IVAN KUPKA

Géométrie sous-riemannienne

Astérisque, tome 241 (1997), Séminaire Bourbaki,
exp. n^{o} 817, p. 351-380
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__351_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 1996
48ème année, 1995-96, n° 817

GÉOMÉTRIE SOUS–RIEMANNIENNE

par **Ivan KUPKA**

INTRODUCTION

Les structures sous–riemanniennes (ou de Carnot–Caratheodory), notées SR dans la suite, ont été étudiées ou utilisées dans des domaines variés des mathématiques, en particulier en géométrie riemannienne, dans la théorie des opérateurs différentiels du second ordre, dans l'étude des équations différentielles stochastiques et de la diffusion, en mécanique des contraintes non–holonomes. Mais leur étude est aussi intéressante en elle–même.

La géométrie SR a déjà fait l'objet de divers travaux, mais la contribution la plus importante, de loin, à ce sujet est le long mémoire [Gr1] de Gromov, très riche en résultats et aperçus très intéressants et stimulants. Cependant, il est juste de dire que l'étude des structures SR est loin d'être achevée.

Bien que la géométrie riemannienne serve souvent de guide dans cette étude, ses résultats restent rarement vrais en géométrie SR et ses concepts ne sont pas toujours bien appropriés. Il y a deux différences radicales entre les deux géométries : ce sont le caractère anisotrope de la géométrie SR et sa nature non commutative, cette deuxième étant en partie conséquence de la première.

Pour conclure, je voudrais remercier ici A. Bellaïche et J.-J. Risler pour plusieurs discussions sur la géométrie SR, et plus particulièrement M. Gromov pour un entretien très intéressant et très illuminant.

0. PRÉLIMINAIRES

Dans cet exposé, on se placera dans la catégorie infiniment différentiable (ou C^∞) par souci de simplicité. En fait, la plupart des définitions ont un sens et la plupart des résultats sont valables dans les catégories analytiques réelles ou même analytiques complexes, car on peut définir des structures "sous–hermitiques". Nous laisserons au lecteur intéressé le soin de faire les modifications nécessaires, en général assez simples. Ceci ne nous empêchera pas, dans la suite de l'exposé, de faire des remarques relatives à la catégorie analytique réelle si elles présentent de l'intérêt.

Dans la suite, il sera commode d'utiliser les notations suivantes :

M : variété C^∞ connexe, sauf mention du contraire.

C_M : faisceau des fonctions C^∞ sur M, $C_{M,m}$: fibre de C_M en $m \in M$.

TM : son espace tangent, T_mM : sa fibre en m.

T^*M : espace cotangent de M, T^*_mM : sa fibre en $m \in M$.

$\pi_{TM} : TM \to M$, $\pi_{T^*M} : T^*M \to M$ les projections canoniques.

Si E désigne un fibré C^∞ sur M, $\underline{E}$ désignera le faisceau des germes de sections C^∞ de E.

Si $\mathcal{F}$ désigne $\underline{E}$ ou un sous–faisceau de $\underline{E}$, $\mathcal{F}_m$ sera la fibre de $\mathcal{F}$ en $m \in M$ et $\mathcal{F}[m] = \{e \in E \,|\, \text{il existe } \sigma \in \mathcal{F}_m \text{ telle que } \sigma(m) = e\}$.

Distributions : un sous–fibré C^∞ $\mathcal{D}$ de TM sera appelé distribution et un sous–fibré C^∞ Δ de T^*M, codistribution. Si $\mathcal{D}$ est une distribution sur M, désignons par Lie($\mathcal{D}$) le sous–faisceau d'algèbres de Lie de $\underline{TM}$, engendré par $\underline{\mathcal{D}}$.

Dans une algèbre de Lie, un élément sera appelé commutateur de degré n d'éléments d'un sous–ensemble de l'algèbre si c'est un monôme de Lie de degré n d'éléments de ce sous–ensemble et si n est minimal pour cette propriété.

On imposera à toutes les distributions considérées ici, sauf mention du contraire, la :

Condition du rang : $\mathcal{D}$ satisfait la condition du rang si, pour tout $m \in M$, $\text{Lie}(\mathcal{D})[m] = T_mM$.

Ces distributions sont l'extrême opposé des distributions intégrables.

Remarque 0.— Plus généralement, si $\mathcal{F}$ est un sous–faisceau de C_M–modules de $\underline{TM}$, on dira que $\mathcal{F}$ satisfait à la condition du rang si, en désignant par Lie ($\mathcal{F}$) le sous–faisceau d'algèbres de Lie de $\underline{TM}$ engendré par $\mathcal{F}$, on a en tout $m \in M$:

$$\text{Lie}\,(\mathcal{F})[m] = T_m\, M.$$

Métrique riemannienne g sur une distribution $\mathcal{D}$: g est une fonction $C^\infty : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dont la restriction à toute fibre $\mathcal{D}[m]$ est une forme quadratique positive définie.

1. LES STRUCTURES SR

DÉFINITION 0.— *Une structure SR sur une variété M est un couple $(\mathcal{D}, g)$ d'une distribution $\mathcal{D}$ satisfaisant la condition du rang et d'une métrique riemannienne g sur $\mathcal{D}$.*

Remarque 1.— Les données $(\mathcal{D}, g)$ permettent de définir une cométrique g^* sur T^*M, c'est-à-dire une fonction C^∞ $g^* : TM \to \mathbb{R}$ dont la restriction à chaque fibre $T^*_m M$ est une forme quadratique positive semi-définie : pour $z \in T^*_m M$, $g^*(z) = \max\left\{\frac{\langle v,z\rangle^2}{g(v)} \,\middle|\, v \in \mathcal{D}[m] - \{0\}\right\}$. $\langle\, ,\, \rangle$ est l'accouplement canonique $TM \times_M T^*M \to \mathbb{R}$. La donnée de g^* permet de déterminer à la fois $\mathcal{D}$ et g : $\mathcal{D}$ est l'annulateur du noyau de g^* et, pour $v \in \mathcal{D}[m]$, $g(v) = \min\{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, \langle v, z\rangle^2 \leq \lambda\, g^*(z) \text{ pour tout } z \in T^*_m M\}$.

Remarque 2.— La remarque précédente permet de généraliser la notion de structure SR : on se donne $g^* : T^*M \to \mathbb{R}$ qui, sur chaque fibre de T^*M, est une forme quadratique positive semi-définie. En lui imposant la condition suivante : si $\underline{\mathcal{D}}$ est le faisceau engendré par les champs de vecteurs V tels que, pour tout m du domaine de V, tout $z \in T^*_m M$ tel que $g^*(z) = 0$, on a $\langle V[m], z\rangle = 0$, alors $\underline{\mathcal{D}}$ satisfait la condition du rang.

g^* définit une structure $(\mathcal{D}, g)$ sur M. $\mathcal{D}$ est un sous-ensemble de TM, mais n'est plus un sous-fibré, en général. Il est défini comme suit : $\mathcal{D} = \cup_{m \in M} \mathcal{D}[m]$, $\mathcal{D}[m] \subset T_m M$, $\mathcal{D}[m] = \{v \,|\, \langle v, z\rangle = 0 \text{ pour tout } z \in T^*_m M, \text{ tel que } g^*(z) = 0\}$ et g est la fonction $\mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $g(v) = \min\{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, \langle v, z\rangle^2 \leq \lambda\, g^*(z) \text{ pour tout } z \in T^*_m M\}$, si $v \in \mathcal{D}[m]$. Certains des résultats exposés dans la suite sont valables pour ces structures, en particulier le Lemme de Chow et le théorème 0.

La donnée de la métrique g ne nous permet pas, contrairement au cas riemannien, de définir la longueur d'une courbe quelconque (même C^∞). Pour cela, on introduit les :

Courbes horizontales : une courbe horizontale est une courbe absolument continue $\varphi : I \to M$, I intervalle (non réduit à un point !) telle que, pour presque tout $t \in I$, le vecteur tangent $\frac{T\varphi}{dt}(t)$ appartient à $\mathcal{D}[\varphi(t)]$.

Longueur d'une courbe horizontale $\varphi : I \to M$: $\mathcal{L}(\varphi)$ désignera la valeur finie ou $+\infty$ de l'intégrale :

$$\int_I \sqrt{g\left(\frac{T\varphi}{dt}(t)\right)}\, dt$$

(si I est compact, clairement $\mathcal{L}(\varphi) < +\infty$).

Énergie d'une courbe horizontale : $\mathcal{E}(\varphi)$ désigne la valeur finie ou $+\infty$ de l'intégrale :

$$\frac{1}{2}\int_I g\left(\frac{T\varphi}{dt}(t)\right) dt.$$

Pour ces notions, introduites dans ce contexte par Gaveau, voir [Ga1].

Le lemme suivant, dit Lemme de Chow, est d'une importance capitale pour la suite.

LEMME DE CHOW.— *Si $(\mathcal{D}, g)$ est une structure SR, pour tout couple ordonné (x, y) de points de M, il existe une courbe horizontale $\varphi : [0,1] \to M$ telle que $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$.*

La preuve est facile (voir [Hö], [Mi], [N-S-W]).

Remarque 3.— Ce lemme, qui ne dépend pas de la métrique g, reste vrai pour les structures SR généralisées au sens de la remarque 2. Une courbe horizontale est une application absolument continue $\varphi : I \to M$, I intervalle, telle que, pour presque tout $t \in I$, $\frac{T\varphi(t)}{dt} \in \mathcal{D}\left[\varphi(t)\right]$.

2. EXEMPLES DE STRUCTURES SR

A) *Le modèle Heisenberg* : $\mathbb{R}^{2n+1}$ possède une structure de groupe naturelle H_n : si $(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, z)$ désignent les coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^{2n+1}$:

$$(x_1' \cdots x_n, y_1' \cdots y_n, z) \bullet (x_1', \cdots x_n', y_1', \cdots, y_n', z') =$$
$$(x_1 + x_1', \cdots, y_n + y_n', z + z' + \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i' - x_i' y_i)).$$

$\mathcal{D}$ sera la distribution invariante à gauche sur $\mathbb{R}^{2n+1}$, noyau de dz en 0 et g la métrique invariante à gauche sur $\mathcal{D}$ dont la valeur en 0 est $\sum_{i=1}^{n}(dx_i^2 + dy_i^2)$.

B) *Structures invariantes* : M est un groupe de Lie, $\mathcal{D}$ une distribution invariante à gauche dont la valeur $\mathcal{D}_1$ à l'origine engendre l'algèbre de Lie de G, g une métrique invariante à gauche sur $\mathcal{D}$. On pourrait aussi considérer les actions à droite.

Un cas particulier très important est le suivant : M est le groupe nilpotent simplement connexe d'une algèbre de Lie graduée $n = \oplus_{k=-1}^{\ell} n_k$, ℓ entier négatif, engendrée par n_{-1}, $\mathcal{D}$ la distribution invariante à gauche dont la valeur en l'unité de G est n_{-1}.

C) *Fibrés principaux* : soit V une variété munie d'une métrique riemannienne g_V. Le fibré des repères orthonormaux de (V, g_V) supporte une distribution naturelle : la distribution horizontale définie par la connexion de Levi–Civita de (V, g_V). Cette distribution vient munie d'une métrique riemannienne naturelle g, celle qu'on obtient en relevant g_V. Il n'est pas toujours vrai que $\mathcal{D}$ satisfait la condition du rang (considérer le cas d'une métrique g_V plate) ; mais génériquement il en sera ainsi. Cet exemple justifie l'emploi du qualificatif "horizontal" en géométrie SR.

D) *Structures de contact* : ce sont les structures SR telle que $\mathcal{D}$ est une distribution de contact.

3. LA STRUCTURE MÉTRIQUE DES ESPACES SR

Étant donnée une structure SR $(M, \mathcal{D}, g)$, le Lemme de Chow nous permet de définir une fonction distance d sur M. Si $(x, y) \in M \times M$:

$$d(x,y) = \min\{\mathcal{L}(\varphi) \mid \varphi : [a,b] \to M \text{ horizontale, } \varphi(a) = x,\ \varphi(b) = y\}.$$

Ceci est bien un nombre d'après le Lemme de Chow. Il est clair que d satisfait tous les axiomes d'une distance sauf peut-être le fait que $d(x,y) > 0$ si $x \neq y$. Ceci est bien vrai et on peut prouver le résultat plus fort suivant :

tout point $m \in M$ possède un voisinage ouvert V relativement compact et une métrique riemannienne G sur V telle que, pour tous $(x,y) \in V \times V$, $d(x,y) \geq d_G(x,y)$ (d_G = métrique définie par G). On obtient alors le théorème fondamental :

THÉORÈME 0.— *Une structure SR sur une variété M définit une métrique sur M qui induit la topologie originale de M. En particulier, M est paracompacte.*

Remarque 4.— i) Le théorème 0 est valable pour les structures SR généralisées de la remarque 2 ;

ii) dans [C-K-S], les auteurs démontrent, du moins dans le cas où M est un espace euclidien $\mathbb{R}^d$ et g^* est bornée, que pour $x, y \in M$:

$$d(x,y) = \sup\{|\varphi(x) - \varphi(y)| \mid \varphi \in C^\infty(M), g^*(d\varphi) \leq 1, \quad \varphi \text{ à support compact}\}.$$

La métrique d, en apparence analogue à celle définie par une métrique riemannienne, a un comportement très différent. Par exemple, dans le cas riemannien, il existe un voisinage ouvert de la diagonale Δ_M de $M \times M$ sur lequel la fonction distance est C^∞. Ceci est faux en général dans le cas sous–riemannien.

Puisque M est paracompacte, elle possède des métriques riemanniennes. Les fonctions distances définies par celles–ci sont toujours équivalentes (sur tout compact de M !), mais elles ne sont pas équivalentes à la distance sous–riemannienne d. Plutôt, on peut montrer assez facilement (voir [Gr1]) le résultat suivant :

PROPOSITION 0.— *Soit K un compact de M. Désignons par r le minimum des entiers n tels que les valeurs en m des commutateurs de degré $\leq n$ des germes de $\underline{\mathcal{D}}_m$ engendrent $T_m M$ pour tout $m \in K$. Alors pour toute métrique riemannienne G sur M, il existe une constante $C(K,G) > 0$, telle que :*

$$d(x,y) \leq C'(K,G)(d_G(x,y))^{\frac{1}{r}} \qquad \textit{pour tous } (x,y) \in K \times K.$$

Il est clair que cette estimée n'est intéressante que pour les petites valeurs de $d_G(x,y)$.

Hopf–Rinow : notons que le théorème classique de Hopf–Rinow est vrai pour les structures SR.

Problème ouvert : un problème intéressant ouvert (voir [Gr1], [Ha]) est de décider si la connaissance de l'espace métrique (M,d) permet de retrouver la structure tangente de M, la distribution $\mathcal{D}$ et la métrique g.

4. STRUCTURE DIFFÉRENTIELLE D'UNE STRUCTURE SR

Le rôle d'une structure tangente est de servir d'approximation (infinitésimale) à la structure de variété. Il est clair que la structure tangente classique ne remplit pas ce rôle vis–à–vis de la structure SR, car elle ne fait même pas intervenir celle–ci. Il faut donc redéfinir la notion de plan tangent. C'est ce que nous ferons dans ce paragraphe et, par là même, nous construirons les bases d'un calcul différentiel adapté aux structures SR. Le concept de plan tangent est lié à la notion de multiplicité d'une fonction en un point. Commençons par redéfinir celle–ci :

DÉFINITION 1.— *Si $m \in M$ et f est un germe de fonction en $\mathcal{M}$, la multiplicité $\mu(f)$ est le nombre entier ou nul suivant :*

$$\mu(f) = \min\{n \mid \textit{il existe } V_1, \cdots, V_n \in \underline{\mathcal{D}}_m \textit{ (répétitions permises) tel que } (\theta(V_1)\cdots\theta(V_n)f)(m) \neq 0\}.$$

$\theta(V)$ désigne la dérivation de Lie associée à V.
Si $f(m) \neq 0$, $\mu(f) = 0$. $\mu(0) = +\infty$.

La différence avec la définition classique est que, dans celle–ci, on prend les $V_1, \cdots, V_n$ dans $\underline{TM}_m$ tout entier. Donc la multiplicité SR est au moins égale à la multiplicité classique. μ a les propriétés bien connues d'une valuation sur $C_{M,m}$:

(i) $\mu(f+g) \geq \min(\mu(f), \mu(g))$; (ii) $\mu(\lambda f) = \mu(f)$ si $\lambda \in \mathbb{R}^*$; (iii) $\mu(fg) = \mu(f) + \mu(g)$ (ceci n'est pas tout à fait trivial).

À partir de là, on peut définir la multiplicité d'un germe V de champ de vecteurs en m : le nombre $\mu(V)$ est un entier de $\mathbb{Z}$:

$$\mu(V) = \max\left\{n \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \text{pour toute } f \in C_{M,m}\,,\ \mu(\theta(V)f) \geq \mu(f) + n\right\}$$
$$\mu(0) = +\infty.$$

On peut étendre cette définition aux opérateurs différentiels. μ possède les propriétés classiques :

(i) $\mu(V+W) \geq \min(\mu(V), \mu(W))$;

(ii) $\mu(fV) = \mu(f) + \mu(V)$ si $f \in C_{M,m}$;

(iii) $\mu([V,W]) \geq \mu(V) + \mu(W)$ (en général, on n'a pas égalité : il suffit de prendre deux champs V, W qui commutent).

Exemple.— Heisenberg H_1 : $\mu(x) = \mu(y) = 1$, $\mu(z) = 2$, $\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = -1$, $\mu\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = -2$.

μ définit une filtration sur l'algèbre de Lie, Lie$(\underline{\mathcal{D}}_m)$. Le gradué associé $Gr(\underline{\mathcal{D}}_m)$ est une algèbre de Lie graduée : si $v \in gr_p \mathcal{D}_m$ et $w \in gr_q(\underline{\mathcal{D}}_m)$, prenons $V \in v$, $W \in w$. D'après les propriétés de μ, $\mu([V,W]) \geq \mu(V) + \mu(W)$. Si $\mu([V,W]) > \mu(V) + \mu(W)$, alors $[v,w] = 0$. Si $\mu([V,W]) = \mu(V) + \mu(W)$, $[v,w]$ est égale à la classe de $[V,W]$ dans $gr_{p+q}(\underline{\mathcal{D}}_m)$. $gr(\mathcal{D}_m)$ est la somme directe $\widehat{\eta}_- \oplus \widehat{\eta}_0 \oplus \widehat{\eta}_+$ où $\widehat{\eta}_-$ (resp. $\widehat{\eta}_0$, $\widehat{\eta}_+$) est la somme des facteurs de degré ≤ -1 (resp. 0, ≥ 1). Chaque $\widehat{\eta}_-$, $\widehat{\eta}_0$, $\widehat{\eta}_+$ est une sous–algèbre de Lie de $gr(\underline{\mathcal{D}}_m)$. $\widehat{\eta}_-$ est une algèbre graduée nilpotente de dimension finie. $\widehat{\eta}_- = \oplus_{k\geq 1} \widehat{\eta}_{-k}$.

Il existe une application linéaire canonique $\delta_m : \mathcal{D}[m] \to \widehat{\eta}_{-1}$ définie comme suit : si $v \in \mathcal{D}[m]$, soit $V \in \mathcal{D}_m$ tel que $V(m) = v$. Alors $\delta_m(v)$ est la classe de V dans $\widehat{\eta}_{-1}$. On peut montrer facilement que cette classe est indépendante du choix de V. δ_m est injective, mais n'est pas surjective en général. Désignons par $\eta_{-1} \subset \widehat{\eta}_{-1}$ l'image de δ_m dans $\widehat{\eta}_{-1}$ et par $\eta_{(m)}$ la sous–algèbre de Lie de $\widehat{\eta}$, engendrée par η_{-1}. $\eta_{(m)}$ est une algèbre de Lie graduée, nilpotente de dimension finie : $\eta_{(m)} = \oplus_{k\geq 1}\eta_{-k}$. $\eta_{(m)}$ est appelée algèbre de Lie tangente à la structure $(\mathcal{D}, g)$ en m.

Désignons par $N_{(m)}$ le groupe nilpotent simplement connexe engendré par $\eta_{(m)}$. On met dessus la structure SR $(\Delta_{(m)}, \gamma_{(m)})$ invariante à gauche définie comme suit : $\Delta_{(m)}$ en l'élément neutre de $N_{(m)}$ coïncide avec l'espace η_{-1} et $\gamma_{(m)}$ est la métrique induite de g par δ_m. $(N_{(m)}, \Delta_{(m)}, \gamma_{(m)})$ est la structure tangente en m à $(M, \mathcal{D}, g)$, du moins en les points réguliers. Pour montrer cela, on va réaliser l'algèbre $\eta_{(m)}$ comme algèbre de champs de vecteurs dans un voisinage de m dans M. Mais d'abord, il nous faut définir les points réguliers.

Cas d'un espace riemannien : dans ce cas, $\mathcal{D} = TM$. On voit facilement qu'alors $\widehat{\eta}_- = \widehat{\eta}_{-1} = \eta_{-1} = \eta_{(m)} = T_mM$ avec sa structure d'algèbre de Lie commutative. $N_{(m)}$ est le groupe abélien T_mM, $\Delta_{(m)} = T_mM$ et γ_m est la restriction de g à T_mM.

Drapeau d'une structure SR $(\mathcal{D}, g)$ en un point $m \in M$: On définit par induction sur l'entier n une suite de sous–faisceaux de C_M–modules de Lie($\underline{\mathcal{D}}$) : $\underline{\mathcal{D}}^1 = \underline{\mathcal{D}}$ et, pour $n \geq 2$, $\underline{\mathcal{D}}^n$ est le sous–faisceau engendré par $\underline{\mathcal{D}}^{(n-1)}$ et $[\underline{\mathcal{D}}, \underline{\mathcal{D}}^{(n-1)}]$, où $[\underline{\mathcal{D}}, \underline{\mathcal{D}}^{(n-1)}]_m = \{[V, W] \mid V \in \underline{\mathcal{D}}_m, W \in \underline{\mathcal{D}}_m^{(n-1)}\}$. Le drapeau de $(\mathcal{D}, g)$ en m est la suite non–décroissante de sous–espaces de T_mM : $\underline{\mathcal{D}}^1[m] = \underline{\mathcal{D}}[m] \subset \underline{\mathcal{D}}^2[m] \subset \cdots \subset \underline{\mathcal{D}}^n[m] \subset \cdots$. La condition du rang implique qu'il existe un entier r tel que $\underline{\mathcal{D}}^r[m] = T_mM$.

DÉFINITION 2.— Points réguliers, points singuliers. *Un point $\overline{m} \in M$ est dit régulier si toutes les fonctions $m \in M \to \dim \mathcal{D}^k[m]$ sont constantes au voisinage de $\overline{m}$. Un point non régulier est dit singulier. Une structure SR sur M est dite régulière si tous les points de M sont réguliers.*

Remarque 5.— i) Toutes les fonctions $m \in M \to \dim \mathcal{D}^n[m]$ sont semi–continues inférieurement. Il résulte de là que l'ensemble des points réguliers d'une structure SR est un ouvert partout dense de M.

ii) Si la structure est régulière, les $\mathcal{D}^n[m]$, $m \in M$ sont les fibres d'un sous–fibré vectoriel $\mathcal{D}^n$ de TM.

Réalisation de $\eta_{(m)}$ comme algèbre de champs de vecteurs locaux sur M

Pour faire cette réalisation, nous avons besoin de coordonnées spéciales, dites privilégiées.

DÉFINITION 3.— Fonction privilégiée : *un germe de fonction $f \in C_{M,m}$ sera dit privilégié si $\mu(f) = \min\{k \mid df_m(\mathcal{D}^k[m]) \neq 0\}$.*

Un système de coordonnées $(x^1, \cdots, x^d) : U \to \mathbb{R}$ de M défini dans un voisinage ouvert U de m est dit privilégié en m si toutes les x^i, $1 \leq i \leq d$, sont privilégiées en m.

Un système de coordonnées privilégiées $(x^1, \cdots, x^d)$, sur un voisinage U de m, permet de réaliser la filtration μ de Lie$(\underline{\mathcal{D}})_m$ par une graduation : dans celle–ci, le poids de x^i, $1 \leq i \leq d$, est $\mu(x^i)$. Chaque $V \in$ Lie$(\underline{\mathcal{D}})_m$ possède un développement formel $V \sim \sum\{V_n \,|\, n \geq \mu(V)\}$, où chaque V_n est un champ homogène de degré n : $V_n = \sum_{i=1}^d P^i(x^1, \cdots, x^d) \frac{\partial}{\partial x^i}$. $P^i(x^1, \cdots, x^d)$ est un polynôme en les $x^1, \cdots, x^d$, homogène de degré $n + \mu(x^i)$.

Le champ de vecteur $V_{\mu(V)}$, partie initiale de V, sera désigné par $in(V)$. Il est indépendant du choix des coordonnées privilégiées en m. L'application $T\rho : \eta_{(m)} \to$ Lie$(\underline{\mathcal{D}})(U)$, $T\rho(v) = in(V)$ pour un représentant V de v, est bien définie et est un homomorphisme de l'algèbre $\eta_{(m)}$ dans Lie$(\underline{\mathcal{D}})(U)$. L'application linéaire $v \in \eta_{-1} \to T\rho(v)(m)$ envoie η_{-1} sur $\mathcal{D}[m]$ et coïncide avec δ_m^{-1}.

Comme $N_{(m)}$ est simplement connexe, $T\rho$ s'intègre et définit un germe d'action ρ de $N_{(m)}$ sur M en m. Cette action permet de comparer les structures SR $(M, \mathcal{D}, g)$ et $(N_{(m)}, \Delta_{(m)}, \gamma_{(m)})$ aux points respectifs m et 1.

À partir de ces considérations, on peut démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1.— *Si m est régulier, la limite de Gromov, quand λ tend vers $+\infty$, des espaces métriques pointés $(M, \lambda d, m)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, d la métrique associée à la structure $(\mathcal{D}, g)$, est l'espace métrique pointé $(N_{(m)}, \widehat{d}, 1)$, où $\widehat{d}$ est la métrique associée à la structure $(\Delta_{(m)}, \gamma_{(m)})$.*

Pour la preuve, voir [Gr1], [Bell], [Me], [Mi]. Les deux premiers articles cités contiennent des résultats très précis sur la comparaison des métriques d, $\widehat{d}$.

Ce théorème justifie les assertions que, dans le cas régulier, le "plan tangent" en m à la structure SR, $(\mathcal{D}, g)$, est la structure SR $(N_{(m)}, \Delta_{(m)}, \gamma_{(m)})$. Contrairement à ce qui se passe dans le cas riemannien où le groupe tangent $T_m M$ est abélien, ici l'espace tangent $N_{(m)}$ ne l'est plus. Ceci justifie déjà nos remarques sur le caractère non abélien de la géométrie SR.

Le cas d'un point singulier est plus compliqué. Il a été discuté par Bellaïche dans [Bell]. Dans ce cas, contrairement à ce qui se passe dans le cas régulier, $T\rho$ n'est plus injective et l'espace tangent est le quotient de $N_{(m)}$ par le sous–groupe engendré par le noyau de $T\rho$.

Dans la suite, on utilisera les notations suivantes :

Nombre $h(m)$: l'entier $h(m) = \sum_{k\geq 1} k \dim \{\mathcal{D}^k[m]/[\mathcal{D}^{k-1}[m]\}$ $(\mathcal{D}^0[m] = 0)$ est un invariant important. Au voisinage d'un point régulier, il est constant.

Exemple : dans le cas de Heisenberg H_1, $h(m) = 4$ pour tout $m \in \mathbb{R}^3$.

Champ de générateurs adaptés. Une suite $(e_1, \cdots, e_p)$ de champs de vecteurs sur M est appelé champ de générateurs adaptés à la structure SR $(\mathcal{D}, g)$ si :

1) pour tout m, $(e_1(m), \cdots, e_p(m))$ engendrent $T_m M$ et $(e_1(m), \cdots, e_q(m))$ engendrent $\mathcal{D}[m]$;

2) chaque e_j, $q+1 \leq j \leq p$ est un commutateur de degré δ_j de $(e_1, \cdots, e_q)$;

3) pour tous i, j, $1 \leq i < j \leq p$, il existe des fonctions a_{ij}^k, $1 \leq k \leq p$ telles que $[e_i, e_j] = \sum_{1\leq k\leq p} a_{ij}^k \, e_k$ et $a_{ij}^k = 0$ si $\delta_k > \delta_i + \delta_j$.

Boîtes de côté λ : soit $(e_1, \cdots, e_p)$ un champ de générateurs adaptés sur M. Une boîte de centre m et de côté λ associée à un champ de générateurs adaptés $(e_1, \cdots, e_p)$ est l'ensemble :

$$\mathrm{Box}_m[\lambda] = \left\{ \exp\left(\sum_{i=1}^{p} t^i \, e_i\right) \mid t^1, \cdots, t^p \in \mathbb{R}, \ |t^j| \leq \lambda^{\delta_j}, \ 1 \leq j \leq p \right\}.$$

Pour λ assez petit, cet ensemble est bien défini.

5. DIMENSION DE HAUSDORFF. BOULES SOUS–RIEMANNIENNES

Un invariant fondamental d'un espace topologique est sa dimension au sens de Hurewicz–Wallman. Pour une structure métrique, plus riche, on peut raisonnablement défendre la thèse que l'invariant analogue adapté à cette structure est la dimension de Hausdorff (voir [Ma] pour cette notion). En effet, c'est ce nombre qui permet d'identifier les différentes mesures : longueur, aire, volume, etc. Dans la géométrie riemannienne classique, pour des ensembles pas trop tératologiques, les notions de dimension topologique et dimension de Hausdorff coïncident. Il n'en est plus de même en géométrie SR.

Pour étudier la dimension de Hausdorff, on a besoin de bonnes estimées des boules SR. Celles–ci sont données par le théorème suivant de Nagel, Stein et Wainger, très utile dans un grand nombre de questions :

THÉORÈME DE LA BOULE–BOÎTE 2.— *Soit* $(e_1, \cdots, e_p)$ *un champ de générateurs adaptés pour la structure SR* $(\mathcal{D}, g)$ *sur* M*. Il existe deux fonctions positives, conti-*

nues, $C, r : M \to \mathbb{R}_+^*$ *telles que, pour tout* $m \in M$ *:*

$$\mathrm{Box}_m[C(m)^{-1}\rho] \subset B(m,\rho) \subset \mathrm{Box}_m[C(m)\rho],$$

si $\rho \leq r(m)$, *où* $B(m,\rho)$ *est la boule SR de centre* m *et de rayon* ρ *et* $\mathrm{Box}_m[\lambda]$ *est la boîte en* m *de côté* λ *construite sur le champ* $(e_1, \cdots, e_p)$.

Pour la preuve, voir [Gr1], [H-Le], [Mi], [N-S-W].

Une jolie conséquence de ce théorème est le corollaire suivant, très utile dans les applications :

COROLLAIRE.— *Choisissons un élément de volume sur* M. *Pour tout compact* K *de* M, *il existe une constante* C *telle que, pour tout* $m \in K$, *tout nombre réel positif* ρ *tel que* $B(m, 2\rho) \subset K$ *:*

$$\mathrm{vol}\, B(m, 2\rho) \leq C \,\mathrm{vol}\, B(m,\rho).$$

Ce lemme permet d'estimer commodément les dimensions de Hausdorff : on remplace les boules SR par des boîtes. Par exemple, soit $m \in M$ un point régulier. On peut alors choisir un champ de repères $(e_1, \cdots, e_d)$ adapté sur un voisinage V de m, c'est-à-dire un champ de générateurs adapté ayant un nombre de champs égal à la dimension de M. Les boîtes associées au champ $(e_1, \cdots, e_d)$ donnent le résultat suivant :

$$\dim_{Hau,m} M = h(m).$$

Si la structure SR sur M est régulière, M a la même dimension en tous ses points et $\dim_{Hau} M$ est la valeur constante de $h(m)$. En général, pour une structure non nécessairement régulière :

$$\dim_{Hau} M \leq \sup\{h(m) \mid m \in M\}.$$

On obtient des estimées analogues pour les sous–variétés lisses de M (voir [Gr1]).

Le cas d'un sous–ensemble compact $K \subset M$, de dimension topologique $\geq \dim M - 1$, est plus intéressant et plus difficile. Gromov, dans [Gr1], montre que : $\dim_{Hau} K \geq \dim_{Hau} M - 1$ en supposant $(\mathcal{D}, g)$ régulière.

Il choisit un ouvert U de M muni d'une projection π de U sur une variété U' de dimension dim $M - 1$ telle que $\pi(K \cap U) = U'$ et que les fibres de π sont des courbes horizontales. En utilisant, pour calculer les dimensions de Hausdorff, des boîtes construites sur un champ de repères dont un des vecteurs est tangent aux fibres de π, on obtient facilement le résultat.

Ce dernier résultat peut être généralisé dans le cas des structures de contact aux sous–ensembles compacts K de M de dimension topologique $k \geq \frac{\dim M+1}{2}$. Gromov utilise la même méthode que dans le cas de la codimension 1, mais impose aux fibres de π d'être de dimension dim $M - k$ et horizontales : une sous–variété V de M est dite horizontale si $T_m V \subset \mathcal{D}[m]$ pour tout $m \in V$. Pour être sûr qu'il existe assez de sous–variétés horizontales de dimension dim $M - k$, on impose à la structure d'être de contact.

On obtient le résultat :

PROPOSITION 1.— *Si la structure SR est de contact et si K est un sous–ensemble compact de M de dimension topologique au moins égale à $\frac{\dim M+1}{2}$, alors* $\dim_{Hau} K \geq \frac{\dim M+3}{2}$.

Inégalités isopérimétriques et de Sobolev

Une fois connue la dimension de Hausdorff, on peut espérer retrouver les inégalités isopérimétriques et de Sobolev de la théorie classique. C'est bien le cas.

Notons d'abord qu'il résulte du théorème de la boule–boîte que, pour une structure SR régulière sur M de dimension de Hausdorff N, la mesure de Hausdorff de dimension N notée mes_N est équivalente à la mesure de Lebesgue sur M définie pour n'importe quelle forme volume lisse sur M.

Inégalité isopérimétrique : soit M une variété compacte connexe munie d'une structure SR (D, g) régulière. Pour tout domaine D de M dont la frontière est une hypersurface H et tel que $\mathrm{mes}_N D \leq \frac{1}{2} \mathrm{mes}_N M$:

$$\mathrm{mes}_{N-1} H \geq C(\mathrm{mes}_N D)^{\frac{N-1}{N}},$$

où mes_{N-1} dénote la mesure de Hausdorff de dimension $N - 1$ (mesure déterminée par les *boules SR* évidemment). C est une constante indépendante de D. Pour plus de détails, voir [Gr1], [Va1].

Gromov démontre cette inégalité au moyen d'un résultat du type Lemme de Vitali. Plus précisément, en utilisant le corollaire du théorème de la boule-boîte, il recouvre (Lemme de Vitali) D par des boules B_i de rayon R_i, $1 \leq i \leq v$ disjointes, telles que les boules concentriques B_i' de rayon λR_i sont aussi disjointes et :

1) $\sum_{i=1}^{v} \operatorname{mes}(B_i \cap D) \geq \delta \operatorname{mes} D$; 2) $\operatorname{mes}(B_i \cap D) \geq \delta \operatorname{mes} B_i$; 3) $\operatorname{mes}(D \cap B_i') \leq \frac{1}{2} \operatorname{mes} B_i$, $1 \leq i \leq v$; 4) $\operatorname{mes}(D \cap B_i) \leq R_i \Gamma \operatorname{mes}_{N-1}(H \cap B_i')$, $1 \leq i \leq v$. λ est un nombre > 1 et Γ un nombre > 0 appropriés. Le résultat se déduit facilement de là.

Il est bien connu (voir [B-Z]) que, des inégalités isopérimétriques, on peut déduire les inégalités de Sobolev. Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction supposée de classe C^1 pour simplifier. Appelons $d_{\mathcal{D}} f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ la restriction de la différentielle $df : TM \to \mathbb{R}$ à $\mathcal{D}$. En tout point m de M, $d_{\mathcal{D}} f(m)$ appartient au dual $\mathcal{D}^*[m]$ de $\mathcal{D}[m]$ qui est isomorphe à $T_m^* M/\mathcal{D}^0[m]$, où $\mathcal{D}^0[m]$ est l'annulateur de $\mathcal{D}[m]$. On peut donc mesurer $d_{\mathcal{D}} f$ en utilisant la cométrique g^*. Soit $\langle d_{\mathcal{D}} f \rangle_{g^*}$ la fonction norme de $d_{\mathcal{D}} f$ pour g^*.

Pour une application C^1 $f : M \to V$, variété riemannienne, on dénote par $\langle d_{\mathcal{D}} f(m) \rangle$ la norme de l'application $df(m) : \mathcal{D}[m] \to T_{f(m)} V$ pour les métriques données sur $\mathcal{D}[m]$ et $T_m V$.

Inégalité de Sobolev : choisissons une forme volume sur M. Pour une fonction C^1 f :

$$\|f\|_{L^{p^*}} \leq C_p \, \|\langle d_{\mathcal{D}} f \rangle_g\|_{L^p}, \quad \text{où } 1 \leq p < N \text{ et } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

C_p est une constante dépendant de la structure SR, de la forme volume et de p.

Pour tout ceci, voir [Gr1], [Ste].

On a aussi le théorème de compacité de Rellich : *si la structure est régulière, M est compacte et V est une variété riemannienne compacte, pour tout $\varepsilon > 0$, toute constante $C > 0$, l'espace des applications C^1 $f : M \to V$ telles que $\|\langle d_{\mathcal{D}} f \rangle\|_{L^{N+\varepsilon}} < C$ est contenu dans l'espace $C^\eta(M, V)$ des applications $f : M \to V$ Hölder continues d'exposant $\eta = \varepsilon/N + \varepsilon$ et est relativement compact pour la topologie de la convergence uniforme.*

6. COMPARAISON DES STRUCTURES SR

Tout d'abord, notons le fait évident qu'étant données deux structures SR, il existe rarement des morphismes (au sens des catégories) de l'une dans l'autre. Mais même des applications vérifiant des conditions beaucoup plus faibles n'existent pas toujours. Gromov prouve, dans le cas d'une structure SR de contact sur M, la :

PROPOSITION 2.— *Si un plongement $h : \mathbb{R}^k \to M$ est continu au sens de Hölder, d'exposant α, et si $k > \frac{\dim M + 1}{2}$, alors $\alpha \leq \frac{\dim M + 1}{\dim M + 3}$.*

Ceci est une conséquence facile de la Proposition 1 du § 5 et du résultat élémentaire sur le comportement des dimensions de Hausdorff sous l'action des homéomorphismes Hölder–continus (voir [Ma]).

Pour comparer des structures métriques, la notion la plus adaptée est celle d'application lipschitzienne. Or le fait remarquable ici est qu'une application différentiable $f : V \to M$ où V, M sont munies de structures SR, n'est pas lipschitzienne en général. Pour simplifier, supposons que V est riemannienne et que M a une structure SR de contact $(\mathcal{D}, g)$. f ne sera lipschitzienne que si elle est horizontale, c'est–à–dire que, pour tout $v \in V$, $T_v f(T_v V) \subset \mathcal{D}_{f(v)}$. Une notion moins restrictive et techniquement utile est la suivante : on dira qu'une application $C^0 f : V \to M$ est horizontale par morceaux s'il existe une triangulation C^1 de V telle que la restriction de f à chaque simplexe fermé de la triangulation est C^1 et horizontale.

Gromov montre que les applications lipschitziennes dans la situation considérée sont abondantes si $\dim V \leq \frac{\dim M - 1}{2}$. Tout d'abord, on a deux théorèmes d'approximation, l'un disant que toute fonction continue peut être approchée par des fonctions horizontales par morceaux (nécessairement lipschitziennes) et l'autre, que toute fonction lipschitzienne peut être approchée par des fonctions lipschitziennes C^∞ avec préservation de la constante de Lipschitz à un facteur près qui ne dépend que de V, M et des structures.

D'autre part, on a aussi un théorème d'extension. Plus précisément :

PROPOSITION 3.— *Avec les hypothèses ci–dessus, supposons V compacte de dimension $k \leq \frac{\dim M - 1}{2}$ et M $(k-1)$–connexe. Toute application lipschitzienne $f_0 : W \to M$, W une sous–variété fermée de V avec ou sans bord, peut être étendue en une application Lipschitz $f : V \to M$, où :*

$$\mathcal{L}ip(f) \leq C\,\mathcal{L}ip(f_0).$$

$\mathcal{L}ip(g)$ désigne la constante de Lipschitz de g, C est une constante ne dépendant pas de f_0.

Cette proposition a un pendant très joli.

Extension du disque : *supposons M compacte, simplement connexe de dimension ≥ 5. Toute courbe fermée horizontale borde un disque dont l'aire sous-riemannienne est bornée par le carré de la longueur de la courbe à un facteur près ne dépendant que de M et de sa structure SR de contact.*

Ce résultat n'a pas, à l'heure actuelle, d'analogue en dimensions supérieures (si la courbe est remplacée par une variété horizontale).

La démonstration de la proposition se fait en triangulant C^1 la variété V de manière que W soit un sous–complexe et en "grimpant sur les squelettes". En utilisant un lemme d'extension d'applications horizontales par morceaux, cette extension est possible à cause de l'abondance des variétés horizontales (H est horizontale si l'injection $H \hookrightarrow M$ est horizontale). Ces variétés se paramètrent très commodément par les fonctions génératrices. Elles se déforment donc facilement. Dans le langage de Gromov, cela se traduit par le fait que les faisceaux d'applications horizontales sont flexibles (voir [Gr2]). Le fait que l'application f_0 ne soit pas C^1 par morceaux n'a pas de conséquence, car on peut l'étendre à un voisinage U de W, de manière à ce que l'extension soit C^1 sur $U - W$.

7. EXTENSION DES RÉSULTATS DES PARAGRAPHES PRÉCÉDENTS À DES STRUCTURES GÉNÉRALISANT LES STRUCTURES DE CONTACT

Les résultats précédents sont pour la plupart limités au cas où la structure SR sur M est de contact. Mais Gromov étend ces théorèmes à des structures plus générales.

Application β : on peut définir une application bilinéaire du produit fibré $\mathcal{D} \times_M \mathcal{D}$ dans le fibré quotient $\frac{TM}{\mathcal{D}}$ comme suit : si $(u, v) \in \mathcal{D}[m] \times \mathcal{D}[m]$, il existe $X, Y \in \underline{\mathcal{D}}_m$ tels que $X(m) = u$, $Y(m) = v$. La classe dans $\frac{T_mM}{\mathcal{D}[m]}$ de la valeur du crochet $[X, Y]$, $[X, Y](m)$ ne dépend que de u et v. On désignera par $\beta(u, v)$ cette classe.

On considère alors les structures SR sur M qui satisfont à la propriété suivante : $\mathcal{D}$ contient un sous–fibré Δ tel que : i) $\beta(\Delta \times_M \Delta) = 0$; ii) si $\mathrm{Hom}(\Delta, TM/\mathcal{D})$ désigne le fibré vectoriel associé aux fibrés Δ et $TM/\mathcal{D}$ et de fibre en $m \in M$, l'espace $\mathrm{Hom}(\mathcal{D}[m], T_mM/\mathcal{D}[m])$ des applications linéaires $\mathcal{D}[m] \to T_mM/\mathcal{D}[m]$, alors l'application $\beta_1 : \mathcal{D} \to \mathrm{Hom}(\Delta, TM/\mathcal{D})$ induite par β est surjective : si $u \in \mathcal{D}[m]$, $\beta_1(u)(v) = \beta(u, v)$ pour tout $v \in \Delta[m]$.

Remarque 6.— Toute structure SR de contact vérifie ces conditions. Il suffit pour cela de prendre pour Δ un sous–fibré lagrangien de $\mathcal{D}$ pour la structure symplectique le long des fibres $\mathcal{D}[m]$ de $\mathcal{D}$ induite par la structure de contact. De tels fibrés existent toujours.

La proposition 1 se généralise ainsi :

PROPOSITION 4.– *Supposons que la structure SR de M soit régulière et vérifie les* i) *et* ii) *ci-dessus. Si $F \subset M$ est un sous-ensemble fermé de dimension topologique $d-k$ ($d = \dim\operatorname{top} M$) et si le rang de Δ est k, on a :*

$$\dim_{Hau} F \geq \dim_{Hau} M - k.$$

Plus généralement, si δ est le rang de Δ, on a l'estimée :

$$\dim_{Hau} F \geq \dim_{Hau} M - \delta - r(k-\delta),$$

où r est le plus petit entier t tel que $\mathcal{D}^t = TM$.

De même, la proposition 3 admet la généralisation suivante :

PROPOSITION 5.– *Supposons que la structure SR de M soit régulière et qu'elle admette un fibré Δ vérifiant les conditions* i) *et* ii). *Soit S un complexe simplicial de dimension $\leq$ rang Δ. Alors toute application lipschitzienne $f_0 : S_0 \to M$ définie sur un sous-complexe S_0 de S a une extension lipschitzienne si elle a une extension continue.*

8. THÉORIE DE DE RHAM POUR LES STRUCTURES SR

Un analogue SR du complexe de de Rham a été introduit par Rumin pour une structure de contact définie par une forme de contact ω pour fixer les idées. Désignons par Λ_M, $\Lambda\mathcal{D}^*$ les fibrés des algèbres extérieures sur T^*M et $\mathcal{D}^*$ respectivement ; $\underline{\Lambda}_M$, $\underline{\Lambda\mathcal{D}^*}$ les faisceaux de germes de sections C^∞ associés, I_ω le faisceau d'idéaux différentiels de $\underline{\Lambda}_M$ engendré par ω, A_ω le faisceau d'idéaux annulateurs de I_ω : $A_\omega = \{\alpha \in \underline{\Lambda}_M \mid \alpha \wedge I_\omega = 0\}$. On suppose dans ce paragraphe que M est compacte.

Le faisceau quotient $\underline{\Lambda}_M/I_\omega$ et le faisceau d'idéaux A_ω sont des complexes différentiels gradués, les différentielles dans les deux cas étant induites par la différentielle extérieure. D'après le lemme de Lefschetz, l'homomorphisme de fibrés vectoriels $\Lambda^k\mathcal{D}^* \to \Lambda^{k+2}\mathcal{D}^*$ induit par la multiplication par $d\omega$ est injectif pour $k \leq \mu - 1$ et surjectif pour $k \geq \mu - 1$, où $\mu = \frac{1}{2}(\dim M - 1)$. Ceci entraîne que : $\underline{\Lambda}^k_M/I^k_\omega = 0$ si $k > \mu$ et $A^k_\omega = 0$ si $k \leq \mu$. (Noter que $\underline{\Lambda}^k_M/I^k_\omega \simeq \underline{\Lambda^k\mathcal{D}^*}/(d\omega \wedge \underline{\Lambda^{k-2}\mathcal{D}^*})$ et $A^k_\omega \subseteq \operatorname{Ker}(d\omega_\Lambda : \underline{\Lambda^k\mathcal{D}^*} \to \underline{\Lambda}^{k+2}\mathcal{D}^*)$, où les identifications sont induites par la projection $T^*M \to \mathcal{D}^*$.)

On obtient ainsi deux moitiés de complexes, l'une en dimensions inférieures et l'autre en dimensions supérieures. Rumin les met bout à bout pour en faire un complexe :

$$(R)\quad 0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{d} \underline{\Lambda}_M^0/I_\omega^0 \xrightarrow{d} \underline{\Lambda}_M^1/I_\omega^1 \to \cdots \to \underline{\Lambda}_M^\mu/I_\omega^\mu \xrightarrow{D} A_\omega^{\mu+1} \xrightarrow{d} \quad \to A_\omega^{2\mu+1} \to 0$$

en introduisant un nouvel opérateur $D : \underline{\Lambda}_M^\mu/I_\omega^\mu \to A_\omega^{\mu+1}$ de la manière suivante : si $[\alpha]$ est une classe de $\underline{\Lambda}_M^\mu/I_\omega^\mu$, où $\alpha \in \underline{\Lambda}_M^\mu$, $[\alpha] = \{\alpha + \omega\wedge\beta + d\omega\wedge\gamma \,|\, \beta \in \underline{\Lambda}_M^{\mu-1}, \gamma \in \underline{\Lambda}_M^{\mu-2}\}$, on va montrer qu'il existe une $\alpha' \in [\alpha]$ telle que $d\alpha' \in A_M^{\mu+1}$. On posera alors $D[\alpha] = d\alpha'$. Que $d\alpha'$ ne dépende pas du choix de α' résulte du lemme de Lefschetz : si $\alpha'' \in [\alpha]$ et $d\alpha'' \in A_M^{\mu+1}$, $\alpha'' = \alpha' + \omega\wedge\beta + d\omega\wedge\gamma$ et $\omega\wedge d\omega\wedge(\beta + d\gamma) = 0$. De là, il résulte que $\beta + d\gamma = \omega\wedge\eta$ et $d\alpha'' - d\alpha' = 0$. Notons ici le fait remarquable que D est un opérateur d'ordre 2 et non 1.

Pour construire α', notons d'abord que si on trouve $\alpha' \in [\alpha]$ telle que $\omega\wedge d\alpha' = 0$, alors $d\alpha' \in A_\omega^{\mu+1}$. En effet, $0 = d(\omega\wedge d\alpha') = d\omega\wedge d\alpha'$. $d\alpha$ appartient à $\underline{\Lambda}_M^{\mu+1}$ et, d'après le théorème de Lefschetz cité ci-dessus, on peut trouver $\beta \in \underline{\Lambda}_M^{\mu-1}$, $\rho \in \underline{\Lambda}_M^\mu$, telles que $d\alpha + d\omega\wedge\beta = \omega\wedge\rho$. Posons $\alpha' = \alpha + \omega\wedge\beta$. $\alpha' \in \underline{\Lambda}_M^\mu$ et $d\alpha' = d\alpha + d\omega\wedge\beta - \omega\wedge d\beta = \omega\wedge(\rho - d\beta)$. Donc $\omega\wedge d\alpha' = 0$.

On peut démontrer sans trop de peine que le complexe (R) est exact. Étant fin, la cohomologie de l'espace de ses sections est la cohomologie réelle de M. Rumin étend la théorie de de Rham–Hodge au complexe (R) dans le cas où la métrique g est adaptée à ω. Cela veut dire que $g(X,Y) = d\omega(X, JY)$ où J est une structure presque complexe sur $\mathcal{D}$ telle que $d\omega(JX, Y) + d\omega(X, JY) = 0$ pour tous les couples $(X,Y) \in \mathcal{D}\times_M \mathcal{D}$. On peut alors prolonger la métrique g en une métrique riemannienne $\widetilde{g}$ sur M : $\widetilde{g}(X,Y) = \omega(X)\,\omega(Y) + d\omega(X, \widetilde{J}Y)$, où $\widetilde{J} : TM \to TM$ est l'opérateur défini ainsi ; il existe un unique champ de vecteurs Z sur M tel que $\omega(Z) = 1$ et $i(Z)d\omega = 0$, et l'on a $TM = \mathcal{D}\oplus_M \mathbb{R}Z$. On pose $\widetilde{J}|\mathcal{D} = J$, $\widetilde{J}(Z) = Z$.

La métrique $\widetilde{g}$ permet de définir un opérateur de Hodge $* : \underline{\Lambda}_M \to \underline{\Lambda}_M$. On montre que $A_\omega^{\mu+k}$ est l'orthogonal de $I_\omega^{\mu-k}$ pour $*$, $0 \le k \le \mu$. Ceci permet de définir $*$ sur le complexe (R) et les opérateurs adjoints :

$$\begin{aligned} d^* &= (-1)^k * d * && \text{si } k \neq \mu + 1 \\ D^* &= (-1)^{\mu+1} * D * && \text{si } k = \mu + 1. \end{aligned}$$

Comme dans la théorie classique, on introduit un laplacien Δ :

$$\Delta = \begin{cases} (\mu - k)\, dd^* + (\mu - k + 1)\, d^*d & \text{sur } \underline{\Lambda}_M^k/I_\omega^k,\ 0 \le k \le \mu - 1 \\ (\mu - k + 1)\, dd^* + (\mu - k)\, d^*d & \text{sur } A_\omega^k,\ (\mu + 2) \le k \le 2\mu + 1 \\ (dd^*)^2 + D^*D & \text{sur } \underline{\Lambda}_M^\mu/I_\omega^\mu \\ DD^* + (d^*d)^2 & \text{sur } A_\omega^{\mu+1} \end{cases}$$

Remarques 7.— i) La présence du carré $(d^*d)^2$ est due au fait que D est un opérateur d'ordre 2.

ii) Il y a une certaine latitude dans le choix des coefficients $\mu - k$, $\mu - k + 1$. Avec le choix ci–dessus, la partie principale de Δ préserve la bigraduation donnée par la théorie de Hodge mentionnée ci–dessous.

L'opérateur Δ défini ci–dessus n'est pas elliptique mais seulement hypoelliptique. Ceci est suffisant pour étendre la théorie de de Rham au complexe (R). En particulier, toute classe de cohomologie réelle de M est représentable par une forme Δ–harmonique et l'espace vectoriel de ces formes est isomorphe à la cohomologie réelle de M.

Mais Rumin va plus loin et définit une structure de Hodge sur le complexe (R). L'opérateur J défini ci–dessus munit M d'une structure CR et d'une métrique presque hermitique $h : TM \times_M TM \to \mathbb{C}$, $h(X,Y) = \widetilde{g}(X,Y) + id\omega(X,Y)$. On peut alors définir des opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ et les laplaciens correspondants et construire une théorie de Hodge.

9. CONCLUSION DE LA PARTIE GÉOMÉTRIQUE

Le travail [Gr1] contient de très nombreux résultats très intéressants et importants. Ici nous n'avons pu donner qu'une petite idée de ceux–ci et nous avons choisi de parler de ceux qui nous paraissaient les plus simples et les plus faciles à exposer.

D'autres résultats de [Gr1], non discutés ici, portent sur l'estimation métrique des invariants d'homologie et d'homotopie, sur l'homologie horizontale et le théorème de Thom (voir [Th]), et enfin sur la théorie de la gauge en géométrie SR.

Parmi d'autres travaux sur la géométrie SR sur des sujets différents des précédents, mentionnons :

i) le travail de Pansu [P], où il utilise les structures SR, et en particulier les "applications tangentes", pour étudier les quasi–isométries et les homéomorphismes conformes des espaces symétriques de rang 1 ;

ii) la définition et la classification des espaces sous–riemanniens symétriques de Falbel, Gorodski et Rumin dans [Fa-G], [Fa-G-R] ;

iii) l'étude des limites des variétés riemanniennes dans [G-L-P].

10. COURBES MINIMISANTES. GÉODÉSIQUES

DÉFINITION 4.— *Une courbe minimisante est une courbe horizontale $\varphi : [a,b] \to M$ telle que $\mathcal{L}(\varphi) \leq \mathcal{L}(\psi)$ pour toute courbe horizontale $\psi : [c,d] \to M$ telle que $\psi(c) = \varphi(a)$, $\psi(d) = \varphi(b)$.*

Remarque 8.— Si φ est minimisante, la restriction de φ à tout sous–intervalle fermé l'est aussi.

Dans le cadre riemannien, toute courbe minimisante est la projection d'une extrémale. Ces courbes peuvent être définies de deux façons, équivalentes bien sûr, dépendant du cadre lagrangien ou hamiltonien où on se place. Ici, on utilisera ce dernier, qui est plus adapté au cas sous–riemannien. Le formalisme lagrangien, dans le cas sous–riemannien, exige l'introduction de multiplicateurs de Lagrange, ce qui le rend plus lourd. Si $H = \frac{1}{2}\,g^*$, où g^* est la cométrique de g, les extrémales sont les trajectoires du champ hamiltonien $\vec{H}$ de H (pour la structure symplectique canonique sur T^*M).

Pour une structure SR $(\mathcal{D}, g)$ sur M, la situation est très différente. Le calcul des variations montre qu'il existe deux classes de courbes minimisantes. La première, la plus commune, généralise le cas riemannien : ce sont les courbes qui sont projections de trajectoires du champ hamiltonien $\vec{H}$ de $H = \frac{1}{2}\,g^*$, où g^* est la cométrique de g, sur lesquelles H est non nul. La deuxième classe plus subtile n'a été découverte que récemment par Montgomery ([Mon]).

Désignons par $\mathcal{D}^0$ le sous–fibré vectoriel de T^*M, annihilateur de $\mathcal{D}$ et considérons–le comme sous–variété de T^*M. En général, la restriction de la forme symplectique canonique ω de T^*M à $\mathcal{D}^0$ (plus précisément à $T\mathcal{D}^0 \times_{\mathcal{D}^0} T\mathcal{D}^0$), n'est plus symplectique. Désignons cette restriction par $\omega_{\mathcal{D}^0}$.

DÉFINITION 5.— *Une courbe caractéristique de $\mathcal{D}^0$ est une courbe absolument continue $\varphi : I \to \mathcal{D}^0$, I intervalle non réduit à un point, telle que, pour presque tout $t \in I$, $\frac{T\varphi}{dt}(t)$ appartient au noyau de $\omega_{\mathcal{D}^0}\big|_{\varphi(t)}$.*

Remarque 9.— Ce n'est là qu'un cas particulier d'une définition de Cartan appliquée au système différentiel $\omega_{\mathcal{D}^0}$ sur $\mathcal{D}^0$.

La deuxième classe de courbes minimisantes est formée des courbes horizontales qui sont projections de courbes caractéristiques contenues dans $\mathcal{D}^0 - O_M$. Notons d'ailleurs que l'intersection des deux classes de courbes minimisantes n'est pas vide : une courbe minimisante peut avoir deux relèvements différents dans T^*M, l'un, trajectoire de $\vec{H}$, l'autre, courbe caractéristique de $\mathcal{D}^0$.

Exemple.— $M = \mathbb{R}^3$ avec coordonnées canoniques (x, y, z), $\mathcal{D} = \operatorname{Ker}(dz - \frac{y^2}{2}\, dx)$, $g = dx^2 + dy^2 \,|\, \mathcal{D}$. $\varphi : \mathbb{R} \to M$, $\varphi(t) = (t, 0, 0)$. Si $p, q, r : T^*M \to \mathbb{R}$ sont les coordonnées duales de dx, dy, dz, une trajectoire de $\vec{H}$, contenue dans $TM - O_M$, relèvement de φ, est $\Phi(t) : x = t,\ y = z = 0,\ p = 1,\ q = r = 0$ (ce n'est pas le seul relèvement trajectoire de $\vec{H}$). Une courbe caractéristique dans $\mathcal{D}^0 - O_M$, relèvement de φ, $\Psi(t) : x = t,\ y = z = 0,\ p = q = 0,\ r = 1$.

Structures de contact : si la structure SR est de contact, $\mathcal{D}^0$ est un fibré en droites réelles et $\mathcal{D}^0 - O_M$ est une sous–variété symplectique de T^*M. Donc il n'existe pas de géodésiques exceptionnelles dans ce cas.

Dans la suite, on appellera géodésique ordinaire, ou simplement géodésique, la projection d'une trajectoire de $\vec{H}$ contenue dans $TM - O_M$ et géodésique exceptionnelle une courbe horizontale, projection d'une caractéristique de $\mathcal{D}^0$ contenue dans $\mathcal{D}^0 - O_M$.

Quelle est la signification des géodésiques exceptionnelles ?

La notion de courbe caractéristique n'est pas très géométrique. Celle de géodésique exceptionnelle l'est beaucoup plus. Pour le voir, considérons le cas "local" où M est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{D}$ est le noyau d'une forme vectorielle $\omega : TM \to \mathbb{R}^c$. Étendons la métrique SR $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ en une métrique riemannienne sur M telle que ω soit isométrique sur les vecteurs orthogonaux à $\mathcal{D}$. Soient $H^1(M; a, b)$, $a, b \in M$ l'espace des courbes $\varphi : [0, 1] \to M$ d'énergie finie telles que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$, et $\operatorname{Hor}(\mathcal{D}, a, b)$ le sous–ensemble des courbes horizontales dans $H^1(M; a, b) : Hor(\mathcal{D}, a, b) = \widetilde{\omega}^{-1}(0)$, où $\widetilde{\omega}(\varphi) = \omega\left(\frac{T\varphi}{dt}\right)$. $H^1(M; a, b)$ et $L^2([0, 1]; \mathbb{R}^c)$ sont des variétés hilbertiennes et $\widetilde{\omega}$ est une application C^∞. Alors les géodésiques exceptionnelles sont les singularités de l'application $\widetilde{\omega}$ situées sur la variété de niveau $\widetilde{\omega} = 0$.

11. GÉODÉSIQUES ORDINAIRES

Une différence fondamentale entre les géodésiques (ordinaires) dans les cas sous–riemannien et riemannien est que, dans le cas sous–riemannien, une géodésique n'est pas déterminée par son vecteur tangent initial, mais par son covecteur initial : c'est le point initial d'une trajectoire de $\vec{H}$, relèvement de la géodésique. Plus précisément, si

z est ce covecteur initial, le vecteur tangent initial v est déterminé par la condition :

$$\langle w, v\rangle_g = \langle w, z\rangle \quad \text{pour tout } w \in \mathcal{D}[\pi_{T^*M}(z)].$$

Dans le cas riemannien, cette condition détermine aussi z si v est connu et la correspondance $v \to z$ n'est autre que la transformation de Legendre associée à la métrique g. En sous–riemannien, ce n'est plus vrai et les paramètres de z non déterminés par v sont des invariants différentiels d'ordre ≥ 2 de la géodésique. On peut quelquefois les interpréter comme des courbures.

Minimalité des petits arcs de géodésiques ordinaires : comme en géométrie riemannienne, on a :

PROPOSITION 6.— *Soit $\varphi : [a,b] \to M$ une géodésique ordinaire de la structure SR $(\mathcal{D}, g)$ paramétrée par la longueur d'arc. Pour tout $t \in [a,b]$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que la restriction de φ à $[a,b] \cap [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ est minimisante.*

La preuve est facile, analogue au cas riemannien (voir [Ha]).

Application exponentielle : on peut définir, pour tout $m \in M$, une application $\exp_m : O \to M$ où O est un ouvert de T_m^*M tel que $O \cap \{H = 0\} = 0_m$ (le zéro de T_mM). Notons que l'ensemble $\{H = 0\}$ dans T_m^*M n'est autre que l'annulateur $\mathcal{D}^0[m]$ de $\mathcal{D}[m]$. Si $z \in O$, $z \neq 0_m$, $\exp_m(z) = \pi_{T_m^*M}(\varphi(\sqrt{2H(z)}, \bar{z}))$ si $\varphi(\sqrt{2H(z)}, \bar{z})$ est défini, où $t \to \varphi(t, \bar{z})$ est la trajectoire de $\vec{H}$ telle que $\frac{T\varphi}{\partial t}(0, \bar{z}) = \bar{z} = z/\sqrt{2H(z)}$ et $\exp_m(0_m) = m$.

Cette application n'a malheureusement pas les bonnes propriétés de l'application exponentielle classique. En effet, en général :

1) l'image de $\exp_m$ ne contient pas un voisinage de O et, en particulier $\exp_m$ n'est pas un difféomorphisme local en $0_m \subset T_m^*M$.

2) Si $z \in \{H = \frac{1}{2}\} \cap T_m^*M$, appelons premier point conjugué de z et dénotons par $pc(z)$, le point $\exp_m(t_c z)$, s'il existe, tel que $\exp_m$ soit un difféomorphisme local en tz pour tout t, $0 < t < t_c$, et que ce ne soit pas le cas pour $t = t_c$. Alors il existe un compact $K \subset T_m^*M$ tel que : i) pour $z \notin K \cap \{H = \frac{1}{2}\}$, $pc(z)$ est défini et tend vers m quand z tend vers l'infini dans $\{H = \frac{1}{2}\} \cap T_m^*M$. Ceci entraîne que l'étude du lieu conjugué est en partie un problème local, contrairement à ce qui se passe en géométrie riemannienne. Malgré cela, peu de travaux ont été consacrés à cette étude (voir [Ag], [E-G-K]).

12. GÉODÉSIQUES EXCEPTIONNELLES

Elles sont beaucoup plus rares que les ordinaires et ne définissent pas d'application exponentielle. Plus précisément, appelons "caractéristique horizontale" toute caractéristique qui se projette sur une courbe horizontale, par souci de commodité et distinguons deux cas suivant la parité du rang de $\mathcal{D}$. Dans le cas impair, pour une distribution $\mathcal{D}$ générique, il existe un ouvert O de $\mathcal{D}^0$ dont le complémentaire est de codimension 1 dans $\mathcal{D}^0$ et un champ de droites δ sur O tangent à $\mathcal{D}^0$, tels que toute caractéristique horizontale contenue dans O est une courbe intégrale de δ. Dans le cas pair, génériquement il existe un ensemble stratifié Σ de $\mathcal{D}^0$, de codimension 1 dans $\mathcal{D}^0$, et sur la réunion O des strates de codimension 1 de Σ, un champ de droites δ tangent à Σ : toute caractéristique horizontale est contenue dans Σ et si elle est contenue dans O, c'est une courbe intégrale de δ. Dans la suite, on appellera les caractéristiques horizontales contenues dans O, génériques et leurs projections, géodésiques exceptionnelles génériques.

La notion de géodésique exceptionnelle est apparentée à une autre notion : celle de courbe horizontale rigide.

DÉFINITION 6.— *Une courbe horizontale C^1 $\varphi : [a,b] \to M$ est dite rigide s'il existe un voisinage U de φ dans l'espace $C^1([a,b];M)$ muni de la topologie C^1 tel que si ψ est une courbe horizontale C^1 appartenant à U, telle que $\psi(a) = \varphi(a)$, $\psi(b) = \varphi(b)$, alors il existe un difféomorphisme C^1 $f : [a,b] \to [a,b]$ tel que $\psi = \varphi \circ f$.*

Minimalité et rigidité des petits arcs de géodésiques exceptionnelles pour les distributions de rang 2 :

PROPOSITION 7.— *Supposons que la distribution de la structure SR sur M soit de rang deux. Soit $\varphi : [a,b] \to M$ une géodésique exceptionnelle générique paramétrée par la longueur d'arc. Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que la restriction de φ à tout sous-intervalle fermé de $[a,b]$ de longueur $\leq \varepsilon$ est minimisante et rigide.*

Pour la preuve de la rigidité, voir [B-L], pour celle de la minimalité, voir [L-S]. Une autre preuve des deux assertions se trouve dans [A-S1] et [A-S2]. Enfin, pour un "survey" sur les géodésiques exceptionnelles, voir [Mon].

Dans [A-S1] et [A-S2], les auteurs construisent une théorie de Morse pour les géodésiques exceptionnelles pour les structures SR dont la distribution est de rang 2. La théorie classique sur l'optimalité locale en topologie C^0 d'un arc simple de géodésique sans point conjugué s'étend alors aux géodésiques exceptionnelles dans le cas considéré ci–dessus, si on fait la remarque qu'en géométrie SR un arc de courbe simple localement minimisant pour la topologie H^1 est localement minimisant pour la topologie C^0 (voir [Ag1]).

APPLICATIONS DES STRUCTURES SR

13. OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS DÉFINISSANT DES STRUCTURES SR

Un opérateur différentiel L du deuxième ordre sur une variété M est appelé semi–elliptique si son symbole principal est positif semi–défini. Ce symbole est une fonction C^∞ $g_L^* : T^*M \to \mathbb{R}$ qui, sur chaque fibre de T^*M est une forme quadratique positive semi–définie et donc une cométrique. Si g_L^* satisfait à la condition du rang au sens de la Remarque 2, il définit une structure SR généralisée. Si, de plus, le noyau de g_L^* est de rang constant, c'est-à-dire si c'est un sous–fibré vectoriel de T^*M, la structure dont on vient de parler sera une structure SR au sens de la définition 0.

C'est un théorème classique de Hörmander (voir [Hö1], [O-R]) que si g_L^* satisfait à la condition du rang, l'opérateur L est hypoelliptique, la réciproque étant aussi vraie et démontrée par Jerison–Sanchez–Calle (voir [J-S1]). La preuve de Hörmander montre déjà la relation entre l'hypoellipticité de L et la condition du rang. Son travail a inspiré un très grand nombre de travaux par la suite. Nous allons essayer ici de donner un petit aperçu de la relation étroite entre leurs résultats et la géométrie SR. Donnons–nous une forme volume sur M. Un opérateur différentiel L du second ordre sur M est dit hypoelliptique si, pour tout compact K, il existe deux nombre $s > 0$, $C > 0$ tels que, pour toute $f \in C^\infty(M)$ à support dans K :

(SE) $$\|f\|_{(s)} \leq C[\|Lf\| + \|f\|].$$

$\| \ \|$ désigne la norme L^2 bâtie sur la forme de volume donnée et $\| \ \|_{(s)}$ la norme de Sobolev correspondante.

Le théorème suivant, cas particulier d'un résultat de Fefferman–Phong (voir [F-P]), illustre bien la relation entre hypoellipticité et structure SR.

PROPOSITION 8.— *On suppose que M est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, la forme volume la forme canonique sur $\mathbb{R}^d$, K un voisinage compact dans $\mathbb{R}^d$, L auto–adjoint par rapport à la forme volume canonique de $\mathbb{R}^d$. Alors, la condition* (SE) *est équivalente à la condition* [Hö] :

il existe une constante $\Gamma > 0$ telle que $d_L(x, y) \leq \Gamma[d_{eu}(x, y)]^{s/2}$ pour tous $x, y \in K$, *où d_L est la distance SR de la structure SR associée à L et d_{eu} est la distance euclidienne canonique de $\mathbb{R}^d$.*

L'exposant s est aussi lié à la croissance du volume des boules sous–riemanniennes de la structure SR associée d'après le résultat suivant de Varopoulos ([Va2]) apparenté au précédent :

PROPOSITION 9.— *Mêmes hypothèses que dans la proposition précédente. Il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes pour tout $\mu > 2$ et tout compact K de M.*

i) *il existe une constante $\Gamma > 0$ telle que, pour tout $m \in K$, tout nombre ρ, $0 < \rho < 1$:*

$$\operatorname{vol}(B(m,\rho)) \geq \Gamma\, \rho^{\mu}\,;$$

ii) *existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute $f \in C^{\infty}(M)$, à support dans K :*

$$\left(\|f\|_{\frac{2\mu}{\mu-2}}\right)^2 \leq C\left[\langle Lf, f\rangle_{L^2} + \|f\|_L^2\right],$$

où $\langle\, ,\, \rangle_{L^2}$ est le produit scalaire L^2 relatif au volume donné et $\|\ \|_{\frac{2\mu}{\mu-2}}$ la norme $L^{\frac{2\mu}{\mu-2}}$ relative au même volume.

Notons que $\|f\|_{(s)} = \|(I+\Delta)^{s/2}f\|$, où Δ est le laplacien, $-\sum\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2$, et la métrique d_{eu} est la métrique d_Δ associée à Δ. Donc la condition (SE) peut être exprimée comme suit :

$$\|(I+\Delta)^{s/2}f\| \leq C\,|\,\|Lf\| + \|f\|\,|$$

et la condition [Hö] ainsi :

$$d_L(x,y) \leq \Gamma |d_\Delta(x,y)|^{s/2}.$$

Sous cette forme, la proposition peut être généralisée comme suit : soient L_1, L_2 deux opérateurs, comme dans la Proposition 8. Alors, pour tout couple de nombres positifs α_1, α_2 et tout compact K de M, les assertions suivantes sont équivalentes :

i) il existe une constante C telle que, pour toute $f \in C^{\infty}(M)$ à support dans K :

$$\left\|L_1^{\frac{\alpha_1}{2}} f\right\| \leq C\left[\left\|L_2^{\frac{\alpha_2}{2}} f\right\| + \|f\|\right];$$

ii) il existe une constante Γ telle que, pour tout couple $x, y \in K$:

$$[d_{L_2}(x,y)]^{\alpha_2} \leq \Gamma [d_{L_1}(x,y)]^{\alpha_1}.$$

Comme les opérateurs L_i, $i = 1, 2$, sont auto–adjoints et semi–positifs, les puissances $L_i^{\frac{\alpha_1}{2}}$ sont des opérateurs auto–adjoints (non bornés) à domaine et image dans $L^2(M; v)$. Pour ceci et bien d'autres équivalences, voir [F-P], [F-S], [Hö1], [Hö2], [J-S1], [J-S2], [Mu], [M-V], [S].

Diffusions et géométrie SR

Les structures SR sont apparues très naturellement dans l'étude de la diffusion, par exemple dans le calcul stochastique de Malliavin ([Bi], [M]). Nous n'en discuterons pas ici car ce calcul est maintenant bien connu et mériterait un exposé à lui tout seul. Expliquons rapidement le rapport entre la géométrie SR et la diffusion. Celle–ci est représentée classiquement par une équation différentielle stochastique :

$$dX = F_0(X) + \sum_{j=1}^{\ell} F_j(X)\, o d w^j$$

sur une variété M. Les F_i, $0 \leq i \leq \ell$ sont des champs de vecteurs, $(w^1, \cdots, w^\ell)$ un processus de Wiener standard sur $\mathbb{R}^\ell$ et le o dénote l'intégrale de Stratonovich.

La solution $X(t, x)$ d'une telle équation, de position initiale x, est une variable aléatoire à valeurs dans M. Il est bien connu que si les champs $(F_1, \cdots, F_\ell)$ satisfont à la condition du rang en tout point de M, la probabilité de transition : $E \subset M \to P(X(\cdot, x) \in E) =$ probabilité pour que $X(\cdot, x)$ soit dans E, admet une densité C^∞ $p_t(x, y)$ si on munit M d'un élément de volume vol_M quelconque ([Hö2]). Cette densité p_t, appelée noyau de la chaleur, vérifie l'équation :

$$(C) \qquad \frac{\partial p_t}{\partial t}(x, y) + L_x\, p_t(x, y) = 0 \quad \text{pour } t > 0,$$

où L est l'opérateur $-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\ell} \theta(F_i)^2 - \theta(F_0)$. Il dépend de la forme volume p_t est déterminé par cette équation et par la condition que la mesure $p_t(x, y)\, \mathrm{vol}_M(dy)$ tend vers la mesure de Dirac $\delta_x(y)$ quand t tend vers 0. Dans la littérature, on considère souvent le cas plus général où L est un opérateur semi–elliptique du type considéré dans le paragraphe précédent et p_t est le noyau de la chaleur associé.

Ce noyau a fait l'objet de nombreuses études. Ici nous nous contenterons de discuter un problème classique, celui du comportement asymptotique de $p_t(x, y)$ quand t tend vers 0. Dans le cas classique où L est elliptique, on sait que p_t a un développement asymptotique de la forme :

$$p_t(x, y) = \frac{1}{t^{d/2}}\, e^{-\frac{d(x,y)^2}{2t}} \left[a_0(x, y) + t\, a_1(x, y) + t^2\, a_2(x, y) + \cdots\right],$$

où d est la distance associée à la métrique riemannienne définie par le symbole principal de L.

Ce résultat a été partiellement étendu au cas semi–elliptique. Par exemple si L est auto–adjoint par rapport à vol_M pour tout compact K, tous $\varepsilon \in]0,1]$, $T > 0$, il existe une constante $C = C(K, \varepsilon, T)$ telle que, por tous $x, y \in K$, tout t, $0 < t < T$:

$$\frac{1}{C}\,\frac{1}{\mathrm{vol}(B_L(x,\sqrt{t})}\,,\exp\left[\frac{-d_L(x,y)^2}{(4-\varepsilon)t}\right] \le p_t(x,y) \le \frac{C}{\mathrm{vol}(B_L(x,\sqrt{t})}\,\exp\left[\frac{-d_L(x,y)^2}{(4+\varepsilon)t}\right],$$

où d_L est la distance SR associée à L, $B_L(x,\sqrt{t})$ est la boule SR de centre x et de rayon $\sqrt{t}$.

La preuve dans [Va1] de ce résultat est assez complexe. Le lien avec la géométrie provient d'une généralisation d'un résultat de Ventzel–Freidlin en théorie des grandes déviations. On estime, pour les petits ε, la probabilité pour que la trajectoire échantillon du processus $X(\varepsilon t, x)$ sur un intervalle de temps fixé, disons $[0,1]$, soit dans un ensemble S de courbes continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, en fonction du minimum de l'énergie sous–riemannienne des courbes de S. (L'énergie d'une courbe non absolument continue est $+\infty$.)

Pour de nombreux résultats sur le développement de la densité p_t pour les petits temps, on consultera [Ben], [B-L], [Fℓ-L], [Ga2], [Le1], [Le2], [Le3], [Mo].

Remarque sur les relations entre la géométrie SR et les opérateurs sous–elliptiques associés

Malgré les résultats mentionnés plus haut, la relation entre la géométrie SR et les opérateurs semi–elliptiques du second ordre est bien moins claire que, dans le cas classique, la relation entre géométrie riemannienne et opérateurs elliptiques du second ordre. En effet, dès qu'on aborde les points plus fins de la théorie comme la structure des solutions élémentaires de ces opérateurs, les résultats de Beals, Gaveau et Greiner (voir [B-G-Gi], $i = 1,2,3,4$) montrent que ce ne sont plus les invariants classiques de la géométrie comme la distance, la courbure, etc. qui jouent un rôle, mais d'autres, nouveaux, dont l'interprétation géométrique, s'il y en a une, est encore inconnue. On trouvera des informations précises dans les travaux de Beals, Gaveau et Greiner mentionnés plus haut.

Conclusion : nous avons essayé de donner une idée succincte de l'importance de la géométrie SR dans l'étude des opérateurs hypoelliptiques du second ordre et dans celle de la diffusion. Si le lecteur a été convaincu, cet exposé aura atteint un de ses buts.

BIBLIOGRAPHIE

La bibliographie qui suit est certainement très incomplète et je m'en excuse auprès des auteurs que je n'ai pas cités. Elle ne contient que les ouvrages et articles que j'ai consultés au cours de la préparation de cet exposé.

[Ag] A.A. AGRACHEV - *Methods of control theory in non-holonomic geometry*, Proceedings ICM–94, Zürich, Birkhäuser.

[Ag1] A.A. AGRACHEV - *Any smooth simple H^1-local length minimizer in the Carnot–Caratheodory space is a C^0-local length minimizer*, preprint, Dijon, juin 1996.

[A-S1] A.A. AGRACHEV et A.V. SARYCHEV - *Strong minimality of abnormal geodesics for 2–distributions*, Journal of Dynamical Systems and Control Systems **1**, n° 2 (1995), 139–176.

[A-S2] A.A. AGRACHEV et A.V. SARYCHEV - *Abnormal sub–riemannian geodesics : Morse index and rigidity*, à paraître dans les Annales I.H.P.

[B-G-G1] R. BEALS, B. GAVEAU et P. GREINER - *The Green function for a model two–step hypoelliptic operator and the analysis of certain tangential Cauchy–Riemann complexes*, preprint (1995).

[B-G-G2] R. BEALS, B. GAVEAU et P. GREINER - *Subelliptic geometry*, preprint (1995).

[B-G-G3] R. BEALS, B. GAVEAU et P. GREINER - *On a geometric formula for the fundamental solution of subelliptic laplacians*, preprint (1995).

[B-G-G4] R. BEALS, B. GAVEAU et P. GREINER - *Complex Hamiltonian mechanisms and parametrics for subelliptic laplacians*, preprint (1995).

[Bell] A. BELLAÏCHE - *The tangent space in sub-riemannian geometry*, dans "Journées non holonomes", A. Bellaïche–J.-J. Risler eds, Birkhäuser, Progress in Math., vol. 144 (1996), 1–78.

[Ben] G. BEN AROUS - *Développement du noyau de la chaleur sur la diagonale*, Annales Inst. Four. **39** (1) (1989), 73–99.

[B-L] G. BEN AROUS et R. LÉANDRE - *Décroissance exponentielle du noyau de la chaleur sur la diagonale*, Prob. Theory Relat. Fields. Part. I : **90** (1991), 175–202 ; Part. II : **90** (1991), 377–402.

[Bi] J.-M. BISMUT - *Large deviations and the Malliavin calculus*, Birkhäuser, Progress in Math., vol. 45 (1984).

[B-H] R. BRYANT et L. HSU - *Rigidity of integral curves of rank 2 distributions*, Invent. Math. **114** (1993), 435–461.

[B-Z] Yu.D. BURAGO et V.A. ZAGALLER - *Geometric inequalities*, Springer GdMW Bd **285** (1988).

[C-K-S] E.A. CARLEN, S. KUSUOKA et D.W. STROOCK - *Upper bounds for symmetric Markov transition functions*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Probabilité et Statistique, supp. au n° 2 (1987), 245–287.

[E-G-K] EL–HOUCINE, J.-P. GAUTHIER et I. KUPKA - *Small sub–riemannian balls in* $\mathbb{R}^3$, Journal of Dynamical and Control Systems, vol. 2, n° 3, July 1996, 359–421.

[Fa-G] E. FALBEL et C. GORODSKI - *On contact symmetric sub-riemannian spaces*, Annales Scient. E.N.S. **28** (1995), 571–589.

[Fa-G-R] E. FALBEL, C. GORODSKI et M. RUMIN - *On the holonomy of sub-riemannian spaces*, preprint (1995).

[F-P] C.L. FEFFERMANN et D.H. PHONG - *Subelliptic eigenvalue problems*, dans Proceedings Conference on Harmonic analysis in honor of Antony Zygmund, Math. Ser., Wadsworth, Belmont CA, 590–606.

[F-S] C.L. FEFFERMANN et A. SANCHEZ–CALLE - *Fundamental solutions of second order subelliptic operators*, Ann. of Math. **124** (1986), 247–272.

[Fℓ-L] P. FLORCHINGER et R. LÉANDRE - *Décroissance non–exponentielle du noyau de la chaleur*, Prob. Theory Relat. Fields **95** (1993), 237–262.

[Ga1] B. GAVEAU - *Principe de moindre action ; propagation de la chaleur et estimées sous–elliptiques sur certains groupes nilpotents*, Acta Math. **139** (1977), 95–153.

[Ga2] B. GAVEAU - *Systèmes dynamiques associés à certains opérateurs hypoelliptiques*, Bulletin Sci. Math., 2ème série, **102** (1978), 203–229.

[Go1] R. GOODMAN - *Nilpotent Lie groups : structure and applications to analysis*, Springer LNM **562** (1976).

[Go2] R. GOODMAN - *Lifting vector fields to nilpotent Lie groups*, Journ. Math. Pures et Appl. **57** (1978), 77–86.

[Gr1] M. GROMOV - *Carnot–Caratheodory spaces seen from within*, dans le même volume que [Bell], 79–323.

[Gr2] M. GROMOV - *Partial differential relations*, Springer Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **3**, Folge, Band 9 (1986).

[G-L-P] M. GROMOV, J. LAFONTAINE et P. PANSU - *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Cedic–Fernand Nathan (1981).

[Ha] U. HAMENSTÄDT - *Some regularity theorems for Carnot–Caratheodory metrics*, J. Diff. Geom. **32** (1991), 192–201.

[H-Le] A. HILBERT et R. LÉANDRE - *Nagel, Stein, Wainger estimates for balls associated with the Bismut condition*, preprint.

[Hö1] L. HÖRMANDER - *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math. **119** (1967), 147–171.

[Hö2] L. HÖRMANDER - *Analysis of linear partial differential operators*, III, Springer GdMW **274** (1985).

[J-S1] D. JERISON et A. SANCHEZ–CALLE - *Subelliptic second order differential operators*, in Complex analysis III, Springer LNM **1277** (1987).

[J-S2] D. JERISON et A. SANCHEZ–CALLE - *Estimates for the heat kernel for the sum of squares of vector fields*, Indiana Univ. Math. Journ. **35** (1986), 835–854.

[Le1] R. LÉANDRE - *Volumes des boules sous-riemanniennes et explosion du noyau de la chaleur au sens de Stein*, Séminaire de Probabilité XXIII, J. Azéma, J. Yor eds, Springer LNM **1372** (1990), 426–448.

[Le2] R. LÉANDRE - *Développement asymptotique de la densité d'une diffusion dégénérée*, Forum Math. **4** (1992), 45–75.

[Le3] R. LÉANDRE - *Applications quantitatives et géométriques du calcul de Malliavin*, Stochastic Analysis, G. Métivier, S. Watanabe eds, Springer LNM **1322** (1988), 109–133.

[L-S] W.S. LIU et H.J. SUSSMANN - *Shortest paths for sub–riemannian metrics on rank 2 distributions*, Mem. A.M.S., n° 564, Vol. 118, november 1995.

[M] P. MALLIAVIN - *Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators*, Proc. Intern. Symp. S.D.E. Kyoto, 1976, K. Itô edt., 195–263, Kinokuniya, Tokyo, 1978.

[Ma] P. MATTILA - *Geometry of sets and measures in euclidean spaces : fractals and rectifiability*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 44, Cambridge University Press (1995).

[Me] G. MÉTIVIER - *Fonction spectrale et valeurs propres d'une classe d'opérateurs non–elliptiques*, Comm. Partial Differential Equations **1** (1976), 467–519.

[Mi] J. MITCHELL - *On Carnot–Caratheodory metrics*, Jour. Diff. Geom. **21** (1985), 35–45.

[Mo] S.A. MOLCHANOV - *Diffusion processes and riemannian geometry*, Russian Math. Surveys **30** (1975), 1–63.

[Mon] R. MONTGOMERY - *A survey of singular curves in sub-riemannian geometry*, Journal of Dynamical and Control Systems, vol. 1, n° 1 (1995), 49–90.

[Mu] S. MUSTAPHA - *Distances sous-elliptiques et puissances d'opérateurs différentiels*, Ark. för Math. **34** (1996), 159–177.

[M-V] S. MUSTAPHA et N. VAROPOULOS - *Comparaison höldérienne des distances sous-elliptiques et calcul $S(m,g)$*, Potential Analysis **4** (1995), 415–428.

[N-S-W] A. NAGEL, E.M. STEIN et S. WAINGER - *Balls and metrics defined by vector fields I : basic properties*, Acta Math. **155** (1985), 103–147.

[O-R] O.A. OLEINIK et E.V. RADKEVIC - *Second order equations with non-negative characteristic form*, A.M.S. (1973).

[P] P. PANSU - *Métriques de Carnot-Caratheodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang un*, Ann. of Math. **129:1** (1989), 1–61.

[R] M. RUMIN - *Un complexe de formes différentielles sur les variétés de contact*, C.R.A.S. t. 310 (1990), 401–404.

[S] A. SANCHEZ-CALLE - *Fundamental solutions and geometry of the sums of squares of vector fields*, Invent. Math. **78** (1984), 143–160.

[Ste] E.M. STEIN - *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press (1970).

[Str] R.S. STRICHARTZ - *Sub-riemannian geometry*, Jour. Diff. Geometry **24** (1986), 221–263.

[Th] R. THOM - *Remarques sur les problèmes comportant des inégalités différentielles globales*, Bull. Soc. Math. France **87** (1959), 455–461.

[Va1] N.Th. VAROPOULOS - *Small time Gaussian estimates of heat diffusion kernels, II : the theory of large derivations*, Jour. Funct. Analysis **93** (1990), 1–33.

[Va2] N.Th. VAROPOULOS - *Opérateurs sous-elliptiques du second ordre*, C.R.A.S., t. 308, Série I (1989), 437–440.

[V-S-C] N.Th. VAROPOULOS, L. SALOFF-COSTE et Th. COULHON - *Analysis and geometry on groups*, Cambridge Univ. Press (1993).

[V-G] A.M. VERSHIK et V. Ya. GERSHKOVICH - *Non-holonomic problems and the theory of distributions*, Acta Appl. Math. **12** (1988), 181–209.

Ivan KUPKA
Université Paris VI
Institut de Mathématiques
UMR 9992 du CNRS
Case 247
4, place Jussieu
F–75252 PARIS CEDEX 05