GILLES PISIER

Espaces d'opérateurs : une nouvelle dualité

Astérisque, tome 241 (1997), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 814, p. 243-272
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__243_0>

Séminaire BOURBAKI
48ème année, 1995-96, n° 814

Février 1996

ESPACES D'OPÉRATEURS : UNE NOUVELLE DUALITÉ

par **Gilles PISIER**

0. INTRODUCTION

La théorie des "espaces d'opérateurs" est une création très récente. Leur point de départ est la thèse de Z.J. Ruan [Ru1] qui en contient une caractérisation "abstraite". Immédiatement après, Blecher-Paulsen [BP1] et Effros-Ruan [ER1] ont indépendamment découvert que cette caractérisation permet d'introduire une dualité dans la catégorie des espaces d'opérateurs et ils en ont développé la théorie à partir de là (*cf.* [ER1-6, B1-3, Pa2]).

La notion d'espace d'opérateurs est intermédiaire entre celle d'espace de Banach et celle de C^*-algèbre. On pourrait aussi les appeler "espaces de Banach non-commutatifs" (mais le cas commutatif doit être inclus !) ou encore "espaces de Banach quantiques" (mais ce dernier terme a déjà beaucoup servi...).

Un espace d'opérateurs (parfois abrégé e.o.) est simplement un sous-espace fermé $E \subset B(H)$ de l'espace $B(H)$ des opérateurs bornés sur un Hilbert.

Cette définition est un peu déconcertante : tout espace de Banach E admet (pour H convenable) une copie isométrique $\widetilde{E} \subset B(H)$, donc tous les Banach apparaissent comme espaces d'opérateurs. Mais la nouveauté est dans les *morphismes* (et les isomorphismes) qui ne sont plus ceux de la catégorie des Banach usuels. Au lieu des applications bornées, on va utiliser comme morphismes les applications *complètement bornées* (en abrégé c.b.) qui sont apparues avec force au début des années 80 (voir [Pa1]) et qui étaient implicites dans les travaux de Stinespring (1955) et Arveson (1969) (sur les applications complètement positives).

L'idée sous-jacente est la suivante : étant donnés deux espaces d'opérateurs :

$$E_1 \subset B(H_1) \qquad , \qquad E_2 \subset B(H_2),$$

on veut des morphismes qui *respectent* les réalisations des espaces de Banach E_1 et E_2 comme espaces d'opérateurs. Par exemple, s'il existe une représentation

$\pi : B(H_1) \to B(H_2)$ (*i.e.* on a $\pi(xy^*) = \pi(x)\pi(y)^*$, $\pi(1) = 1$ et par conséquent $\|\pi\| = 1$) telle que $\pi(E_1) \subset E_2$, alors la "restriction" $\pi_{|E_1} : E_1 \to E_2$ doit évidemment être admise comme morphisme, d'où un premier type. Bien sûr, l'inconvénient est que cette classe ne forme pas un espace vectoriel, mais il y a aussi un second type de morphismes naturels : supposons donnés deux opérateurs bornés $a : H_1 \to H_2$ et $b : H_1 \to H_2$ et considérons l'application $M_{ab} : B(H_1) \to B(H_2)$ donnée par $M_{ab}\, x = axb^*$. Alors là encore, si $M_{ab}(E_1) \subset E_2$, il est naturel d'accepter la restriction de M_{ab} à E_1 comme morphisme.

Les applications complètement bornées peuvent être vues comme les compositions d'un morphisme du premier type suivi d'un du second type. Plus précisément, bien que ce ne soit pas "orthodoxe", on peut les définir comme suit :

DÉFINITION 0.1.— *Soit $E \subset B(H)$, $E_2 \subset B(H_2)$ deux espaces d'opérateurs et soit $u : E \to E_2$ une application linéaire. On dit que u est complètement bornée s'il existe un espace de Hilbert H_1, une représentation $\pi : B(H) \to B(H_1)$ et deux opérateurs $a, b : H_1 \to H_2$ tels que :*

$$\forall x \in E \qquad u(x) = a\,\pi(x)\,b^*.$$

On pose :

$$\|u\|_{cb} = \inf\{\|a\|\,\|b\|\}, \tag{0.1}$$

où l'infimum porte sur toutes les décompositions de cette forme.

On notera $cb(E, E_2)$ l'espace des applications c.b. de E dans E_2.

En d'autres termes, si $E_1 = \overline{\pi(E)}$, on a $u = u_2 u_1$ avec $u_1 = \pi_{|E}$ et $u_2 = M_{ab|E_1}$.

On peut montrer (petit exercice !) que (0.1) définit une norme qui fait de $cb(E, E_2)$ un espace de Banach, mais cela résulte aussi du théorème 0.2 ci-dessous.

Le principal intérêt de la notion précédente est qu'il en existe une description équivalente (analogue à celle des applications linéaires bornées) comme une inégalité (ou une suite d'inégalités) vérifiées par u. L'énoncé suivant est donc fondamental. Il est apparu indépendamment dans les travaux de Wittstock [Wi], Haagerup [H] et Paulsen [Pa3].

Notation.— Soit $E \subset B(H)$ un espace d'opérateurs ; on note $M_n(E)$ l'espace des matrices $n \times n$ à coefficients dans E, muni de la norme :

(0.2)

$$\forall a = (a_{ij}) \in M_n(E)\ \|a\|_{M_n(E)} = \sup\left\{ \left(\sum_i \| \sum_j a_{ij}\, h_j \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \,\middle|\, h_j \in H\ \sum \|h_j\|^2 \leq 1 \right\}.$$

Autrement dit, on fait agir la matrice a naturellement sur $H \oplus \cdots \oplus H$ et on calcule sa norme usuelle.

THÉORÈME 0.2.— *Soit $E \subset B(H)$, $F \subset B(K)$ (H, K Hilbert), soit $u : E \to F$ une application linéaire et soit $C \geq 0$ une constante. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'application u est c.b. et vérifie $\|u\|_{cb} \leq C$.*

(ii) *Les applications $u_n : M_n(E) \to M_n(F)$ définies par $u_n((a_{ij})) = u((a_{ij}))$ sont uniformément bornées au sens usuel pour la norme définie en* (0.2) *et vérifient :*

$$\sup_{n \geq 1} \|u_n\| \leq C.$$

De plus, la borne inférieure est atteinte dans (0.1) *(i.e. il existe une décomposition réalisant la borne inférieure).*

La propriété d'*extension* suivante est cruciale : c'est l'analogue du théorème de Hahn-Banach pour les espaces d'opérateurs.

COROLLAIRE 0.3.— *Soient H, K deux hilbertiens. Soit $F \subset B(H)$ un espace d'opérateurs et soit $E \subset F$ un sous-espace.*

Alors toute application c.b. $u : E \to B(K)$ admet une extension c.b. $\widetilde{u} : F \to B(K)$ telle que $\|\widetilde{u}\|_{cb} = \|u\|_{cb}$. Le diagramme est le suivant :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr, "\widetilde{u}"] & \\ \cup & \\ E \arrow[r, "u"] & B(H) \end{tikzcd}$$

Dans une autre direction, le théorème 0.2 implique la *décomposabilité* des applications c.b. en applications complètement positives.

On dit que $u : E \to F$ est complètement positive (c.p. en abrégé) si, avec les notations précédentes, toutes les applications $u_n : M_n(E) \to M_n(F)$ sont positives pour les structures d'ordre induites par le cône positif des C^*-algèbres $M_n(B(H))$.

COROLLAIRE 0.4.— *Toute application c.b. $u : E \to B(K)$ admet une décomposition $u = u_1 - u_2 + i(u_3 - u_4)$ avec u_j c.p. telle que :*

$$\max_{j \leq 4} \|u_j\|_{cb} \leq \max \left\{ \|u_1 + u_2\|_{cb}\, , \, \|u_3 + u_4\|_{cb} \right\} \leq \|u\|_{cb}.$$

Démonstration (esquisse).— On note que si $a = b$ dans le théorème 0.1, alors u est complètement positive. Ce corollaire résulte donc simplement de l'identité de polarisation des formes sesquilinéaires. On notera que si u est c.p. sur une C^*-algèbre (ou sur un système d'opérateurs), on a $\|u\| = \|u\|_{cb}$ et (dans le cas unital) $\|u\| = \|u(1)\|$.

Nous renvoyons le lecteur à [Pa1] ou bien a [P6] pour de plus amples informations sur tous ces résultats.

Ayant introduit les morphismes, la notion d'isomorphisme est claire : on dit que deux espaces d'opérateurs E, F sont complètement isomorphes (resp. complètement isométriques) s'il existe un isomorphisme $u : E \to F$ qui est complètement borné et d'inverse complètement borné (resp. avec de plus $\|u\|_{cb} = \|u^{-1}\|_{cb} = 1$).

On dit qu'une isométrie (non nécessairement surjective) $u : E \to F$ est une isométrie complète si $\|u\|_{cb} = \|u^{-1}_{|u(E)}\|_{cb} = 1$.

On dit qu'une application $u : E \to F$ est une contraction complète si $\|u\|_{cb} \leq 1$. Le lecteur complètera (!) aisément cette terminologie.

L'un des grands avantages des espaces d'opérateurs sur les C^*-algèbres est qu'ils permettent l'introduction de méthodes fini-dimensionnelles dans la théorie des algèbres d'opérateurs. Plus précisément, si E et F sont deux espaces d'opérateurs complètement isomorphes, on peut mesurer leur "degré d'isomorphisme" par la distance suivante :

$$d_{cb}(E, F) = \inf\left\{ \|u\|_{cb} \, \|u^{-1}\|_{cb} \,\middle|\, u : E \to F \right\}, \tag{0.3}$$

où l'inf porte sur tous les isomorphismes complets u de E sur F.

Cette définition est bien sûr calquée sur la "distance de Banach-Mazur" de deux Banach définie classiquement par :

$$d(E, F) = \inf\left\{ \|u\| \, \|u^{-1}\| \,\middle|\, u : E \to F \text{ isomorphisme} \right\}. \tag{0.4}$$

Par convention, on pose $d_{cb}(E, F) = \infty$ ou $d(E, F) = \infty$ si E et F ne sont pas isomorphes.

Considérons maintenant un espace de Banach X. Il existe évidemment une multitude de "structures d'espace d'opérateurs" (en abrégé s. d'e.o.) possibles sur X. Par définition, une telle structure sur X est la donnée d'un plongement isométrique $j : X \to B(H)$. Nous dirons que deux telles structures :

$$j_1 : X \longrightarrow B(H_1) \quad \text{et} \quad j_2 : X \longrightarrow B(H_2)$$

sont *équivalentes* si, pour tout espace d'opérateurs $F \subset B(K)$ et pour tout $u : X \to F$, les normes c.b. de u sont les mêmes selon que l'on utilise l'un des plongements j_1 ou l'autre. Bien évidemment, cela revient à dire que $j_2 \circ j^{-1}_{1|j_1(X)}$ et $j_1 \circ j^{-1}_{2|j_2(X)}$ sont des isométries complètes, ou encore que les normes induites respectivement par j_1 et j_2 sur $M_n(X)$ sont les mêmes pour chaque $n \geq 1$.

En réalité, il n'y a pas lieu, dans la théorie, de distinguer deux espaces d'opérateurs équivalents. En pratique, on les identifie. Quand c'est vraiment nécessaire, on peut distinguer l'espace d'opérateurs "concret" $E \subset B(H)$ et la s. d'e.o. "abstraite" associée, c'est-à-dire la classe d'équivalence associée (au lieu d'un représentant "concret" de cette classe).

Si X est une C^*-algèbre, il y a évidemment une façon naturelle de plonger X dans $B(H)$ comme sous-C^*-algèbre, par la théorie de Gelfand. Dans ce cas, si j_1 et j_2 sont deux plongements de C^*-algèbres, la relation d'équivalence précédente est automatique. En effet, une représentation injective de C^*-algèbre $j : X \to B(H)$ est automatiquement isométrique et comme $(j)_n : M_n(X) \to M_n(B(H))$ est aussi une représentation injective, elle est aussi isométrique, ce qui revient à dire que j est complètement isométrique. Par conséquent si, dans ce qui précède, j_1 et j_2 sont des représentations injectives, alors $j_1\, j^{-1}_{2|j_2(X)}$ et $j_2\, j^{-1}_{1|j_1(X)}$ sont automatiquement des isométries complètes. En conséquence, nous pouvons parler sans ambiguïté de la structure *naturelle* d'une C^*-algèbre comme espace d'opérateurs. Ce dernier point permet un changement de point de vue : on peut définir de façon équivalente un espace d'opérateurs comme un sous-espace d'une C^*-algèbre, étant entendu que l'on connaît (par la théorie de Gelfand) une structure naturelle d'espace d'opérateurs sur la C^*-algèbre. Rappelons que toute C^*-algèbre unitale commutative est isomorphe à l'espace $C(T)$ des fonctions continues sur un compact T, muni de la norme uniforme.

Soit B un espace de Banach arbitraire. On peut lui associer un compact T_B qui est la boule unité du dual B^* muni de la topologie $\sigma(B^*, B)$. On a alors un plongement isométrique $j : B \to C(T_B)$ qui permet de munit B d'une structure d'espace d'opérateurs (induite par la C^*-algèbre $C(T_B)$). On note (suivant [BP1]) $\min(B)$ l'espace d'opérateurs ainsi défini. On a ainsi de nombreux exemples. Bien entendu, ces exemples ne sont pas très intéressants car ils sont trop "commutatifs", mais ils ont le mérite de montrer comment la catégorie des espaces de Banach peut être vue comme plongée dans celle des espaces d'opérateurs. En effet, si B_1, B_2 sont deux Banach, tout opérateur borné $u : B_1 \to B_2$ définit un opérateur complètement borné $u : \min(B_1) \to \min(B_2)$ avec $\|u\|_{cb} = \|u\|$.

Plus généralement, pour tout espace d'opérateurs E, toute application linéaire

$u : E \to B$ définit une application c.b. $u : E \to \min(B)$ telle que $\|u\| = \|u\|_{cb}$. En particulier, pour $u = I_B$, si $E = B$ muni d'une *quelconque* structure d'espace d'opérateurs (respectant la norme de B), on a une contraction complète $E \to \min(B)$. Cela exprime la "minimalité" de $\min(B)$.

Suivant [BP1], on peut aussi introduire une structure "maximale" sur B. Pour cela, il est commode de définir d'abord une notion de somme directe dans la catégorie des espaces d'opérateurs. Soit $E_i \subset B(H_i)$ $(i \in I)$ une famille d'espaces d'opérateurs. On note $\oplus_{i\in I} E_i$ l'espace des familles $x = (x_i)_{i\in I}$ avec $x_i \in E_i$, $\forall i \in I$, telles que $\sup_{i\in I} \|x_i\| < \infty$ et on le munit de la norme $\|x\| = \sup_{i\in I} \|x_i\|$. L'espace $\oplus_{i\in I} B(H_i)$ est naturellement une C^*-algèbre (que l'on peut voir comme plongée dans $B(\oplus_{i\in I} H_i)$, $\oplus_{i\in I} H_i$ voulant dire bien sûr ici la somme directe hilbertienne). Par conséquent, le plongement isométrique $\oplus_{i\in I} E_i \to \oplus_{i\in I} B(H_i)$ induit une structure d'espace d'opérateurs sur $\oplus_{i\in I} E_i$. On a ainsi une notion de somme directe.

Soit B un Banach arbitraire. Soit I la classe de toutes les applications $u : B \to B(H_u)$ avec $\|u\| \le 1$. On peut définir un plongement $J : B \longrightarrow \oplus_{u\in I} B(H_u)$ en posant

$$J(x) = \oplus_{u\in I}\, u(x).$$

Ce plongement permet de définir une structure d'espace d'opérateurs sur B. On note $\max(B)$ l'espace d'opérateurs associé. Par construction, on a alors la propriété de "maximalité" suivante : pour tout espace d'opérateurs E et pour tout $u : \max(B) \to E$, u borné $\Longrightarrow u$ c.b. et $\|u\| = \|u\|_{cb}$.

En particulier, si $E = B$ muni d'une s. d'e.o. quelconque (respectant la norme de B), on a une contraction complète $\max(B) \to E$ induite par l'identité de B.

En conclusion, soit $E = (B, j)$ une s. d'e.o. quelconque sur B associée à un plongement isométrique $j : B \to B(H)$; on a alors des inclusions (= l'identité) complètement contractantes :

$$\max(B) \longrightarrow (B, j) \longrightarrow \min(B).$$

Cela conduit à un autre groupe d'exemples d'e.o. déjà un peu plus intéressants que les précédents.

Voici deux autres exemples fondamentaux : on note $R = \overline{\mathrm{span}}\,[e_{1j} \mid j \ge 1] \subset B(\ell_2)$ et $C = \overline{\mathrm{span}}\,[e_{i1} \mid i \ge 1] \subset B(\ell_2)$. On dit souvent que C est formé des "vecteurs colonnes" et R des vecteurs lignes dans $B(\ell_2)$. Noter que l'on a :

$$\forall x = (x_i) \in \ell_2 \quad \left\|\sum x_j\, e_{1j}\right\| = \left(\sum |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left\|\sum x_i\, e_{i1}\right\|$$

de sorte que R et C sont indistinguables comme Banach, puisqu'isométriques à ℓ_2. En revanche, ils ne sont pas *complètement* isomorphes et définissent donc deux nouvelles s. d'e.o. sur l'espace de Hilbert ℓ_2. Ce qui nous en fait donc pour l'instant quatre (dont on sait qu'elles sont distinctes) : $\min(\ell_2)$, $\max(\ell_2)$, R et C. Nous verrons bientôt qu'il y en a en fait tout un continuum !

Pour l'instant, la situation typique d'application de la théorie des espaces d'opérateurs est la suivante : on a une C^*-algèbre A admettant un système remarquable de *générateurs* et on considère l'espace d'opérateurs E qui est la fermeture du sous-espace *linéairement* engendré par ces générateurs (cet espace E est souvent isomorphe à un Hilbert). Alors, dans bien des cas, on peut "lire" sur la structure d'espace d'opérateurs de E des propriétés importantes de la C^*-algèbre engendrée. Voir [P2] pour de nombreux exemples illustrant ce principe.

Bien que nous prenions la thèse de Ruan (1988) comme sa date de naissance, il y a de nombreuses contributions "prénatales" qui ont fortement influencé cette théorie. Parmi elles, la factorisation des applications *multilinéaires* complètement bornées, due à Christensen-Sinclair [CS] (et généralisée par Paulsen-Smith [PS]) est fondamentale (voir § 6). Un peu plus tôt encore, on trouve un article important de Effros et Haagerup [EH] (inspiré par un travail antérieur d'Archbold et Batty) qui ont découvert que les espaces d'opérateurs n'ont en général pas la propriété de "réflexivité locale" (alors que tous les Banach vérifient l'analogue Banachique). Leurs idées sont proches des travaux spectaculaires d'E. Kirchberg (voir [Ki2, Wa2, A]) sur les C^*-algèbres exactes, dont nous ne parlerons pas ici. On doit signaler aussi que les espaces d'opérateurs sont l'aboutissement d'un processus d'"abandon de structure" sur les C^*-algèbres qui a commencé par les travaux d'Arveson (1969) et Choi-Effros [CE] sur les "systèmes d'opérateurs". (Un système d'opérateurs est un sous-espace de $B(H)$ contenant l'identité et stable par adjonction.)

Avertissement.— Nous avons choisi d'écrire ici un texte introductif à la notion même d'espace d'opérateurs et à leur dualité, avec un aperçu de quelques applications, mais en insistant surtout sur les motivations des définitions. Nous renvoyons le lecteur à d'autres textes [P5, P6, P2] et au livre qu'Effros et Ruan ont commencé à écrire pour une introduction plus approfondie, que la lecture du présent exposé, nous l'espérons, facilitera.

1. PRODUIT TENSORIEL MINIMAL

Soient H_1, H_2 deux Hilbert. On note $H_1 \otimes_2 H_2$ leur produit tensoriel hilbertien.

Soient $E_1 \subset B(H_1)$, $E_2 \subset B(H_2)$ deux espaces d'opérateurs. On peut définir un plongement du produit tensoriel algébrique $E_1 \otimes E_2$ dans $B(H_1 \otimes_2 H_2)$, soit $j : E_1 \otimes E_2 \to B(H_1 \otimes_2 H_2)$ de la manière suivante : Pour $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, on définit :

$$\forall h_1 \in H_1,\ \forall h_2 \in H_2, \quad j(x_1 \otimes x_2)(h_1 \otimes h_2) = x_1(h_1) \otimes x_2(h_2),$$

puis on étend par linéarité. On trouve alors une injection linéaire j de $E_1 \otimes E_2$ dans $B(H_1 \otimes_2 H_2)$ qui permet de définir une s. d'e.o. sur la complétion de $E_1 \otimes E_2$ pour la norme induite par ce plongement. On note $E_1 \otimes_{\min} E_2$ l'espace d'opérateurs ainsi obtenu. On a donc par définition une isométrie complète :

$$E_1 \otimes_{\min} E_2 \subset B(H_1 \otimes_2 H_2).$$

On note $\| \ \|_{\min}$ la norme induite par $B(H_1 \otimes_2 H_2)$ sur l'espace $E_1 \otimes_{\min} E_2$. On montre alors que, à équivalence près, l'espace d'opérateurs obtenu ne dépend pas des réalisations particulières de E_1 et E_2 dans $B(H_1)$ et $B(H_2)$, mais seulement de leur s. d'e.o. Cela résulte en fait de l'observation bien connue suivante, très simple mais essentielle pour la théorie.

PROPOSITION 1.1.— *Soient E_1, E_2 comme ci-dessus et soient $F_1 \subset B(K_1)$ et $F_2 \subset B(K_2)$ deux autres espaces d'opérateurs. Soient $u_1 \in cb(E_1, F_1)$ et $u_2 \in cb(E_2, F_2)$. Alors, $u_1 \otimes u_2 : E_1 \otimes E_2 \to F_1 \otimes F_2$ s'étend en une application c.b. (notée encore abusivement $u_1 \otimes u_2$) telle que :*

$$\|u_1 \otimes u_2\|_{cb(E_1 \otimes_{\min} E_2, F_1 \otimes_{\min} F_2)} \le \|u_1\|_{cb} \|u_2\|_{cb}.$$

De plus, le produit minimal est "injectif", c'est-à-dire que si u_1 et u_2 sont des isométries complètes, alors il en est de même de $u_1 \otimes u_2 : E_1 \otimes_{\min} E_2 \to F_1 \otimes_{\min} F_2$.

Remarque 1.2.— Si E_1 et E_2 sont deux C^*-algèbres, alors $E_1 \otimes_{\min} E_2$ apparaît comme une sous-C^*-algèbre de $B(H_1 \otimes_2 H_2)$. On a donc un produit tensoriel minimal dans la catégorie des C^*-algèbres, que la notion précédente étend aux espaces d'opérateurs. D'après un théorème classique de Takesaki (voir § 9 ci-dessous), la norme $\| \ \|_{\min}$ est la plus petite C^*-norme sur le produit tensoriel de deux C^*-algèbres. Dans la catégorie des Banach, Grothendieck [G] a montré que le produit tensoriel injectif

$B_1 \check{\otimes} B_2$ de deux espaces de Banach correspond à la plus petite norme tensorielle raisonnable sur $B_1 \otimes B_2$. On peut démontrer (*cf.* [BP1]) un énoncé analogue pour le produit $E_1 \otimes_{\min} E_2$ de deux espaces d'opérateurs. Signalons en passant que l'on a pour tout espace d'opérateurs E et tout Banach B un isomorphisme isométrique $E \otimes_{\min} \min(B) = E \check{\otimes} B$. D'autre part, on a :

$$M_n(E) \approx M_n \otimes_{\min} E \quad \text{isométriquement.}$$

Dans la suite, on identifiera souvent les espaces vectoriels $M_n(E)$ et $M_n \otimes E$.

Le produit tensoriel minimal est commutatif (*i.e.* $E_1 \otimes_{\min} E_2 \approx E_2 \otimes_{\min} E_1$) et associatif (*i.e.* par exemple $(E_1 \otimes_{\min} E_2) \otimes_{\min} E_3 \approx E_1 \otimes_{\min} (E_2 \otimes_{\min} E_3)$). On peut donc définir sans ambiguïté (directement ou par itération) le produit minimal $E_1 \otimes_{\min} \cdots \otimes_{\min} E_N$ d'un nombre quelconque N d'espaces d'opérateurs, et l'on note encore $\| \ \|_{\min}$ la norme correspondante. On vérifie aisément que :

$$\forall x_i \in E_i \quad \|x_1 \otimes \cdots \otimes x_N\|_{\min} = \|x_1\| \cdots \|x_N\|. \tag{1.1}$$

2. LE THÉORÈME DE RUAN

Il est bien évident que se donner un espace de Banach revient à se donner (avant complétion) un espace vectoriel V muni d'une norme. Le théorème fondamental de Ruan ci-dessous permet d'avoir un point de vue analogue pour les espaces d'opérateurs, mais au lieu d'une norme sur V, c'est une suite de norme $\| \ \|_n$ sur $M_n(V)$ (ou bien une seule norme, mais sur $\cup_n M_n(E)$) qu'il faut considérer. Soit E un espace de Banach, ou même seulement un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$. Donnons-nous sur E une structure d'espace d'opérateurs. Alors, à équivalence près, il est clair que cela revient à se donner, pour chaque $n \geq 1$, une norme $\| \ \|_n$ sur l'espace $M_n(E)$ (des matrices $n \times n$ à coefficients dans E). Le problème que résout le théorème de Ruan est l'inverse : quelles suites de normes proviennent d'une s. d'e.o. sur E ?

Cherchons d'abord des conditions nécessaires. Supposons donc que V est plongé dans $B(H)$ et que $\| \ \|_n$ est la norme induite par $M_n(B(H))$ sur $M_n(V)$. On vérifie alors aisément les deux propriétés suivantes :

$$\forall n \geq 1 \ \forall a, b \in M_n \ \forall x \in M_n(V) \quad \|a \cdot x \cdot b\|_n \leq \|a\|_{M_n} \|x\|_{M_n(V)} \|b\|_{M_n}. \tag{R$_1$}$$

où l'on a noté $a \cdot x \cdot b$ le produit matriciel de la matrice $x \in M_n(V)$ par les matrices scalaires a et b.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n, m \geq 1 \ \forall x \in M_n(V) \ \forall y \in M_m(V), \text{ on a} \\ \left\| \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \right\|_{n+m} = \max\{\|x\|_n \,, \|y\|_m\}. \end{array} \right. \tag{R$_2$}$$

On peut maintenant énoncer le théorème de Ruan :

THÉORÈME 2.1 ([Ru1]).— *Soit V un espace vectoriel complexe. On se donne pour chaque $n \geq 1$ une norme $\| \ \|_n$ sur $M_n(V)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe un Hilbert H et une injection linéaire $j : V \to B(H)$ tels que pour tout n :*

$$I_{M_n} \otimes j : (M_n(V)\,,\, \| \ \|_n) \longrightarrow M_n(B(H))$$

soit une isométrie. Ce qui revient à dire que la suite $(\| \ \|_n)$ provient de la structure d'espace d'opérateurs sur V associée à j.

(ii) *La suite $\| \ \|_n$ vérifie les axiomes* (R_1) *et* (R_2) *précédents.*

Soit :

$$\mathcal{K} = K(\ell_2)$$

l'ensemble des opérateurs compacts sur ℓ_2. On peut voir $\mathcal{K}$ comme un espace de matrices bi-infinies, ce qui nous permet de considérer M_n comme "inclus" dans $\mathcal{K}$. On pose alors :

$$\mathcal{K}_0 = \bigcup_{n \geq 1} M_n.$$

Il est commode dans le théorème précédent de remplacer la suite des normes $(\| \cdot \|_n)$ par une seule norme sur $\mathcal{K}_0 \otimes E$ ou bien (après fermeture) sur $\mathcal{K} \otimes E$. En effet, l'axiome (R_2) assure que le plongement $(M_n(E), \| \cdot \|_n) \subset (M_{n+1}(E), \| \cdot \|_{n+1})$ est isométrique, ce qui permet de définir une norme α sur $\mathcal{K}_0 \otimes E$ comme suit : pour $x \in \mathcal{K}_0 \otimes E$, soit n tel que $x \in M_n \otimes E$, on pose alors :

$$\alpha(x) = \|x\|_n. \tag{2.1}$$

Le théorème de Ruan établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des structures d'espaces d'opérateurs sur V (à équivalence près) et les normes α sur $\mathcal{K}_0 \otimes E$ (ou bien $\mathcal{K} \otimes E$) vérifiant (R_1) et (R_2).

Remarque.— Si V est donné comme espace normé ou comme Banach, on s'intéresse en général surtout aux s. d'e.o. sur V qui respectent la norme de V, c'est-à-dire telles que $\|(x)\|_1 = \|x\|$ pour tout $x \in V$. On vérifie que (R_1) et (R_2) entraînent alors (c'est évident d'après (1.1) et le théorème précédent) que $\|a \otimes x\|_n = \|a\|_{M_n} \|x\|$ pour a dans M_n et x dans V.

Soit α la norme associée à une telle structure sur l'espace normé V comme en (2.1), et soient $\alpha_{\min}$, $\alpha_{\max}$ les normes associées aux structures minimales et maximales, comme ci-dessus. On a alors :

$$\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}.$$

Remarque importante

Il faut souligner que les s. d'e.o. données par le théorème de Ruan ne sont pas explicites et, dans la plupart des cas décrits plus bas (dual, quotient, interpolé), on n'en a aucune version "concrète". Leur existence résulte du théorème de Hahn-Banach, *cf.* la preuve simplifiée du théorème 2.1 dans [ER2].

3. DUALITÉ

Préliminaire. Soient E, F deux espaces vectoriels. Soit $u \in F \otimes E^*$. On peut lui associer une application linéaire $\widetilde{u} : E \to F$ de la manière évidente. Si E et F sont des Banach, on sait que $\|u\|_\vee = \|\widetilde{u}\|$ et $u \to \widetilde{u}$ est un plongement isométrique du produit tensoriel injectif $F \check{\otimes} E^*$ dans l'espace $B(E, F)$ des applications bornées de E dans F.

La dualité des espaces d'opérateurs est calquée sur ce modèle, mais le produit minimal prend la place du produit injectif et "c.b." remplace "borné".

Soit $E \subset B(H)$ un espace d'opérateurs et soit E^* son dual comme espace de Banach. Il est possible de munir E^* d'une s. d'e.o. spécifique caractérisée par la propriété suivante :

(3.1) Pour tout espace d'opérateurs F, l'application naturelle $u \to \widetilde{u}$ de $F \otimes E^*$ dans $cb(E, F)$ est une isométrie. On a donc un plongement isométrique :

$$(E^* \otimes_{\min} F \approx)\ F \otimes_{\min} E^* \longrightarrow cb(E, F).$$

Quand $\dim(F) < \infty$, ce plongement est surjectif, d'où des identifications isométriques :

$$(E^* \otimes_{\min} F \approx)\ F \otimes_{\min} E^* \approx cb(E, F).$$

Dans le cas $F = M_n$, on a en particulier une identification isométrique :

$$M_n \otimes_{\min} E^* \approx cb(E, M_n). \tag{3.2}$$

L'idée de [BP1] et [ER1] (indépendamment) pour définir cette s. d'e.o. spécifique est de prendre le côté droit de (3.2) pour définir une suite de normes sur $M_n(E^*)$ et de vérifier les axiomes (R_1) et (R_2) du théorème de Ruan. Le théorème de Ruan

garantit alors qu'il *existe* une structure sur E^* vérifiant (3.2). On remonte ensuite aisément de (3.2) à (3.1). L'unicité de la s. d'e.o. correspondante (à équivalence près) est claire puisque (3.2) détermine au plus une s. d'e.o. sur E^*.
Notons que pour tout $u : E \to F$ la transposée ${}^t u : F^* \to E^*$ vérifie $\|u\|_{cb} = \|{}^t u\|_{cb}$.

Plus généralement, si F est un autre espace d'opérateurs, on peut définir une s. d'e.o. sur $cb(E, F)$ pour laquelle, pour chaque n, on a isométriquement :

$$M_n(cb(E,F)) \approx cb(E, M_n(F)). \tag{3.3}$$

En effet, là encore les normes apparaissant au côté droit de (3.3) vérifient les axiomes (R_1) et (R_2). Nous pouvons donc désormais considérer $cb(E, F)$ comme un espace d'opérateurs (et (3.1), (3.2) deviennent alors *complètement* isométriques).

Exemples.— On peut montrer les identités complètement isométriques suivantes (*cf.* [BP1, ER3]) :

$$R^* \approx C \quad , \quad C^* \approx R$$

et, pour tout espace de Banach B (*cf.* [BP1, B2]) :

$$\min(B)^* \approx \max(B^*).$$

Soit M une algèbre de von Neumann de prédual M_*. Par dualité, la structure naturelle de M nous donne une s. d'e.o. sur M^* donc *a fortiori* sur $M_* \subset M^*$. Cela pose un problème de "cohérence", mais fort heureusement Blecher [B2] a montré que tout se passe bien : si l'on munit M_* de la structure d'e.o. précédente, son dual est complètement isométrique (en fait équivalent) à M. Il y a donc existence et unicité du prédual de M dans la catégorie des espaces d'opérateurs. En revanche, cela n'est plus vrai pour les espaces d'opérateurs généraux: C. Le Merdy [LeM1] a montré qu'il existe une s. d'e.o. sur $B(H)^*$ qui n'est la duale d'aucune s. d'e.o. sur $B(H)$.

4. PASSAGE AU QUOTIENT ET INTERPOLATION

Nous allons définir d'autres d'opérations ou foncteurs sur les espaces d'opérateurs. Signalons d'emblée que ces opérations *étendent* les opérations correspondantes pour les espaces de Banach. Le modèle est le même que pour la dualité : on commence par faire l'opération (*e.g.* passage au quotient ou interpolation) pour les Banach sous-jacents, puis on munit le résultat d'une s. d'e.o. respectant la norme et vérifiant une propriété spécifique à chaque opération.

Le principe utilisé pour définir la dualité s'applique dans bien d'autres situations. Par exemple, Ruan [Ru1] a défini le quotient E_1/E_2 de deux espaces d'opérateurs E_1, E_2 avec $E_2 \subset E_1$ comme suit.

On considère la norme $\| \ \|_n$ sur $M_n(E_1/E_2)$ naturellement associée au quotient d'espaces normés $M_n(E_1)/M_n(E_2)$, puis on vérifie (R_1) et (R_2). Le théorème 2.1 assure donc qu'il existe une s. d'e.o. sur E_1/E_2 pour laquelle on a, pour tout $n \geq 1$, une identification isométrique :

$$M_n \otimes_{\min} (E_1/E_2) = M_n(E_1)/M_n(E_2).$$

Plus généralement, on a une identification isométrique :

$$\mathcal{K} \otimes_{\min} (E_1/E_2) = (\mathcal{K} \otimes_{\min} E_1)/(\mathcal{K} \otimes_{\min} E_2).$$

On définit ainsi une notion de quotient dans la catégorie des espaces d'opérateurs. Cette notion vérifie les règles usuelles de dualité : on a des identifications *complètement* isométriques : $(E_1/E_2)^* \approx E_2^{\perp}$ et $E_2^* = E_1^*/E_2^{\perp}$.

Soient E_0, E_1 un couple d'espaces de Banach, compatible pour l'interpolation, ce qui veut dire qu'on se donne implicitement deux injections continues :

$$E_0 \longrightarrow \mathcal{X} \quad \text{et} \quad E_1 \longrightarrow \mathcal{X}$$

de E_0 et E_1 dans un espace vectoriel topologique "ambiant" $\mathcal{X}$. L'exemple typique est $E_0 = L^\infty$, $E_1 = L^1$ et $\mathcal{X} = L^0$.

La méthode d'interpolation complexe (due à A. Calderón et J.-L. Lions indépendamment) associe au couple (E_0, E_1) un espace noté $(E_0, E_1)_\theta$ pour chaque $0 < \theta < 1$. On pose $E_\theta = (E_0, E_1)_\theta$. On a donc une famille continue $(E_\theta)_{0<\theta<1}$ de sous-espaces de $\mathcal{X}$ qui sont des espaces de Banach et vérifient la propriété d'interpolation, (*i.e.* toute application définie et bornée simultanément de E_0 dans E_0 et de E_1 dans E_1 est définie et bornée sur E_θ pour $0 < \theta < 1$.) Calderón a aussi défini une méthode "duale" ; on notera E^θ le résultat de cette méthode (*cf.* [BL]). Supposons maintenant E_0 et E_1 munis chacun d'une s. d'e.o. respectant leur norme. L'espace E_θ peut être muni d'une s. d'e.o. de la manière suivante : on munit $M_n(E_\theta)$ de la norme de l'espace interpolé $(M_n(E_0), M_n(E_1))_\theta$ (les inclusions $M_n(E_i) \subset M_n(\mathcal{X})$, $i = 0, 1$, nous donnent la compatibilité pour l'interpolation). Là encore, on constate que ces normes vérifient les axiomes (R_1) et (R_2), ce qui permet d'affirmer l'existence d'une s. d'e.o. sur E_θ pour laquelle on a isométriquement :

$$M_n(E_\theta) = (M_n(E_0), M_n(E_1))_\theta,$$

et plus généralement :

$$\mathcal{K} \otimes_{\min} E_\theta = (\mathcal{K} \otimes_{\min} E_0\,,\, \mathcal{K} \otimes_{\min} E_1)_\theta.$$

Par la même méthode, on peut définir une s. d'e.o. naturelle sur E^θ. Si $E_0 \cap E_1$ est dense à la fois dans E_0 et dans E_1, le couple (E_0^*, E_1^*) peut être vu naturellement comme compatible et l'on peut donc définir $(E_0^*, E_1^*)_\theta$ et $(E_0^*, E_1^*)^\theta$.

Parmi les résultats classiques de Calderón, on a l'identité isométrique :

$$(E_0, E_1)_\theta^* = (E_0^*, E_1^*)^\theta \tag{4.1}$$

que l'on peut décrire comme la commutation des foncteurs d'interpolation et de dualité. Là encore, on peut "compléter" ce résultat et quand E_0, E_1 sont des espaces d'opérateurs, on démontre dans [P1] que l'identité (4.1) est une isométrie complète.

Signalons que Quanhua Xu [X] a développé la théorie de l'interpolation réelle (à la Lions–Peetre) pour les espaces d'opérateurs.

Exemples.— Soit (Ω, μ) un espace normé. Nous avons déjà défini une s. d'e.o. naturelle sur $L^\infty(\Omega, \mu)$ et sur son prédual $L^1(\Omega, \mu)$. Par interpolation, on obtient donc une s. d'e.o. sur $L^p(\Omega, \mu)$ que nous appellerons "naturelle". Plus généralement, soit M une algèbre de von Neumann munie d'une trace normale semi-finie et fidèle τ. Les espaces L^p "non–commutatifs" peuvent être définis par interpolation ; on pose :

$$L^p(M, \tau) = (M, M_*)_\theta$$

avec $\theta = \frac{1}{p}$. Là encore, les s. d'e.o. naturelles sur M et M_* permettent de munir $L^p(M, \tau)$ d'une s. d'e.o. que nous appellerons "naturelle". On peut en fait aller plus loin et développer (*cf.* [P4]) une théorie des espaces L^p "non–commutatifs" à valeurs vectorielles.

5. PRODUIT TENSORIEL PROJECTIF

Comme le produit tensoriel minimal est l'analogue du produit tensoriel injectif (des Banach), il est tentant de chercher un analogue pour les espaces d'opérateurs du produit tensoriel projectif des Banach. Cette question est traitée indépendamment dans [BP1] et [ER1]. Effros et Ruan ont poursuivi dans cette voie : ils introduisent un analogue de la propriété d'approximation et des opérateurs nucléaires ou intégraux qui remontent (pour les Banach) à la thèse de Grothendieck [G]. Ils démontrent aussi un analogue du lemme de Dvoretzky–Rogers (sous la forme : si l'identité est absolument sommante, la dimension est finie). Ce programme rencontre plusieurs obstacles intéressants (principalement dûs à l'absence de réflexivité locale) mais, en gros, la théorie marche bien. Nous renvoyons le lecteur à [ER4, ER5, ER6], ainsi qu'à l'article plus récent [EW] consacré plus généralement à une "convexité non–commutative" suggérée par le produit tensoriel projectif des espaces d'opérateurs.

Nous nous bornerons ici à une brève description du produit projectif de deux espaces d'opérateurs E, F que nous noterons $E\widehat{\otimes}F$. Cet espace est défini dans [BP1] comme un prédual. La définition équivalente de [ER1] est plus explicite, comme suit :

Soit u un élément du produit tensoriel algébrique $E \otimes F$. Il existe clairement, pour $n \geq 1$ assez grand, des écritures de u sous la forme suivante :

$$u = \sum_{ijh\ell \leq n} \alpha_{ih}\, x_{ij} \otimes y_{h\ell}\, \beta_{j\ell}, \tag{5.1}$$

où $x \in M_n(E)$, $y \in M_n(F)$ et $\alpha, \beta \in M_n$. Alors la norme de $E\widehat{\otimes}F$ peut être définie comme :

$$\|u\|_{E\widehat{\otimes}F} = \inf\left\{\|\alpha\|_2\, \|x\|_{M_n(E)}\, \|y\|_{M_n(F)}\, \|\beta\|_2\right\}, \tag{5.2}$$

où $\|\ \|_2$ est la norme de Hilbert-Schmidt et où l'infimum porte sur toutes les représentations possibles de u comme en (5.1). On note $E\widehat{\otimes}F$ la complétion de $E \otimes F$ pour cette norme. Plus généralement, on peut munir cet espace d'une s. d'e.o. correspondant à la norme $\|\ \|_n$ sur $M_n(E\widehat{\otimes}F)$ définie comme suit :

Soit $u = (u_{ij}) \in M_n(E \otimes F)$ et supposons :

$$u = \alpha \cdot (x \otimes y) \cdot \beta,$$

où le point désigne le produit matriciel et où $x \in M_\ell(E)$, $y \in M_m(F)$ et α (resp. β) est une matrice de taille $n \times (\ell m)$ (resp. $(\ell m) \times n$). Notons que $x \otimes y$ est vu ici comme un élément de $M_{\ell m}(E \otimes F)$, de la manière naturelle (associée à l'isomorphisme $M_\ell \otimes M_m \approx M_{\ell m}$). Alors, suivant [ER1], on peut poser :

$$\|u\|_n = \inf\left\{\|\alpha\|_{M_{n,\ell m}}\, \|x\|_{M_\ell(E)}\, \|y\|_{M_m(F)}\, \|\beta\|_{M_{\ell m,n}}\right\}. \tag{5.3}$$

On notera que, si $n = 1$, (5.3) se réduit à (5.2). Une fois de plus, (5.3) vérifie les axiomes (R_1) et (R_2), ce qui nous donne une s. d'e.o. sur $E\widehat{\otimes}F$ pour laquelle on a donc $\|u\|_n = \|u\|_{M_n(E\widehat{\otimes}F)}$ pour tout $u \in M_n(E \otimes F)$. La propriété clé est alors :

THÉORÈME 5.1.— *On a une identification complètement isométrique :*

$$(E \widehat{\otimes} F)^* = cb(E, F^*) = cb(F, E^*).$$

De plus, le morphisme naturel :

$$E \widehat{\otimes} F \longrightarrow E \otimes_{\min} F$$

est une contraction complète.

Le produit tensoriel projectif est commutatif et associatif, mais n'est en général pas injectif. En revanche, bien entendu, il est "projectif", c'est-à-dire que si $u_1 : E_1 \to F_1$ et $u_2 : E_2 \to F_2$ sont des "surjections métriques complètes" (cela revient à dire que les adjoints sont des isométries complètes), alors il en est de même de $u_1 \otimes u_2 : E_1 \widehat{\otimes} E_2 \to F_1 \widehat{\otimes} F_2$.

Donnons seulement une autre propriété importante ([ER6]) : soient M, N deux algèbres de von Neumann de prédual M_*, N_*. Soit $M \bar{\otimes} N$ leur produit tensoriel comme algèbres de von Neumann. Alors on a une identité complètement isométrique :

$$(M \bar{\otimes} N)_* = M_* \widehat{\otimes} N_*.$$

Ainsi le produit $\widehat{\otimes}$ se comporte, vis-à-vis des espaces L^1 non nécessairement commutatifs exactement comme le produit projectif $\widehat{\otimes}$ de Grothendieck pour les espaces $L^1(\mu)$ usuels (pour lesquels on a isométriquement $L^1(\mu) \widehat{\otimes} L^1(\nu) \simeq L^1(\mu \times \nu)$).

6. PRODUIT TENSORIEL DE HAAGERUP ET ALGÈBRES D'OPÉRATEURS

Curieusement, la catégorie des espaces d'opérateurs admet un produit tensoriel spécial, qui n'a – à mon avis – aucune vraie contrepartie pour les espaces de Banach. Il s'agit du produit tensoriel de Haagerup introduit dans [EK], en s'inspirant de [H]. Mais alors que ces auteurs ne considèrent à l'origine que les espaces de Banach sous-jacents, c'est pour les espaces d'opérateurs que ce produit s'est révélé le plus fécond, avec les travaux fondamentaux de Christensen et Sinclair (*cf.* [CS]) et leur extension par Paulsen et Smith [PS].

Soient E_1, E_2 deux espaces d'opérateurs. Soient $x_1 \in \mathcal{K} \otimes E_1$, $x_2 \in \mathcal{K} \otimes E_2$. On notera $(x_1, x_2) \to x_1 \odot x_2$ la forme bilinéaire de $(\mathcal{K} \otimes E_1) \times (\mathcal{K} \otimes E_2)$ à valeurs $\mathcal{K} \otimes (E_1 \otimes E_2)$ définie sur les tenseurs élémentaires par :

$$(k_1 \otimes e_1) \odot (k_2 \otimes e_2) = (k_1\, k_2) \otimes (e_1 \otimes e_2).$$

On pose :

$$\alpha_i(x_i) = \|x_i\|_{\mathcal{K}\otimes_{\min} E_i} \quad (i = 1, 2).$$

Alors, pour tout $x \in \mathcal{K} \otimes E_1 \otimes E_2$, on définit :

$$\alpha_h(x) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_1(x_1^j)\, \alpha_2(x_2^j) \right\}, \tag{6.1}$$

où l'infimum porte sur toutes les décompositions possibles de x en somme finie :

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_1^j \odot x_2^j,$$

avec $x_1^j \in \mathcal{K} \otimes E_1$, $x_2^j \in \mathcal{K} \otimes E_2$.

Une première bonne surprise est qu'on peut se restreindre à $n = 1$ dans la définition (6.1), *i.e.* $\alpha_h(x) = \inf\{\alpha_1(x_1)\, \alpha_2(x_2) \mid x = x_1 \odot x_2\}$. Cela résulte en gros de ce que $M_n(\mathcal{K}) \approx \mathcal{K}$.

Il est facile de voir que (6.1) vérifie les axiomes (R_1) et (R_2) de Ruan ; donc, après complétion, on obtient un espace d'opérateurs que l'on note :

$$E_1 \otimes_h E_2.$$

Dans les premiers travaux sur $E_1 \otimes_h E_2$, on ne savait pas décrire un espace $B(\mathcal{H})$ (ou une C^*-algèbre) admettant un plongement naturel de $E_1 \otimes_h E_2$. Mais, peu après, Christensen, Effros et Sinclair [CES] ont montré que si l'on a $E_i \subset A_i$, avec A_i C^*-algèbre, alors $E_1 \otimes_h E_2$ est plongé naturellement (complètement isométriquement) dans le *produit libre* $A_1 * A_2$ des deux C^*-algèbres A_1 et A_2. Le plongement est simplement l'application :

$$y_1 \otimes y_2 \longrightarrow y_1\, y_2$$

qui envoie $y_1 \otimes y_2$ sur le produit (dans le produit libre) $y_1\, y_2$.

On peut formuler le résultat de [CES] comme suit.

THÉORÈME 6.1.— *Soient E_1, E_2 deux espaces d'opérateurs. Soit Φ la famille de toutes les paires $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ où $\sigma_i : E_i \to B(H_\sigma)$ est une application telle que $\|\sigma_i\|_{cb} \leq 1$ $(i = 1, 2)$ (et où, disons, on se restreint à $\dim H_\sigma \leq \max\{\mathrm{card}(E_1)\,\mathrm{card}(E_2)\}$). Alors l'application :*

$$j : E_1 \otimes_h E_2 \longrightarrow \oplus_{\sigma \in \Phi} B(H_\sigma)$$

définie par :

$$j\Big(\sum x_j^1 \otimes x_j^2\Big) = \bigoplus_{\sigma\in\Phi} \sum_{j=1}^{n} \sigma_1(x_1^j)\,\sigma_2(x_2^j)$$

est une isométrie complète.

Voir [P5] pour une démonstration très directe.

Remarque 6.2.— On généralise sans problème la définition de $E_1 \otimes_h E_2$ au produit $E_1 \otimes_h \cdots \otimes_h E_N$ d'un nombre quelconque d'espaces d'opérateurs.

On constate alors que le produit de Haagerup est associatif. De plus, il est *à la fois* injectif et projectif, ce qui est très frappant (car très rare !). La projectivité résulte de la définition et l'injectivité du théorème 6.1 joint au corollaire 0.3.

COROLLAIRE 6.3.— *Soient $E_1, \cdots, E_N$ des espaces d'opérateurs ; il existe des isométries complètes $\varphi_i : E_i \to B(H)$ dans un même espace $B(H)$ telles que l'application linéaire $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \cdots \cdot \varphi_N$ définie par $\varphi_1 \cdot \cdots \cdot \varphi_N(x_1 \otimes \cdots \otimes x_N) = \varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)\cdots\varphi_N(x_N)$ soit une isométrie complète.*

On peut en déduire le théorème de factorisation pour les applications multilinéaires "complètement bornées" de Christensen-Sinclair (voir [CS] et les références qui s'y trouvent), dans la version de [PS].

COROLLAIRE 6.4.— *Soient $A_1, \cdots, A_N$ des C^*-algèbres. Soient $E_1, \cdots, E_N$ des sous-espaces d'opérateurs, avec $E_i \subset A_i$ pour tout i. Soit $u : E_1 \otimes \cdots \otimes E_N \to B(H)$ une application linéaire (= multilinéaire de $E_1 \times \cdots \times E_N$ dans $B(H)$). Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'application u s'étend en une contraction complète de $E_1 \otimes_h \cdots \otimes_h E_N$ dans $B(H)$.*

(ii) *Il existe des Hilbert $\widehat{H}_i$, des représentations $\pi_i : A_i \to B(\widehat{H}_i)$ et des applications $T_i : \widehat{H}_{i+1} \to \widehat{H}_i$ de norme ≤ 1 tels que $\widehat{H}_{N+1} = H$, $\widehat{H}_0 = H$ et :*

$$\forall x_i \in E_i \quad u(x_1 \otimes \cdots \otimes x_N) = T_0\ \pi_1(x_1)\,T_1\ \pi_2(x_2)\cdots\pi_N(x_N)\,T_N.$$

Remarque.— Nous n'explicitons pas la notion d'application multilinéaire complètement bornée $u : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_N \to B(H)$ car elle équivaut (dans le cas complètement contractant) à la propriété (i) ci-dessus.

Une autre propriété très frappante du produit de Haagerup est sa *self-dualité* (qui explique, d'ailleurs, qu'il soit à la fois injectif et projectif) pour laquelle nous référons à [ER3] (d'après [ER3] la première affirmation est due à Blecher).

COROLLAIRE 6.5.— *Soient E_1, E_2 deux espaces d'opérateurs. Alors, si E_1, E_2 sont de dimensions finies, on a :*

$$(E_1 \otimes_h E_2)^* \approx E_1^* \otimes_h E_2^* \quad \textit{complètement isométriquement.}$$

De plus, dans le cas général, on a un plongement naturel complètement isométrique :

$$E_1^* \otimes_h E_2^* \subset (E_1 \otimes_h E_2)^*.$$

Remarque 6.6.— Illustrons par quelques exemples. Tout d'abord, on a des identités qui soulignent le rôle central du produit de Haagerup, à la racine même de la théorie. On a complètement isométriquement :

$$C_n \otimes_h R_n \simeq M_n \qquad \text{et} \qquad C \otimes_h R \simeq \mathcal{K},$$

la correspondance étant bien sûr $e_{i1} \otimes e_{1j} \to e_{ij}$. Plus généralement, pour tout espace d'opérateurs E, on a complètement isométriquement :

$$C_n \otimes_h E \otimes_h R_n \simeq M_n(E).$$

Soit H un espace de Hilbert arbitraire. Notons H_c (resp. H_r) l'espace obtenu en munissant H de la s. d'e.o. associée à $H \simeq B(\mathbf{C}, H)$ (resp. $B(\overline{H}, \mathbf{C})$).

Soit K un autre Hilbert ; on a alors complètement isométriquement (*cf.* [ER3]) :

$$H_c \otimes_h K_c \simeq (H \otimes_2 K)_c \quad \text{et} \quad H_r \otimes_h K_r = (H \otimes_2 K)_r.$$

Dans la littérature sur les algèbres de Banach, une algèbre d'opérateurs est simplement une sous-algèbre fermée (non nécessairement auto–ajointe) de $B(H)$. Une algèbre uniforme est une sous-algèbre unitale A de l'espace $C(T)$ des fonctions continues sur T. Le plus souvent, on suppose que A sépare les points de T. On peut décrire aussi les algèbres d'opérateurs comme les sous-algèbres (fermées) des C^*-algèbres et les algèbres uniformes comme celles des C^*-algèbres *commutatives.*

Soit $A \subset B(H)$ une algèbre d'opérateurs et soit $I \subset A$ un idéal (bilatère, fermé). Alors le quotient A/I est évidemment une algèbre de Banach, mais est-ce une algèbre d'opérateurs ? Curieusement, la réponse est oui. Cela est dû à B. Cole pour A algèbre uniforme, puis peu après à G. Lumer et A. Bernard pour le cas général : il existe (pour $\mathcal{H}$ convenable) un homomorphisme isométrique $j : A/I \to B(\mathcal{H})$. D'une certaine manière, ce résultat préfigure la structure d'espaces d'opérateurs sur les quotients (voir § 4 ci-dessus), apparue bien plus tard.

Dans les années 70, on s'est intéressé de près à la classe des algèbres d'opérateurs et on a cherché à les caractériser parmi les algèbres de Banach. Citons principalement les travaux de Craw, Davie, Varopoulos (ainsi que ses élèves A. Tonge et P. Charpentier). Les travaux de Varopoulos laissaient espérer l'existence d'une norme tensorielle γ pour laquelle on aurait un énoncé du type : soit A une algèbre de Banach ; son produit $p : A \otimes A \to A$ définit une application continue de $A \otimes_\gamma A$ dans A si et seulement si A est (isomorphe à) une algèbre d'opérateurs. Varopoulos avait en effet montré que si $\gamma = \gamma_2$ (= norme de factorisation par un Hilbert, notée $\| \, \|_H$ dans [G]), la continuité de p est suffisante (mais pas nécessaire). Finalement K. Carne [Ca] a montré qu'il n'existe aucune norme raisonnable γ vérifiant cela.

La théorie des espaces d'opérateurs a relancé cette question. En effet, il est naturel de s'intéresser aux algèbres de Banach A munies par ailleurs d'une structure d'espaces d'opérateurs $j : A \to B(H)$ et de se demander quand on peut réaliser A comme une algèbre d'opérateurs *en respectant* la s. d'e.o. donnée sur A.

Voici les réponses :

THÉORÈME 6.7 ([BRS]).— *Soit A une algèbre de Banach avec une unité notée 1_A, donnée avec une structure d'espaces d'opérateurs. On suppose $\|1_A\| = 1$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'application produit*

$$p : A \otimes_h A \longrightarrow A$$

est complètement contractante (i.e. $\|p\|_{cb} \leq 1$).

(ii) *Il existe, pour H convenable, un homomorphisme unital et complètement isométrique*

$$j : A \longrightarrow B(H).$$

Curieusement, la version "isomorphique" de ce résultat a résisté un moment, jusqu'à ce que Blecher [B3] l'obtienne récemment :

THÉORÈME 6.8 ([B3]).— *Soit A une algèbre de Banach donnée avec une s. d'e.o. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $p : A \otimes_h A \longrightarrow A$ *est complètement borné.*

(ii) *Il existe un homomorphisme $j : A \to B(H)$ qui est aussi un isomorphisme complet de A sur $j(A)$.*

Les démonstrations n'utilisent pas les résultats précédents de Cole, Lumer et Bernard et permettent de les retrouver. Mais, en fait, tout récemment (*cf.* [P5]), nous avons trouvé un chemin en sens inverse et nous démontrons les théorèmes 6.7 et 6.8 comme conséquence (pas tout à fait directe toutefois) du résultat de Lumer–Bernard sur les quotients d'algèbres d'opérateurs.

Nous renvoyons le lecteur à [LeM2] pour une extension du théorème de Cole-Lumer-Bernard aux quotients de sous-algèbres de $B(X)$ avec X Banach, ainsi qu' à [BLM] pour une étude approfondie des structures d'algèbres d'opérateurs sur ℓ_p, ou bien d'autres espaces classiques.

Remarque.— Certaines algèbres d'opérateurs à unité A ont la propriété suivante : Tout homomorphisme unital borné $\pi : A \to B(H)$ est automatiquement c.b.
C'est le cas pour les C^*–algèbres commutatives ou pour les nucléaires (au sens du § 9 ci-dessous). On ignore si cette propriété est vraie en fait pour toute C^*–algèbre (voir [P6]). En revanche, l'auteur a pu montrer tout récemment (janvier 96) que l'algèbre du disque $A(D)$ (formée des fonctions analytiques sur D et continues sur $\bar{D}$) ne possède pas cette propriété. Il en résulte qu'il existe une structure d'algèbre d'opérateurs “exotique” sur $A(D)$ (ou bien sur H^∞). Cela revient aussi à dire qu'il existe un opérateur polynomialement borné qui n'est pas semblable à une contraction. Cette solution du “problème de Halmos” devra certainement être portée au crédit de la théorie des espaces d'opérateurs.

7. L'ESPACE OH

Convenons de dire qu'un espace d'opérateurs est hilbertien si l'espace de Banach sous-jacent est (isométriquement) hilbertien. La littérature de physique théorique fourmille d'exemples de ce genre (générateurs de l'algèbre fermionique ou de Clifford, générateurs de la C^*-algèbre réduite du groupe libre, famille semi-circulaire à la Voiculescu (voir [Sk])... On en sait assez sur les exemples de la liste précédente pour savoir qu'aucun d'eux n'est self-dual comme espace d'opérateurs, ce qui fait croire que la catégorie des espaces d'opérateurs n'admet pas de notion d'espace de Hilbert. L'énoncé suivant, qui dit le contraire, est donc apparu comme une surprise.

THÉORÈME 7.1 ([P1]).— *Soit H un espace de Hilbert arbitraire. Il existe pour $\mathcal{H}$ convenable, un espace d'opérateurs $E_H \subset B(\mathcal{H})$ tel que l'identification canonique (dérivée du produit scalaire) $E_H^* \to \overline{E}_H$ soit une isométrie complète. De plus, cet espace E_H est unique à une isométrie complète près. (Note : si E est un espace d'opérateurs, disons $E \subset B(H)$, alors $\overline{E}$ est le complexe conjugué de E muni de la s. d'e.o. induite par $\overline{E} \subset \overline{B(H)} \approx B(\overline{H})$.)*

Si $H = \ell_2$, on note cet espace E_H par OH et on l'appelle l'espace d'opérateurs de Hilbert. On note de même OH_n si $H = \ell_2^n$ et $OH(I)$ si $H = \ell_2(I)$.

Ce théorème suggère évidemment un vaste programme consistant à réexaminer, pour les espaces d'opérateurs, toutes les situations de théorie des Banach où l'espace de Hilbert joue un rôle central (elles sont nombreuses...). Ce programme est poursuivi dans [P1]. L'espace OH a des propriétés particulièrement remarquables vis-à-vis de l'interpolation complexe (voir [P1]). Par exemple, on a complètement isométriquement :

$$(\min(\ell_2)\,,\,\max(\ell_2))_{\frac{1}{2}} = OH$$

et

$$(R\,,\,C)_{\frac{1}{2}} = OH.$$

Dans le second cas, il faut préciser que le couple (R, C) est vu comme compatible par l'intermédiaire de l'injection $x \to {}^t x$ de R dans C, qui permet de considérer R et C comme des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{X} = C$.

L'unicité de OH et (4.1) impliquent que toutes les s. d'e.o. définies ci-dessus (§ 4) sur les espaces $L^2(\mu)$ et S_2 sont complètement isométriques, sous la seule restriction que la dimension hilbertienne soit la même.

Enfin, signalons une jolie propriété vis-à-vis du produit tensoriel de Haagerup : pour tous ensembles I et J, on a complètement isométriquement :

$$OH(I) \otimes_h OH(J) \approx OH(I \times J).$$

8. SUR LA TAILLE DE L'ENSEMBLE DES ESPACES D'OPÉRATEURS DE DIMENSIONS FINIES

Soient E, F deux espaces normés (resp. deux espaces d'opérateurs) ; rappelons que l'on a défini les "distances" $d(E, F)$ et $d_{cb}(E, F)$ en (0.3) et (0.4). On pose :

$$\delta(E, F) = \operatorname{Log} d(E, F)\,,\ \delta_{cb}(E, F) = \operatorname{Log} d_{cb}(E, F).$$

Soit $n \geq 1$. Soit EO_n (resp. B_n) l'ensemble des espaces d'opérateurs (resp. des espaces de Banach) de dimension n dans lequel on convient d'identifier deux espaces lorsqu'ils sont complètement isométriques (resp. isométriques).
Si l'on munit EO_n (resp. B_n) de la métrique δ_{cb} (resp. δ), il devient un espace métrique complet.

Pour les espaces de Banach (= normés), l'espace (B_n, δ) est compact ; c'est le "compact de Banach-Mazur".

Il est naturel de s'intéresser aux propriétés métriques de l'espace EO_n en analogie avec ce que l'on sait pour B_n. Par exemple, quel est le diamètre de EO_n ? EO_n est-il compact ? Et, si non, est-il séparable ? Voici quelques réponses (on préfère en fait supprimer les logarithmes, on travaille donc partout avec d_{cb} au lieu de δ_{cb}).

THÉORÈME 8.1 (voir [P1]).— *Pour tout $E \in EO_n$, on a :*

(8.1)
$$d_{cb}(E, OH_n) \leq \sqrt{n},$$

d'où, pour tout $F \in EO_n$:

$$d_{cb}(E, F) \leq n.$$

Cette dernière estimation est optimale car $d_{cb}(R_n, C_n) = n$.

Soit $E \in B_n$. Par la compacité de la boule de E^*, il est bien connu que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N(\varepsilon, n)$ et $\widetilde{E} \subset \ell_\infty^N$ tel que $d(E, \widetilde{E}) < 1 + \varepsilon$.

L'énoncé analogue, avec M_N au lieu de ℓ_∞^N, est faux pour les espaces d'opérateurs, ce qui suggère d'introduire pour tout $E \in EO_n$:

$$d_{SK}(E) = \inf \left\{ d_{cb}(E, \widetilde{E}) \,|\, \widetilde{E} \subset M_N \,,\, N \geq 1 \right\}.$$

THÉORÈME 8.2 ([P1, P3]).— *Pour tout E dans EO_n, on a :*

(8.2)
$$d_{SK}(E) \leq \sqrt{n}.$$

De plus, pour tout $n > 2$, l'espace $\ell_n^1 = (\ell_n^\infty)^*$ muni de la s.d'e.o. duale de la structure naturelle de ℓ_n^∞ vérifie:

$$\frac{\sqrt{n}}{2} \sim \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \leq d_{SK}(\ell_n^1).$$

Il est facile de voir (c'était connu de Kirchberg) que (EO_n, δ_{cb}) n'est *pas compact* si $n > 2$. (Le cas $n = 2$ reste ouvert.) L'article de Kirchberg [Ki1] a mis en avant la question de savoir si (EO_n, δ_{cb}) est séparable, mais la réponse est encore négative:

THÉORÈME 8.3 ([JP]).— *L'espace (EO_n, δ_{cb}) n'est pas séparable si $n > 2$. Plus précisément, même le sous-ensemble formé des espaces d'opérateurs isométriques à ℓ_2^n n'est pas séparable.*

La meilleure estimation asymptotique de la "non–séparabilité" de (EO_n, δ_{cb}) est la suivante : Soit $\delta(n)$ la borne inférieure des normes $\delta > 0$ tels que (EO_n, δ_{cb}) admette un δ–réseau dénombrable au sens suivant (on utilise d_{cb} plutôt que δ_{cb}) ; il existe une partie dénombrable $D \subset EO_n$ telle que $\forall E \in EO_n$ $\exists \widetilde{E} \in D$ vérifiant $d_{cb}(E, \widetilde{E}) < \delta$. Avec cette notation, on a, pour $n = p + 1$, avec p premier ≥ 3 (voir [JP]) :

$$\frac{\sqrt{n}}{2} \sim \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \leq \delta(n).$$

Par ailleurs, il résulte évidemment de (8.1) (ou bien de (8.2)) que $\delta_n \leq \sqrt{n}$.

9. APPLICATIONS AUX PRODUITS TENSORIELS DE C^*–ALGÈBRES

Soient A_1, A_2 deux C^*–algèbres. Leur produit tensoriel algébrique, noté $A_1 \otimes A_2$, peut être muni d'une structure d'algèbre involutive de la manière évidente.
On appelle C^*–norme toute norme sur $A_1 \otimes A_2$ telle que :

$$\|x\| = \|x^*\| \,, \ \|xy\| \leq \|x\| \, \|y\| \quad \text{et} \quad \|xx^*\| = \|x\|^2$$

pour tous x, y dans $A_1 \otimes A_2$.

On sait depuis Takesaki (1958) et Guichardet (1965) qu'il existe une C^*–norme minimale $\| \ \|_{\min}$ et une C^*–norme maximale $\| \ \|_{\max}$ de sorte que toute C^*–norme $\| \ \|$ doit vérifier $\forall x \in A_1 \otimes A_2$ $\|x\|_{\min} \leq \|x\| \leq \|x\|_{\max}$. On note $A_1 \otimes_{\min} A_2$ (resp. $A_1 \otimes_{\max} A_2$) la complétion de $A_1 \otimes A_2$ pour la norme $\| \ \|_{\min}$ (resp. $\| \ \|_{\max}$).

Une C^*–algèbre A_1 est dite nucléaire si, pour toute C^*–algèbre A_2, on a $\| \ \|_{\min} = \| \ \|_{\max}$ sur $A_1 \otimes A_2$, autrement dit, s'il existe une unique C^*–norme sur $A_1 \otimes A_2$. Par exemple, toutes les C^*–algèbres commutatives sont nucléaires, de même que $K(H)$ mais, d'après un résultat de S. Wassermann [Wa1], $B(H)$ n'est pas nucléaire si $\dim H = \infty$. D'après les travaux de Choi-Effros et Connes, une C^*–algèbre A est nucléaire ssi son bidual A^{**} est une algèbre de von Neumann injective. De plus (Choi-Effros, Kirchberg), cela revient à dire que l'identité de A est approximable pour la convergence simple par des applications de rang fini complètement positives. Les travaux récents de Kirchberg ([Ki2]) ont réactivé l'étude des paires de C^*–algèbres A, B telles qu'il existe une seule C^*–norme sur $A \otimes B$, c'est-à-dire telles que :

(9.1) $$A \otimes_{\min} B = A \otimes_{\max} B \qquad \text{isométriquement.}$$

Kirchberg a donné le premier exemple d'une C^*–algèbre A telle que (9.1) soit vrai quand $B = A^{op}$ (la C^*–algèbre opposée, *i.e.* A avec le produit renversé $xy = yx$), mais qui n'est pas nucléaire. De plus, Kirchberg ([Ki2]) a montré que (9.1) a lieu pour $B = B(H)$ et $A = C^*(F_\infty)$ la C^*–algèbre du groupe libre à (disons) une infinité de générateurs (noté F_∞), *i.e.* la C^*–algèbre engendrée par la représentation universelle du groupe discret F_∞. La théorie des espaces d'opérateurs a permis récemment à l'auteur (à paraître au J. Operator Th.) d'en donner une démonstration très simple. Cette même théorie a aussi guidé les auteurs de [JP] vers la solution d'un problème assez ancien mentionné par Kirchberg dans [Ki2] :

THÉORÈME 9.1 ([JP]).— *Si* $\dim H = \infty$, *on a* :

$$B(H) \otimes_{\min} B(H) \neq B(H) \otimes_{\max} B(H).$$

L'article [JP] décrit trois preuves différentes de ce résultat. La troisième est basée (d'après une communication de A. Valette [Va]) sur les travaux de Lubotzky–Phillips–Sarnark [LPS]. Elle donne la meilleure estimation asymptotique. Plus précisément, on a :

THÉORÈME 9.2 (voir [JP] et [Va]).— *Posons* :

$$\lambda(n) = \sup \left\{ \frac{\|u\|_{\max}}{\|u\|_{\min}} \,\middle|\, u \in B(H) \otimes B(H)\ r(u) \leq n \right\},$$

où $r(u)$ *désigne le rang de* u. *On a,* $\forall n \geq 4$ *de la forme* $n = p + 1$ *avec* p *premier* :

$$\frac{\sqrt{n}}{2} \sim \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \leq \lambda(n) \leq \sqrt{n}.$$

La majoration $\lambda(n) \leq \sqrt{n}$ est établie pour tout n et résulte par exemple de (8.2). Mais le point délicat est la preuve que $\lambda(n) \geq n(2\sqrt{n-1})^{-1}$. Nous nous bornerons ici à indiquer d'où sortent les tenseurs particuliers $u \in B(H) \otimes B(H)$ qui sont "responsables" de cette estimation. Pour cela, on utilise les travaux de Lubotzky–Phillips–Sarnark (exposés à Bourbaki par Colin de Verdière [CV]) : soit $n = p + 1$, avec p premier ≥ 3. Soit $S \subset \mathbf{R}^3$ la sphère euclidienne munie de sa mesure de surface normalisée. On note $L_0^2 \subset L^2(S, \mu)$ l'orthogonal des constantes et $\rho : SO(3) \to B(L_0^2)$ la représentation naturelle définie par $\rho(t)\, f(w) = f(t^{-1}(w))$. Soit $\rho = \oplus_{m \geq 0} \pi_m$, avec $\pi_m : SO(3) \to B(H_m)$, la décomposition de ρ en composantes irréductibles (de dimensions finies puisque $SO(3)$ est compact). On pose, pour toute partie $\Omega \subset \mathbf{N}$:

$$\rho_\Omega = \oplus_{m \in \Omega} \pi_m \quad \text{et} \quad H_\Omega = \oplus_{m \in \Omega} H_m.$$

D'après [LPS], pour $n = p+1$, il existe $t_1, \cdots, t_n \in SO(3)$ tels que :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \rho(t_i) \right\| \leq 2\sqrt{n-1},$$

d'où il résulte (c'est l'idée de [Va] un peu modifiée) que :

$$\sup_{m \neq m'} \left\| \sum_{i=1}^{n} \pi_m(t_i) \otimes \overline{\pi_{m'}(t_i)} \right\| \leq 2\sqrt{n-1}. \tag{9.2}$$

La construction de [JP] montre que les n-uplets $\rho_\Omega(t_1), \cdots, \rho_\Omega(t_n)$ sont souvent linéairement indépendants. Soit E_Ω le sous-espace engendré. Dans ce cas, on note $\xi_\Omega^1, \cdots, \xi_\Omega^n$ un système biorthogonal dans $E_\Omega{}^*$. Par la dualité des espaces d'opérateurs (voir § 2 ci–dessus), on sait qu'il existe un Hilbert $\mathcal{H}_\Omega$ et un plongement (isométrique) spécifique :

$$E_\Omega{}^* \subset B(\mathcal{H}_\Omega).$$

De plus, comme $\sum_{i=1}^{n} \rho_\Omega(t_i) \otimes \xi_\Omega^i$ représente l'identité sur le sous–espace $E_\Omega \subset B(H_\Omega)$, on a nécessairement d'après (3.1) et d'après l'injectivité du produit minimal :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \rho_\Omega(t_i) \otimes \xi_\Omega^i \right\|_{\min} = \|I_{E_\Omega}\|_{cb(E_\Omega, E_\Omega)} = 1. \tag{9.3}$$

En présence d'une estimation de type (9.2), la méthode de [JP] (voir aussi [Vo]) conduit à l'énoncé suivant : $\forall \varepsilon > 0$, il existe une partie infinie $\Omega \subset \mathbf{N}$ telle que $\rho_\Omega(t_1), \cdots, \rho_\Omega(t_n)$ soient linéairement indépendants et vérifient :

$$\frac{n}{2\sqrt{n-1}} - \varepsilon \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \rho_\Omega(t_i) \otimes \xi_i^\Omega \right\|_{B(H_\Omega) \otimes_{\max} B(\mathcal{H}_\Omega)}. \tag{9.4}$$

En combinant (9.3) et (9.4), on obtient le théorème 9.2.

Remarques finales: Les espaces d'opérateurs sont aussi utilisés actuellement de façon prometteuse dans d'autres directions que nous ne pouvons pas développer, faute de place et de compétence. Il s'agit d'une part, des travaux d'Effros et Ruan sur les groupes quantiques ("Operator convolution algebras : an approach to quantum groups" et "Discrete quantum groups, I. The Haar measure") et d'un article de Ruan (à paraître dans Amer. J. Math.) sur la moyennabilité des algèbres de Kac. D'autre part, de plusieurs travaux de Blecher, Muhly et Paulsen (et de Blecher seul) sur les modules d'opérateurs, les C^*-modules et la théorie de Morita. Dans un mémoire de l'A.M.S. (à paraître), Blecher, Muhly et Paulsen développent les fondations d'une théorie de Morita pour les algèbres d'opérateurs (non nécessairement auto-adjointes).

BIBLIOGRAPHIE

[A] C. ANANTHARAMAN–DELAROCHE - *Classification des C^*-algèbres purement infinies nucléaires (d'après E. Kirchberg)*, Sém. Bourbaki, novembre 1995, 48ème année, 1995-96, n° 805.

[BL] J. BERGH and J. LÖFSTRÖM - *Interpolation spaces. An introduction*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[B1] D. BLECHER - *Tensor products of operator spaces* II, Canadian J. Math. **44** (1992), 75–90.

[B2] D. BLECHER - *The standard dual of an operator space*, Pacific J. Math. **153** (1992), 15–30.

[B3] D. BLECHER - *A completely bounded characterization of operator algebras*, Math. Ann. **303** (1995), 227–240.

[BLM] D. BLECHER and C. LE MERDY - *On quotients of function algebras and operator algebra structures on ℓ_p*, à paraître.

[BP1] D. BLECHER and V. PAULSEN - *Tensor products of operator spaces*, J. Funct. Anal. **99** (1991), 262–292.

[BP2] D. BLECHER and V. PAULSEN - *Explicit constructions of universal operator algebras and applications to polynomial factorization*, Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 839–850.

[BRS] D. BLECHER, Z.J. RUAN and A. SINCLAIR - *A characterization of operator algebras*, J. Funct. Anal. **89** (1990), 188–201.

[Ca] T. K. CARNE - *Not all H'-algebras are operator algebras*, Proc. Camb. Phil. Soc. **86** (1979), 243–249.

[CE] M.D. CHOI and E. EFFROS - *Injectivity and operator spaces*, J. Funct. Anal. **24** (1977), 156–209.

[CES] E. CHRISTENSEN, E. EFFROS and A. SINCLAIR - *Completely bounded multilinear maps and C^*-algebraic cohomology*, Invent. Math. **90** (1987), 279–296.

[CS] E. CHRISTENSEN and A. SINCLAIR - *A survey of completely bounded operators*, Bull. London Math. Soc. **21** (1989), 417–448.

[CV] Y. COLIN de VERDIÈRE - *Distribution de points sur une sphère (d'après Lubotzky, Phillips et Sarnak)*, Sém. Bourbaki, exposé n° 703, nov. 1989, Astérisque, **177–178** (1989), 83–93.

[EH] E. EFFROS and U. HAAGERUP - *Lifting problems and local reflexivity for C^*-algebras*, Duke Math. J. **52** (1985), 103–128.

[EK] E. EFFROS and A. KISHIMOTO - *Module maps and Hochschild–Johnson cohomology*, Ind. Univ. Mah. J. **36** (1987), 257–276.

[ER1] E. EFFROS and Z.J. RUAN - *A new approach to operator spaces*, Canadian Math. Bull. **34** (1991), 329-337.

[ER2] E. EFFROS and Z.J. RUAN - *On the abstract characterization of operator spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), 579–584.

[ER3] E. EFFROS and Z.J. RUAN - *Self-duality for the Haagerup tensor product and Hilbert space factorization*, J. Funct. Anal. **100** (1991), 257–284.

[ER4] E. EFFROS and Z.J. RUAN - *Mapping spaces and liftings for operator spaces*, Proc. London Math. Soc. **69** (1994), 171–197.

[ER5] E. EFFROS and Z.J. RUAN - *The Grothendieck-Pietsch and Dvoretzky-Rogers theorems for operator spaces*, J. Funct. Anal. **122** (1994) 428-450.

[ER6] E. EFFROS and Z.J. RUAN - *On approximation properties for operator spaces*, International J. Math. **1**, (1990), 163–187.

[EW] E. EFFROS and S. WINKLER - *Matrix convexity : operator analogues of the bipolar and Hahn-Banach theorems.* Preprint, 1995.

[G] A. GROTHENDIECK - *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Boll. Soc. Mat. São-Paulo **8** (1956), 1–79.

[H] U. HAAGERUP - *Decomposition of completely bounded maps on operator algebras*, manuscrit non publié, Sept. 1980.

[JP] M. JUNGE and G. PISIER - *Bilinear forms on exact operator spaces and $B(H) \otimes B(H)$*, Geometric and Functional Analysis (GAFA Journal) **5** (1995), 329–363.

[Ki1] E. KIRCHBERG - *On non-semisplit extensions, tensor products and exactness of group C^*-algebras*, Invent. Math. **112** (1993), 449-489.

[Ki2] E. KIRCHBERG - *Commutants of unitaries in UHF algebras and functorial properties of exactness*, J. reine angew. Math. **452** (1994), 39–77.

[LeM1] C. LE MERDY - *On the duality of operator spaces*, Canad. Math. Bull. **38** (1995), 334–346.

[LeM2] C. LE MERDY - *Representations of a quotient of a subalgebra of $B(X)$*. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **119** (1996), 83–90.

[LPS] A. LUBOTZKY, R. PHILLIPS and P. SARNAK - *Hecke operators and distributing points on S^2*, I, Comm. Pure and Applied Math. **39** (1986), 149–186.

[Pa1] V. PAULSEN - *Completely bounded maps and dilations*, Pitman Research Notes **146**, Pitman Longman (Wiley) 1986.

[Pa2] V. PAULSEN - *Representation of function algebras, abstract operator spaces and Banach space geometry*, J. Funct. Anal. **109** (1992), 113–129.

[Pa3] V. PAULSEN - *Completely bounded maps on C^*-algebras and invariant operator ranges*, Proc. Amer. Math. Soc. **86** (1982), 91–96.

[PS] V. PAULSEN and R. SMITH - *Multilinear maps and tensor norms on operator systems*, J. Funct. Anal. **73** (1987), 258–276.

[P1] G. PISIER - *The operator Hilbert space OH, complex interpolation and tensor norms*, Memoirs Amer. Math. Soc. (1996), à paraître.

[P2] G. PISIER - *Espaces de Banach quantiques : Une introduction à la théorie des espaces d'opérateurs* (59 p.), Journée de la S. M. F., 1994, Soc. Math. France.

[P3] G. PISIER - *Exact operator spaces*, Colloque sur les algèbres d'opérateurs. (Orléans 1992), Astérisque **232**, Soc. Math. France (1995), 159–187.

[P4] G. PISIER - *Non-commutative vector valued L_p-spaces and completely p-summing maps*, à paraître probablement dans Astérisque.

[P5] G. PISIER - *An introduction to the theory of operator spaces.* En préparation.

[P6] G. PISIER - *Similarity problems and completely bounded maps*, Springer Lecture notes **1618** (1995), Springer verlag, Heidelberg.

[Ru1] Z.J. RUAN - *Subspaces of C^*-algebras*, J. Funct. Anal. **76** (1988), 217–230.

[Sk] G. SKANDALIS - *Algèbres de von Neumann de groupes libres and probabilités non commutatives*, Sém. Bourbaki, exposé n° 764, nov. 1992, Astérisque **216** (1993), 87–102.

[Va] A. VALETTE - *An application of Ramanujan graphs to C^*-algebra tensor products*, à paraître.

[V1] N VAROPOULOS - *A theorem on operator algebras*, Math. Scand. **37** (1975), 173–182.

[Vo] D. VOICULESCU - *Property T and approximation of operators*, Bull. London Math. Soc. **22** (1990), 25–30.

[Wa1] S. WASSERMANN - *On tensor products of certain group C^*-algebras*, J. Funct. Anal. **23** (1976), 239-254.

[Wa2] S. WASSERMANN - *Exact C^*-algebras and related topics*, Lecture Notes Series, Seoul Nat. Univ. (1994).

[Wi] G. WITTSTOCK - *Ein operatorwertigen Hahn-Banach Satz*, J. Funct. Anal. **40** (1981), 127–150.

[X] Q. XU - *The real interpolation in the category of operator spaces*, J. Funct. Anal., à paraître.

Gilles PISIER

Texas A & M University
College Station, TX 77843, U. S. A.

et

Université Paris 6
Equipe d'Analyse,
URA 754 du CNRS
Case 186
F-75252 PARIS CEDEX 05