CLAUDE SABBAH

Classes caractéristiques et théorèmes d'indice : point de vue microlocal

Astérisque, tome 241 (1997), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 818, p. 381-409
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__381_0>

Séminaire BOURBAKI
48ème année, 1995-96, n° 818

Juin 1996

CLASSES CARACTÉRISTIQUES ET THÉORÈMES D'INDICE : POINT DE VUE MICROLOCAL

par **Claude SABBAH**

Introduction

Le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch (GRR) pour les fibrés sur une variété algébrique a de nombreuses généralisations. Il est naturel de l'étendre aux faisceaux cohérents de modules sur l'anneau $\mathcal{D}_X$ des opérateurs différentiels linéaires sur une variété algébrique ou analytique complexe X, ceci pour plusieurs raisons :

• Le théorème GRR dans le cadre analytique complexe pour un fibré holomorphe est conséquence du théorème de l'indice relatif d'Atiyah-Singer pour les complexes elliptiques : on applique celui-ci au complexe de Dolbeault associé au fibré. La relation n'est cependant pas à sens unique. Si l'on étend GRR aux *$\mathcal{D}$-modules* — plus précisément aux *paires elliptiques* — on peut en déduire le théorème de l'indice des complexes elliptiques, au moins lorsque les données sont analytiques réelles (lorsque ces données sont C^∞ on se ramène au cas analytique réel par une petite perturbation qui ne modifie pas l'indice). Pour ce faire, on commence par complexifier la variété et le complexe elliptique. Ce qu'on obtient est le complexe de de Rham d'un $\mathcal{D}$-module et on applique GRR à ce $\mathcal{D}$-module. Voilà résumée l'approche de Boutet de Monvel et Malgrange [B-M90]. Elle jette une lumière nouvelle sur les relations entre théorèmes d'indice d'Atiyah-Singer et GRR.

• Le théorème GRR pour les *$\mathcal{D}$-modules holonomes* rend compte de la théorie des classes de Chern des variétés singulières de Schwartz-MacPherson.

• Dans le même ordre d'idées, la version de GRR où les classes caractéristiques sont analytiques, c'est-à-dire prises dans la cohomologie de Hodge $\oplus_p H^p(X, \Omega_X^p)$ ([O-T-T81c, O-T-T85]), fait intervenir de manière essentielle la théorie de la dualité pour les faisceaux cohérents. Celle-ci s'étend de façon satisfaisante aux $\mathcal{D}$-modules, établissant notamment un lien avec la dualité topologique de Poincaré-Verdier. Aussi est-il naturel de transporter GRR aux $\mathcal{D}$-modules. Cet aspect est développé par Schapira et Schneiders [Sch-Sch94] dans leur construction d'une classe d'Euler microlocale et dans la démonstration de son bon comportement par image directe.

Dans cet exposé, je me placerai dans le cadre analytique complexe et j'insisterai sur les méthodes d'inspiration microlocale. Un certain nombre de résultats se transposent sans mal au cadre algébrique complexe, où les démonstrations sont parfois plus simples.

La première question à aborder, pour que GRR ait un sens, est la cohérence des images directes. Il est souvent nécessaire de considérer des situations plus générales que celle d'un morphisme propre entre espaces analytiques complexes.

Un cadre assez large dans lequel on dispose d'un théorème de cohérence des images directes (généralisant le théorème de Grauert) est celui des *paires elliptiques* formées d'un $\mathcal{D}$-module et d'un faisceau $\mathbf{R}$-constructible vérifiant une condition de transversalité relativement à une application holomorphe $f : X \to Y$ ([Sch-Sch94]). La cohérence des systèmes de Gauss-Manin locaux ou semi-locaux en est un cas particulier. Ce cadre contient aussi une théorie de la dualité. Il permet notamment de considérer la restriction d'un $\mathcal{D}$-module à un ensemble sous-analytique réel transverse à sa variété caractéristique, une sous-variété analytique réelle à bord par exemple.

Dans [B-F-M79] le théorème GRR est exprimé comme la compatibilité à l'image directe d'un morphisme $\alpha : K_0^{\mathrm{alg}}(X) \to K_0^{\mathrm{top}}(X)$, où le premier groupe de Grothendieck est celui des faisceaux cohérents et le second s'exprime à l'aide d'un plongement de la variété X dans $\mathbf{C}^N$: c'est le groupe des classes d'homotopie stable de morphismes de fibrés vectoriels complexes de rang fini sur $\mathbf{C}^N$, qui sont des isomorphismes hors de X. Dans [Le87] Levy a étendu au cadre analytique complexe la construction d'un tel morphisme et le théorème GRR correspondant.

Une conséquence en est un théorème GRR pour la classe $\mu\tau_\Lambda$ d'un $\mathcal{D}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$, analogue de la classe τ d'un faisceau cohérent [B-F-M79] : si $\Lambda \subset T^*X$ désigne la variété caractéristique de $\mathcal{M}$, $\mathrm{Td}(X)$ la classe de Todd du fibré tangent de X remonté à T^*X et ch_Λ un caractère de Chern, pris dans la cohomologie à support $H^\bullet_\Lambda(T^*X)$, qui est soit la cohomologie à coefficients dans $\mathbf{Q}$, soit la cohomologie de Hodge, on a

$$\mu\tau_\Lambda(\mathcal{M}) \;=\; \mathrm{ch}_\Lambda(\mathcal{M}) \smile \mathrm{Td}(X) \in H^\bullet_\Lambda(T^*X).$$

Ceci est déja remarqué par Laumon [Lau83] lorsque $\Lambda = T^*X$, *i.e.* lorsqu'on oublie les supports.

Le *théorème d'indice* de Boutet de Monvel et Malgrange [B-M90] reprend la formulation de [B-F-M79] pour les $\mathcal{D}$-modules : on explicite un morphisme $\gamma : K_\Lambda(\mathcal{D}_X) \to K_\Lambda^{\mathrm{top}}(T^*X)$ et on montre qu'il commute à l'image directe propre. Mieux, lorsque U est un ouvert relativement compact de X, de bord $\overline{U} - U$ analytique réel et *non caractéristique relativement à* Λ, on peut aussi définir $\gamma : K_\Lambda(\mathcal{D}_{X|\overline{U}}) \to K_\Lambda^{\mathrm{top}}(T^*X_{|\overline{U}})$, et celui-ci commute à l'image directe par une application analytique f, sur la partie f-elliptique de $K_\Lambda(\mathcal{D}_{X|\overline{U}})$.

On peut voir $\mu\tau_\Lambda^i(\mathcal{M}) \in H_\Lambda^{2i}(T^*X, \mathbf{Q})$ comme une classe d'homologie (de Borel-Moore) de Λ, de dimension $2(2\dim X - i)$. Schapira et Schneiders [Sch-Sch94] conjecturent que, de même que l'on a $\dim \Lambda \geq \dim X$ à cause de l'involutivité de Λ ([S-K-K73], voir aussi l'exposé n° 522 [Ma78]), la classe $\mu\tau_\Lambda(\mathcal{M})$ vérifie l'*inégalité de Bernstein*

$$\mu\tau_\Lambda^i(\mathcal{M}) \neq 0 \implies 2\dim X - i \geq \dim X.$$

Ils conjecturent aussi que la classe de dimension supposée minimale $\mu\tau_\Lambda^{\dim X}(\mathcal{M})$ coïncide avec la *classe d'Euler microlocale* $\mu\mathrm{eu}(\mathcal{M})$ qu'ils associent à la paire elliptique formée du $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ et du faisceau constant $\mathbf{C}_X$ en "microlocalisant" la construction analogue pour les faisceaux $\mathcal{O}$-cohérents ([O-T-T81, O-T-T81b] par exemple). La formule de type GRR qu'ils démontrent pour la classe $\mu\mathrm{eu}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ associée à une paire $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ f-elliptique généraliserait ainsi celle déduite du théorème d'indice de [B-M90].

Dans le cas des $\mathcal{D}$-modules holonomes, le théorème d'indice est essentiellement équivalent au théorème de MacPherson sur les classes de Chern des variétés singulières [MP74], d'après [B-D-K81]. Un tel module peut être considéré comme un fibré avec connexion plate singulière. Malgrange propose de lui associer des classes caractéristiques *secondaires* microlocales

$$c_k'(\mathcal{M}) \in H_\Lambda^{2\dim X + 2k - 1}(T^*X, \mathbf{C}/\mathbf{Z}).$$

Il réussit à construire la classe c_1', à coefficients dans $\mathbf{C}/(\frac{1}{2}\mathbf{Z})$ cependant. Quant au comportement par image directe, analogue au théorème de Bismut-Lott [B-L95], la question est ouverte.

Je remercie L. Boutet de Monvel, B. Malgrange, P. Schapira et J.-P. Schneiders pour les échanges que nous avons eus à propos de ce texte.

1. Image directe de $\mathcal{D}$-modules

1.1. $\mathcal{D}$-modules, variété caractéristique, image directe

Dans la suite, X désignera une variété analytique complexe de dimension d, $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X et $\mathcal{D}_X$ celui des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathcal{O}_X$ (voir par exemple [Ka70, Bj79, Ph79, Scha85, Me87, G-M90, Schn94b]). Par *$\mathcal{D}_X$-module* nous entendrons un *$\mathcal{D}_X$-module à droite*. Si le contexte est clair, celui-ci est aussi supposé cohérent.

1.1.1. Exemples.

1. Le faisceau Ω_X^d localement $\mathcal{O}$-libre de rang 1 des formes holomorphes de degré maximum sur X, sur lequel les champs de vecteurs opèrent à droite par dérivée de Lie : $\omega \cdot \xi \overset{\text{déf}}{=} -\mathcal{L}_\xi(\omega)$, et cette action s'étend en une action à droite de $\mathcal{D}$ par

composition. Ce $\mathcal{D}$-module est noté Ω_X. Il donne l'équivalence entre les catégories de $\mathcal{D}$-modules à gauche et $\mathcal{D}$-modules à droite (voir *loc. cit.*) :

$$\begin{array}{llll} \mathcal{M} & \text{(à droite)} & \longleftrightarrow & \mathcal{N} \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{M}) \quad \text{(à gauche)} \\ \mathcal{N} & \text{(à gauche)} & \longleftrightarrow & \mathcal{M} \overset{\text{déf}}{=} \Omega_X \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{N} \quad \text{(à droite).} \end{array}$$

2. Plus généralement, si $\mathcal{L}$ est un faisceau $\mathcal{O}$-localement libre de rang fini sur X, la donnée d'une connexion *plate* $\nabla : \mathcal{L} \to \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}$ le munit d'une structure de $\mathcal{D}_X$-module à gauche, et $\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{L}$ est un $\mathcal{D}$-module à droite.

3. Pour tout faisceau $\mathcal{O}_X$-cohérent $\mathcal{F}$, le *$\mathcal{D}$-module induit* associé $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X$ hérite de la structure de $\mathcal{D}$-module à droite sur $\mathcal{D}$.

4. Soit $\mathcal{F}$ un sous-faisceau $\mathcal{O}_X$-cohérent du faisceau Θ_X des champs de vecteurs holomorphes sur X. Il engendre un idéal à gauche $\mathcal{D}_X\mathcal{F}$ de $\mathcal{D}_X$. Lorsque $\mathcal{F}$ est *intégrable*, c'est-à-dire stable par le crochet des champs de vecteurs, le faisceau $\mathcal{F}$ définit un *feuilletage singulier* de faisceau normal $\Theta_{\mathcal{F}} \overset{\text{déf}}{=} \Theta_X/\mathcal{F}$ et un $\mathcal{D}_X$-module à gauche $\mathcal{D}_{\mathcal{F}} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X\mathcal{F}$. De ce point de vue, on s'intéresse au système linéaire d'équations aux dérivées partielles défini par les champs de vecteurs de $\mathcal{F}$.

5. Une matrice A d'opérateurs différentiels définit, par multiplication à gauche, une application $\mathcal{D}_X$-linéaire à droite $\mathcal{D}_X^q \to \mathcal{D}_X^p$, dont le noyau et le conoyau sont des $\mathcal{D}_X$-modules à droite cohérents.

1.1.2. Variété caractéristique. — Localement sur X, le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}$ peut être engendré sur $\mathcal{D}$ par un $\mathcal{O}$-module cohérent $\mathcal{F}$. Les $\mathcal{O}$-sous-modules $\mathcal{F} \cdot \mathcal{D}(k)$, où $\mathcal{D}(k)$ est le faisceau des opérateurs d'ordre $\leq k$, forment une *bonne filtration* de $\mathcal{M}$. Le gradué de cette filtration est un module gradué (sur l'ouvert considéré) sur l'anneau gradué $\operatorname{gr}\mathcal{D}$ identifié à l'anneau des fonctions sur l'espace cotangent T^*X qui sont polynomiales dans les fibres de la projection $\pi : T^*X \to X$. Nous notons $\mathcal{O}_X[TX]$ cet anneau lorsque nous en oublions la graduation.

Le support de ce module ne dépend pas de la bonne filtration choisie et les supports locaux se recollent en un sous-ensemble analytique $\operatorname{Car}\mathcal{M}$ de T^*X, algébrique relativement à π, homogène relativement à l'action de $\mathbf{C}^*$ dans les fibres de π : c'est la *variété caractéristique* de $\mathcal{M}$. Cette variété est involutive pour la structure symplectique usuelle de T^*X ([S-K-K73], voir aussi [Ma78, Ga81, G-M90]). Lorsqu'elle est lagrangienne, $\mathcal{M}$ est dit *holonome*.

La variété caractéristique d'un complexe borné de $\mathcal{D}_X$-modules à cohomologie $\mathcal{D}_X$-cohérente est par définition la réunion de celles de ses modules de cohomologie.

La variété caractéristique d'un fibré plat est réduite à la section nulle T^*_XX et celle d'un $\mathcal{D}$-module induit est la restriction au support du $\mathcal{O}$-module de l'espace cotangent T^*X. Pour un feuilletage non singulier $\mathcal{F}$, la variété $\operatorname{Car}\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ est le fibré conormal aux feuilles. Si au voisinage d'un point singulier x de $\Theta_{\mathcal{F}}$ il existe un système de générateurs de $\mathcal{F}_x$ dont les symboles dans $\operatorname{gr}_1 \mathcal{D}_{X,x}$ forment une suite régulière dans l'anneau $\operatorname{gr}\mathcal{D}_{X,x}$, on peut montrer [Su90] qu'au voisinage de ce point $\operatorname{Car}\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ est la sous-variétée de T^*X définie par les symboles des sections locales de $\mathcal{F}$ (donc est une intersection complète définie par des équations linéaires dans la variable cotangente).

1.1.3. Complexe de de Rham et image directe. — Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés analytiques. Le *module de transfert* $\mathcal{D}_{X\to Y} \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y$ est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{D}_X$-module à gauche et de $f^{-1}\mathcal{D}_Y$-module à droite. Il fait passer d'un $\mathcal{D}_X$-module à un $f^{-1}\mathcal{D}_Y$-module par $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}$. Plus généralement il permet de définir un foncteur $D^b(\mathcal{D}_X) \to D^b(f^{-1}\mathcal{D}_Y)$ (catégories dérivées des complexes bornés de $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_Y$-modules) par $\mathcal{M}^\bullet \mapsto \mathcal{M}^\bullet \otimes^{\boldsymbol{L}}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}$.

Lorsque la variété Y est réduite à un point, on a $\mathcal{D}_{X\to \mathrm{pt}} = \mathcal{O}_X$ et $\mathcal{M} \otimes^{\boldsymbol{L}}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{O}_X$ est le *complexe de de Rham* $\mathrm{DR}(\mathcal{M})$. Dans ce cas, la cohomologie de $f_+\mathcal{M}$ (*resp.* $f_\dagger\mathcal{M}$) est l'hypercohomologie (*resp.* à support compact) de ce complexe de de Rham.

Exemples. — On a $\mathcal{D}_X \otimes^{\boldsymbol{L}}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X$ et, plus généralement, le complexe de de Rham d'un $\mathcal{D}_X$-module induit $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X$ est égal au faisceau cohérent $\mathcal{F}$ qui lui donne naissance. Par ailleurs, $\mathrm{DR}(\Omega_X)$ est le faisceau constant sur X placé en degré $-\dim X$ et noté $\mathbf{C}_X[\dim X]$, et pour tout fibré plat $(\mathcal{L}, \nabla)$, on a $\mathrm{DR}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}[\dim X]$, où $\mathcal{L}$ est le faisceau localement constant des sections horizontales de $\mathcal{L}$. Enfin, lorsque $\mathcal{M}$ est holonome, un théorème de Kashiwara affirme que $\mathrm{DR}(\mathcal{M})$ est à cohomologie $\mathbf{C}$-constructible (*cf.* § 1.2).

Les *images directes* f_+ et $f_\dagger$ sont les foncteurs de $D^b(\mathcal{D}_X)$ dans $D^b(\mathcal{D}_Y)$ obtenus en composant le foncteur de transfert précédent avec l'image directe $\boldsymbol{R}f_*$, *resp.* $\boldsymbol{R}f_!$ (support f-propre), au sens de la catégorie des faisceaux.

Pour un $\mathcal{D}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$, l'image directe $f_+\mathcal{M}$ est à cohomologie $\mathcal{D}_Y$-cohérente lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) f est propre sur le support de $\mathcal{M}$ (donc $f_+\mathcal{M} = f_\dagger\mathcal{M}$),

(2) au voisinage de toute fibre $f^{-1}(y)$ il existe un faisceau $\mathcal{O}$-cohérent dans $\mathcal{M}$ qui engendre $\mathcal{M}$ comme $\mathcal{D}_X$-module.

La démonstration ([Ka76], voir aussi [Ma90]) utilise le théorème de cohérence de Grauert. La deuxième propriété est satisfaite de manière évidente pour les $\mathcal{D}$-modules induits, mais de manière beaucoup moins évidente pour les modules holonomes : le cas des fibrés méromorphes à connexion régulière est obtenu par l'*extension de Deligne* [Del70] et le cas irrégulier dans [Ma95] ; le cas des modules holonomes est ramené au cas des fibrés méromorphes par microlocalisation ([K-K81] pour le cas régulier et [Ma94] en général).

Le même résultat vaut pour un objet $\mathcal{M}^\bullet$ de $D^b(\mathcal{D}_X)$ dont les modules de cohomologie satisfont les propriétés ci-dessus. Enfin, l'image directe propre commute à la dualité, ce qui généralise la dualité de Serre (voir [Schn86, Me87, Sa89]).

Comportement de la variété caractéristique. — Il est connu sous le nom d'estimation de Kashiwara et utilise le "diagramme japonais"

$$T^*X \xleftarrow{\;{}^tf'\;} X \times_Y T^*Y \xrightarrow{\;f_\pi\;} T^*Y$$

où ${}^tf'$ est l'application cotangente à f et f_π l'application induite par f. Il sera commode de noter, pour $\Lambda \subset T^*X$, $f_+(\Lambda) = f_\pi\left({}^tf'^{-1}\Lambda\right)$.

(1.1.4) THÉORÈME ([Ka76]). — *Pour un $\mathcal{D}_X$-module cohérent satisfaisant les propriétés* (1) *et* (2) *ci-dessus, on a* $\operatorname{Car}(f_+\mathcal{M}) \subset f_\pi\left({}^tf'^{-1}\operatorname{Car}\mathcal{M}\right) = f_+(\operatorname{Car}\mathcal{M})$. □

On peut aussi remplacer $\mathcal{M}$ par un complexe borné $\mathcal{M}^\bullet$ et faire l'hypothèse sur ses modules de cohomologie.

Il se peut qu'il n'y ait pas égalité; pire, l'ensemble $f_\pi\left({}^tf'^{-1}\operatorname{Car}\mathcal{M}\right)$ peut contenir des composantes irréductibles qui ne sont pas involutives. Lorsque $\mathcal{M}$ est holonome, les composantes non lagrangiennes de cet ensemble sont isotropes et on peut les oublier dans l'estimation ci-dessus.

1.2. Paires elliptiques

La cohérence des images directes persiste lorsqu'on restreint f à un ensemble sous-analytique réel de X, moyennant une condition d'ellipticité de $\mathcal{M}$ par rapport à ce sous-ensemble, condition qui s'exprime en termes de la variété caractéristique de $\mathcal{M}$ et du *microsupport* du sous-ensemble (plus exactement du faisceau constant sur ce sous-ensemble). Le comportement de la variété caractéristique se décrit aussi en ces termes.

Microsupport d'un faisceau. — Si $\mathcal{F}$ est un faisceau $\mathbf{C}$-*constructible* sur X (*i.e.* localement constant de rang fini sur les strates d'une stratification de Whitney analytique complexe de X) on sait ([Ka84, Me84]) qu'il existe un complexe borné $\mathcal{M}^\bullet$ de $\mathcal{D}_X$-modules à cohomologie holonome tel que le complexe de de Rham $\operatorname{DR}(\mathcal{M}^\bullet)$ ait pour seul faisceau de cohomologie un faisceau isomorphe à $\mathcal{F}$. Il est alors naturel d'appeler variété caractéristique de $\mathcal{F}$, ou *microsupport*, l'ensemble $\operatorname{Car}\mathcal{M}^\bullet$. C'est un ensemble lagrangien $\mathbf{C}^*$-homogène dans T^*X. Grâce à [B-D-K81], il peut être défini à l'aide de la fonction $x \mapsto \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{F}_x$ et de l'obstruction d'Euler locale de MacPherson [MP74].

On peut en fait définir *pour tout faisceau* $\mathcal{F}$ sur X (ou tout complexe borné de faisceaux) un *microsupport* $\mu\operatorname{Supp}\mathcal{F}$ dans T^*X par une procédure homologique à la Morse :

(1.2.1) DÉFINITION ([K-S82, K-S90]). — *Un point* $(x^o, \xi^o) \in T^*X$ *n'est pas dans le microsupport* $\mu\mathrm{Supp}(\mathcal{F})$ *si pour toute fonction* ψ *de classe* C^1 *définie au voisinage de* x^o *telle que* $d\psi(x^0)$ *soit proche de* (x^o, ξ^o) *et tout* x *assez voisin de* x^o, *les groupes de cohomologie à support* $\mathcal{H}^i_{\{\psi \geq \psi(x)\}}(\mathcal{F})_x$ *sont tous nuls.*

Autrement dit, au niveau des germes, la cohomologie à coefficients dans $\mathcal{F}$ d'un voisinage de x est la même que celle de l'ensemble $\{\psi < \psi(x)\}$ dans ce voisinage.

Le lien, indiqué ci-dessus dans le cas holonome, avec les variétés caractéristiques de $\mathcal{D}$-modules est général :

(1.2.2) THÉORÈME ([K-S82], [K-S90, 11.3.3]). — *Si* $\mathcal{M}$ *est un* $\mathcal{D}_X$*-module cohérent (ou un complexe borné à cohomologie* $\mathcal{D}_X$*-cohérente), on a* $\mathrm{Car}\,\mathcal{M} = \mu\mathrm{Supp}(\mathrm{DR}(\mathcal{M}))$. □

Remarque. — Il peut être plus suggestif de considérer le *complexe des solutions holomorphes* $\mathrm{Sol}(\mathcal{M}^\bullet) \overset{\text{déf}}{=} \boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^\bullet, \Omega_X)$ *de* $\mathcal{M}$ *à valeurs dans* Ω_X, dont les faisceaux de cohomologie sont les $\mathcal{E}xt^\bullet_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \Omega_X)$. On a aussi l'égalité $\mathrm{Car}\,\mathcal{M} = \mu\mathrm{Supp}\,\mathrm{Sol}(\mathcal{M})$.

La notion de miscrosupport ne dépend que de la structure de variété réelle sous-jacente à X. Un des beaux résultats de la théorie microlocale des faisceaux est la caractérisation des faisceaux ou complexes $\mathbf{R}$-*constructibles* (*i.e.* la cohomologie est localement constante et de rang fini sur les strates d'une stratification de Whitney *sous-analytique réelle* de X) et $\mathbf{C}$-constructibles :

(1.2.3) THÉORÈME ([K-S90, 8.4.2 et 8.5.5]).

1. *Un complexe borné* $\mathcal{F}^\bullet$ *dont les faisceaux de cohomologie sont ponctuellement de dimension finie sur* $\mathbf{C}$ *est* $\mathbf{R}$*-constructible si et seulement si son microsupport est (contenu dans) un ensemble sous-analytique lagrangien* $\mathbf{R}^*_+$*-homogène de* T^*X.
2. *Un complexe borné* $\mathbf{R}$*-constructible est* $\mathbf{C}$*-constructible si et seulement si son microsupport est* $\mathbf{C}^*$*-homogène.* □

Paires elliptiques et relativement elliptiques [Sch-Sch90]. — La donnée d'un $\mathcal{D}_X$-module cohérent (ou d'un complexe borné à cohomologie $\mathcal{D}_X$-cohérente) et d'un complexe $\mathbf{R}$-constructible $\mathcal{F}^\bullet$ forme une *paire elliptique* si les sous-ensembles $\mathrm{Car}\,\mathcal{M}$ et $\mu\mathrm{Supp}\,\mathcal{F}^\bullet$ de T^*X ne se coupent pas hors de la section nulle T^*_XX.

Plus généralement, si $f : X \to Y$ est une application $\mathbf{C}$-analytique, on associe à $\mathcal{M}$ une *variété caractéristique relative* $\mathrm{Car}_f\,\mathcal{M} \subset T^*X$, et la paire formée de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{F}^\bullet$ est dite *f-elliptique* si $\mathrm{Car}_f\,\mathcal{M}$ et $\mu\mathrm{Supp}\,\mathcal{F}^\bullet$ ne se coupent pas hors de la section nulle. L'ellipticité correspond au cas où Y est réduite à un point.

La variété $\mathrm{Car}_f\,\mathcal{M}$ contient la variété $\mathrm{Car}\,\mathcal{M}$ et vérifie de plus

$$\mathrm{Car}_f\,\mathcal{M} \;=\; \mathrm{Car}_f\,\mathcal{M} + {}^t f'(X \times_Y T^*Y).$$

Lorsque f est une submersion par exemple, on dispose du faisceau $\mathcal{D}_{X/Y}$ des opérateurs différentiels dans les fibres de f ; on choisit localement un sous-$\mathcal{D}_{X/Y}$-module cohérent $\mathcal{M}_0$ de $\mathcal{M}$ vérifiant $\mathcal{M}_0 \cdot \mathcal{D}_X = \mathcal{M}$; la variété caractéristique du $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}_0 \otimes_{\mathcal{D}_{X/Y}} \mathcal{D}_X$ ne dépend pas du choix d'un tel $\mathcal{M}_0$, donc est bien définie globalement : c'est $\operatorname{Car}_f \mathcal{M}$. Le $\mathcal{D}_{X/Y}$-module $\mathcal{M}_0$ a une variété caractéristique $\operatorname{Car}_{X/Y} \mathcal{M}_0$ dans le fibré cotangent relatif $T^*(X/Y)$ (définie à l'aide d'une bonne filtration). La variété $\operatorname{Car}_f \mathcal{M}$ est aussi l'image inverse de $\operatorname{Car}_{X/Y} \mathcal{M}_0$ par l'application $T^*X \to T^*(X/Y)$.

Remarque. — La variété $\operatorname{Car}_f \mathcal{M}$ n'est pas déterminée par la seule donnée de $\operatorname{Car} \mathcal{M}$ en général. C'est cependant le cas lorsque $\mathcal{M}$ est holonome *régulier* : si $\overline{T^*_{X_\alpha} X}$ sont les composantes irréductibles de $\operatorname{Car} \mathcal{M}$, où les X_α sont des sous-variétés analytiques localement fermées de X, la variété $\operatorname{Car}_{X/Y} \mathcal{M}_0$ (en supposant f submersive) est réunion des adhérences des fibré conormaux aux fibres de f restreinte à certaines des X_α. Ceci permet d'obtenir par exemple, à l'aide du théorème 1.2.4 ci-dessous la cohérence de systèmes de Gauss-Manin locaux. Lorsque $\mathcal{M}$ est holonome mais pas régulier, la variété caractéristique relative peut contenir d'autres composantes que celles décrites ci-dessus et les systèmes de Gauss-Manin locaux peuvent n'être plus cohérents, même lorsque $\dim Y = 1$.

Quelques exemples.

(a) La paire formée d'un complexe borné $\mathcal{M}^\bullet$ à cohomologie $\mathcal{D}_X$-cohérente et du faisceau constant $\mathbf{C}_X$ est f-elliptique.

(b) La paire formée de $\mathcal{O}_X$ et d'un complexe $\mathbf{R}$-constructible $\mathcal{F}^\bullet$ est f-elliptique.

(c) Soit M une variété analytique réelle et $\mathcal{E}^\bullet_M$ un complexe borné dont les termes sont des fibrés analytiques réels et les opérateurs de bord $D_i : \mathcal{E}^i_M \to \mathcal{E}^{i+1}_M$ sont des opérateurs différentiels. On prend pour X la variété complexifiée de M et on considère le complexifié $\mathcal{E}^\bullet_X$ du complexe $\mathcal{E}^\bullet_M$, dont les termes sont des fibrés holomorphes sur X et les bords des opérateurs différentiels holomorphes. On peut alors construire un complexe $\mathcal{M}^\bullet$ de $\mathcal{D}_X$-modules à droite, avec $\mathcal{M}^i = \mathcal{E}^i_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X$ de sorte que $\mathcal{E}^\bullet_X$ s'identifie au complexe $\operatorname{DR}(\mathcal{M}^\bullet) = \mathcal{M}^\bullet \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{O}_X$ et que le symbole du complexe $\mathcal{E}^\bullet_X$ soit le complexe gradué (pour une bonne filtration convenable) du complexe $\mathcal{M}^\bullet$. Ainsi son support contient $\operatorname{Car} \mathcal{M}^\bullet$.

Dans ces conditions, si le complexe $\mathcal{E}^\bullet_M$ est elliptique (au sens de [A-S68, § 7]), la paire formée de $\mathcal{M}^\bullet$ et du faisceau $\mathbf{C}_M$, constant sur M et nul hors de M, est elliptique. Ici, le microsupport $\mu\mathrm{Supp}\, \mathbf{C}_M$ est le fibré conormal $T^*_M X$.

(d) Soit U un ouvert de X dont la frontière $\partial U = \overline{U} - U$ est une hypersurface de classe C^1. Alors $\mu\mathrm{Supp}\, \mathbf{C}_{\overline{U}}$ est la réunion de la section nulle $\overline{U}$ et de $\{\lambda d\varphi(x) \mid \lambda > 0,\ \varphi(x) = 0\}$, partie "rentrante" du fibré conormal $T^*_{\partial U} X$, si $\overline{U}$ est défini par $\varphi \geq 0$ au voisinage de ∂U. La notion de paire elliptique, telle qu'elle est définie, ne rend pas compte des complexes elliptiques sur les variétés à bord tels qu'ils sont définis dans [A-B64, At65]. Néanmoins il devrait être possible d'adapter la définition et le théorème ci-dessous à cette situation. Noter que si $\partial U \neq \varnothing$, la paire $(\mathcal{M}, \mathbf{C}_U)$ n'est pas elliptique lorsque $\mathcal{M}$ provient d'un faisceau $\mathcal{O}$-cohérent dont le support contient $\overline{U}$.

Image directe et comportement de la variété caractéristique. — Soit $f : X \to Y$ une application analytique et $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ une paire f-elliptique. On suppose toujours la propriété (2) du § 1.1.3 satisfaite. On peut définir l'image directe de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{M}$ par

$$f_+(\mathcal{F} \otimes \mathcal{M}) \;=\; \boldsymbol{R}f_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{M} \overset{\boldsymbol{L}}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} \mathcal{D}_{X\to Y})$$

et de même pour $f_\dagger$ en remplaçant $\boldsymbol{R}f_*$ par $\boldsymbol{R}f_!$. Les faisceaux de cohomologie de $f_+(\mathcal{F} \otimes \mathcal{M})$ sont des $\mathcal{D}_Y$-modules.

(1.2.4) THÉORÈME ([Sch-Sch90]). — *Si f est propre sur* $\operatorname{Supp}\mathcal{F} \cap \operatorname{Supp}\mathcal{M}$, *l'image directe $f_+(\mathcal{F} \otimes \mathcal{M})$ est à cohomologie $\mathcal{D}_Y$-cohérente et l'on a*

$$\operatorname{Car} f_+(\mathcal{F} \otimes \mathcal{M}) \;\subset\; f_{+|\operatorname{Supp}\mathcal{F}}(\operatorname{Car}\mathcal{M}).$$

Dans l'exemple (c) on a $\operatorname{Supp}\mathbf{C}_M \cap \operatorname{Supp}\mathcal{M}^\bullet \subset M$. Si M est compacte et f est l'application constante, $f_+(\mathbf{C}_M \otimes \mathcal{M}^\bullet)$ a pour cohomologie celle de $\Gamma(M, \mathcal{E}_M^\bullet)$ et la caractéristique d'Euler est égale à celle du complexe elliptique $\mathcal{E}_M^\bullet$.

Ce théorème de cohérence généralise celui de [H-S84]. La démonstration élégante qu'en donnent Schapira et Schneiders utilise deux résultats : d'une part une résolution, introduite par Kashiwara [Ka84], du faisceau constructible $\mathcal{F}$ (par exemple le faisceau constant) par des faisceaux sommes directes localement finies de faisceaux constants $\mathbf{C}_W$, où W est un ensemble ouvert sous-analytique relativement compact dans X dont le comportement au bord $\overline{W} - W$ est assez régulier ; on impose de plus que les différentielles du complexe soient induites par des combinaisons linéaires d'applications $\mathbf{C}_W \to \mathbf{C}_{W'}$ pour $W \subset W'$; d'autre part une version des théorèmes de finitude pour la cohomologie de complexes de modules de Fréchet sur une algèbre de Fréchet [Schn94]. □

2. Riemann-Roch pour les faisceaux $\mathcal{O}$-cohérents, application aux $\mathcal{D}$-modules

Le théorème GRR pour les $\mathcal{D}$-modules est conséquence de celui pour les faisceaux $\mathcal{O}$-cohérents, ainsi que l'a remarqué Laumon [Lau83]. Lorsque $f : X \to Y$ est un morphisme propre de variétés analytiques complexes et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module bien filtré, on compare l'effet de l'image directe f_+ sur $\mathcal{M}$ et sur son gradué, qui est un $\mathcal{O}_X[TX]$-module cohérent. Malgrange a montré [Ma85], en précisant [Lau83] en ce qui concerne les supports, que $f_+\mathcal{M}$ et $f_+ \operatorname{gr}\mathcal{M} \overset{\text{déf}}{=} \boldsymbol{R}f_{\pi*}\boldsymbol{L}{}^tf'^* \operatorname{gr}\mathcal{M}$ ont même classe dans la K-théorie analytique à support dans $f_+(\operatorname{Car}\mathcal{M})$. Le théorème GRR pour $\operatorname{gr}\mathcal{M}$ (au niveau K-théorique ou cohomologique) impliquera donc GRR pour $\mathcal{M}$.

Nous rappelons dans cette section les formes du théorème GRR en géométrie analytique complexe pour les faisceaux $\mathcal{O}$-cohérents et détaillons l'application aux $\mathcal{D}$-modules.

La version algébrique de GRR K-théorique est celle donnée dans [B-F-M79]. La version analytique [Le87] est beaucoup plus technique et n'est parue que plusieurs années après. Dans le cas où l'espace analytique est plongé dans une variété analytique complexe, celle-ci est aussi un cas particulier du théorème 3.1.1.

La version en cohomologie de Hodge a été montrée dans [O-T-T81, O-T-T81b] sous la forme HRR (H pour Hirzebruch, $Y = \mathrm{pt}$) ; la construction des traces et des classes d'Atiyah faite par Illusie [Il71] y est reprise au niveau de complexes de Čech. Le point important est l'identification de la classe d'Euler d'un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ avec la classe de degré $\dim X$ de $\tau(\mathcal{F})$. Puis la version GRR avec des techniques analogues est annoncée dans [O-T-T81c] et publiée dans [O-T-T85].

2.1. Riemann-Roch K-théorique

Lorsque Z est un compact dans un espace métrique X, ou bien un ensemble fermé homotope à un compact, le groupe $K_Z^{\mathrm{top}}(X)$ des classes d'homotopie stable de morphismes de fibrés vectoriels complexes de rang fini sur X qui sont des isomorphismes hors de Z possède les propriétés usuelles de fonctorialité de la K-homologie : image inverse f^* par une application continue f, isomorphisme de Bott $K_Z^{\mathrm{top}}(X) \xrightarrow{\sim} K_Z^{\mathrm{top}}(N)$ si N est un fibré vectoriel (complexe ou avec structure spin^c) sur X, et image directe f_* par une application $f : X \to Y$ de classe C^1 entre variétés, propre sur Z (voir [B-M90] pour cette présentation, voir aussi [B-D82]).

Lorsque Z est un sous-espace analytique compact d'une variété analytique X, on désigne par $K_Z(\mathcal{O}_X)$ le groupe de Grothendieck des faisceaux cohérents de $\mathcal{O}_X$-modules à support dans Z ; on définit un morphisme $\alpha : K_Z(\mathcal{O}_X) \to K_Z^{\mathrm{top}}(X)$: la démarche d'Atiyah et Hirzebruch [A-H62], utilise le fait que le compact, vu comme espace réel, est de Stein ; la méthode de Levy [Le87] consiste à associer à tout faisceau cohérent sur un voisinage de Z un complexe de Fredholm obtenu à l'aide d'un recouvrement de Z par des ouverts de Stein.

(2.1.1) THÉORÈME ([Le87], [B-M90]). — *Si $f : X \to Y$ est une application analytique entre variétés analytiques complexes, et si Z est un sous-ensemble analytique compact, le morphisme α commute à f_*.* □

Remarques.

(1) Soit Λ un sous-ensemble analytique fermé conique de T^*X de base $Z = \Lambda \cap T_X^*X$ compacte et notons $\mathcal{O}_X[TX]$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X à coefficients polynomiaux dans les fibres de $T^*X \to X$. On peut, par le même procédé, définir des morphismes $\alpha : K_\Lambda(\mathcal{O}_X[TX]) \to K_\Lambda^{\mathrm{top}}(T^*X)$ et $\alpha : K_{{}^tf'^{-1}(\Lambda)}(\mathcal{O}_X[TY]) \to K_{{}^tf'^{-1}(\Lambda)}^{\mathrm{top}}(X \times_Y T^*Y)$. La méthode de Levy permet de montrer la commutation de α avec $f_{\pi *}$, puisqu'on peut recouvrir Z par un nombre fini de cartes sur lesquelles le fibré $X \times_Y T^*Y$ est trivial.

(2) Il faut aussi noter que Levy ne suppose pas l'existence d'un plongement $Z \subset X$ et construit un plongement presque complexe qui lui suffit.

Iversen [Iv76] a construit un *caractère de Chern local* $\mathrm{ch}_Z : K_Z^{\mathrm{top}}(X) \to H_Z^{2\bullet}(X, \mathbf{Q})$. Par des arguments classiques (voir [A-H62, thm 4.1]) on déduit GRR en géométrie analytique complexe. En posant $\tau_Z(\mathcal{F}) = \mathrm{ch}_Z(\alpha(\mathcal{F})) \smile \mathrm{Td}(X)$ pour un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X à support dans Z on obtient (voir aussi [T-T86] pour une autre approche) :

(2.1.2) COROLLAIRE. — *Dans les conditions du théorème* 2.1.1, *la classe τ commute à l'image directe f_*.* □

2.2. Riemann-Roch en cohomologie de Hodge à support

Dans [O-T-T85] est démontré le théorème GRR lorsque les classes considérées sont à valeurs dans la cohomologie de Hodge.

Les classes caractéristiques d'un fibré holomorphe sur une variété analytique X existent dans la *cohomologie de Hodge* $\oplus_p H^p(X, \Omega_X^p)$ (en utilisant la théorie de Chern-Weil par exemple). On dispose donc d'une classe de Todd $\mathrm{Td}(X)$. De plus, pour un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ à support dans un sous-ensemble analytique fermé Z, la *classe d'Atiyah* $\lambda_{\mathcal{F}}^1 \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F} \otimes \Omega_X^1)$ est l'opposée de la classe de l'*extension des parties principales.* La classe $\lambda_{\mathcal{F}}^j \in \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F} \otimes \Omega_X^j)$ est obtenue en composant j fois la classe $\lambda_{\mathcal{F}}^1$ avec elle-même. En utilisant la *trace*

$$\mathrm{tr}_Z : \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F} \otimes \Omega_X^j) \longrightarrow H_Z^j(X, \Omega_X^j)$$

on définit le *caractère de Chern local*

$$\mathrm{ch}_Z(\mathcal{F}) = \bigoplus_j \mathrm{ch}_Z^j(\mathcal{F}) = \bigoplus_j \mathrm{tr}_Z\left(\frac{\lambda_{\mathcal{F}}^j}{j!}\right) \in \bigoplus_j H_Z^j(X, \Omega_X^j)$$

et une classe $\tau_Z(\mathcal{F}) = \mathrm{ch}_Z(\mathcal{F}) \smile \mathrm{Td}(X)$. Lorsque $\mathcal{F}$ est $\mathcal{O}_X$-localement libre, on retrouve le caractère de Chern donné par Chern-Weil.

En cohomologie de Hodge à support on dispose, pour $f : X \to Y$ analytique, de

$$\begin{aligned} f^* : H_{Z'}^p(Y, \Omega_Y^p) &\longrightarrow H_{f^{-1}(Z')}^p(X, \Omega_X^p) \\ f_* : H_Z^p(X, \Omega_X^p) &\longrightarrow H_{f(Z)}^{p-d_f}(Y, \Omega_Y^{p-d_f}) \end{aligned}$$

avec $d_f = \dim X - \dim Y$, si dans ce dernier cas f est propre sur Z. L'homomorphisme f^* est obtenu en composant $H_{Z'}^p(Y, \Omega_Y^p) \to H_{f^{-1}(Z')}^p(X, f^{-1}\Omega_Y^p)$ avec celui déduit de $f^{-1}\Omega_Y^p \to \Omega_X^p$ qui provient lui-même de l'application cotangente à f. L'homomorphisme f_* s'obtient en réalisant une classe de $H_Z^p(X, \Omega_X^p)$ par un courant $\overline{\partial}$-fermé à support dans Z et en utilisant l'image directe des courants.

(2.2.1) THÉORÈME ([O-T-T81c, O-T-T85]). — *Pour un faiscceau $\mathcal{F}$ cohérent sur X à support dans Z et $f : X \to Y$ une application analytique propre sur Z, on a l'égalité dans $\oplus_p H^p_{f(Z)}(Y, \Omega^p_Y)$*

$$f_*(\tau_Z(\mathcal{F})) = \tau_{f(Z)}(\boldsymbol{R}f_*\mathcal{F}).$$

La démonstration se fait en deux temps : on montre d'abord que le cup produit de $\mathrm{ch}_Z(\mathcal{F})$ avec une certaine classe se comporte bien par image directe, puis on identifie cette classe à la classe de Todd, en utilisant notamment le principe de scindage. Dans [O-T-T85], tout est fait en utilisant des complexes très explicites pour calculer les traces et l'image directe. Les calculs sur les classes d'Atiyah dans [A-LJ89] permettent aussi de traiter la première partie de la preuve (dans des notes manuscrites non publiées, Kashiwara propose une version locale et fonctorielle pour cette première étape). □

2.3. Classe d'Euler

Pour $\mathcal{F}$ comme ci-dessus et $d = \dim X$, on dispose d'un morphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^d_Z(X, \Omega^d_X) \tag{2.3.1}$$

dont nous allons rappeler la construction, puisque nous aurons à en considérer une version microlocale pour les $\mathcal{D}$-modules au § 3.2. La *classe d'Euler* $\mathrm{eu}(\mathcal{F})$ est alors l'image de l'identité par ce morphisme. On peut montrer que la classe d'Euler commute à l'image directe (c'est ce point qui est étendu dans [Sch-Sch91] pour la classe d'Euler microlocale). En utilisant des complexes explicites, on identifie la classe d'Euler :

(2.3.2) THÉORÈME ([O-T-T81b]). — *La classe d'Euler* $\mathrm{eu}(\mathcal{F})$ *est égale à la composante en degré (d, d) de la classe $\tau_Z(\mathcal{F})$.* □

Cette identification, obtenue antérieurement à 2.2.1, donne donc déjà une démonstration du théorème HRR lorsque Z est compact, ou aussi la partie de degré maximum dans 2.2.1.

2.3.3. Construction de la classe d'Euler. — A tout morphisme $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ on associe $\oplus(-1)^i H^i(\varphi) \in \oplus \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(H^i_Z(X, \mathcal{F}))$, ce qui définit, par le théorème de dualité globale (lorsque Z est compact), un élément de $\oplus \left(\mathrm{Ext}^{d-i}(X; \mathcal{F}, \Omega^d_X) \otimes H^i_Z(X, \mathcal{F})\right)$, et la *trace* envoie cet élément dans $H^d_Z(X, \Omega^d_X)$.

2.3.4. Autre construction à l'aide de la classe fondamentale. — La construction d'une classe d'Euler pour les faisceaux $\mathcal{O}$-cohérents, les $\mathcal{D}$-modules ou les paires elliptiques repose sur la construction d'une trace dans chacune de ces catégories et de l'existence de la classe fondamentale de la diagonale dans $X \times X$. Rappelons la construction de celle-ci.

Soit $\delta : X \hookrightarrow X \times X$ l'inclusion diagonale et $\Omega^{(0,d)}_{X\times X}$ la partie de type $(0,d)$ (relativement aux deux facteurs X) de $\Omega^d_{X\times X}$. La classe fondamentale $[\delta(X)]$ est une section sur X du faisceau de cohomologie à support $\mathcal{H}^d_{\delta(X)}(\Omega^d_{X\times X})$ et sa composante de type $(0,d)$ définit une application $\mathcal{O}_X \to \mathcal{H}^d_{\delta(X)}(\Omega^{(0,d)}_{X\times X})$ qui s'étend à $\mathcal{D}_X$ *via* l'action à gauche naturelle de $\mathcal{D}_X$ sur $\Omega^{(0,d)}_{X\times X}$ (dérivations par rapport au premier facteur X). En coordonnées locales $(x_1,\dots,x_d)$, et par rapport au recouvrement par les ouverts $x_i \neq x'_i$ de $X\times X - \delta(X)$, on a

$$[\delta(X)]^{(0,d)} = \frac{1}{(2i\pi)^d}\bigwedge_{i=1}^{d}\frac{dx'_i}{x'_i - x_i}$$

et $\mathcal{D}_X$ opère par des opérateurs $P(x,\partial_x)$ (M. Sato [S-K-K73] identifie $\mathcal{H}^d_{\delta(X)}(\Omega^{(0,d)}_{X\times X})$ au faisceau des *opérateurs différentiels d'ordre infini* sur X).

Comme $\mathcal{H}^j_{\delta(X)}(\Omega^{(0,d)}_{X\times X}) = 0$ pour $j \neq d$, on obtient donc un morphisme

$$\mathcal{D}_X \longrightarrow \delta^!\Omega^{(0,d)}_{X\times X}[d] \tag{2.3.5}$$

puis

$$\delta_!\mathcal{D}_X \longrightarrow \Omega^{(0,d)}_{X\times X}[d] \tag{2.3.6}$$

où $\delta^!$ est le foncteur adjoint de l'image directe $\delta_!$ dans la catégorie dérivée des faisceaux de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels.

On peut maintenant, suivant [Sch-Sch94], construire *fonctoriellement et localement* le morphisme (2.3.1) sous la forme d'un morphisme $\boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{F}) \to \Omega_X[d]$. L'hypercohomologie à support dans Z du terme de gauche n'est autre que son hypercohomologie, puisqu'il est à support dans Z. On obtient donc (2.3.1) en prenant l'hypercohomologie à support dans Z de degré 0 du morphisme précédent.

On construit d'abord un morphisme

$$\boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{F}) \longrightarrow D\mathcal{F} \overset{\boldsymbol{L}}{\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}} \mathcal{F} \tag{2.3.7}$$

correspondant à la première étape de la construction du § 2.3.3, où $D\mathcal{F}$ est le complexe dual $\boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\Omega_X[d])$, puis on applique la trace locale $D\mathcal{F} \overset{\boldsymbol{L}}{\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}} \mathcal{F} \to \Omega_X[d]$.

Pour obtenir le morphisme (2.3.7), on utilise la restriction à $\mathcal{O}_X$ de (2.3.6) qui permet de définir

$$\delta_!\mathcal{F} = q_1^{-1}\mathcal{F}\otimes\delta_!\mathcal{O}_X \longrightarrow q_1^{-1}\mathcal{F}\otimes\Omega^{(0,d)}_{X\times X}[d]$$

où q_1 et q_2 désignent les projections de $X\times X$ sur X. Grâce à l'identification (voir par exemple [K-S90, prop. 3.1.14])

$$\delta_!\,\boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{F}) = \boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{q_2^{-1}\mathcal{O}_X}(q_2^{-1}\mathcal{F},\delta_!\mathcal{F})$$

puis en appliquant $\delta^!$, on obtient un morphisme

$$\boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{F}) \longrightarrow \delta^!(D\mathcal{F}\underset{\mathcal{O}}{\boxtimes}\mathcal{F})$$

en posant $\mathcal{F}\boxtimes_{\mathcal{O}}\mathcal{G} = \mathcal{O}_{X\times X}\otimes_{\mathcal{O}\boxtimes\mathcal{O}}(\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G})$. On a par ailleurs l'identification $D\mathcal{F}\otimes^{\boldsymbol{L}}_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\delta(X)}\otimes^{\boldsymbol{L}}_{\mathcal{O}_{X\times X}}\delta^{-1}(D\mathcal{F}\boxtimes_{\mathcal{O}}\mathcal{F})$, d'où le morphisme cherché, en utilisant le morphisme naturel $\delta^! \to \delta^{-1}$. □

2.4. Image directe de $\mathcal{D}$-modules en K-théorie analytique

Dans l'approche K-théorique pour les $\mathcal{D}$-modules, on se restreint au voisinage d'un compact pour deux raisons : la première est qu'on utilise des bonnes filtrations d'un $\mathcal{D}$-module, et deux bonnes filtrations ne sont équivalentes qu'au voisinage d'un compact en général (par exemple, si x_n est une suite de nombres complexes tendant vers ∞ et $\mathcal{M}$ est le faisceau des fonctions méromorphes d'une variable complexe qui ont des pôles aux points x_n au plus, les bonnes filtrations $F_k\mathcal{M}$ (pôle d'ordre $\leq k$ en tout x_n) et $F'_k\mathcal{M}$ (pôle d'ordre $\leq k+n$ en x_n) ne sont pas équivalentes puisqu'il n'existe pas d'entier k_0 tel que l'on ait pour tout k l'inclusion $F'_k\mathcal{M}\subset F_{k+k_0}\mathcal{M}$) ; la deuxième est qu'on utilise une dégénerescence de suite spectrale par un argument noethérien, valable sur un compact.

Soit donc Λ une sous-variété $\mathbf{C}^*$-homogène de T^*X de base $\Lambda\cap T^*_XX$ compacte et $K_\Lambda(\mathcal{D}_X)$ le groupe de Grothendieck des $\mathcal{D}_X$-modules cohérents de variété caractéristique contenue dans Λ et admettant une bonne filtration (*cf.* §1.1). Pour un tel module $\mathcal{M}$, on note $[\mathcal{M}]_\Lambda$ sa classe dans $K_\Lambda(\mathcal{D}_X)$ et lorsque $\mathcal{M}^\bullet$ est un complexe borné de $\mathcal{D}_X$-modules à cohomologie de ce type, on pose comme il se doit $[\mathcal{M}^\bullet]_\Lambda = \sum_i(-1)^i[\mathcal{H}^i(\mathcal{M}^\bullet)]_\Lambda$. Si $\mathcal{O}_X[TX]$ désigne le faisceau des fonctions qui sont polynomiales dans les fibres de $T^*X\to X$, le gradué d'une bonne filtration définit un élément de $K_\Lambda(\mathcal{O}_X[TX])$ indépendant du choix de la bonne filtration (voir par exemple [Lau83, Lemme 6.1.2]). D'où un morphisme $\beta : K_\Lambda(\mathcal{D}_X)\to K_\Lambda(\mathcal{O}_X[TX])$.

Pour une application analytique $f : X\to Y$, on note f_+ la composition

$$K_\Lambda(\mathcal{O}_X[TX]) \xrightarrow{\ {}^tf'^*\ } K_{{}^tf'^{-1}(\Lambda)}(\mathcal{O}_X[TY]) \xrightarrow{\ f_{\pi *}\ } K_{f_+(\Lambda)}(\mathcal{O}_Y[TY]).$$

(2.4.1) THÉORÈME ([Ma85]). — *Dans ces conditions on a l'égalité*

$$\beta\left([f_+\mathcal{M}]_{f_+(\operatorname{Car}\mathcal{M})}\right) = f_+\beta\left([\mathcal{M}]_{\operatorname{Car}\mathcal{M}}\right)$$

dans $K_{f_+(\operatorname{Car}\mathcal{M})}(\mathcal{O}_Y[TY])$.

Les arguments de la démonstration seront donnés lors de celle du théorème 3.1.1. Il faut y remplacer la résolution finie par des $\mathcal{D}$-modules localement libres par une résolution finie de $\mathcal{M}$ par des modules induits $\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}_X$, obtenue à l'aide d'un complexe de Spencer. Une version équivariante de ce théorème est donnée dans [Jo92].

2.5. Riemann-Roch pour les $\mathcal{D}$-modules

Il sera commode dans ce paragraphe de noter $H^k_\Lambda(T^*X)$ l'un des deux espaces $H^{2k}_\Lambda(T^*X,\mathbf{Q})$ ou $H^k_\Lambda(T^*X,\Omega^k_{T^*X})$, et $H^\bullet_\Lambda(T^*X)=\oplus_k H^k_\Lambda(T^*X)$.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module *à droite* cohérent de variété caractéristique $\operatorname{Car}\mathcal{M}$ et soit Λ un ensemble homogène de T^*X contenant $\operatorname{Car}\mathcal{M}$. La classe τ microlocale à support dans Λ est définie par

$$\mu\tau_\Lambda(\mathcal{M}) \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{ch}_\Lambda([\mathcal{M}]_\Lambda)\smile \pi_X^*(\operatorname{Td}(X))\in H^\bullet_\Lambda(T^*X).$$

Pour $f:X\to Y$ propre sur $\Lambda\cap T^*_XX$, on dispose d'une image directe

$$f_+ : H^{d_X+\bullet}_\Lambda(T^*X) \longrightarrow H^{d_Y+\bullet}_{f_+(\Lambda)}(T^*Y)$$

composée de ${}^tf'^* : H^{d_X+\bullet}_\Lambda(T^*X)\to H^{d_X+\bullet}_{{}^tf'^{-1}(\Lambda)}(X\times_Y T^*Y)$ et de $f_{\pi*}$.

On déduit des propriétés de naturalité du caractère de Chern local $\operatorname{ch}_\Lambda$, du théorème de Riemann-Roch 2.1.2 ou 2.2.1 pour f_π et du théorème d'image directe 2.4.1 un théorème de Riemann-Roch homologique (voir [Lau83] pour l'analogue cohomologique, *i.e.* sans support) :

(2.5.1) COROLLAIRE ([Sch-Sch91, § 8]). — *Sous les conditions du* § 2.4, *on a l'égalité*

$$\mu\tau_{f_+(\operatorname{Car}\mathcal{M})}(f_+\mathcal{M}) = f_+(\mu\tau_{\operatorname{Car}\mathcal{M}}(\mathcal{M}))$$

dans $H^\bullet_{f_+(\operatorname{Car}\mathcal{M})}(T^*Y)$. □

Remarque. — La classe $\mu\tau$ a aussi un bon comportement vis-à-vis du produit externe et de l'image inverse g^+ par $g:Z\to X$ (voir le § 3.1.4-(b)), si g est une application *non caractéristique* relativement à $\operatorname{Car}\mathcal{M}$, *i.e.* si ${}^tg'$ est propre sur $g_\pi^{-1}(\operatorname{Car}\mathcal{M})$.

3. Riemann-Roch pour les paires elliptiques

Il s'agit ici de raffiner les résultats du § 2.5 en introduisant des conditions d'ellipticité (sous-)analytiques réelles. Le plus simple est de considérer une sous-variété analytique réelle (éventuellement à bord analytique réel) d'une variété analytique complexe : c'est la situation du théorème d'indice K-théorique 3.1.1. Les méthodes cohomologiques plus souples du § 3.2 permettent d'aborder le contexte général des paires elliptiques.

3.1. Indice relatif K-théorique

Soit Σ_X un ensemble sous-analytique réel fermé dans X, Σ_Y un compact de Y et posons $\Sigma=\Sigma_X\cap f^{-1}(\Sigma_Y)$. Soit Λ un ensemble analytique fermé conique dans T^*X. On suppose dans ce numéro que $\Sigma\cap\Lambda$ est *compact* (on identifie ici X à la section nulle de

T^*X). Les germes le long de Σ de $\mathcal{D}_X$-modules cohérents bien filtrables ou de $\mathcal{O}_X[TX]$-modules cohérents donnent lieu aux groupes $K_\Lambda(\mathcal{D}_{X|\Sigma})$ et $K_\Lambda(\mathcal{O}_X[TX]_{|\Sigma})$. On dispose de morphismes

$$K_\Lambda(\mathcal{D}_{X|\Sigma}) \xrightarrow{\beta} K_\Lambda(\mathcal{O}_X[TX]_{|\Sigma}) \xrightarrow{\alpha} K_\Lambda^{\mathrm{top}}(T^*X_{|\Sigma}).$$

Le morphisme β est défini comme plus haut par passage au gradué d'une bonne filtration et pour α on utilise le fait que $\Sigma \cap \Lambda$ est de Stein dans la variété réelle sous-jacente à X.

Pour une application analytique $f : X \to Y$ propre sur $\Sigma_X \cap \Lambda$, l'image directe f_+ est définie au niveau topologique; elle est aussi définie sur la partie f-elliptique de $K_\Lambda(\mathcal{D}_{X|\Sigma})$ (partie engendrée par les $\mathcal{D}_X$-modules $\mathcal{M}$ tels que $(\mathcal{M}, \mathbf{C}_{\Sigma_X})$ soit une paire f-elliptique) d'après le théorème d'image directe 1.2.4, mais elle n'est pas définie au niveau intermédiaire, car on ne dispose pas de théorème analogue pour les $\mathcal{O}_X[TX]$-modules cohérents : la condition de f-ellipticité pour un $\mathcal{D}$-module ne dépend pas que de son gradué.

On suppose maintenant que Σ_X une sous-variété analytique réelle fermée à bord dans X, définie par une inéquation analytique réelle $u \leq 0$ dans une sous-variété $\widetilde{\Sigma}_X$ et $f : X \to Y$ une application analytique propre sur $\Sigma_X \cap \Lambda$.

(3.1.1) THÉORÈME ([B-M90]). — *Dans ces conditions, le morphisme $\gamma = \alpha \circ \beta$ commute à l'image directe f_+ sur la partie f-elliptique de $K_\Lambda(\mathcal{D}_{X|\Sigma})$.*

Remarques.

(1) On en déduit comme au § 2.5 un théorème GRR pour la classe $\mu\tau_\Lambda$ dans l'espace $H^{2\bullet}_{\Lambda_{|\Sigma}}(T^*X_{|\Sigma}, \mathbf{Q})$.

(2) Lorsque $\Sigma = X$, on peut appliquer le théorème aux $\mathcal{D}_X$-modules induits $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X$: on retrouve de cette manière le théorème 2.1.1, par restriction à la section nulle de T^*X.

(3) Lorsque $\Sigma_X = \widetilde{\Sigma}_X$ est sans bord et Y est un point, on retrouve le théorème d'indice d'Atiyah-Singer dans le cadre analytique réel.

3.1.2. Un cas particulier important. — On suppose que $f : X = \mathbf{C}^n \times Y \to Y$ est la projection, que $\Sigma_X = Q_\varepsilon \times Y$, où Q_ε est l'ellipsoïde d'équation $\|\text{Ré}\, z\|^2 + \varepsilon^{-2}\|\text{Im}\, z\|^2 \leq 1 + \varepsilon$, et que Σ_Y est un compact de Stein dans Y. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module bien filtrable tel que la paire $(\mathcal{M}, \mathbf{C}_{\overline{U}})$ soit f-elliptique.

(a) On peut choisir sur Σ une résolution $\mathcal{L}^\bullet$ de $\mathcal{M}$ par des $\mathcal{D}_X$-modules localement libres de rang fini, puisque Σ est de Stein. Le complexe $f_+(\mathbf{C}_\Sigma \otimes \mathcal{M})$ n'est autre que l'image par f_* du complexe $\mathbf{C}_\Sigma \otimes \mathcal{L}^\bullet \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}$, dont les termes sont localement de la forme $(\mathbf{C}_\Sigma \otimes \mathcal{O}_X\langle\partial_y\rangle)^p$. Il s'agit de trouver une bonne filtration de ce complexe de $\mathcal{D}_Y$-modules, pour en calculer le gradué. Il est alors utile de considérer sur $\mathcal{D}_X$ la filtration

$G_\bullet\mathcal{D}_X$ par le degré des opérateurs par rapport aux dérivations ∂_y uniquement (l'usage de cette filtration est introduit dans [H-S84]).

(b) La bonne filtration de $\mathcal{M}$ engendre une filtration $G_\bullet\mathcal{M}$ avec $G_k\mathcal{M} = \sum_{i+j\leq k}\mathcal{M}_i \cdot G_j\mathcal{D}_X$. On peut ensuite choisir une résolution $\mathcal{L}^\bullet$ comme ci-dessus de sorte que

• chaque terme $\mathcal{L}^\ell$ est muni d'une filtration $G_\bullet\mathcal{L}^\ell$ et localement le module filtré $\mathcal{L}^\ell$ est somme directe de modules libres $\mathcal{D}_X$, chacun muni de la filtration $G_\bullet\mathcal{D}_X$ éventuellement décalée,

• les différentielles du complexe respectent les filtrations,

• le complexe gradué $L^\bullet \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{gr}^G\mathcal{L}^\bullet$ est une résolution localement $\operatorname{gr}^G\mathcal{D}_X$-libre de $M \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{gr}^G\mathcal{M}$.

L'anneau $\operatorname{gr}^G\mathcal{D}_X = \mathcal{O}_X[TY]\langle\partial_{z_1},\ldots,\partial_{z_n}\rangle$ s'identifie à l'anneau des opérateurs différentiels relatifs à la projection $F : \mathbf{C}^n \times T^*Y \to T^*Y$ et la paire $(M, \mathbf{C}_{\overline{U}})$ est relativement elliptique, c'est-à-dire que la variété caractéristique relative de M dans $T^*\mathbf{C}^n \times T^*Y$ ne coupe pas $\mu\operatorname{Supp}\mathbf{C}_{Q_\epsilon} \times T^*Y$. Ici, T^*Y joue le rôle d'un espace de paramètres. Un analogue relatif du théorème 1.2.4 (voir [Sch-Sch90, thm 4.2]) montre que

$$F_+(\mathbf{C}_{\overline{U}} \otimes M) \quad \overset{\text{déf}}{=} \quad F_*(\mathbf{C}_{\overline{U}} \otimes L^\bullet \underset{\operatorname{gr}^G\mathcal{D}_X}{\otimes} \operatorname{gr}^G\mathcal{D}_{X\to Y})$$

est à cohomologie $\mathcal{O}_Y[TY]$-cohérente. Alors la filtration $G_\bullet\mathcal{M}$ permet de munir la cohomologie de $f_+(\mathbf{C}_{\overline{U}} \otimes \mathcal{M})$ d'une bonne filtration (relativement à la filtration usuelle de $\mathcal{D}_Y$) et, par cohérence au voisinage de Σ_Y, la suite spectrale issue de la cohomologie de $F_+(\mathbf{C}_{\overline{U}} \otimes \operatorname{gr}^G\mathcal{M})$ dégénère en un rang fini sur le gradué de celle de $f_+(\mathbf{C}_{\overline{U}} \otimes \mathcal{M})$. On en déduit l'égalité

$$\beta[f_+(\mathbf{C}_\Sigma \otimes \mathcal{M})] \quad = \quad [F_+(\mathbf{C}_\Sigma \otimes M)]$$

dans $K_{f_+(\operatorname{Car}\mathcal{M})}\left(\mathcal{O}_Y[TY]_{|\Sigma_Y}\right)$.

(c) Supposons montrée l'égalité

$$\alpha[F_+(\mathbf{C}_\Sigma \otimes M)] \quad = \quad f_+\left(\alpha[\mathbf{C}_\Sigma \otimes \operatorname{gr} M]\right) \tag{3.1.3}$$

dans $K^{\text{top}}_{f_+(\operatorname{Car}\mathcal{M})}\left(T^*Y_{|\Sigma_Y}\right)$, où $\operatorname{gr} M$ est le gradué de M relativement à une bonne filtration (par le degré en les ∂_{z_i}). Pour conclure, il suffit de montrer l'égalité des classes bigraduées $[\mathbf{C}_\Sigma \otimes \operatorname{gr}\operatorname{gr}^G\mathcal{M}]$ et $[\mathbf{C}_\Sigma \otimes \operatorname{gr}^G\operatorname{gr}\mathcal{M}]$ dans $K_\Lambda(\mathcal{O}_X[T\mathbf{C}^n, TY]_{|\Sigma})$, où $\Lambda \subset T^*\mathbf{C}^n \times T^*Y$ est bihomogène et de projection sur T^*Y contenue dans $f_+(\operatorname{Car}\mathcal{M})$, puis de montrer l'égalité $[\mathbf{C}_\Sigma \otimes \operatorname{gr}^G\operatorname{gr}\mathcal{M}] = [\mathbf{C}_\Sigma \otimes \operatorname{gr}\mathcal{M}]$ dans $K_{\Lambda'}(\mathcal{O}_X[TX]_{|\Sigma})$, où Λ' se projette aussi dans $f_+(\operatorname{Car}\mathcal{M})$.

Le second point se fait par déformation au fibré normal (méthode glorifiée dans [Fu84]) et le premier est un résultat général [Ma85] sur les objets bi-filtrés avec conditions de cohérence.

(d) Explicitons les termes de (3.1.3). Pour cela, il est utile de choisir une résolution $L^\bullet$ de M comme ci-dessus, qui est de plus filtrée relativement à l'ordre en ∂_z et qui induit encore une résolution $\mathrm{gr}\, L^\bullet = \ell^\bullet$ de $\mathrm{gr}\, M$ par passage au gradué.

• En notant $i : \mathbf{C}^n \times T^*Y \hookrightarrow T^*\mathbf{C}^n \times T^*Y$ l'inclusion, le complexe $i^*\ell^\bullet$ est un complexe de $\mathcal{O}_X[TY]$-modules localement libres (dont les différentielles sont $\mathcal{O}_X[TY]$-linéaires). Le terme de droite de (3.1.3) est alors $f_{\pi *}[\mathbf{C}_\Sigma \otimes i^*\ell^\bullet]^{\mathrm{top}}$.

• Le complexe $\mathcal{E}^\bullet \overset{\text{déf}}{=} L^\bullet \underset{\mathrm{gr}^G\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathrm{gr}^G\mathcal{D}_{X\to Y}$ est le complexe de de Rham relatif de M. C'est un complexe dont les termes sont des $\mathcal{O}_X[TY]$-modules localement libres et dont les différentielles sont des opérateurs différentiels en ∂_z. Le terme de gauche de (3.1.3) est $\alpha[F_*(\mathbf{C}_\Sigma \otimes \mathcal{E}^\bullet)]$, où, rappelons-le, F désigne la projection $\mathbf{C}^n \times T^*Y \to T^*Y$.

(e) Soit $r(z,\overline{z}) = \|\mathrm{Ré}\, z\|^2 + \varepsilon^{-2}\|\mathrm{Im}\, z\|^2$ et $\sigma : \mathbf{C}^n \times T^*Y \to T^*\mathbf{C}^n \times T^*Y$ la section égale à $(1/i)\partial r$, qui ne s'annule qu'à l'origine de $\mathbf{C}^n$. Alors on a $[\mathbf{C}_\Sigma \otimes i^*\ell^\bullet] = [\mathbf{C}_\Sigma \otimes \sigma^*\ell^\bullet]$ dans $K^{\mathrm{top}}_{\Lambda'}(Q_\varepsilon \times T^*Y_{|\Sigma_Y})$, où $\Lambda' = Q_\varepsilon \times f_+(\mathrm{Car}\,\mathcal{M})$: en effet, $\ell^\bullet$ est exact sur $T^*\mathbf{C}^n \times (T^*Y - f_+(\mathrm{Car}\,\mathcal{M}))$ puisque M, et donc $\mathrm{gr}\, M$, y est nul. La condition d'ellipticité signifie que $\sigma^*\ell^\bullet$ est exact sur $\partial Q_\varepsilon \times T^*Y_{|\Sigma_Y}$. Ceci permet de voir que $[\mathbf{C}_\Sigma \otimes \sigma^*\ell^\bullet]$ provient d'une classe dans $K^{\mathrm{top}}_{\{0\}\times f_+(\mathrm{Car}\,\mathcal{M})}(Q_\varepsilon \times T^*Y_{|\Sigma_Y})$. L'action de $f_{\pi *}$ sur cette classe est par définition celle de l'inverse de l'isomorphisme de Bott.

(f) Chaque opérateur de bord $D_i : \mathcal{E}^i \to \mathcal{E}^{i+1}$ définit, pour tout s, une famille continue d'opérateurs de Toeplitz $\mathcal{O}^s(Q_\varepsilon, \mathcal{E}^i_\eta) \to \mathcal{O}^{s-m_i}(Q_\varepsilon, \mathcal{E}^{i+1}_\eta)$, pour $\eta \in T^*Y_{\Sigma_Y}$: on compose l'action de D_i sur l'espace de Sobolev $H^s(Q_\varepsilon, \mathcal{E}^i_\eta)$ avec la projection (opérateur de Bergman) de celui-ci sur l'espace de Hardy $\mathcal{O}^s$, noyau de $\overline{\partial}$ sur cet espace.

De cette manière, on associe au complexe $\mathcal{E}^\bullet$ une famille de complexes d'opérateurs de Toeplitz sur Q_ε, exacts hors de $f_+(\mathrm{Car}\,\mathcal{M})$, famille paramétrée par T^*Y, et dont on montre que la cohomologie est égale à celle de $F_*(\mathbf{C}_\Sigma \otimes \mathcal{E}^\bullet)$. De plus, le symbole de cette famille est la restriction à $\partial Q_\varepsilon \times T^*Y_{|\Sigma_Y}$ de $\sigma^*\ell^\bullet$. Un théorème d'indice pour de tels complexes [B-M90] montre enfin que l'indice de cette famille, qui est égal ici à $\alpha[F_*(\mathbf{C}_\Sigma \otimes \mathcal{E}^\bullet)]$, a pour image par l'isomorphisme de Bott la classe associée à son symbole dans $K^{\mathrm{top}}_{\{0\}\times f_+(\mathrm{Car}\,\mathcal{M})}(Q_\varepsilon \times T^*Y_{|\Sigma_Y})$, qui est ici $[\mathbf{C}_\Sigma \otimes \sigma^*\ell^\bullet]$, ce qui donne (3.1.3).

3.1.4. Le cas général. — On se ramène au cas précédent en plusieurs étapes.

(a) Le cas où f est une immersion fermée $X \hookrightarrow Y$ s'obtient à l'aide de l'isomorphisme de Bott, comme dans [A-H62].

(b) L'autre cas particulier utile est celui où $f : X \to Y$ est une submersion avec une section $\sigma : Y_{\mathbf{R}} \hookrightarrow X_{\mathbf{R}}$ analytique réelle (on l'appliquera à la projection $X \times \overline{X} \to X$ et à la diagonale $X_{\mathbf{R}} \hookrightarrow X \times \overline{X}$, si $\overline{X}$ est la variété conjuguée de X). On se donne un compact Σ_Y et on prend $\Sigma_X = \sigma(Y)$, donc $\Sigma = \sigma(\Sigma_Y)$.

Introduisons l'opération f^+. Elle transforme un sous-ensemble Λ de T^*Y par ${}^tf' \circ f_\pi^{-1}$ en un sous-ensemble de T^*X (lorsque f est une immersion, elle est plus connue sous le nom de *réduction symplectique*). On a $f_+f^+(\Lambda) = \Lambda$. Son effet sur $K^{\rm top}_\Lambda(T^*Y)$ se décrit de la même manière. Pour les $\mathcal{D}$-modules, elle est définie par

$$f^+\mathcal{M} = \boldsymbol{R}{}^tf'_*\left(f^{-1}\mathcal{M} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y\leftarrow X}\right).$$

et lorsque f est une submersion on a $f^+\mathcal{M} = \Omega_{X/Y} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{M}$, de sorte que $f^+\Omega_Y = \Omega_X$. Pour f submersive on a $\operatorname{Car} f^+\mathcal{M} = f^+ \operatorname{Car}\mathcal{M}$.

On montre alors que $f_+ : K_{f^+(\Lambda)}(\mathcal{D}_{X|\Sigma}) \to K_\Lambda(\mathcal{D}_{Y|\Sigma_Y})$ est un isomorphisme, d'inverse donné par $\mathbf{C}_\Sigma \otimes f^+$. L'isomorphisme de Bott pour l'immersion ${}^tf'$ donne un résultat analogue pour $f_+ : K^{\rm top}_{f^+(\Lambda)}(T^*X_{|\Sigma}) \to K^{\rm top}_\Lambda(T^*Y_{|\Sigma_Y})$. Puisque γ commute à f^+, on en déduit que dans ce cas γ commute aussi à f_+.

(c) On utilise un procédé de gonflage : on commence par remplacer Σ par un voisinage $\Sigma' \overset{\text{déf}}{=} \overline{U}_\varepsilon \cap f^{-1}(\Sigma_Y)$, où $\overline{U}_\varepsilon$ est un voisinage de Σ_X dans X, à bord analytique réel, de sorte que $\lim_{\varepsilon\to 0} \mu\mathrm{Supp}\, \mathbf{C}_{\overline{U}_\varepsilon} \subset \mu\mathrm{Supp}\,\mathbf{C}_{\Sigma_X}$. C'est possible du fait de la lissité de Σ_X.

Le théorème 3.1.1 pour la paire $(\mathcal{M}, \mathbf{C}_\Sigma)$ équivaut alors à celui pour $(\mathcal{M}, \mathbf{C}_{\Sigma'})$, par des arguments de [H-S84].

On considère ensuite $(i_+\mathcal{M}, \mathbf{C}_{\Sigma'\times Y})$ sur $X \times Y$, où i est l'inclusion du graphe de f, pour se ramener au cas d'une projection; puis $(p^+i_+\mathcal{M}, \mathbf{C}_{\Sigma'\times Y})$ sur $\overline{X} \times X \times Y$, où p est la projection sur $X \times Y$.

On plonge enfin $X_{\mathbf{R}} \hookrightarrow \mathbf{R}^N$ de sorte que $\Sigma' = B^N \cap X_{\mathbf{R}}$, où B^N est la boule unité; soit j l'inclusion complexifiée d'un voisinage de $X_{\mathbf{R}}$ (dans $\overline{X} \times X \times Y$) dans $\mathbf{C}^N \times Y$; on applique le § 3.1.2 à la paire elliptique $(j_+p^+i_+\mathcal{M}, \mathbf{C}_{Q_\varepsilon \times Y})$ pour ε assez petit. □

3.2. Classe d'Euler microlocale des paires elliptiques

La nature fonctorielle et locale de la construction de la classe d'Euler indiquée au § 2.3.4 fait que celle-ci peut se transposer dans diverses situations où l'on dispose encore d'un "formalisme des six opérations". De plus, elle s'étend naturellement pour donner lieu à des formules de points fixes lorsqu'on dispose d'un automorphisme de la variété et d'un relèvement de celui-ci aux faisceaux que l'on considère.

Par exemple, au chapitre IX de [K-S90], Kashiwara et Schapira considèrent la catégorie des faisceaux $\mathbf{R}$-constructibles sur une variété analytique réelle M, disons orientée, ainsi que la catégorie dérivée correspondante. La classe d'Euler microlocale $\mu\mathrm{eu}(\mathcal{F})$ d'un objet $\mathcal{F}$ de cette catégorie est une classe dans $H^m_\Lambda(T^*M, \mathbf{Q})$, où m est la dimension réelle de M et Λ est le microsupport du faisceau $\mathcal{F}$, donc un ensemble lagrangien $\mathbf{R}^*_+$-homogène dans T^*M (*cf.* théorème 1.2.3). Puisque l'on a $\dim\Lambda = m$, cette classe s'exprime comme somme des classes fondamentales des composantes irréductibles de Λ affectées d'une multiplicité : c'est un cycle lagrangien. Kashiwara a obtenu des formules de points fixes dans ce cadre (voir *loc. cit.* ainsi que [G-M93]).

Indiquons aussi que Guillermou [Gui95] a introduit, sur le modèle des classes d'Euler microlocales ci-dessous, une classe de Lefschetz microlocale pour une paire elliptique munie d'un automorphisme relevant un automorphisme de la variété X. La formule de point fixe qu'il obtient englobe la formule d'Atiyah et Bott. Ces techniques lui permettent, dans le cas d'un $\mathcal{D}$-module équivariant et transversalement elliptique sous une action d'un groupe de Lie $G_{\mathbf{R}}$, de construire l'indice comme une hyperfonction sur ce groupe [Gui96].

Propriétés des classes d'Euler microlocales. — A tout $\mathcal{D}_X$-module (à droite, cohérent) $\mathcal{M}$, Schapira et Schneiders [Sch-Sch91] associent un morphisme $\mathbf{C}$-linéaire

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{M}) \longrightarrow H^{2d}_{\operatorname{Car}\mathcal{M}}(T^*X,\mathbf{C}). \tag{3.2.1}$$

L'image de l'identité est par définition la classe d'Euler microlocale $\mu\mathrm{eu}(\mathcal{M})$.

- Lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}_X$ est un module induit, on a $\Lambda = \pi^{-1}(\operatorname{Supp}\mathcal{F})$ et la restriction à la section nulle de $\mu\mathrm{eu}(\mathcal{M})$ est l'élément de $H^{2d}_{\operatorname{Supp}\mathcal{F}}(X,\mathbf{C})$ image de la classe d'Euler $\mathrm{eu}(\mathcal{F}) \in H^{d}_{\operatorname{Supp}\mathcal{F}}(X,\Omega^d_X)$ par l'application naturelle $H^{d}_{\operatorname{Supp}\mathcal{F}}(X,\Omega^d_X) \to H^{2d}_{\operatorname{Supp}\mathcal{F}}(X,\mathbf{C})$.
- Lorsque $\mathcal{M}$ est holonome, de cycle caractéristique $\mathrm{CC}(\mathcal{M})$, la classe $\mu\mathrm{eu}(\mathcal{M})$ est (la classe de) ce cycle dans $H^{2d}_{\operatorname{Car}\mathcal{M}}(T^*X,\mathbf{C})$ et on a donc $\mu\mathrm{eu}(\mathcal{M}) = \mu\mathrm{eu}(\mathrm{DR}\,\mathcal{M})$ où le deuxième terme est la classe microlocale associée au complexe $\mathbf{C}$-constructible $\mathrm{DR}\,\mathcal{M}$.

3.2.2. Produit de convolution. — Lorsque Λ_1 et Λ_2 sont deux sous-variétés lagrangiennes $\mathbf{R}^*_+$-homogènes de T^*X telles que $(-\Lambda_1)\cap\Lambda_2 \subset T^*_XX$, l'application $\Lambda_1\times_X\Lambda_2 \to T^*X$ définie par $(x,\xi_1,\xi_2)\to(x,\xi_1+\xi_2)$ est propre et l'intégration dans les fibres de cette application permet de définir un produit de convolution

$$H^{2d}_{\Lambda_1}(T^*X,\mathbf{C})\times H^{2d}_{\Lambda_2}(T^*X,\mathbf{C}) \xrightarrow{\ \star\ } H^{2d}_{\Lambda_1+\Lambda_2}(T^*X,\mathbf{C}).$$

Pour une paire elliptique $(\mathcal{M},\mathfrak{F})$, la variété $\operatorname{Car}\mathcal{M}$ est $\mathbf{C}^*$-homogène, donc on a aussi $(-\operatorname{Car}\mathcal{M})\cap\mu\mathrm{Supp}\,\mathfrak{F}\subset T^*_XX$ et on peut définir la classe d'Euler microlocale $\mu\mathrm{eu}(\mathcal{M},\mathfrak{F})\in H^{2d}_{\operatorname{Car}\mathcal{M}+\mu\mathrm{Supp}\,\mathfrak{F}}(T^*X,\mathbf{C})$ comme le produit de convolution $\mu\mathrm{eu}(\mathcal{M})\star\mu\mathrm{eu}(\mathfrak{F})$.

Néanmoins, cette classe peut aussi être obtenue comme image de l'identité par un morphisme

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{F}\otimes\mathcal{M},\mathfrak{F}\otimes\mathcal{M}) \longrightarrow H^{2d}_{\operatorname{Car}\mathcal{M}+\mu\mathrm{Supp}\,\mathfrak{F}}(T^*X,\mathbf{C})$$

construit de manière analogue à celle indiquée ci-dessous pour (3.2.1).

Le résultat principal de [Sch-Sch91] est alors un "théorème de Riemann-Roch" pour cette classe microlocale.

(3.2.3) THÉORÈME. — *Soit $f : X \to Y$ analytique complexe et $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ une paire f-elliptique. On pose $\Lambda = \operatorname{Car} \mathcal{M} + \mu \operatorname{Supp} \mathcal{F}$ et on suppose f propre sur* $\operatorname{Supp} \mathcal{M} \cap \operatorname{Supp} \mathcal{F}$. *On a alors l'égalité $\mu\mathrm{eu}(f_+(\mathcal{F} \otimes \mathcal{M})) = f_+(\mu\mathrm{eu}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{M}))$ dans $H^{2d_Y}_{f_+(\Lambda)}(T^*Y, \mathbf{C})$.* □

Lorsque Y est un point, on trouve une formule d'indice pour une paire elliptique $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$: la caractéristique d'Euler du complexe $\mathcal{F} \otimes \mathrm{DR}(\mathcal{M})$ s'obtient comme intersection dans T^*X de la classe $\mu\mathrm{eu}(\mathcal{M})$ avec le cycle caractéristique de $\mathcal{F}$.

Nous indiquons ci-dessous la construction de la classe d'Euler microlocale lorsque $\mathcal{F} = \mathbf{C}_X$.

3.2.4. L'opération μ_Δ de microlocalisation le long de la diagonale. — Rappelons que si M est une variété et N une sous-variété (C^∞ ou analytique), on associe à tout faisceau $\mathcal{F}$ sur M un complexe $\mu_N(\mathcal{F})$ sur le fibré conormal $T^*_N M$, appelé *microlocalisé de $\mathcal{F}$ le long de N* (voir [S-K-K73], [K-S90]). Mieux, μ_N est un foncteur. En particulier, si $p \in T^*_N M$, la fibre en p du faisceau de cohomologie $\mathcal{H}^j(\mu_N(\mathcal{F}))_p$ est la limite inductive des $\mathcal{H}^j_Z(\mathcal{F})_{\pi(p)}$, où Z parcourt la famille des fermés de X dont le cône tangent en $\pi(p)$ est contenu dans le demi-espace de $T_{\pi(p)}M$ sur lequel p est > 0.

Le microlocalisé $\mu_N(\mathcal{F})$ est stable sous l'action de $\mathbf{R}^*_+$ et sa restriction à la section nulle N de $T^*_N M$, qui s'identifie donc à l'image directe $\boldsymbol{R}\pi_* \mu_N(\mathcal{F})$, est le complexe $\boldsymbol{R}\Gamma_N(\mathcal{F})$ dont la cohomologie est la cohomologie de $\mathcal{F}$ à support dans N.

Dans la suite nous appliquerons ceci au cas où $N = \Delta$ est la diagonale dans la variété analytique complexe $M = X \times X$. Nous identifierons alors $T^*_\Delta(X \times X)$ à T^*X.

3.2.5. La classe d'Euler microlocale. — Nous disposons maintenant de tous les outils nécessaires pour adapter la construction du § 2.3.4 à un $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$. On construit d'abord un morphisme

$$\boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{M}) \longrightarrow \delta^! \,\mathrm{DR}\,(D\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{M})$$

en utilisant le morphisme de Sato (2.3.5). Ici, $D\mathcal{M}$ est le complexe dual de $\mathcal{M}$ au sens des $\mathcal{D}$-modules : la cohomologie $\mathcal{H}^j(D\mathcal{M})$ est le $\mathcal{D}$-module à droite associé (*cf.* le § 1.1.1) à $\mathcal{E}xt^{j+d}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ muni de sa structure de $\mathcal{D}$-module à gauche induite par celle de $\mathcal{D}$. Le produit tensoriel externe fait passer de deux $\mathcal{D}_X$-modules $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ à un $\mathcal{D}_{X\times X}$-module : si par exemple $\mathcal{M}$ est le $\mathcal{D}$-module défini par des opérateurs $P_i(x, \partial_x)$ et $\mathcal{N}$ par $Q_j(x, \partial_x)$, le module $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ est défini par les opérateurs $P_i(x, \partial_x)$ et $Q_j(x', \partial_{x'})$ dans des coordonnées x, x' de $X \times X$.

On dispose aussi d'un analogue de la trace, qui est un morphisme

$$\mathrm{DR}\,(D\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{M}) \longrightarrow \delta_! \mathbf{C}_X[2d].$$

Alors, d'une part $\delta^! \,\mathrm{DR}\,(D\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{M})$ s'identifie à l'image directe par π du microlocalisé $\mu_\Delta \,\mathrm{DR}\,(D\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{M})$ et d'autre part ce microlocalisé est à support dans $\operatorname{Car} \mathcal{M}$, donc on ne change rien en en prenant la cohomologie à support dans $\operatorname{Car}\mathcal{M}$. Par ailleurs le microlocalisé $\mu_\Delta \mathcal{F}$ d'un faisceau $\mathcal{F}$ à support dans Δ est l'image inverse de ce faisceau dans T^*X. En particulier, $\mu_\Delta \delta_! \mathbf{C}_X[2d] = \mathbf{C}_{T^*X}[2d]$.

En résumé et en prenant l'hypercohomologie, nous déduisons des deux morphismes ci-dessus un morphisme

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}^j_{\mathcal{D}_X}(X;\mathcal{M},\mathcal{M}) &= \boldsymbol{H}^j\left(X; \boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{M})\right)\\
&= \boldsymbol{H}^j\left(T^*X; \mu_\Delta\, \boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{M})\right)\\
&= \boldsymbol{H}^j_{\operatorname{Car}\mathcal{M}}\left(T^*X; \mu_\Delta\, \boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{M})\right)\\
&\to \boldsymbol{H}^j_{\operatorname{Car}\mathcal{M}}\left(T^*X; \mu_\Delta \delta_! \mathbf{C}_X[2d]\right)\\
&= H^{j+2d}_{\operatorname{Car}\mathcal{M}}(T^*X, \mathbf{C})
\end{aligned}$$

et pour $j=0$ on obtient le morphisme (3.2.1). □

3.2.6. Classes caractéristiques microlocales et cohomologie de Hochschild. — Pour un $\mathcal{D}_X$-module holonome ou un $\mathcal{D}_X$-module induit, on a l'égalité $\mu\mathrm{eu}(\mathcal{M}) = \mu\tau^{\dim X}_{\operatorname{Car}\mathcal{M}}(\mathcal{M})$, ce qui résulte du théorème 2.3.2 dans le second cas. Une telle égalité n'est pas connue pour $\mathcal{M}$ quelconque. Néanmoins, Schapira et Schneiders montrent, dans un travail en cours, que les classes $\mu\mathrm{eu}(\mathcal{M})$ et $\mu\tau_{\operatorname{Car}\mathcal{M}}(\mathcal{M})$ vues en cohomologie de Hodge, sont reliées : elles se déduisent de la spécialisation d'une même classe dépendant d'un paramètre $\hbar$ en cohomologie de Hochschild, en faisant $\hbar = 1$, *resp.* $\hbar = 0$. Nous indiquons ci-dessous les étapes essentielles de leur construction.

Le faisceau $\mathcal{D}_X$, muni de sa filtration $F_\bullet\mathcal{D}_X$ par l'ordre des opérateurs différentiels, permet de définir *l'anneau de Rees*

$$\mathcal{R}\mathcal{D}_X = \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} F_k\mathcal{D}_X \cdot \hbar^k \subset \mathcal{D}_X \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[\hbar,\hbar^{-1}]$$

où $\hbar$ est une nouvelle variable. En “faisant $\hbar = 1$” on retrouve $\mathcal{D}_X$ et en “faisant $\hbar = 0$” on trouve $\operatorname{gr}\mathcal{D}_X$. L'anneau gradué $\mathcal{R}\mathcal{D}_X$ est un module à gauche et à droite sur lui-même ; c'est donc un module à gauche sur $\mathcal{R}\mathcal{D}_X \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{R}\mathcal{D}_X^\circ$, où $\mathcal{D}_X^\circ$ désigne l'anneau opposé ; c'est aussi un module à droite sur cet anneau.

Un $\mathcal{D}_X$-module muni d'une bonne filtration $F_\bullet\mathcal{M}$ donne lieu à un *module de Rees* $\mathcal{R}\mathcal{M} = \oplus_{k\in\mathbf{Z}} F_k\mathcal{M}\cdot\hbar^k$ qui est $\mathcal{R}\mathcal{D}_X$-cohérent.

On construit d'abord un morphisme

$$\boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{R}\mathcal{D}_X}(\mathcal{R}\mathcal{M},\mathcal{R}\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{R}\mathcal{D}_X \overset{\boldsymbol{L}}{\underset{\mathcal{R}\mathcal{D}_X\otimes\mathcal{R}\mathcal{D}_X^\circ}{\otimes}} \mathcal{R}\mathcal{D}_X \tag{3.2.7}$$

(Brylinski [Bry86, § 2] montre que, pour $\hbar = 1$, ce dernier objet s'identifie à $\Omega^\bullet_X[2d]$). Soit $\mathcal{E}_X$ le faisceau sur T^*X des opérateurs microdifférentiels (voir par exemple [Bj79, Scha85]), $\mathcal{M}^\mu \overset{\text{déf}}{=} \pi^{-1}\mathcal{M} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \mathcal{E}_X$ le microlocalisé de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{R}\mathcal{M}^\mu$ le module de Rees associé à la bonne filtration de $\mathcal{M}^{\mu}$ déduite de celle de $\mathcal{M}$; la construction précédente peut être microlocalisée. En prenant la partie homogène de degré 0 puis les sections globales à support dans $\operatorname{Car}\mathcal{M} = \operatorname{Supp}\mathcal{M}^{\mu}$, on obtient à partir de l'analogue microlocal de (3.2.7) un morphisme

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{RE}_X}(\mathcal{RM}^{\mu}, \mathcal{RM}^{\mu}) \longrightarrow H^0_{\operatorname{Car}\mathcal{M}}\left(T^*X, \left\{\mathcal{RE}_X \overset{L}{\underset{\mathcal{RE}_X\otimes\mathcal{RE}_X^\circ}{\otimes}} \mathcal{RE}_X\right\}_0\right).$$

L'image de Id est une nouvelle classe caractéristique.

En faisant $\hbar = 1$ (oubli des filtrations) on trouve un morphisme

$$H^0_{\operatorname{Car}\mathcal{M}}\left(T^*X, \mathcal{E}_X \overset{L}{\underset{\mathcal{E}_X\otimes\mathcal{E}_X^\circ}{\otimes}} \mathcal{E}_X\right) \longrightarrow H^{2d}_{\operatorname{Car}\mathcal{M}}(T^*X, \mathbf{C})$$

et l'image de cette classe est $\mu\mathrm{eu}(\mathcal{M})$.

En faisant $\hbar = 0$ (passage au gradué) on construit une flèche dans la cohomologie de Hodge $\oplus_p H^p_{\operatorname{Car}\mathcal{M}}(T^*X, \Omega^p_{T^*X})$ identifiée à $H^0_{\operatorname{Car}\mathcal{M}}\left(T^*X, \mathcal{O}_{T^*X} \overset{L}{\underset{\delta^{-1}\mathcal{O}_{T^*(X\times X)}}{\otimes}} \mathcal{O}_{T^*X}\right)$; l'image de la classe est alors $\mu\tau_{\operatorname{Car}\mathcal{M}}(\mathcal{M})$. □

4. Vers des classes caractéristiques secondaires pour les $\mathcal{D}$-modules holonomes

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome. Sa variété caractéristique $\Lambda = \operatorname{Car}\mathcal{M} \subset T^*X$ admet pour composantes irréductibles des ensembles de la forme $\overline{T^*_{Z^o}X}$, où Z est un sous-ensemble analytique fermé irréductible de X, Z^o en est un ouvert dense et lisse, $T^*_{Z^o}X$ est le fibré conormal de celui-ci et l'adhérence est prise dans T^*X. Nous supposerons que les ensembles Z^o sont deux à deux disjoints.

Remarque. — La partie lisse Λ^{reg} de Λ contient $\Lambda^o \overset{\text{déf}}{=} \cup T^*_{Z^o}X$ et cette inclusion peut être stricte (prendre $X = \mathbf{C}^2$ et $Z = \{x^3 = y^2\}$).

Sur Λ^o existe un faisceau $\mathcal{L}^{\mu}$ associé à $\mathcal{M}$, à savoir le microlocalisé $\mu_{\cup Z^o}\operatorname{Sol}(\mathcal{M})$ (*cf.* § 3.2.4). On peut montrer que c'est un système local (fibré plat) qui est aussi égal aux solutions dans le faisceau $\mathcal{C}^{\mathbf{R}}_{\cup Z^o|X}$ du microlocalisé $\mathcal{M}^{\mu}$. Une question encore mal comprise, malgré de nombreux travaux ([K-S90, chap. 7], [M-V86, Mai87, M-V88, Na88]) est la description microlocale des $\mathcal{D}$-modules holonomes et des faisceaux pervers : notamment, par quoi est-il possible d'étendre à Λ le système local $\mathcal{L}^{\mu}$.

Malgrange montre que la monodromie locale de $\mathcal{L}^{\mu}$ autour des composantes de $\Lambda^{\mathrm{reg}} - \Lambda^o$ est $\pm\,\mathrm{Id}$. Ainsi, sur chaque composante connexe Λ_i^{reg} de Λ^{reg}, on obtient une classe dans $H^1(\Lambda_i^{\mathrm{reg}}, \mathrm{GL}(r_i, \mathbf{C})/(\pm\,\mathrm{Id}))$, si r_i est le rang de $\mathcal{L}^{\mu}$ sur cette composante.

D'autre part, le système local $\mathcal{L}^\mu$ possède des classes caractéristiques secondaires

$$c'_k(\mathcal{L}^\mu) \in H^{2k-1}(\Lambda^o, \mathbf{C}/\mathbf{Z}) \overset{\text{Alexander}}{\simeq} H^{2d+2k-1}_{\Lambda^o}(T^*X, \mathbf{C}/\mathbf{Z}).$$

On cherche à étendre ces classes de manière naturelle dans $H^{2d+2k-1}_\Lambda(T^*X, \mathbf{C}/\mathbf{Z})$. La classe $c'_1 \in H^1(\Lambda^o, \mathbf{C}/\mathbf{Z})$ est celle qui définit le *déterminant* de $\mathcal{L}^\mu$, qui est un système local de rang 1 sur Λ^o.

THÉORÈME (Malgrange). — *La classe $c'_1(\mathcal{L}^\mu)$ se prolonge dans $H^{2d+1}_\Lambda(T^*X, \mathbf{C}/(\frac{1}{2}\mathbf{Z}))$, ceci de manière unique.* □

L'unicité ne coûte pas cher et montre que le problème est local sur X. On voit de même qu'il suffit de prolonger c'_1 à $H^{2d+1}_{\Lambda'}$ avec $\operatorname{codim}_\Lambda \Lambda \setminus \Lambda' \geq 2$.

Exemples.

1. On prend $X = \mathbf{C}$, $\Lambda = T^*_X X \cup T^*_0 X = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$. On a

$$c'_1 = c'_{1,1} \oplus c'_{1,2} \in H^1(\Lambda_1 - \{0\}, \mathbf{C}/\mathbf{Z}) \oplus H^1(\Lambda_2 - \{0\}, \mathbf{C}/\mathbf{Z}) = \mathbf{C}/\mathbf{Z} \oplus \mathbf{C}/\mathbf{Z}$$

et il s'agit de montrer que l'image de $c'_1(\mathcal{L}^\mu)$ par l'application "somme" est nulle, autrement dit que les déterminants des systèmes locaux $\mathcal{L}^\mu_1$ et $\mathcal{L}^\mu_2$ *tournent en sens inverse* l'un de l'autre. Ceci provient du fait que dans la construction de $\mathcal{L}^\mu$, le système local $\mathcal{L}^\mu_2$ est obtenu par transformation de Fourier-Sato à partir de $\mathcal{L}^\mu_1$. Si par exemple $\mathcal{M}$ est le $\mathcal{D}$-module à droite $\mathcal{D}_X/(t\partial_t - \alpha)\cdot\mathcal{D}_X$, le système local $\mathcal{L}^\mu_1$ est le système de rang 1 et de monodromie $\exp(2i\pi\alpha)$, donc $c'_{1,1} = 2i\pi\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}$. Le système local $\mathcal{L}^\mu_2$ est le complexe des solutions du $\mathcal{D}$-module défini par l'équation transformée de Fourier ($t = \partial_\tau$, $\partial_t = -\tau$), à savoir $-\partial_\tau\tau - \alpha$, de monodromie $\exp(-2i\pi(\alpha+1))$. Dans cet exemple, il n'est pas nécessaire de remplacer $\mathbf{Z}$ par $\frac{1}{2}\mathbf{Z}$. □

2. Soit X un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^2$ et C un germe de courbe à l'origine, irréductible par exemple. Le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}$ est le faisceau des parties polaires de fonctions méromorphes à pôles le long de C, dont le complexe de de Rham est le faisceau constant $\mathbf{C}_C$ sur C, à un décalage convenable près. On a alors $\Lambda = \overline{T^*_{C^o}X} \cup T^*_0 X = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, où C^o est la partie régulière de C (ici $C^o = C - \{0\}$). Le système local $\mathcal{L}^\mu_1$ est alors le faisceau constant et il s'agit de voir que le déterminant du système local $\mathcal{L}^\mu_2$ a pour monodromie $\pm\,\mathrm{Id}$.

Prenons pour simplifier le cas où $C = \{x^3 = y^2\}$. La fibre de $\mathcal{L}^\mu_2$ en un point (ξ, η) avec $\xi \neq 0$ de $T^*_0 X$ est l'espace des cycles évanescents de la fonction linéaire $\ell(x,y) = \xi x + \eta y$ pour le faisceau $\mathbf{C}_C$. La monodromie cherchée est celle obtenue sur cet espace quand $\eta = 1$ et ξ fait le tour de l'origine.

L'espace des cycles évanescents pour $\xi x + y$ est l'espace de dimension 1 engendré par la différence des deux racines proches de 0 de l'équation $\xi x + y = \delta$ sur C avec $0 < \delta \ll |\xi|$. Lorsque ξ fait le tour de 0, ces deux racines sont permutées, d'où une monodromie égale à $-\,\mathrm{Id}$.

On conclut que, dans cet exemple, la classe c'_1 se prolonge avec coefficients dans $\mathbf{C}/(\frac{1}{2}\mathbf{Z})$. □

BIBLIOGRAPHIE

[A-LJ89] B. ANGÉNIOL, M. LEJEUNE-JALABERT, *Calcul différentiel et classes caractéristiques en géométrie algébrique*, Travaux en cours vol. 38, Hermann, Paris, 1989.

[At] M. F. ATIYAH, *Collected Works*, Oxford University Press, 1988.

[At65] M. F. ATIYAH, *The index theorem for manifolds with boundary*, in *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem (appendix I)*, Annals of Math. Study, Princeton University Press **57** (1965), 337–351, ou 41–55 dans [At, vol. 3].

[A-B64] M. F. ATIYAH, R. BOTT, *The index problem for manifolds with boundary*, in *Differential analysis (Bombay Colloquium 1964)*, Oxford University Press (1964), 175–186, ou 27–38 dans [At, vol. 3].

[A-H62] M. F. ATIYAH, F. HIRZEBRUCH, *The Riemann-Roch theorem for analytic embeddings*, Topology **1** (1962), 151–166, ou 273–290 dans [At, vol. 2].

[A-S68] M. F. ATIYAH, I. M. SINGER, *The index of elliptic operators, I*, Ann. of Math. **87** (1968), 484–530, ou 173–219 dans [At, vol. 3].

[B-D82] P. BAUM, R. G. DOUGLAS, *K-homology and index theory*, Proc. of Symposia in Pure Math. **38** (1982), Part 1, 117–173.

[B-F-M79] P. BAUM, W. FULTON, R.D. MACPHERSON, *Riemann-Roch and topological K-theory for singular varieties*, Acta Math. **143** (1979), 155–192.

[B-L95] J.-M. BISMUT, J. LOTT, *Flat vector bundles, direct images and higher real analytic torsion*, Journal of the AMS, à paraître.

[Bj79] J.-E. BJÖRK, *Rings of Differential Operators*, North Holland, Amsterdam, 1979.

[B-M90] L. BOUTET DE MONVEL, B. MALGRANGE, *Le théorème de l'indice relatif*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **23** (1990), 151–192 (voir aussi [Z-A93], 1–30).

[Bry86] J. L. BRYLINSKI, *Some examples of Hochschild and cyclic homology*, in *Algebraic groups, Utrecht 1986, A. Cohen et al. eds.*, Springer Lect. Notes in Math. **1271** (1987), 33–72.

[B-D-K81] J. L. BRYLINSKI, A. DUBSON, M. KASHIWARA, *Formule de l'indice pour les modules holonomes et obstruction d'Euler locale*, C.R. Acad. Sci. Paris **293** (1981), 573–576.

[Del70] P. DELIGNE, *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, Lect. Notes in Math. vol. 163, Springer Verlag, 1970.

[Fu84] W. FULTON, *Intersection Theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete, Folge 3 Band 2, Springer Verlag, 1984.

[Ga81] O. GABBER, *The integrability of the characteristic variety*, Amer. J. of Math. **103** (1981), 445–468.

[G-M93] M. GORESKY, R. D. MACPHERSON, *Local contribution to the Lefschetz fixed point formula*, Invent. Math. **111** (1993), 1–33.

[G-M90] M. GRANGER, PH. MAISONOBE, *A basic course on differential modules*, in *Eléments de la théorie des systèmes différentiels vol. 1*, les cours du CIMPA, Travaux en cours vol. 45, Hermann, Paris (1993), 103–168.

[Gui95] S. GUILLERMOU, *Classe de Lefschetz des paires elliptiques*, C. R. Acad. Sci. Paris **319** (1994), 355–360, et thèse Univ. Paris 6, Duke Math. Journal, à paraître.

[Gui96] S. GUILLERMOU, *Indice d'un $\mathcal{D}$-module transversalement elliptique*, C. R. Acad. Sci. Paris (1996), à paraître.

[H-S84] C. HOUZEL, P. SCHAPIRA, *Images directes des modules différentiels*, C. R. Acad. Sci. Paris **298** (1984), 461–464.

[Il71] L. ILLUSIE, *Complexe cotangent et déformations I*, Lecture Notes in Math. vol. 239, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1971.

[Iv76] B. IVERSEN, *Local Chern classes*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **9** (1976), 155–169.

[Jo92] R. JOSHUA, *Riemann-Roch for equivariant $\mathcal{D}$-modules-I*, Math. Z. **206** (1991), 131–144.

[Ka70] M. KASHIWARA, *Algebraic study of systems of partial differential equations*, Master thesis, Tokyo, 1970, trad. anglaise Mém. Soc. Math. France vol. 63, 1995.

[Ka76] M. KASHIWARA, *B-functions and holonomic systems*, Invent. Math. **38** (1976), 33–53.

[Ka84] M. KASHIWARA, *The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems*, Publication R.I.M.S. Kyoto Univ. **20** (1984), 319–365.

[K-K81] M. KASHIWARA, T. KAWAI, *On the holonomic systems of differential equations (systems with regular singularities) III*, Publication R.I.M.S. Kyoto Univ. **17** (1981), 813–979.

[K-S82] M. KASHIWARA, P. SCHAPIRA, *Microlocal study of sheaves*, Astérisque vol. 128, Société Mathématique de France, Paris, 1985, voir aussi C. R. Acad. Sci. **295** (1982) 487–490.

[K-S90] M. KASHIWARA, P. SCHAPIRA, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 292, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1990.

[Lau83] G. LAUMON, *Sur la catégorie dérivée des $\mathcal{D}$-modules filtrés*, Springer Lect. Notes in Math. **1016** (1983), 151–237.

[Le87] R. N. LEVY, *Riemann-Roch theorem for complex spaces*, Acta Math. **158** (1987), 149–188.

[MP74] R. D. MACPHERSON, *Chern classes for singular varieties*, Annals of Math. **100** (1974), 423–432.

[M-V86] R. D. MACPHERSON, K. VILONEN, *Elementary construction of perverse sheaves*, Invent. Math. **84** (1986), 403–435.

[M-V88] R. D. MACPHERSON, K. VILONEN, *Perverse sheaves with singularities along the curve $y^n = x^m$*, Comment. Math. Helv. **63** (1988), 89–102.

[Mai87] PH. MAISONOBE, *Faisceaux pervers dont le support singulier est une courbe plane*, Compositio Math. **62** (1987), 215–261.

[Ma78] B. MALGRANGE, *L'involutivité des caractéristiques des systèmes différentiels et microdifférentiels*, in *Séminaire Bourbaki*, Springer Lect. Notes in Math. **710** (1978), exposé n° 522.

[Ma85] B. MALGRANGE, *Sur les images directes de $\mathcal{D}$-modules*, Manuscripta Math. **50** (1985), 49–71.

[Ma90] B. MALGRANGE, *De Rham Complex and Direct Images of $\mathcal{D}$-Modules*, in *Eléments de la théorie des systèmes différentiels vol. 2*, les cours du CIMPA, Travaux en cours vol. 46, Hermann, Paris (1993), 1–13.

[Ma94] B. MALGRANGE, *Filtration des modules holonomes*, in *Analyse algébrique des perturbations singulières II, L. Boutet de Monvel ed.*, Travaux en cours, Hermann, Paris (1994), 35–41.

[Ma95] B. MALGRANGE, *Connexions méromorphes, II : le réseau canonique*, Invent. Math. **124** (1996), 367–387.

[Me84] Z. MEBKHOUT, *Une équivalence de catégories*, et *Une autre équivalence de catégories*, Compositio Math. **51** (1984), 55–62 et 63–68.

[Me87] Z. MEBKHOUT, *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathcal{D}$-modules cohérents*, Travaux en cours vol. 35, Hermann, Paris, 1989.

[Na88] L. NARVÁEZ MACARRO, *Cycles évanescents et faisceaux pervers : cas des courbes planes irréductibles*, Compositio Math. **65** (1988), 321–347.

[O-T-T81] N. R. O'BRIAN, D. TOLEDO, Y. L. TONG, *The trace map and characteristic classes for coherent sheaves*, Amer. J. Math. **103** (1981), 225–252.

[O-T-T81b] N. R. O'BRIAN, D. TOLEDO, Y. L. TONG, *Hirzebruch-Riemann-Roch for coherent sheaves*, Amer. J. Math. **103** (1981), 253–271.

[O-T-T81c] N. R. O'BRIAN, D. TOLEDO, Y. L. TONG, *Grothendieck-Riemann-Roch for complex manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **5** (1981), 182–184.

[O-T-T85] N. R. O'BRIAN, D. TOLEDO, Y. L. TONG, *A Grothendieck-Riemann-Roch formula for maps of complex manifolds*, Math. Ann. **271** (1985), 493–526.

[Ph79] F. PHAM, *Singularités des systèmes de Gauss-Manin*, Progress in Math. vol. 2, Birkhäuser, Boston, 1980.

[Sa89] M. SAITO, *Induced $\mathcal{D}$-modules and differential complexes*, Bull. Soc. Math. France **117** (1989), 261–283.

[S-K-K73] M. SATO, T. KAWAI, M. KASHIWARA, *Microfunctions and pseudo-differential equations*, Springer Lect. Notes in Math. **287** (1973), 265–529.

[Scha85] P. SCHAPIRA, *Microdifferential systems in the complex domain*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 269, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1985.

[Sch-Sch90] P. SCHAPIRA, J.-P. SCHNEIDERS, *Paires elliptiques I. Finitude et dualité*, C. R. Acad. Sci. Paris **311** (1990), 83–86 et 5–60 dans [Sch-Sch94].

[Sch-Sch91] P. SCHAPIRA, J.-P. SCHNEIDERS, *Paires elliptiques II. Classe d'Euler et indice*, C. R. Acad. Sci. Paris **312** (1991), 81–84 et 61–98 dans [Sch-Sch94].

[Sch-Sch94] P. SCHAPIRA, J.-P. SCHNEIDERS, *Index theorem for elliptic pairs*, Astérisque vol. 224, Société Mathématique de France, Paris, 1994 (voir aussi [Z-A93], 141–156).

[Schn86] J.-P. SCHNEIDERS, *Dualité pour les modules différentiels*, Thèse, Université de Liège, 1986.

[Schn94] J.-P. SCHNEIDERS, *A coherence criterion for Fréchet Modules*, dans [Sch-Sch94], 99–113.

[Schn94b] J.-P. SCHNEIDERS, *An introduction to $\mathcal{D}$-modules*, Bull. Soc. Royale Sci. Liège **63** (1994), 223–295.

[Su90] T. SUWA, *Complex analytic singular foliations*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. **37** (1990), 297–320.

[T-T86] D. TOLEDO, Y. L. TONG, *Green's theory of Chern classes and the Riemann-Roch formula*, in *Lefschetz centenial conference, part I*, Contemporary Math. **58** (1986), 261–275.

[Z-A93] G. ZAMPIERI, A. D'AGNOLO EDS., *$\mathcal{D}$-modules, representation theory and quantum groups*, Lecture Notes in Math. vol. 1565, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

Claude SABBAH
URA 169 du C.N.R.S.
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
F–91128 Palaiseau cedex
France

sabbah@math.polytechnique.fr