(0)}(V)$ de $C^{(0)}_{(\mathbf{C})}(V)$. Le quotient $Spin^c(V)/Spin(V)$ s'identifie à S^1.

Pour tout $\alpha \in Spin^c(V)$, l'application $x \mapsto \alpha x \alpha^{-1}$ appartient à $SO(V)$; on la désigne par $\rho(\alpha)$.

Avec $V = \mathbf{R}^n$, on retrouve les groupes SO_n, $Spin_n$, $Spin^c_n$.

Lorsque n est impair, $n = 2m+1$, $C^{(0)}_{(\mathbf{C})}$ n'a qu'un module simple E ; il est de dimension 2^m.

Lorsque n est pair, $n = 2m$, $C^{(0)}_{(\mathbf{C})}$ possède deux représentations irréductibles (de dimension 2^{m-1}) non isomorphes ; pour les distinguer, il faut choisir une orientation sur V :

Soit $e_1, \cdots, e_n$ une base orthonormée directe de V, l'élément $\gamma_5 = i^m e_1 \cdots e_n$ de $C_{(\mathbf{C})}$ est dans le centre de $C^{(0)}_{(\mathbf{C})}$ mais pas dans le centre de $C_{(\mathbf{C})}$. Son carré vaut 1. Un changement d'orientation change γ_5 en $-\gamma_5$.

L'orientation de V, avec la métrique euclidienne, donne aussi un opérateur $*$ de Hodge de $\Lambda(V)$ dans $\Lambda(V)$: $\alpha \wedge *\beta = (\alpha \,|\, \beta)\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$. L'identification de $\Lambda(V)$ avec $C(V)$ est telle que sur les p-vecteurs α :

$$\gamma_5 . \alpha = i^{m+p(p-1)} * \alpha.$$

(*cf.* [A]).

Soit E l'unique module simple de $C_{(\mathbf{C})}$; la tradition pose $E_+ = \frac{1+\gamma_5}{2} E$, $E_- = \frac{1-\gamma_5}{2} E$. Leurs éléments s'appellent *spineurs* positifs (resp. négatifs). (Parfois on dit semi-spineurs.)

Il existe une structure hermitienne définie positive sur E, unique à un scalaire près (dans $\mathbf{R}^\times_+$), telle que $\forall \varphi, \psi \in E$, $\alpha \in C_{(\mathbf{C})}$, $\langle \alpha(\varphi), \psi \rangle = \langle \varphi, \overline{\alpha}(\psi) \rangle$. Elle rend E_+ et E_- orthogonaux. La représentation de $Spin^c_n$ dans E est unitaire.

L'espace E n'est défini qu'à isomorphisme (presque unique) près, mais l'espace projectif associé $\mathbf{P}(E)$ et la paire de sous-espaces enlacés $\mathbf{P}(E_+)$, $\mathbf{P}(E_-)$ sont canoniquement définis par V. $\mathbf{P}(E)$ est l'ensemble des idéaux minimaux à droite de $C_{(\mathbf{C})}(V)$; le groupe $O(V)$ y agit projectivement, le sous-groupe $SO(V)$ respecte $\mathbf{P}(E_+)$ et $\mathbf{P}(E_-)$. Il faut passer au revêtement $Spin(V)$ pour avoir une action linéaire.

Quand n est un nombre pair, une structure complexe sur V avec une forme hermitienne relevant le produit scalaire de $\mathbf{R}$ à $\mathbf{C}$ donne un modèle privilégié de l'espace des spineurs :

E est l'algèbre extérieure de V en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, graduée modulo 2 par la parité du degré des multi-vecteurs, $E = E_+ \oplus E_-$. La forme sur V fait de E un espace de Hilbert et $E_- = E_+^\perp$.

Soit $x \in V$; la multiplication extérieure $e(x)(\varphi) = x \wedge \varphi$ est un endomorphisme de E qui échange E_+ et E_- ; il en va de même de l'adjointe $e(x)^*$. L'endomorphisme $\gamma(x) = e(x) - e(x)^*$ vérifie $\gamma(x) \circ \gamma(x) = -(x\,|\,x)1$. Donc γ s'étend en un unique morphisme d'algèbres $C(V) \to \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(E)$. La représentation qu'on déduit de $C^0_{(\mathbf{C})}$ est la représentation spinorielle ; elle se casse bien suivant E_+, E_- ; elle est unitaire.

Lorsque n est impair, $n = 2m+1$, V est hyperplan réel d'un espace de Hilbert complexe F de dimension $m+1$ sur $\mathbf{C}$; $C(V)$ s'injecte dans $C(F)$, $C^{(0)}(V)$ dans $C^{(0)}(F)$. Appliquons la construction précédente à F. La multiplication de Clifford par la normale unité e_0 à V dans F échange E_+ et E_- ; elle commute avec l'action de $C^{(0)}_{(\mathbf{C})}(V)$. Les deux représentations E_+, E_- de $C^{(0)}_{(\mathbf{C})}(V)$ sont isomorphes à la représentation spinorielle (*cf.* [C]).

4. LES FRÈRES SPIN^c EN DIMENSION 4

La leçon de Penrose : pour notre espace-temps, les spineurs et les twisteurs sont plus fondamentaux que les vecteurs et les tenseurs, *cf.* [P.R.], [A.H.S.] et [C]. Nous allons adapter la leçon pour construire un monde euclidien de dimension 4 en partant d'une paire d'espaces de spineurs.

A) Commençons avec l'algèbre linéaire, en reprenant au début :

E_+ et E_- sont deux espaces vectoriels sur $\mathbf{C}$ de dimension 2. Soit W l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(E_-, E_+)$; pour disposer d'une forme quadratique à valeurs complexes sur W, donnons-nous un isomorphisme λ de $\Lambda^2(E_-)$ sur $\Lambda^2(E_+)$ (*i.e.* juste un vecteur $\neq 0$ dans la droite complexe $\mathrm{Hom}(\Lambda^2(E_-), \Lambda^2(E_+))$. Si $x : E_- \to E_+$ est linéaire, l'application $\Lambda^2(x) : \Lambda^2(E_-) \to \Lambda^2(E_+)$ s'écrit $Q(x)\lambda$. La fonction $Q : W \to \mathbf{C}$ est une forme quadratique inversible (le λ-déterminant). Grâce à λ, on peut aussi associer à tout élément x de W un (λ)-adjoint $x' \in \mathrm{Hom}(E_+, E_-)$; c'est l'unique morphisme tel que, pour tout $\varphi \in E_+$ et tout $\psi \in E_-$:

$$\lambda(x'(\varphi) \wedge \psi) = x(\psi) \wedge \varphi.$$

Si l'on choisit une base (φ_1, φ_2) de E_+ et une base (ψ_1, ψ_2) de E_- en prenant soin d'avoir $\lambda(\psi_1 \wedge \psi_2) = \varphi_1 \wedge \varphi_2$, x est représenté par une matrice 2×2 complexe

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; on a $Q(x) = ad - bc$ et $x' = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, l'opposée de la transposée de la matrice des cofacteurs. Donc $x'x = -Q(x)\, 1_{E_-}$, $xx' = -Q(x)\, 1_{E_+}$.

Réunissons les frères dans l'ordre $E = E_- \times E_+$, et à tout $x \in W$, associons l'élément

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} 0 & x' \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{End}(E)$. On a $\forall x$, $\gamma(x)\gamma(x) = -Q(x)1_E$.

L'antisymétrisation $\frac{1}{2}(\gamma(x)\,\gamma(y) - \gamma(y)\,\gamma(x))$, $\frac{1}{6}(\gamma(x)\,\gamma(y)\,\gamma(z) + \cdots)$, $\frac{1}{24}(\gamma(x)\,\gamma(y)\,\gamma(z)\,\gamma(t) + \cdots)$, définit un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\Lambda(W)$ sur $\mathrm{End}(E)$, que nous appellerons aussi γ. On constate que $\Lambda^1 = W$ va sur l'ensemble des morphismes auto-(λ)-adjoints échangeant E_+ et E_- (par définition), que Λ^2 va sur l'ensemble des morphismes préservant séparément E_+ et E_- à traces nulles sur E_+ et sur E_- (c'est-à-dire $\mathrm{sl}(E_-) \times \mathrm{sl}(E_+)$), Λ^3 sur les morphismes anti-auto-(λ)-adjoints échangeant E_+, E_- (*i.e.* les éléments $\begin{pmatrix} 0 & -x' \\ x & 0 \end{pmatrix}$), Λ^4 sur les multiples de $(-1_{E_-}, 1_{E_+})$, et bien sûr Λ^0 sur les multiples de $(1_{E_-}, 1_{E_+})$.

La version complexe de l'$*$ de Hodge en résulte : on choisit comme unité de volume dans $\Lambda^4(W)$ le vecteur $(1_{E_-}, -1_{E_+})$ (pour que $\gamma_5 = i^2 e_1 e_2 e_3 e_4$ soit $(-1_{E_-}, 1_{E_+})$). Les sous-espaces Λ^2_+ et Λ^2_- de Λ^2 associés aux valeurs propres $+1$ et -1 correspondent bien à $\mathrm{sl}(E_+)$ et $\mathrm{sl}(E_-)$.

Remarque.— Supposons qu'on choisisse un isomorphisme τ de E_- avec $\overline{E}_+$ (le même espace vectoriel réel que E_+, mais avec la structure complexe $z \cdot \varphi = \overline{z}\varphi$), en exigeant que l'isomorphisme qui s'en déduit via λ entre $\Lambda^2(E_+)$ et $\Lambda^2(\overline{E}_+)$ soit de module 1. On peut alors identifier E_- à $\overline{E}_+$ et, pour chaque application linéaire x de $\overline{E}_+$ dans E_+, définir une application conjuguée $\overline{x}$ de E_+ dans $\overline{E}_+$ (si $\varphi \mapsto \overline{\varphi}$ est le nom antilinéaire de l'identité de E_+, on a $\overline{x}(\varphi) = \overline{x(\overline{\varphi})}$). L'espace vectoriel réel M des $x \in W$ satisfaisant à $\overline{x} = x'$, muni de la forme quadratique Q, est lorentzien de signature $(1,3)$. (Et iM est lorentzien de signature $(3,1)$.)

Que faire pour avoir une structure réelle sur W et retrouver l'espace euclidien de dimension 4 réel ? LE PÈRE.

Installons sur E_+ et E_- des structures hilbertiennes telles que $\lambda : \Lambda^2(E_-) \to \Lambda^2(E_+)$ soit de norme 1. L'espace somme E hérite d'une métrique hermitienne. Prenons pour V l'espace des $x \in W$ dont l'image $\gamma(x)$ dans $\mathrm{End}(E)$ est anti-hermitienne.

Concrètement, $x \in \mathrm{Hom}(E_-, E_+)$ appartient à V quand :

$$x^* = -x'.$$

La forme Q restreinte à V est réelle définie positive ; W s'identifie à $V_{(\mathbf{C})} = V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, iV est l'espace des éléments hermitiens : $x' = x^*$.

Le sous-espace vectoriel V de W est défini par le système d'équations quadratiques

$$x\,x^* = Q(x)\,1.$$

En choisissant des bases unitaires (φ_1, φ_2) de E_+, (ψ_1, ψ_2) de E_- adaptées à λ, les éléments réels (*i.e.* dans V) s'écrivent $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$. Ce sont les quaternions de Hamilton, plongés dans l'algèbre des matrices 2×2 sur $\mathbf{C}$.

Le repère orthonormé direct (e_1, e_2, e_3, e_4) de V naturellement associé au repère spin^c $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$ est offert par les matrices de Pauli multipliées par i :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \; u_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Avec les notations des livres de physique, $u_1 = i\sigma_x$, $u_2 = i\sigma_y$, $u_3 = i\sigma_z$, $u_4 = 1$. Le hamiltonien d'un spineur à deux composantes de $\mathbf{R}^3$ dans un champ magnétique constant s'écrit $H = Eu_4 + i\mu \vec{B} \cdot \vec{u}$, *cf.* [F], [Di].)

Le sous-espace réel $\Lambda^2_+(V)$ de $\Lambda^2_+(W)$ s'identifie à l'ensemble $su(E_+)$ des endomorphismes anti-hermitiens de trace nulle de E_+. La base associée au repère spin^c $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$ s'écrit bien avec les matrices u :

$$\omega_1^+ = e_2 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_4 = -2\,u_1$$
$$\omega_2^+ = e_3 \wedge e_1 + e_2 \wedge e_4 = -2\,u_2$$
$$\omega_3^+ = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 = -2\,u_3.$$

De même, $\Lambda^2_-(V)$ s'identifie à $su(E_-)$, la base associée à $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$ étant :

$$\omega_1^- = e_3 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_4 = 2\,u_1$$
$$\omega_2^- = e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4 = 2\,u_2$$
$$\omega_3^- = e_2 \wedge e_1 + e_3 \wedge e_4 = 2\,u_3.$$

Ces identifications dilatent les longueurs de $\sqrt{2}$ si l'on met sur Λ^2 la métrique usuelle et sur $su_2(\mathbf{C})$ la métrique $\mathrm{Det}(u) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(u^2)$. Par exemple, dans Λ^2, $\|\omega_3^+\| = \sqrt{2}$, dans su_2, $\|2\,u_3\| = 2$.

L'espace vectoriel $\overline{E}_+ \otimes E_+$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{End}(E_+)$: si $\tau \in E_+$, $(\psi \otimes \varphi)(\tau) = \langle \psi, \tau \rangle\, \varphi$. En prenant la partie sans trace, on définit donc une application bilinéaire sur $\mathbf{C}$, $\sigma : \overline{E}_+ \times E_+ \to \Lambda^2_+(W)$:

$$\gamma(\sigma(\psi,\varphi))(\tau) = \langle \psi, \tau \rangle\, \varphi - \frac{1}{2}\,\langle \psi, \varphi \rangle\, \tau.$$

La forme quadratique réelle associée prend ses valeurs dans $i\Lambda^2_+(V)$, identifié aux éléments hermitiens à trace nulle de $\mathrm{End}(E_+)$, c'est-à-dire $i\, su(E_+)$.

En revenant à la base spin^c, si $\varphi = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2$, $\psi = b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2$, la matrice de $\sigma(\psi,\varphi)$ est $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} (\bar b_1\, \bar b_2) - \dfrac{1}{2}\, (\bar b_1\, \bar b_2) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, ce qui donne :

$$\sigma(\psi,\varphi) = \frac{i}{4}\left[(a_1\bar b_2 + a_2\bar b_1)\,\omega_1^+ + i(a_1\bar b_2 - a_2\bar b_1)\,\omega_2^+ + (a_1\bar b_1 - a_2\bar b_2)\,\omega_3^+\right].$$

(On reconnaît les formules de Cartan [C], p. 50, pour le bivecteur associé à deux spineurs conjugués de $\mathbf{R}^3$.)

On a $\forall \varphi \in E_+$, $\sigma(\varphi,\varphi)\, \cdot\, \varphi = \frac{1}{2}\, \|\varphi\|^2\, \varphi$, donc :

$$\forall \varphi \in E_+\ , \qquad \langle \sigma(\varphi,\varphi)\, \cdot\, \varphi, \varphi \rangle = \frac{1}{2}\, \|\varphi\|^4.$$

L'algèbre de Clifford complexifiée $C_{(\mathbf{C})}(V)$ s'identifie à $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(E)$. Le groupe $Spin(V)$ s'identifie ainsi à $SU(E_-) \times SU(E_+)$; il relève l'action de $SO(V)$ sur $\Lambda^2_- \times \Lambda^2_+$; on a $Spin_4 = SU_2 \times SU_2$. Le groupe $Spin^c(V)$ est le sous-groupe de $U(E_-) \times U(E_+)$ formé par les couples de transformations qui ont le même déterminant. On retrouve $Spin^c_4 = (SU_2 \times SU_2 \times S^1)/(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

Partant de deux plans E_+, E_- liés par $\lambda : \Lambda^2(E_-) \xrightarrow{\approx} \Lambda^2(E_+)$, en passant par V, on aboutit à deux espaces euclidiens réels de dimension 3, $\Lambda^2_+(V)$, $\Lambda^2_-(V)$ canoniquement isomorphes à $su(E_+)$, $su(E_-)$ (avec des longueurs contractées par $\sqrt{2}$).

Et si l'on voulait construire notre espace euclidien de dimension 3 à partir de rien ?

On se donnerait un seul plan complexe, disons D, muni d'un produit hermitien défini positif ; l'espace imaginaire serait $s\ell(D)$, le sous-espace réel serait $su(D)$, ($\alpha = -\alpha^*$, $\mathrm{Tr}(\alpha) = 0$) ; la métrique étant le déterminant. C'est ainsi que $Spin_3$ s'identifie à SU_2 et $Spin_3^c$ à $U_2 = SU_2 \times_{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}} S^1$.

Soient D_+ et D_- des espaces de spineurs (à deux dimensions complexes) pour $\Lambda^2_+(V)$ et $\Lambda^2_-(V)$; Schur affirme l'existence d'isométries $f_\pm : E_\pm \to D_\pm$, chacune définie à une phase près dans S^1. Si l'on se donne en plus un isomorphisme unitaire $\kappa : \Lambda^2(D_-) \to \Lambda^2(D_+)$, la compatibilité avec λ diminue l'ambiguïté de phase : changer f_+ en $e^{ia}f_+$ force à changer f_- en $e^{-ia}f_-$ ou $-e^{-ia}f_-$. Si bien que l'isomorphisme $\mathrm{Hom}(D_-, D_+) \to \mathrm{Hom}(E_-, E_+) = V_{(\mathbf{C})}$ est déterminé à $\{\pm 1\}$ près. Ce $\{\pm 1\}$ est le centre de $SO(V)$.

En termes de groupes, $\Lambda^2(\mathbf{R}^4)$ est la représentation adjointe de SO_4, la décomposition par $*$ en $\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ exhibe le revêtement double $SO_4 \to SO_3 \times SO_3$. Un choix $\{D_-, D_+\}$ correspond au morphisme $U_2 \times U_2 \to SO_3 \times SO_3$, et la donnée de κ restreint à $Spin_4^c$; la reconstruction de SO_4 vient du losange commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & U_2 \times U_2 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ Spin_4^c & & & & SO_3 \times SO_3. \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & SO_4 & & \end{array}$$

Soient α et β des éléments de $\Lambda^2_+(W)$ et $\Lambda^2_-(W)$; la représentation de Clifford γ permet de les considérer comme des endomorphismes (sans trace) de E_+ et E_-. Soit

$$u(\alpha, \beta) = -{}^t\beta \otimes 1_{E_+} + 1_{\overline{E}_-} \otimes \alpha$$

l'endomorphisme de W associé. (W s'identifie à $E_-^* \otimes E_+$ et E_-^* à $\overline{E}_-$.)

LEMME DU Λ^2.— *Pour la métrique Q, $u(\alpha, \beta)$ est antisymétrique et le bivecteur associé dans $\Lambda^2(W)$ est $2\alpha + 2\beta$. En particulier, si α et β sont réels, u l'est aussi.*

En tant que représentations du groupe SO_4, Λ^2_+ et Λ^2_- sont irréductibles et non-isomorphes (leurs caractères sont $\delta_+ = z_1 z_2 + z_1^{-1} z_2^{-1} + 1$, $\delta_- = z_1 z_2^{-1} + z_1^{-1} z_2 + 1$). En tant que représentation de SO_4, l'espace $\mathrm{End}(\mathbf{R}^4) = \mathbf{R}^4 \otimes \mathbf{R}^4$ se décompose en $\mathbf{R} \oplus S^2_{(0)} \oplus \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$, trace, symétrique sans trace, antisymétriques. D'après l'équivariance et Schur, il existe donc des constantes universelles $a, b \in \mathbf{R}$, telles que pour tout (α, β), $u(\alpha, \beta) = a\alpha + b\beta$. On teste dans une base spin^c sur $\alpha = \omega_1^+$, $\beta = \omega_1^-$; on trouve $a = b = 2$.

Le facteur 2 ici et le $\sqrt{2}$ là-bas se compensent heureusement :

Soit $\mathrm{Pf}(u)$ le pfaffien de u (*cf.* [Bbk], [Mi.St.]) ; vus comme endomorphismes, α et β ont des déterminants (la métrique naturelle sur su_2).

COROLLAIRE.— $\mathrm{Pf}(u) = \mathrm{Det}(\alpha) - \mathrm{Det}(\beta)$.

Dans une base spin^c, $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$, si $\alpha = A_1u_1 + A_2u_2 + A_3u_3$, $\beta = B_1u_1 + B_2u_2 + B_3u_3$ et que u est représenté par la matrice $(u_{ab})_{1\leq a,b\leq 4}$ dans la base des e_a :

$$u_{12}\,u_{34} - u_{13}\,u_{24} + u_{14}\,u_{23} = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - B_1^2 - B_2^2 - B_3^2.$$

Si l'on ajoute à $\alpha \in \mathrm{End}(E_+)$ et $\beta \in \mathrm{End}(E_-)$ des homothéties $A_4 1_{E_+}$ et $B_4 1_{E_-}$, $A_4, B_4 \in \mathbf{C}$, l'homothétie $(A_4 - B_4)1_W$ s'ajoute à $u(\alpha, \beta)$ dans $\mathrm{End}(W)$. La condition pour rester dans Λ^2 est donc $A_4 = B_4$.

La métrique déterminant sur $u(E_\pm) = i\mathbf{R} \oplus su(E_\pm)$ est lorentzienne de signature $(3,1)$.

Si $A_4 = B_4$, on a encore $\mathrm{Pf}(u) = \mathrm{Det}(\alpha + A_4) - \mathrm{Det}(\beta + B_4)$.

B) À présent, la géométrie différentielle des spin^c :

Soit X une variété de dimension 4. Donnons-nous deux fibrés vectoriels complexes de rang 2, E_+ et E_- au-dessus de X ; supposons-les rattachés par un isomorphisme λ de $\Lambda^2(E_-)$ dans $\Lambda^2(E_+)$, et munissons-les de structures hilbertiennes de telle sorte que λ soit unitaire. Alors, le fibré vectoriel réel orienté de rang 4, V, des homomorphismes anti-λ-hermitiens de E_- dans E_+ est associé à un unique fibré principal P de groupe SO_4 au-dessus de X. L'ensemble des repères spin^c, bases unitaires des fibres de E_+ et E_- reliées par λ, constitue une structure spin^c sur P.

Tout isomorphisme réel f du fibré tangent $T(X)$ sur le fibré V donne une orientation de X, une métrique riemannienne sur X et, en prime, une structure spin^c de la variété X.

Le fibré caractéristique L est canoniquement isomorphe à $\Lambda^2(E_+)$ et à $\Lambda^2(E_-)$.

Réciproquement, quand X est une variété riemannienne orientée de dimension 4 munie d'une structure spin^c, la représentation spinorielle (unitaire) de $Spin_4^c$ donne un sextuplet $(E_+, E_-, \lambda, \langle\ \rangle_+, \langle\ \rangle_-, f)$.

Remarque.— Si l'on se donne une orientation et une métrique riemannienne sur X, et des isomorphismes $g_\pm : \Lambda^2_\pm(T^*(X)) \to su(E_\pm)$ conformes de rapport $\sqrt{2}$, il existe une isométrie de $T(X)$ sur V rendant tout compatible ; elle est déterminée à l'antipodale près $-\mathrm{id}_V$.

Soient ∇_+ et ∇_- des connexions unitaires sur E_+ et E_- ; supposons qu'elles induisent la même connexion A sur L, et notons (abusivement) $\overline{\nabla}_-$ la connexion contragrédiente sur $\overline{E}_- = E_-^*$. La formule $\nabla = \overline{\nabla}_- \otimes 1_+ + 1_- \otimes \nabla_+$ définit une connexion métrique sur V, donc une connexion affine métrique sur $T(X)$; elle est indépendante de A (*cf.* lemme Λ^2).

(Dans une trivialisation locale spin^c, $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$ de E_+, E_-, $\nabla_+ = d+\alpha+A_4$, $\nabla_- = d + \beta + A_4$, $\alpha \in \Gamma(T^* \otimes su(E_+))$, $\beta \in \Gamma(T^* \otimes su(E_-))$, $A_4 \in \Gamma(iT^*)$; on a $A = d + 2A_4$ et $\nabla = d + 1 \otimes \alpha - {}^t\beta \otimes 1 = d + u(\alpha, \beta)$, $u \in \Gamma(T^* \otimes so(T))$; vue dans $\Gamma(T^* \otimes \Lambda^2(T))$, $u = 2\alpha + 2\beta$.)

Voyons la torsion de ∇ :

$$\tau(x, y, z) = (\nabla_x y - \nabla_y x - [x, y] \,|\, z).$$

C'est un 3-tenseur sur X ; sa définition rend évidente l'antisymétrie en les vecteurs x, y. Mais le caractère métrique lui associe un tenseur τ^c antisymétrique en y, z. Cela fait deux manières différentes de représenter la torsion par un élément de $\Lambda^2(T) \otimes T$, et deux étoiles de Hodge (au moins) brillent sur la torsion, $*$ et $*^c$. La seconde offre une notion de torsion spin^c :

LEMME.— *Soit A une connexion unitaire sur L ; il existe une unique connexion unitaire ∇_+^A* (resp. ∇_-^A) *sur E_+* (resp. E_-) *relevant A, telle que $\tau = - *^c \tau$* (resp. $\tau = *^c \tau$), *pour toute connexion unitaire ∇_-* (resp. ∇_+) *sur E_-* (resp. E_+) *relevant A.*

Même preuve que [Mi.St.], p. 302, en utilisant le lemme du Λ^2.

Plusieurs étoiles sont permises car $\mathbf{R}^4$ est de multiplicité 2 dans la décomposition de $\Lambda^2(\mathbf{R}^4) \otimes \mathbf{R}^4$ en représentations irréductibles de SO_4.

Les connexions ∇_+^A et ∇_-^A mises ensemble dans $\overline{\nabla}_-^A \otimes 1_+ + 1_- \otimes \nabla_+^A$ produisent la connexion de Levi-Civita ∇, sans torsion, sur $T(X)$.

La courbure riemannienne aussi se dit en termes de spineurs. Références : [A.H.S.], [H] et [Gau].

Soient R_+^A et R_-^A les courbures de deux connexions unitaires ∇_+, ∇_- relevant A sur L, $R_\pm^A \in \Gamma(\Lambda^2(T^*) \otimes u(E_\pm)) = i\Omega^2 \oplus (\Omega^2 \otimes \Lambda_\pm^2)$; la courbure F_A de A est le double de la composante suivant $i\Omega^2$. Notons $R_\pm$ la composante de $R_\pm^A$ dans $\Omega^2 \otimes \Lambda_\pm^2$. La courbure R de ∇ est égale à $-{}^tR_- \otimes 1_+ + 1_- \otimes R_+$; dans $\Omega^2 \otimes \Lambda^2$, elle vaut $2R_+ + 2R_-$; le terme F_A disparaît. (Les parties $\Lambda_\pm^2 \otimes \Lambda_\pm^2$ de R donnent les courbures de Weyl $W_\pm$, la trace est $\frac{1}{4}$ de la courbure scalaire et la partie mixte $\Lambda_-^2 \otimes \Lambda_+^2$ est la courbure de Ricci sans trace, *cf.* [A.H.S.].)

La théorie de Chern-Weil dit que la 4-forme $\frac{1}{4\pi^2}\,\mathrm{Pf}(R)$ sur X représente la classe d'Euler e de $T(X)$ et que les 4-formes $-\frac{1}{4\pi^2}\,\mathrm{Det}(R_+^A)$, $-\frac{1}{4\pi^2}\,\mathrm{Det}(R_-^A)$ représentent les classes de Chern c_2^+, c_2^- de E_+, E_-. Le corollaire du lemme Λ^2 implique donc :

$$e = c_2^- - c_2^+.$$

La classe c_2 d'un fibré complexe de rang 2 est aussi la classe d'Euler du fibré réel orienté de rang 4 sous-jacent. Donc $e = e^- - e^+$, et sur X fermée, la caractéristique d'Euler se décompose : $\chi = \chi_- - \chi_+$, où χ_-, χ_+ sont les caractéristiques d'Euler de E_-, E_+.

La première classe de Chern de E_+ et de E_- est la classe caractéristique $c_1(L)$. Si l'on tord E_+ et E_- par un même fibré en droite complexe N, L est tordu par N^2, c_1 se change en $c_1' = c_1 + 2c_1(N)$ et $c_2^\pm$ devient ${c_2'}^\pm = c_2^\pm + (c_1 + c_1(N))\,c_1(N)$.

Soit $p_1(X)$ la première classe de Pontrjagin dans $H^4(X, \mathbf{Z})$, $p_1(X) = -c_2(T_{\mathbf{C}}(X))$; les caractères de Chern sont :

$$\mathrm{Ch}(E_\pm) = 2 + c_1 + \frac{1}{2}\,(c_1^2 - 2c_2^\pm) \quad , \quad \mathrm{Ch}(\overline{E}_-) = 2 - c_1 + \frac{1}{2}\,(c_1^2 - 2c_2^-)\,;$$

donc

$$\mathrm{Ch}(T(X) \otimes \mathbf{C}) = 4 + c_1^2 - 2(c_2^- + c_2^+) = 4 + p_1(X).$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{2}\,(c_1^2 - p_1(X)) = c_2^- + c_2^+,$$

ce qui donne :

$$e^+ = \frac{1}{4}\,(c_1^2 - p_1(X) - 2e(X)) \quad , \quad e^- = \frac{1}{4}\,(c_1^2 - p_1(X) + 2e(X)).$$

Les classes W_2 de Λ_+^2 et Λ_-^2 coïncident avec $W_2(X)$, et :

$$p_1(\Lambda_+^2) = p_1(X) + 2e(X) \quad , \quad p_1(\Lambda_-^2) = p_1(X) - 2e(X).$$

Si la variété X est fermée, l'intégrale de $\frac{1}{3}\,p_1$ est la signature $\sigma(X)$, donc :

$$\chi_+ = \frac{1}{4}\,(c_1^2 - 3\sigma - 2\chi) \quad \text{et} \quad \chi_- = \frac{1}{4}\,(c_1^2 - 3\sigma + 2\chi).$$

5. LES ÉQUATIONS DE DIRAC

La bonne littérature abonde ; par exemple, [C], [Di], [Li], [A.S.], [A.B.P.], [A], [A.H.S.], [H], [Be], [Bou], [L.M.].

Soit X une variété riemannienne orientée de dimension n, munie d'une structure spin^c, P le fibré des repères orthonormés directs, Q le fibré des repères spin^c, L le fibré en droite complexe caractéristique.

Choisissons sur L une structure hilbertienne et puis une connexion unitaire $A : \Gamma(L) \to \Gamma(T^*(X) \otimes L)$; $\langle A\ell, \ell' \rangle + \langle \ell, A\ell' \rangle = d\langle \ell, \ell' \rangle$.

Soit $U(L)$ le fibré principal en cercle associé à L ; Q est un revêtement à deux feuillets de $P \times U(L)$, donc le produit direct de la connexion de Levi-Civita ∇ sur P et de la connexion A sur L se relève en une unique connexion principale ∇_A sur Q.

Soit E_n l'espace de la représentation spinorielle de $Spin_n^c$, irréductible si n est impair, décomposé en $E_n^- \oplus E_n^+$ si n est pair. Notons $E = Q \times_{Spin_n^c} E_n$ le fibré vectoriel associé, scindé en $E_- \oplus E_+$ lorsque n est un nombre pair. La structure hilbertienne sur E est parfaitement définie si l'on impose celle de L.

∇_A induit une connexion unitaire sur E, qui préserve séparément E_- et E_+ quand n est pair.

L'*opérateur de Dirac* $D_A : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ est le composé de $\nabla_A : \Gamma(E) \to \Gamma(T^* \otimes E)$, de la métrique riemannienne $\Gamma(T^* \otimes E) \to \Gamma(T \otimes E)$ et de la multiplication de Clifford $\Gamma(T \otimes E) \to \Gamma(E)$.

Quand n est pair, $D_A = \begin{pmatrix} 0 & D_A^+ \\ D_A^- & 0 \end{pmatrix}$, $D_A^\pm : \Gamma(E_\pm) \to \Gamma(E_\mp)$.

Si $(e_1, \cdots, e_n)$ est un repère mobile orthonormé direct, localement

$$D_A = \sum_1^n e_a \cdot \nabla_a^A.$$

L'opérateur D_A est elliptique formellement auto-adjoint, D_A^- s'identifie à l'adjoint formel de D_A^+.

Soit $R \in \Omega^2 \otimes \Lambda^2(T(X))$ la courbure riemannienne :

$$R(x, y, z, t) = (\nabla_x \nabla_y z - \nabla_y \nabla_x z - \nabla_{[x,y]} z \mid t).$$

La courbure de Ricci $r(x, z)$ est la trace en y, t et la *courbure scalaire* s est la trace de Ricci. Par exemple pour $n = 2$, s est le double de la courbure de Gauss.

En suivant Hitchin ([H]), on a une démonstration dans l'esprit spin^c du § 4 de la formule de Weitzenböck, Bochner, Lichnerowicz :

$$D_A^2\,\varphi = \nabla_A^*\,\nabla_A\,\varphi + \frac{s}{4}\,\varphi + \frac{1}{2}\,F_A \cdot \varphi,$$

où le dernier terme de droite vient de l'action de Clifford de $i\Lambda^2(T(X))$ sur E.

Lorsque $n = 4$, on a aussi :

$$D_A^-\,D_A^+\,\varphi = \nabla_A^{+*}\,\nabla_A^+\,\varphi + \frac{s}{4}\,\varphi + \frac{1}{2}\,F_A^+ \cdot \varphi.$$

Quand n est pair, $n = 2m$, et que X est fermée, *i.e.* compacte sans bord, l'indice de l'opérateur elliptique $D_A^+ : \Gamma(E_+) \to \Gamma(E_-)$ est donné par la formule d'Atiyah-Singer, *cf.* [A.B.P] :

$$\mathrm{Dim}_{\mathbf{C}}\,\mathrm{Ker}\,D_A^+ - \mathrm{Dim}_{\mathbf{C}}\,\mathrm{Coker}\,D_A^+ = \langle e^{\frac{1}{2}\,c_1(L)}\,\widehat{A}(X), [X]\rangle,$$

où la classe $\widehat{A}$ d'Atiyah-Hirzebruch est un polynôme universel en les classes de Pontrjagin ; par exemple, pour $m = 1$, $\widehat{A} = 1$; pour $m = 2$, $\widehat{A} = 1 - \frac{1}{24}\,p_1$; et pour $m = 3$, $\widehat{A} = 1 - \frac{1}{24}\,p_1 + \frac{1}{5760}\,(7p_1^2 - 4p_2)$... Pour $n = 4$, $m = 2$, cela fait :

$$\mathrm{Dim}_{\mathbf{R}}\,\mathrm{Ker}\,D_A^+ - \mathrm{Dim}_{\mathbf{R}}\,\mathrm{Coker}\,D_A^+ = \frac{1}{4}\,(c_1^2(L) - \sigma(X)).$$

6. LES ÉQUATIONS DE SEIBERG-WITTEN

Références : [Wi4], [K.M.3], [E.F.], [T1,2,3].

En dimension 4, à côté de $D_A^+\,\Phi = 0$, Seiberg et Witten ont posé l'équation $F_A^+ = \sigma(\Phi, \Phi)$.

Si (A, Φ) est la variable, ce sont les équations d'une théorie de jauge abélienne avec de la matière, comme l'électro–magnétisme. Mais une matière bizarre, entièrement faite de monopôles sans masse, et une lumière étrange portée par des "photons magnétiques".

Remarque.— Choisissons un repère local spin^c $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$; avec les notations du § 4, $\psi_1 \wedge \psi_2$ trivialise L, (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base orthonormée directe de $T(X)$. Notons (e^1, e^2, e^3, e^4) la trivialisation duale de $T^*(X)$, $A = d + 2i\alpha$, où $\alpha = \alpha_1 e^1 +$

$\alpha_2 e^2 + \alpha_3 e^3 + \alpha_4 e^4$, et $\Phi = B_1\varphi_1 + B_2\varphi_2$. Posons $A_1 = \alpha_1 + i\alpha_2$, $A_2 = \alpha_3 + i\alpha_4$, $P_1 = i\nabla_1 + \nabla_2$, $P_2 = i\nabla_3 + \nabla_4$ (où ∇_a raccourcit ∇_{e^a}). L'équation de Dirac s'écrit :

$$\begin{aligned} \overline{P}_2\, B_2 - \overline{P}_1\, B_1 &= A_1\, B_1 - A_2\, B_2, \\ P_1\, B_2 + P_2\, B_1 &= \overline{A}_2\, B_1 - \overline{A}_1\, B_2. \end{aligned}$$

Et, dans la jauge de Lorentz, où $\Sigma_a\, \nabla_a\, \alpha_a = 0$, la seconde équation de Seiberg–Witten est :

$$\begin{aligned} \overline{P}_2\, A_1 - \overline{P}_1\, A_2 &= \frac{1}{2}\, B_2\, \overline{B}_1, \\ P_1\, A_1 + P_2\, A_2 &= \frac{1}{4}(B_1\, \overline{B}_1 - B_2\, \overline{B}_2). \end{aligned}$$

Les quatre équations scalaires montrent une symétrie d'origine "super" : la théorie de Seiberg–Witten est une version super–symétrique, $N = 2$, de l'électrodynamique quantique (*cf.* § 8 et [S.Wi.1], équation 5.17 du potentiel).

La clef de l'analyse des monopôles est le contrôle de $\|\Phi\|^2$; l'unitarité de ∇_A entraîne :

$$\Delta\, \|\Phi\|^2 = 2\, \langle \nabla_A^*\, \nabla_A\, \Phi, \Phi \rangle - 2\, \langle \nabla_A\, \Phi, \nabla_A\, \Phi \rangle$$

(pour le laplacien $\Delta = dd^* + d^*d$) ; la formule de Lichnerowicz en déduit que, pour une solution de SW, on a :

$$\Delta\, \|\Phi\|^2 \leq -\frac{s}{2}\, \|\Phi\|^2 - \frac{1}{2}\, \|\Phi\|^4.$$

D'où la majoration de $\|\Phi(x)\|^2$ par $\sup(0, -s(x))$ en un maximum x de $\|\Phi\|$.

En réutilisant la seconde équation SW, on obtient un contrôle L^2 de F_A^+ et de ses dérivées premières à partir d'une borne L_∞ de $\|\Phi\|$. Ajouté à la théorie de Hodge, de Rham, Kodaira (et la version à bord de Duff et Spencer, [Du.Sp.]), cela donne :

Soit X compacte, C une constante : l'ensemble des classes d'équivalence de jauge des solutions de (SW) *satisfaisant à $\|\Phi\|_\infty \leq C$ est compact dans toute topologie L_k^2,* $k \geq 2$, (*cf.* [K.M.3], [E.F.]).

Une transformation de jauge $h : X \to S^1$ change (A, Φ) en $(A - 2d\log h, h\Phi)$.

La dérivée en (A, Φ) de l'opérateur SW de $i\Omega^1 \times \Gamma(E_+)$ dans $\Gamma(E_-) \times i\Omega_+^2$ est :

$$(a, \varphi) \mapsto (D_A^+ \cdot \varphi + \frac{a}{2} \cdot \Phi\, ,\, d^+a - 2\,\mathrm{Im}(\sigma(\varphi, \Phi))),$$

celle du changement de jauge de $C^\infty(X, S^1)$ dans $i\Omega^1 \times \Gamma(E_+)$ est :

$$\varepsilon \mapsto (-2id\varepsilon\, ,\, i\varepsilon\Phi).$$

Il en résulte un complexe elliptique à deux flèches ; son complexe symbole est produit direct du symbole de Dirac et du symbole du complexe de la demi-signature d'Atiyah et Hirzebruch (*cf.* [A.B.P.]) :

$$\Omega^0 \xrightarrow{-d} \Omega^1 \xrightarrow{d^+} \Omega^2_+.$$

Sur X compacte sans bord, l'indice est la somme $\frac{1}{2}(\sigma+\chi)+\frac{1}{4}(c_1^2-\sigma)$, donc :

$$\mathrm{Ind}_{\mathbf{R}}\, SW = \frac{1}{4}(c_1^2 - 3\sigma - 2\chi) = \chi_+.$$

Soit $\mathcal{M}$ l'espace des modules de monopôles SW, et $\mathcal{M}^*$ la partie des irréductibles, c'est-à-dire $\Phi \not\equiv 0$.

La perturbation de $F_A^+ - \sigma(\Phi,\Phi)$ par une 2-forme autoduale fixe rend SW transverse en tout point de $\mathcal{M}^*$.

Eichhorn et Friedrich ([E.F.]) calculent la dépendance en la métrique et en déduisent que, pour les métriques génériques, SW est transverse en tout point de $\mathcal{M}^*$. Lorsque $b_2^+ \neq 0$, les calculs de Donaldson [D1] montrent que génériquement $\mathcal{M} = \mathcal{M}^*$.

THÉORÈME (Witten).— *Pour presque toute structure spin^c sur X fermée, $\mathcal{M}$ est de dimension virtuelle strictement négative.*

Puisque $\int_X \Delta\,\|\Phi\|^2 = 0$ et $\|\Phi\|^2 \leq \sup(0,-s)$, la formule $\Delta\,\|\Phi\|^2 = \frac{s}{2}\,\|\Phi\|^2 - \frac{1}{2}\,\|\Phi\|^4 - 2\,\|\nabla_A\Phi\|^2$ donne une constante C ne dépendant que de la métrique sur X, telle que $\int_X \|\Phi\|^4 \leq 4C$. Donc $\int_X \|F_A^+\|^2 = \int_X \|\sigma(\Phi,\Phi)\|^2 \leq C$.

Par ailleurs, pour toute 2-forme ω sur X, $[\omega]\cdot c_1(L) = \frac{i}{2\pi}\int_X F_A \wedge \omega$; en particulier $c_1(L)^2 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_X F_A\wedge F_A = \frac{1}{4\pi^2}\int_X \|F_A^+\|^2 - \|F_A^-\|^2$. Or, si la dimension virtuelle de $\mathcal{M}$ est positive, $c_1^2(L) \geq 2\chi + 3\sigma$. Par conséquent :

$$\int_X \|F_A^-\|^2 \leq C - 4\pi^2(2\chi+3\sigma).$$

Ayant borné L^2 la courbure F_A, on sait que $c_1(L)$ appartient à une partie compacte de $H^2(X,\mathbf{Z})$. C.Q.F.D.

Tous les invariants de Seiberg-Witten sont vides sur les variétés fermées à courbure scalaire > 0.

Un autre théorème d'annulation est facile à démontrer (*cf.* [E.H.]) :

$\mathcal{M}$ est stablement vide lorsque X est somme connexe de deux variétés X_1, X_2 ayant un $b_2^+ \neq 0$.

Encore d'autres annulations sont connues, par exemple [Wa].

Mais pour les surfaces complexes kählériennes, il existe des invariants SW non-nuls ([Wi4]) :

Si $J : T(X) \to T(X)$ est une structure presque-complexe adaptée à la métrique riemannienne, des fibrés spin^c se distinguent : $E_+ = \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}$, $E_- = \Lambda^{0,1}$; et aussi une 2-forme autoduale de type $(1,1)$: $\omega_0(x,y) = (x \mid Jy)$.

Si X est kählérienne, la forme ω_0 est fermée, la connexion de Levi-Civita préserve J, l'opérateur de Dirac D_A^+ coïncide avec $\sqrt{2}\,(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*) : \Omega^{0,0} \oplus \Omega^{0,2} \to \Omega^{0,1}$ (*cf.* [H]).

Les autres structures spin^c de X s'obtiennent en tensorisant E_+, E_- par les fibrés N en droites complexes. Alors $E_+ \otimes N = N \oplus (NK^{-1})$, $L = N^2K^{-1}$.

Supposons X analytique complexe kählérienne avec $b_2^+ > 1$;

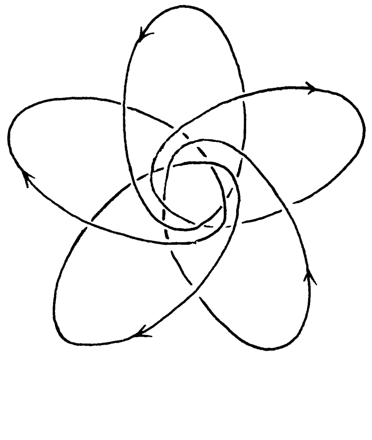
si $c_1(L) \cdot \omega_0 < 0$, les monopôles correspondent aux diviseurs *de N, c'est-à-dire aux couples formés d'une structure holomorphe sur N et d'une section holomorphe de N. Si $c_1(L) \cdot \omega_0 > 0$, on trouve les diviseurs de NK^{-1}.*

7. RETOUR À THOM

La conjecture de Thom se disait en termes imagés (*cf.* [B.We.]).

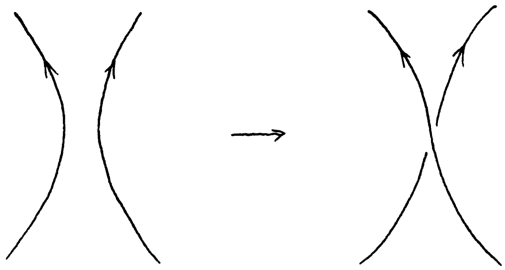
Par exemple, comme une contrainte sur les aventures de courbes fermées orientées dans l'espace euclidien de dimension 3.

Au début, on suppose que les courbes sont toutes des cercles de Villarceau, N_+ dans un sens et N_- dans l'autre, avec $N_+ > N_-$:

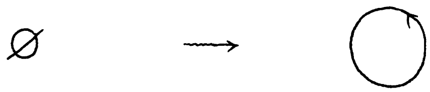


Ensuite, elles entrent en mouvement, mais seuls trois sortes d'accidents peuvent survenir :

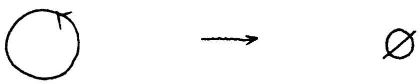
des crossing-over (*cf.* [Th2], chapitre 11), en nombre c :



des naissances, en nombre n :



ou des morts, en nombre m :



De plus, on impose que chaque disparition emporte avec elle au moins un segment présent dans l'un des N cercles de départ (une molécule d'origine). (C'est une hypothèse de connexité de l'aventure.)

Alors, si au bout du compte il ne reste plus rien, la contrainte est :

$$c \geq m + n + (N_+ - N_-)(N_+ - N_- - 3).$$

Aucune approche combinatoire n'a permis d'aborder le problème.

La conjecture s'énonçait aussi en termes de géométrie des points complexes des surfaces réelles dans $\mathbf{C}^2$ (Eliashberg et Kharlamov, *cf.* [B2]).

Enfin, elle se dit en termes de géométrie différentielle :

Soit Σ une surface connexe orientée fermée plongée dans une variété X de dimension 4 ; au voisinage de Σ deux sortes de structures kählériennes sont en compétition, celles qui s'étendent à X, et celles qui font de Σ une courbe holomorphe. Les courbures de ces deux sortes de structures peuvent se comparer le long de Σ ; notons F_X, resp. F_Σ, leurs formes de Ricci (c'est-à-dire les courbures de Ricci des fibrés hermitiens anti-canoniques K^{-1}, *cf.* [Ch]) ; chacune est une 2-forme de type $(1,1)$ par rapport à une structure analytique complexe.

L'énoncé suivant équivaut à la conjecture de Thom :

Si X est $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ et que la classe d'homologie de Σ contient une courbe holomorphe C, la moyenne de F_Σ sur Σ est supérieure à la moyenne de F_X sur Σ :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma F_\Sigma \geq \frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma F_X.$$

En effet, à gauche on reconnaît $-\chi(\Sigma) - \Sigma\cdot\Sigma$ et à droite $-c_1(X)\cdot\Sigma$. La formule d'adjonction conclut : $g(\Sigma) \geq g(C)$.

Le même énoncé pour X surface projective complexe quelconque est la "conjecture de Thom généralisée".

Prolongement analytique et forme de l'homologie ; des thèmes qui ont préoccupé René Thom depuis [Th1] jusqu'à [Th3].

C'est finalement par ce chemin que [K.M.3] résoud le problème, en passant par la courbure scalaire s que flairent les monopôles.

Le paysage découvert par la preuve de Kronheimer et Mrowka, issue de Seiberg et Witten, est grandiose : la structure spinorielle de l'espace–temps, l'équation de Dirac, la courbure scalaire, lagrangien d'Einstein, l'électrodynamique de Maxwell, l'autodualité et en contrebas la théorie de Yang-Mills, la renormalisation et la super–symétrie. En rivière souterraine, la théorie des super–cordes et ses dualités.

Extraits de notes sur les six étapes survolées au § 1 :

La première étape repose sur une construction de métriques à $s > 0$, sur les sommes connexes des variétés à $s > 0$ de [G.L.2] : en dimension ≥ 3, il est possible de modifier la métrique d'une boule épointée sans y toucher le long du bord, en gardant $s > 0$, pour coller à un cylindre sur une sphère ronde de rayon arbitrairement petit.

Les deux étapes suivantes appartiennent à la théorie du potentiel (*cf.* [dR]).

D'abord, on se sert de courts cylindres sur de petites S^3 pour réunir $\mathbf{P}^2$ à des $\overline{\mathbf{P}}^2$. Lorsque les rayons tendent vers 0, la 2-forme harmonique autoduale, de norme L^2 égale à 1, d'intégrale positive sur la droite H, converge C^∞ hors des points éclatés vers une forme harmonique. Sur les $\overline{\mathbf{P}}^2$, la limite ne peut être que 0 puisque $b_2^+ = 0$; sur $\mathbf{P}^2$, la limite est une forme de Kähler.

Ensuite arrive le long cylindre $Y \times [-R, R]$ sur $Y = \Sigma \times S^1$. La partie X_0 collée à $Y \times \{-R\}$ contient Σ ; de l'autre côté est X_1. Lorsque $R \to \infty$, la forme canonique ω converge C^∞ vers une forme harmonique de carré intégrable sur la réunion disjointe de deux variétés complètes $\widehat{X}_0 = X_0 \cup (Y \times [0, \infty[)$ et $\widehat{X}_1 = (]-\infty, 0] \times Y) \cup X_1$. Soit $\mathcal{H}_0$ l'espace des 2-formes harmoniques L^2 sur $\widehat{X}_0$; d'après Andreotti et Vesentini, *cf.* [dR], les éléments de $\mathcal{H}_0$ sont fermés et cofermés. Par la proposition 4.9 de [A.P.S.], $\mathcal{H}_0$ représente l'image de $H^2(X_0, Y)$ dans $H^2(X_0)$. Mais $H^2(X_0) \to H^2(Y)$ est un isomorphisme, donc $\mathcal{H}_0 = 0$. En particulier, $\int_\Sigma \omega \to 0$ si $R \to \infty$. Posons $[\omega] = aH + \Sigma\, a_i\, E_i$; comme $[\omega][\omega] = 1$, $a^2 = 1 + \Sigma\, a_i^2 \geq 1$, donc $[\omega]\, H \geq 1$.

Or $[\omega] \cdot c_1(L) = (3 - d)[\omega] \cdot H + [\omega] \cdot \Sigma$. Par suite, lorsque $d > 3$, pour R assez grand, $[\omega] \cdot c_1(L) < 0$.

À la quatrième étape, on voit la classe canonique $[\omega_t]$ d'un chemin g_t de métriques sur X traverser au temps 0 l'hyperplan orthogonal à $c_1(L)$. Pour $t = 0$, un des monopôles est réductible : $\Phi \equiv 0$ et F_A est l'unique forme anti-autoduale de classe $c_1(L)$. D'après Donaldson [D2], § VI, il n'y a plus de monopôle réductible pour $t \neq 0$, t proche de 0. Dans [K.M.3], Kronheimer et Mrowka utilisent un modèle de Kuranishi, suivant l'exemple de Donaldson [D3] qui permet de conclure : la parité du nombre de monopôles dans $\mathcal{M}_t$ change. Dans [Wi4], Witten avait déjà indiqué la raison de cette bifurcation des monopôles :

Sous nos hypothèses, pour chaque valeur de t, l'indice de D_A^+ est 1, et celui de $d^+ : \Omega^1 \to \Omega^2_+$ est 0. L'image de d^+ est l'orthogonal de ω_t et le noyau de d^+ est $d(\Omega^0)$ (*cf.* [D.K.]).

En $t = 0$, comme $\pi_1(X) = 0$, la solution réductible de SW, $(A_0, 0)$, est unique à équivalence de jauge près. Admettons que le noyau de $D_{A_0}^+$ soit de dimension 1, engendré par le champ φ_0. (D'après Fredholm, l'ensemble des connexions A telles que $\operatorname{Det} D_A^+ = 0$ est de codimension 2, *cf.* [D.K.].) Et cherchons les solutions de SW proches de $(A_0, 0)$ pour les métriques g_ε sous la forme de perturbations $(A, \Phi) = (A_0 + \varepsilon a, |\varepsilon|^{1/2}\, \varphi)$. Comme $D_A^+\, \Phi$ est égal à $|\varepsilon|^{1/2}\, (D_{A_0}^+\, \varphi + \varepsilon(a + (\delta\, D_{A_0}^+)) \cdot \varphi)$, on voit qu'au premier ordre en ε, φ doit être colinéaire à φ_0. Posons donc $\varphi = \lambda\, \varphi_0 + \varepsilon\, \varphi_1$. La seconde équation de Seiberg–Witten entraîne :

$$d^+ a + \delta\, F_{A_0}^+ = (\text{signe de } \varepsilon)\ |\lambda|^2\, \sigma(\varphi_0, \varphi_0).$$

Mais sur le chemin g_ε, $c_1(L) \cdot \omega_\varepsilon$ s'annule transversalement pour $\varepsilon = 0$, donc $\delta\, F_{A_0}^+ \wedge \omega_0 \neq 0$. Si bien qu'en prenant le produit scalaire de cette seconde équation avec ω_0, on apprend que $\lambda \neq 0$ force la valeur du signe de ε. De là, et du théorème des fonctions implicites, on déduit la bifurcation : si un monopôle voisin de $(A_0, 0)$ existe pour $\varepsilon > 0$ (resp. < 0), il n'y en a plus pour $\varepsilon < 0$ (resp. > 0) et, inversement, s'il n'y a pas de monopôle voisin de $(A_0, 0)$ pour $\varepsilon > 0$ (resp. < 0), il y en a un pour $\varepsilon < 0$ (resp. > 0).

Maintenant, nous en sommes sûrs : dès que $d > 3$ et que R est suffisamment grand, un nombre impair de monopôles nous accompagnent dans les métriques sur X à longs cylindres $Y \times [-R, R]$.

Le long du cylindre, les équations de Seiberg-Witten s'interprètent comme un problème d'évolution :

Les fibrés E_-, E_+, L sont images réciproques de fibrés sur Y ; le champ de vecteur $\frac{\partial}{\partial t}$ est un isomorphisme réel et unitaire de E_- sur E_+. Ainsi, $T(Y)$ s'identifie à $su(E_+)$, et la restriction de E_+ à une section Y fait une structure spin^c sur Y de fibré caractéristique $L_{|Y}$. De même, $\Lambda^2_\pm(T(Y \times \mathbf{R}))$ s'identifient à $T(Y)$.

Pour toute connexion A sur L, il existe une transformation de jauge h telle que l'opérateur $h \cdot A = A - 2d \log h$ contracté par $\frac{\partial}{\partial t}$ coïncide avec la dérivation $\frac{\partial}{\partial t}$. On dit que $h \cdot A$ est en jauge temporelle.

Une connexion temporelle A sur L s'identifie à une courbe de connexions $\vec{A}(t)$ sur $L_{|Y}$.

Le couple (A, Φ) est un monopôle sur $Y \times [-R, R]$ si :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi = -D_{\vec{A}} \Phi,$$
$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = - * F_{\vec{A}} + \sigma(\Phi, \Phi).$$

Choisissons une connexion de référence $\vec{A}_0$ sur $L_{|Y}$; pour la métrique L^2 de l'ensemble des couples $(\vec{A}, \Phi)$ sur Y, les équations différentielles sont celles du gradient de $\left(-\frac{1}{2}\right)$ fois

$$C(\vec{A}, \Phi) = \int_Y (\vec{A} - \vec{A}_0) \wedge (F_{\vec{A}} + F_{\vec{A}_0}) + 2\langle \Phi, D_{\vec{A}} \Phi \rangle \, d\,\mathrm{Vol}_Y.$$

Si $h : Y \to S^1$ est une transformation de jauge et que $[h]$ dénote sa classe dans $H^1(Y, \mathbf{Z})$, on a :

$$C(h \cdot (\vec{A}, \Phi)) - C(\vec{A}, \Phi) = -8\pi^2 c_1(L) \cdot [h].$$

En particulier si h se prolonge du côté de X_0 ou de X_1, $C(h \cdot (\vec{A}, \Phi)) = C(\vec{A}, \Phi)$ en vertu de la formule de Stokes.

Faisons tendre R vers $+\infty$; et considérons une famille de monopôles pour ces métriques. La géométrie des morceaux X_0, X_1 est fixe, donc le lemme de compacité assure l'existence de transformations de jauge h_0 sur X_0, h_1 sur X_1, telles que $h_0 \cdot (A, \Phi)$ converge sur X_0 et $h_1 \cdot (A, \Phi)$ converge sur X_1. Par conséquent, il existe une constante C_0 qui majore $|C(\vec{A}, \Phi)|$ aux extrémités du cylindre. Mais la fonction $C(\vec{A}(t), \Phi(t))$ de t décroît entre $-R$ et R ; il y a donc un intervalle de longueur 1 sur lequel sa variation est majorée par $\frac{C_0}{R}$. D'autre part, le sup et l'inf de la courbure scalaire sur X sont indépendants de R ; la norme de Φ est contrôlée. La compacité donne un monopôle sur $Y \times [0,1]$ tel que la fonction C soit constante, c'est-à-dire une solution stationnaire, un monopôle de Seiberg-Witten en dimension 3.

C'est ce qu'il fallait pour aborder la sixième étape décrite à la fin du § 1.

8. AUX PORTES DE LA PHYSIQUE MODERNE

La ressemblance entre les invariants de Seiberg-Witten et les invariants de Donaldson ([D4]) n'est pas fortuite. C'est en voulant interpréter physiquement les polynômes de Donaldson que Witten a inventé les théories topologiques des champs ([Wi1]). L'explication des propriétés tridimensionnelles du polynôme de Jones est venue ensuite ([Wi2]). Et puis, guidé par les formules de Kronheimer et Mrowka ([K.M.2]), Witten a montré qu'une supersymétrie ajoutée à Yang-Mills en dimension 4 suffisait pour calculer les invariants de Donaldson des surfaces kählériennes, dans ([Wi3]).

Enfin, avec Seiberg, Witten a découvert la théorie “duale” de Yang-Mills, $N = 2$ supersymétrique twistée, celle qui est “équivalente” dans l'infrarouge à la théorie de jauge SU_2 mais qui, étant abélienne, y est faiblement couplée au lieu d'être fortement couplée, donc “calculable” (*cf.* [S.Wi.1,2], [Wi4]).

Les théories quantiques des champs sont des objets ambigus. Chaque théorie est censée fournir une collection de fonctions de plusieurs variables calculant les amplitudes du vide au vide des quantités observables, en respectant un certain nombre de symétries. Mais à un lagrangien de champs classiques est associée toute une famille de prédictions quantiques. Les paramètres sont, entre autres, les coefficients d'interactions (les couplages observables) et une valeur de fréquence (l'échelle à choisir). Plus il y a de modules, plus le théoricien moderne est content, car sur ces modules opèrent des symétries (continues ou discrètes) dont on peut extraire des informations physiques.

Dans le meilleur des cas, quand la théorie est juste renormalisable, les règles de renormalisation stipulent, pour chaque régularisation et chaque échelle d'observation, une correspondance entre les variables de couplages "nues", $g_0 \in U_0$, et les constantes "habillées" (par des graphes de Feynman) $g \in U$. Par exemple, soit $\lambda \in \mathbf{R}^+$ une valeur du "cut–off" qui régularise les fluctuations quantiques (intégrales de Feynman) en soustrayant les trop grandes impulsions ; alors $\forall g_0 \in U_0$, la renormalisation, compensation et contre–termes, donne une courbe $\mu \mapsto g(\mu)$. Le "paramètre de renormalisation" μ est l'échelle du moment de transfert. D'après Callan, Symanzik, Wilson et al. (1970), les courbes $g(\mu)$ ne dépendent pas de λ (tout en dépendant du procédé choisi pour renormaliser) : elles constituent le "flot de renormalisation", *cf.* [I.Z.]. Les points $g \in U$ qui sont attracteurs lorsque $\mu \to \infty$ sont dits stables dans l'ultraviolet, ceux qui sont attracteurs lorsque $\mu \to 0$ sont dits stables dans l'infrarouge.

Lorsqu'un point de U correspondant à une théorie sans interaction est UV–stable, la théorie est "asymptotiquement libre". C'est le cas de la théorie de Yang–Mills non–abélienne, qui décrit les interactions fortes : aux grands moments de transfert, le couplage entre les quarks et les gluons devient petit. Donc, dans ce régime, des prédictions peuvent être tirées de la théorie perturbative. Le problème est à grande distance : la théorie est "fortement couplée" dans l'infrarouge. Logiquement la théorie des perturbations ne peut plus apporter beaucoup d'informations. Or, à cette échelle, il faut rendre compte du confinement des quarks : lorsque la séparation de deux quarks est assez grande, il semble énergétiquement favorable de produire une nouvelle paire quark–antiquark *cf.* [Ca.Go.].

La théorie super–symétrique, $N = 2$, twistée, que Witten a imaginée pour évaluer les invariants de Donaldson, est également faiblement couplée dans l'ultraviolet et fortement couplée dans l'infrarouge. (Dans une théorie de champs super–symétriques, N désigne le nombre de couples de spineurs pris en compte par la super–symétrie, *cf.* [W.B.].) Dans la théorie de Witten, lorsque le groupe de jauge est SU_2, le module pertinent est un nombre u. Il représente la valeur moyenne d'un champ qui brise la symétrie SU_2. (Géométriquement, u correspond au générateur de l'algèbre de cohomologie de l'espace des classes d'équivalence de jauge sur S^4.) Pour $u \neq 0$, la symétrie de jauge est "spontanément brisée" en un groupe U_1. Le point $u = \infty$ est stable dans l'ultraviolet. La théorie de champs classiques utilisée par Donaldson correspond à $u = 0$, mais comme on s'intéresse à des observables topologiques, l'analyse pour $u \to \infty$ convient aussi bien ; ce qui permet à Witten d'excellentes prédictions pour les formules mathématiques.

't Hooft et Polyakov (1974) avaient construit pour la théorie ordinaire de Yang–

Mills spontanément brisée des solutions classiques qui sont des monopôles magnétiques à charges quantifiées topologiquement (*cf.* [I.Z]). La théorie super–symétrique possède aussi de telles solutions : des monopôles ou des dyons (chargés électriquement et magnétiquement). Ces particules, en général massives, proviennent des gluons, gluinos, goldstones et goldstinos avec des contraintes à l'infini dans $\mathbf{R}^4$; ce sont des excitations cohérentes des champs fondamentaux. Elles forment un réseau $\mathbf{Z}^2$ de couples (n_m, n_e) comptant les charges magnétiques et électriques. Si $n_e = 0$, on parle de monopôle magnétique. Après quantification, ces "particules" se maintiennent (même si elles ne sont pas toutes stables). Leur comportement va décider du sort de la théorie.

Seiberg (1988) avait réussi à analyser certaines théories super–symétriques, $N = 1$ ou $N = 2$, en passant au domaine des valeurs complexes de u (cela s'appelle "la puissance de l'holomorphie"). Pour la théorie de Witten, il y a une monodromie non triviale des dyons quand u tourne autour de ∞ : une matrice dans $SL_2(\mathbf{Z})$. De plus, de bonnes raisons font penser que l'ensemble des monodromies au–dessus du plan complexe des u ne peut être abélien, *cf.* [S.Wi.1]. D'où l'Ansatz de Seiberg–Witten : en plus de $+\infty$, deux valeurs de u doivent donner des singularités de la théorie quantique. (On décide de ramener ces points singuliers en $+1$ et -1, ou μ^2 et $-\mu^2$; ils correspondent au niveau quantique à une bifurcation du point singulier classique $u = 0$.) En un de ces points, une famille de monopôles ou de dyons acquiert une masse nulle ; cela s'interprète comme un cycle évanescent (*cf.* [S.Wi.1,2]). (La théorie des catastrophes n'est pas loin.) Alors, à faible énergie dans l'infrarouge, la théorie quantique est convenablement décrite comme perturbation d'une électrodynamique avec des monopôles Φ et un "photon dual" A. Ce phénomène exprime une sorte de dualité entre l'électricité mise au départ et le magnétisme effectif ; d'après Seiberg et Witten, c'est un analogue de la dualité de Mountonen et Olive, dualité électrique–magnétique exacte avec $N = 4$. Voilà qui motive la prédiction de Witten : les monopôles peuvent remplacer les instantons dans les calculs topologiques. Dans [Wi4], la prédiction se traduit en particulier par une formule conjecturale pour une fonction génératrice des polynômes de Donaldson en termes d'invariants de Seiberg–Witten.

Du point de vue de la physique, ce modèle précise la conjecture de 't Hooft : le confinement des quarks résulte d'une "condensation des monopôles", comme le confinement magnétique dans les supraconducteurs résulte de la condensation des paires de Cooper. Le modèle possède d'autres propriétés physiques intéressantes comme l'asymétrie chirale, il se couple à de la matière et se généralise à d'autres groupes de jauge, mais il est super–symétrique, $N \neq 0$. Question : comment réaliser tout cela sans la super–symétrie ?

C'est de plus en plus clair : en topologie et géométrie de notre espace-temps, la théorie de la renormalisation n'est pas "une autre histoire".

Remerciements : pour la préparation de cet exposé et sa rédaction, je dois beaucoup aux échanges que j'ai eus avec Michèle Audin, Olivier Biquard, Jean-Pierre Bourguignon, Gilles Châtelet, Paul Gauduchon, Dieter Kotschick, Marcus Slupinsky, Raymond Stora, Thanh Tâm Lê et Jean–Bernard Zuber.

BIBLIOGRAPHIE

[A] M.F. ATIYAH - *Classical groups and classical differential operators on manifolds*, CIME, Varenna (1975), 6-48.

[ABP] M.F. ATIYAH, R. BOTT, V.K. PATODI - *On the heat equation and the index theorem*, Invent. Math. **19** (1973), 279-330 et **28** (1975), 277-280.

[ABS] M.F. ATIYAH, R. BOTT, A. SHAPIRO - *Clifford modules*, Topology **3**, suppl. 1 (1964), 3-38.

[AHS] M.F. ATIYAH, N.J. HITCHIN, I.M. SINGER - *Self-duality in four dimensional Riemannian Geometry*, Proc. Royal Soc. London **362** (1978), 425-461.

[APS] M.F. ATIYAH, V.K. PATODI, I.M. SINGER - *Spectral asymmetry and Riemannian Geometry*, I, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **77** (1975), 43-69.

[AS] M.F. ATIYAH, I.M. SINGER - *The index of elliptic operators*, III, Ann. of Math. **87** (1968), 546-604.

[Au] D. AUCKLEY - *Surgery, knots and the Seiberg-Witten equations*, preprint, Berkeley, 1995.

[B1] D. BENNEQUIN - *Problèmes elliptiques, surfaces de Riemann et structures symplectiques [d'après M. Gromov]*, Sém. Bourbaki, exp. n° 657, février 1986, Astérisque **145-146** (1987), 111-136.

[B2] D. BENNEQUIN - *Topologie symplectique, convexité holomorphe et structures de contact [d'après Y. Eliashberg, D. Mc Duff et al.]*, Sém. Bourbaki, exp. n° 725, juin 1990, Astérisque **189-190** (1990), 285-323.

[B3] D. BENNEQUIN - *L'instanton gordien*, Sém. Bourbaki, exp. n° 770, juin 1993, Astérisque **216** (1993), 233-277.

[BWe] M. BOILEAU, C. WEBER - *Le problème de J. Milnor sur le nombre gordien des nœuds algébriques*, Ens. Math. **30** (1984), 173-222.

[Bbk] N. BOURBAKI - *Algèbre*, ch. IX, Hermann, Paris, 1959.

[Be] A. BESSE - *Géométrie riemannienne en dimension* 4 (exposés de J.-P. Bourguignon, J. Lafontaine, P. Marry), CEDIC, Nathan, Paris, 1981.

[Bo] A. BOREL - *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, Thèse, Paris, 1952, Ann. of Math. (2) **57** (1953), 115-207.

[Bou] J.-P. BOURGUIGNON - *The magic of Weitzenböck formulas*, in : Variational methods, progress in nonlinear differential equations and their applications, Boston (1990), 251-273.

[CaGo] R.N. CAHN et G. GOLDHABER - *The experimental foundations of particle physics*, Cambridge U.P., 1989.

[C] É. CARTAN - *The theory of spinors*, Hermann, Paris, 2ème éd., 1966.

[Ch] S.S. CHERN - *Complex manifolds without potential theory*, Springer, 2ème éd., 1979.

[dR] C. DE RHAM - *Variétés différentiables*, Herman, Paris, 3ème éd., 1973.

[Di] P.A.M. DIRAC - *The principles of quantum mechanics*, 4ème édition, Oxford, 1967.

[D1] S.K. DONALDSON - *Connexions, cohomology and the intersection forms of four-manifolds*, J. of Diff. Geom. **24** (1986), 275-341.

[D2] S.K. DONALDSON - *Irrationality and the h-cobordism conjecture*, J. of Diff. Geom. **26** (1987), 141-168.

[D3] S.K. DONALDSON - *The orientation of Yang-Mills moduli spaces and* 4*-manifold topology*, J. of Diff. Geom. **26** (1987), 397-428.

[D4] S.K. DONALDSON - *Polynomial invariants for smooth four-manifolds*, Topology **29** (1990), 257-315.

[DK] S.K. DONALDSON and P.B. KRONHEIMER - *The geometry of four-manifolds*, Oxford University Press (1990).

[DuSp] C.D. DUFF, D.C. SPENCER - *Harmonic tensors on riemannian manifolds with boundary*, Ann. of Math. **56** (1952), 128-196.

[EF] J. EICHHORN, T. FRIEDRICH - *Seiberg-Witten theory*, 1995, Preprint, Berlin.

[F] R.P. FEYNMAN - *Lectures on Physics*, Caltec, 1965.

[Gau] P. GAUDUCHON - *Variétés riemanniennes autoduales (d'après C.H. Taubes et al.)*, Sém. Bourbaki, exp. n° 767, mars 1993, Astérisque **216** (1993), 151-186.

[G] M. GROMOV - *Pseudo-holomorphic curves on almost complex manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 307-347.

[GL1] M. GROMOV, H.B. LAWSON - *The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature*, Ann. of Math. **111** (1980), 423-434.

[GL2] M. GROMOV, H.B. LAWSON - *Spin and scalar curvature in the presence of a fundamental group*, I, Ann. of Math. **111** (1980), 209-230.

[H] N. HITCHIN - *Harmonic spinors*, Adv. in Math. **14** (1974), 1-55.

[HiHo] F. HIRZEBRUCH, H. HOPF - *Felder von Flächenelementen in 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Math. Annalen **136** (1958), 156-172.

[HsSz] W.C. HSIANG, R.H. SZCZARBA - *On embedding surfaces in four-manifolds*, In : Algebraic Topology, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 22, Americ. Math. Soc., Providence, R.I., 1971, 97-103.

[IZ] C. ITZYKSON et J.-B. ZUBER - *Quantum field theory*, Mc Graw Hill, 1980.

[KeMi] M. KERVAIRE, J. MILNOR - *On 2-spheres in 4-manifolds*, Proc. Nat. Acad. Science USA **47** (1961), 1651-1657.

[KM1] P.B. KRONHEIMER, T.S. MROWKA - *Gauge theory for embedded surfaces*, I, Topology, 1994, II, Topology, 1995.

[KM2] P.B. KRONHEIMER, T.S. MROWKA - *Embedded surfaces and the structure of Donaldson's polynomial invariants*, J. of Diff. Geom., 1995.

[KM3] P.B. KRONHEIMER, T.S. MROWKA - *The genus of embedded surfaces in the projective plane*, Math. Res. Letters **1** (1994), 798-808.

[KoMa] D. KOTSCHICK, G. MATIČ - *Embedded surfaces in four-manifolds, branched covers and $SO(3)$-invariants*, Preprint Bâle (1993).

[LM] B. LAWSON, M. MICHELSON - *Spin geometry*, Princeton Univ. Press, 1989.

[Li] A. LICHNEROWICZ - *Spineurs harmoniques*, CRAS **257** (1963).

[Mi1] J.W. MILNOR - *Spin structures on manifolds*, L'Ens. Math. **9** (1963), 198-203.

[Mi2] J.W. MILNOR - *Remarks concerning Spin manifolds*, In : Differential and combinatorial topology : A symposium in honor of Marston Morse, Princeton Univ. Press (1965), 55-62.

[MiSt] J.W. MILNOR, J.D. STASHEFF - *Characteristic classes*, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1974.

[PR] R. PENROSE, W. RINDLER - *Spinors and space-time*, vol. 1, Cambridge, **86** (1984).

[Ro] V.A. ROHLIN - *Two-dimensional submanifolds of four-dimensional manifolds*, Funct. Anal. Appl. **5** (1971), 39-48.

[SWi1] N. SEIBERG, E. WITTEN - *Electric-magnetic duality, monopole condensation and confinement in $N = 2$ supersymmetric Yang-Mills theory*, Nuclear Physics B **426** (1994), 19-52.

[SWi2] N. SEIBERG, E. WITTEN - *Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $N = 2$ supersymmetric QCD*, Nuclear Physics B **431** (1994), 484-550.

[T1] C. TAUBES - *The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms*, Math. Res. Letters **1** (1994), 809-822.

[T2] C. TAUBES - *More constraints on symplectic manifolds from the Seiberg-Witten invariants*, Math. Res. Letters **2** (1995), 9-14.

[T3] C. TAUBES - *The Seiberg-Witten and the Gromov invariants*, Math. Res. Letters **2** (1995), 221-238.

[Th1] R. THOM - *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comment. Math. Helv. **28** (1954), 17-86.

[Th2] R. THOM - *Stabilité structurelle et morphogénèse*, Interéditions, 2ème édition, Paris, 1977.

[Th3] R. THOM - *Spectre bord d'un centre obscur*, dans : "Passion des formes" (M. Porte, coordonnateur), Fontenay–Saint Cloud (1994), 13-23.

[Wa] WANG Shuguang - *A vanishing theorem for Seiberg-Witten invariants*, Math. Res. Letters **2** (1995), 305-310.

[WB] J. WESS et J. BAGGER - *Supersymmetry and supergravity*, 2nd edition, Princeton, 1992.

[Wh] H. WHITNEY - *On the topology of differentiable manifolds*, Lectures in Topology, Univ. of Michigan Press, 1941, 101-141, In : Collected papers, Vol. II, 175-215.

[Wi1] E. WITTEN - *Topological Quantum Field Theory*, Comm. Math. Phys. (1988), 353-386.

[Wi2] E. WITTEN - *Quantum field theory and the Jones polynomials*, Comm. Math. Phys. **121** (1989), 351-399.

[Wi3] E. WITTEN - *Supersymmetric Yang-Mills theory on a four-manifold*, Preprint IAS, 1994.

[Wi4] E. WITTEN - *Monopoles and* 4*-manifolds*, Math. Res. Letters **1** (1994), 769-796.

[Wu] WU Wen Tsun - *Sur la structure presque complexe d'une variété différentiable réelle de dimension* 4, Note CRAS, 15 nov. 1948, 1076-1078.

Daniel BENNEQUIN

Université de Paris VII

UFR de Mathématiques

Tour 45-55 - 5ème étage

2, place Jussieu

F-75251 PARIS CEDEX 05