Astérisque

MICHEL DUFLO

Opérateurs transversalement elliptiques et formes différentielles équivariantes

Astérisque, tome 237 (1996), Séminaire Bourbaki, exp. nº 791, p. 29-45

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__29_0>

Séminaire BOURBAKI
47ème année, 1994-95, n° 791

Novembre 1994

OPÉRATEURS TRANSVERSALEMENT ELLIPTIQUES ET FORMES DIFFÉRENTIELLES ÉQUIVARIANTES [d'après N. Berline et M. Vergne]

par **Michel DUFLO**

Introduction.

Soit G un groupe de Lie compact opérant dans une variété différentiable M et soit D un opérateur pseudo-différentiel G-invariant sur M. Lorsque D est elliptique, le noyau et le conoyau de D sont des espaces de dimension finie dans lequel le groupe G opère linéairement. L'indice équivariant de D est la différence formelle de ces deux représentations de G. Notons $\mathrm{Ind}(D, g)$ la valeur de son caractère en un point $g \in G$:

$$\mathrm{Ind}(D, g) = \mathrm{tr}(g|\ker D) - \mathrm{tr}(g|\operatorname{coker} D).$$

La formule cohomologique d'Atiyah-Segal-Singer [3, 5] donne $\mathrm{Ind}(D, g)$ comme l'intégrale sur l'espace cotangent $T^*M(g)$ de la variété des points fixes de g dans M d'une classe de cohomologie à support compact dont la définition fait intervenir le symbole de D. Supposons D seulement transversalement elliptique, c'est-à-dire elliptique dans les directions transverses aux orbites de l'action de G. Atiyah [1] a montré que l'on pouvait encore définir l'indice de D. Le noyau et le conoyau de D sont des représentations (en général de dimension infinie) traçables, de sorte que le caractère de l'indice est une *distribution* sur G et cela n'a pas de sens en général de calculer sa valeur en un point donné.

Dans [1], Atiyah fournit un algorithme pour calculer cette distribution en fonction du symbole de D. Il ne donne cependant de formule cohomologique que dans certains cas. Cette question ne semble pas avoir progressé jusqu'aux travaux récents de N. Berline et M. Vergne [24, 10, 11, 12, 13]. Dans ces articles, l'indice d'un opérateur transversalement elliptique est obtenu, au voisinage d'un point $s \in G$, comme l'intégrale sur $T^*M(s)$ d'une *forme différentielle équivariante*. Le but de cet exposé est de décrire cette formule et, en particulier, de faire quelques rappels sur les formes différentielles équivariantes, qui sont un des ingrédients qui ne figuraient pas dans [1].

Les formes différentielles équivariantes sur une variété M sur laquelle opère un groupe compact G ont été introduites dans les années 50 (Cartan [15, 16]) pour donner un modèle de de Rham de la cohomologie G-équivariante de la variété M. Depuis une dizaine d'années, avec les travaux de Berline-Vergne [7, 23], Witten [28], Atiyah-Bott [2] cette théorie s'est mise à revivre et les formes différentielles équivariantes et la dérivation d_ζ définie ci-dessous ont trouvé de nombreuses applications pas exclusivement topologiques, particulièrement dans des situations où il est important de disposer de représentants explicites des classes de cohomologie pertinentes. Outre l'application aux opérateurs transversalement elliptiques faisant l'objet de ce rapport, et sans être exhaustif, je mentionnerai les applications aux théorèmes de l'indice équivariant "local", celles se situant dans le contexte hamiltonien – grand pourvoyeur de formes différentielles équivariantes fermées– (interprétation de la formule de Duistermaat-Heckman, formule de localisation "non commutative" de Witten, étude de la cohomologie des variétés obtenues par la réduction de Marsden-Weinstein), dans le contexte des variétés de lacets (où le groupe S^1 agit naturellement), et dans celui des groupes non compacts.

On trouvera un exposé détaillé sur les formes différentielles équivariantes dans le chapitre 7 de [6]. Je ne rappellerai ici que les notions indispensables à l'énoncé de la formule de l'indice des opérateurs transversalement elliptiques.

1 Formes différentielles équivariantes.

1.1 Définitions.

Soit M une variété différentiable. On note $\mathcal{A}(M) = \bigoplus_j \mathcal{A}^j(M)$ l' algèbre des formes différentielles sur M et d sa différentielle. Si ζ est un champ de vecteurs sur M, on note $\iota(\zeta)$ la contraction par le champ de vecteurs ζ, $\mathcal{L}(\zeta)$ l'action de ζ sur $\mathcal{A}(M)$ par dérivation de Lie, et d_ζ la dérivation[1]

$$d_\zeta = d - \iota(\zeta). \tag{1}$$

Supposons M munie d'une action différentiable du groupe de Lie G. Soient $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual. Pour $X \in \mathfrak{g}$ on note X_M le champ de vecteurs sur M donné au point $x \in M$ par $X_M(x) = \frac{d}{d\varepsilon}\exp(-\varepsilon X)\cdot x|_{\varepsilon=0}$ et on pose $d_X = d_{X_M}$, $\iota(X) = \iota(X_M)$ et $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X_M)$. Notons $\alpha = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n$ la décomposition en formes homogènes d'une forme $\alpha \in \mathcal{A}(M)$ (nous supposerons toujours que M a un nombre fini de composantes connexes et n est un majorant de la dimension de M). La relation $\alpha = d_X\gamma$ est équivalente à la série de relations

$$\alpha_0 = -\iota(X)\gamma_1, \quad \alpha_1 = d\gamma_0 - \iota(X)\gamma_2, \ldots, \quad \alpha_n = d\gamma_{n-1}. \tag{2}$$

Dans toute la suite, W désigne un voisinage ouvert G-invariant de 0 dans $\mathfrak{g}$. Une forme différentielle équivariante α sur M est par définition une application $X \mapsto \alpha(X)$

[1]Les algèbres considérées dans la suite ont une graduation naturelle sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et la règle des signes est utilisée.

de W dans $\mathcal{A}(M)$, invariante par l'action naturelle de G déduite de l'action adjointe dans $\mathfrak{g}$ et de l'action sur M. Si α est une forme différentielle équivariante, on définit une nouvelle forme différentielle équivariante $d_{\mathfrak{g}}\alpha$ par la formule

$$(d_{\mathfrak{g}}\alpha)(X) = d_X(\alpha(X)). \tag{3}$$

La relation de Cartan $(d - \iota(X))^2 = -\mathcal{L}(X)$ et l'invariance de α impliquent la relation $d_{\mathfrak{g}}^2\alpha = 0$. Notons $\mathcal{A}_G^\infty(W, M) = C^\infty(W, \mathcal{A}(M))^G$ l'algèbre des formes équivariantes différentiables. L'opérateur $d_{\mathfrak{g}}$ induit dans $\mathcal{A}_G^\infty(W, M)$ une dérivation de carré nul et on peut parler de formes équivariantes fermées et de formes équivariantes exactes. On note $H_G^\infty(W, M)$ la cohomologie de $\mathcal{A}_G^\infty(W, M)$. C'est une algèbre graduée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Soient N une autre variété dans laquelle G opère et ϕ un morphisme G-équivariant de M dans N. L'image réciproque ϕ^* induit un morphisme d'algèbres de $H_G^\infty(W, N)$ dans $H_G^\infty(W, M)$ et fait de $H_G^\infty(W, M)$ une algèbre sur $H_G^\infty(W, N)$. Si $N = \bullet$ est un point, $H_G^\infty(W, \bullet)$ est égal à l'algèbre $C^\infty(W)^G$ des fonctions différentiables G-invariantes (pour l'action adjointe) sur W. En considérant l'application $M \to \bullet$ on voit que $H_G^\infty(W, M)$ est une algèbre sur $C^\infty(W)^G$.

Dans le même ordre d'idées, si $\phi : H \to G$ est un homomorphisme de groupes et si l'on note aussi $\phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ l'application tangente à l'élément neutre, alors ϕ induit une application $\phi^* : H_G^\infty(W, M) \to H_H^\infty(\phi^{-1}(W), M)$. En particulier l'évaluation en $0 \in \mathfrak{g}$ induit un homomorphisme $H_G^\infty(W, M) \to H^\bullet(M)$, où $H^\bullet(M)$ est la cohomologie de de Rham de M.

Notons $\mathcal{A}_c(M)$ l'algèbre des formes à support compact sur M. On définit de même l'algèbre $\mathcal{A}_{G,c}^\infty(W, M) = C^\infty(W, \mathcal{A}_c(M))^G$ des formes équivariantes à support compact et la cohomologie équivariante à supports compacts $H_{G,c}^\infty(W, M)$. Supposons M orientée. Si $\alpha \in \mathcal{A}_c(M)$, on note $\int_M \alpha$ l'intégrale (sur chaque composante connexe) de la composante homogène de degré maximum. Il résulte de la dernière relation de (2) que $\int d_X\gamma = 0$ pour tout $\gamma \in \mathcal{A}_c(M)$. Soit $\alpha \in C^\infty(W, \mathcal{A}_c(M))^G$ une forme fermée. Pour $X \in W$, le nombre $\int_M \alpha(X)$ ne dépend que de la classe $[\alpha] \in H_{G,c}^\infty(W, M)$. On le notera éventuellement $\int_M[\alpha](X)$. Si l'orientation est G-invariante, l'intégrale induit une application $C^\infty(W)^G$-linéaire $H_{G,c}^\infty(W, M) \to C^\infty(W)^G$.

1.2 Connexions et classes caractéristiques équivariantes.

Dans toute la suite de ce rapport, G est supposé compact. La théorie de Chern-Weil permet d'associer à un fibré vectoriel sur M muni d'une connexion des formes différentielles fermées sur M représentant des classes caractéristiques. Ceci s'étend au cas équivariant et permet de construire des formes différentielles équivariantes fermées [8]. Décrivons celles qui interviennent dans la formule de l'indice des opérateurs transversalement elliptiques.

On considère un fibré vectoriel (réel ou complexe) G-équivariant $\mathcal{E}$ sur la variété M et une connexion G-invariante ∇ sur $\mathcal{E}$. Notons $C^\infty(M, \mathcal{E})$ l'espace des sections différentiables de $\mathcal{E}$, $\mathcal{A}(M, \mathcal{E}) = \oplus_j \mathcal{A}^j(M, \mathcal{E})$ l'espace des formes différentielles à valeurs dans $\mathcal{E}$, $End\,\mathcal{E}$ le fibré des endomorphismes de $\mathcal{E}$. On considère ∇ comme un endomorphisme de degré 1 de $\mathcal{A}(M, \mathcal{E})$ tel que l'on ait

$$\nabla(\omega s) = d\omega\, s + (-1)^{deg(\omega)} \omega \nabla s \tag{4}$$

pour toute forme homogène $\omega \in \mathcal{A}(M)$ et tout $s \in \mathcal{A}(M, \mathcal{E})$. La courbure $F = \nabla^2$ est un endomorphisme $\mathcal{A}(M)$-linéaire de $\mathcal{A}(M, \mathcal{E})$ que l'on identifie à un élément $F \in \mathcal{A}^2(M, End\,\mathcal{E})$. Soit $X \in \mathfrak{g}$. Notons encore $\mathcal{L}(X)$ l'action de X déduite de l'action de G dans $\mathcal{A}(M, \mathcal{E})$. L'endomorphisme

$$\mu(X) = \mathcal{L}(X) - (\iota(X)\nabla + \nabla\iota(X)) \tag{5}$$

de $\mathcal{A}(M, \mathcal{E})$ est $\mathcal{A}(M)$-linéaire. On l'identifie à un élément de $C^\infty(M, End\,\mathcal{E})$. On appelle μ le *moment* de ∇. Posons

$$F_{\mathfrak{g}}(X) = \mu(X) + F. \tag{6}$$

On appelle $F_{\mathfrak{g}}$ la *courbure équivariante* de ∇.

Exemple 1 (Actions hamiltonniennes). Supposons M munie d'une 2-forme G-invariante ω qui en fait une variété symplectique et soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites G-équivariant muni d'une connexion G-invariante ∇ dont la courbure est égale à $i\omega$. Le fibré $\mathcal{L}$ est une préquantification de M au sens de Kostant-Souriau. Ecrivons la formule (5) sous la forme bien connue [19, 22] $\mathcal{L}(X)s = \nabla_{X_M} s + i\nu(X)s$. La fonction ν est une application linéaire G-invariante de $\mathfrak{g}$ dans $C^\infty(M)$ et c'est l'application moment d'une action hamiltonnienne de G sur M. La courbure équivariante de ∇ est égale à $i(\nu + \omega)$. C'est une forme équivariante fermée. Cette remarque explique le rôle des formes différentielles équivariantes dans les questions faisant intervenir des actions hamiltonniennes de groupes (voir [7]).

Pour $X \in \mathfrak{g}$, on pose

$$\mathrm{ch}(\nabla)(X) = \mathrm{tr}(e^{F_{\mathfrak{g}}(X)}) \in \mathcal{A}(M). \tag{7}$$

Donc $\mathrm{ch}(\nabla)$ est une forme équivariante sur M. Par une extension de la théorie classique de Chern-Weil, on montre que cette forme est fermée et que sa classe $\mathrm{ch}(\mathcal{E}) \in H^\infty_G(\mathfrak{g}, M)$ ne dépend pas du choix de ∇. C'est le *caractère de Chern équivariant* de $\mathcal{E}$. L'image de $\mathrm{ch}(\mathcal{E})$ dans $H^\bullet(M)$ obtenue par l'évaluation en $0 \in \mathfrak{g}$ est le caractère de Chern usuel [2] de $\mathcal{E}$.

[2] Il est plus traditionnel d'utiliser $\frac{F}{-2i\pi}$ au lieu de F. Dans ce cas il convient d'utiliser la différentielle équivariante $d + 2i\pi\iota(X)$ au lieu de $d - \iota(X)$. J'utilise ici les conventions de [6]

De même la formule

$$j(\nabla)(X) = \det\left(\frac{e^{F_{\mathfrak{g}}(X)/2} - e^{-F_{\mathfrak{g}}(X)/2}}{F_{\mathfrak{g}}(X)}\right) \tag{8}$$

définit une forme équivariante fermée $j(\nabla) \in \mathcal{A}^\infty_G(\mathfrak{g}, M)$ dont la classe $j(\mathcal{E})$ dans l'algèbre $H^\infty_G(\mathfrak{g}, M)$ ne dépend pas de ∇. Son image dans $H^\bullet(M)$ est "le genre j" usuel de $\mathcal{E}$. Le terme de degré extérieur 0 de $j(\nabla)(X)$ est la fonction $\det(\frac{e^{\mu(X)/2} - e^{-\mu(X)/2}}{\mu(X)}) \in C^\infty(M)$. Au moins si M est compacte, cette fonction est proche de 1 pour X suffisamment petit. Pour X dans un voisinage de 0, on peut donc définir $j(\nabla)(X)^r$ pour tout $r \in \mathbb{C}$. C'est une forme différentielle sur M annulée par d_X.

Dans toute la suite, nous supposons choisie une connexion G-invariante ∇_M sur le fibré tangent TM. On pose $j(M)(X) = j(\nabla_M)(X)$. Au moins si M est compacte, si W est assez petit on peut donc définir pour $X \in W$ les formes différentielles d_X-fermées $j(M)(X)^{-1}$ et $\hat{A}(M)(X) = j(M)(X)^{-\frac{1}{2}}$. On dit que $\hat{A}(M)$ (ou bien sa classe dans $H^\infty_G(W, M)$) est le *$\hat{A}$-genre équivariant de M*. Son image dans $H^\bullet(M)$ est le $\hat{A}$-genre usuel.

La formule des points fixes fait intervenir une généralisation du genre $j(M)$ dépendant d'un point $s \in G$. Si G opère dans un ensemble Z, on note $Z(s)$ l'ensemble des points fixes de s dans Z. On notera aussi $G(s)$ le centralisateur de s dans G et $\mathfrak{g}(s)$ son algèbre de Lie. La variété $M(s)$ est $G(s)$-invariante. On peut identifier l'espace des points fixes de s dans TM à l'espace tangent à $M(s)$, de sorte que la notation $TM(s)$ est sans ambiguïté. La restriction $TM|M(s)$ de TM à $M(s)$ est somme directe de $TM(s)$ et d'un unique supplémentaire s-invariant que nous noterons $\mathcal{N}(s)$. C'est le fibré normal à $M(s)$ dans M. La connexion ∇_M induit sur les fibrés $TM(s)$ et $\mathcal{N}(s)$ sur $M(s)$ des connexions $G(s)$-invariantes. Pour $X \in \mathfrak{g}(s)$, notons $R_s(X)$ la courbure équivariante de la connexion induite dans $\mathcal{N}(s)$. Notons encore s l'endomorphisme du fibré $\mathcal{N}(s)$ induit par l'action de s. On pose

$$d_s(M)(X) = \det(1 - s e^{R_s(X)}). \tag{9}$$

On montre que cette formule définit une forme $G(s)$-équivariante fermée sur $M(s)$. Le terme de degré 0 de $d_s(M)(0)$ est égal à la fonction $\det(1 - s|\mathcal{N}(s))$ sur $M(s)$. Celle-ci est > 0. Donc, au moins si M est compacte, pour X assez petit dans $\mathfrak{g}(s)$ on peut définir les formes $d_s(M)(X)^r \in \mathcal{A}(M(s))$ pour tout $r \in \mathbb{C}$. On pose

$$n_s(M)(X) = (2i\pi)^{\dim(M(s))} j(M(s))(X)\, d_s(M)(X). \tag{10}$$

Donc $n_s(M)$ est une forme $G(s)$-équivariante fermée sur $M(s)$ et, au moins si M est compacte et X dans un voisinage ouvert $G(s)$-invariant W_s de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$ suffisamment petit, $n_s(M)(X)^{-1}$ est une forme différentielle sur $M(s)$ annulée par d_X, et $n_s(M)^{-1} \in \mathcal{A}^\infty_{G(s)}(W_s, M(s))$ une forme équivariante fermée sur $M(s)$.

1.3 Superconnexions et caractère de Chern.

On note $K_G(M)$ l'anneau de K-théorie topologique équivariante (c'est le K^0 à supports compacts). Un élément de $K_G(M)$ peut être représenté par un triplet $(\mathcal{E}^+, \mathcal{E}^-, \sigma)$ où $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ sont des fibrés vectoriels complexes G-équivariants sur M et σ un isomorphisme équivariant de $\mathcal{E}^+$ sur $\mathcal{E}^-$ défini en dehors d'un ensemble compact de M. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera $[\sigma]$ la classe de ce triplet. Lorsque M est compacte, $(\mathcal{E}^\pm, 0, 0)$ représente un élément $[\mathcal{E}^\pm]$ de $K_G(M)$, on a $[\sigma] = [\mathcal{E}^+] - [\mathcal{E}^-]$ et le caractère de Chern équivariant de $[\sigma]$ est par définition la classe de cohomologie $\mathrm{ch}([\sigma]) = \mathrm{ch}(\mathcal{E}^+) - \mathrm{ch}(\mathcal{E}^-)$. Lorsque M n'est pas compacte (ce qui est le cas dans les applications au théorème de l'indice), le caractère de Chern de $[\sigma]$ peut être défini comme une classe de cohomologie équivariante à support compact sur M. N. Berline et M. Vergne utilisent en fait des formes à décroissance rapide, construites par la méthode de Quillen [20]. Je décris cette construction.

On considère le fibré $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$ comme un superfibré (c'est-à-dire un fibré gradué sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). L'espace $\mathcal{A}(M, \mathcal{E})$ est naturellement un superespace. Une superconnexion $\mathbb{A}$ est un endomorphisme impair de $\mathcal{A}(M, \mathcal{E})$ vérifiant la relation analogue à (4). La courbure $F = \mathbb{A}^2$, le moment $\mu(X)$, et la courbure équivariante $F_{\mathfrak{g}}(X)$ d'une superconnexion G-invariante sont les endomorphismes $\mathcal{A}(M)$-linéaires pairs de $\mathcal{A}(M, \mathcal{E})$ définis comme plus haut dans le cas des connexions.

Exemple 2. On choisit des connexions G-invariantes ∇^+ et ∇^- sur $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ et on note ∇ la connexion $\nabla^+ \oplus \nabla^-$. Soit $\sigma \in C^\infty(M, Hom(\mathcal{E}^+, \mathcal{E}^-))^G$. On munit $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ de structures hermitiennes G-invariantes, on note σ^* l'adjoint de σ et on pose

$$U(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^* \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \in C^\infty(M, End\,\mathcal{E}) \quad \text{et} \quad \mathbb{A}(\sigma) = \nabla + iU(\sigma). \tag{11}$$

Alors $\mathbb{A}(\sigma)$ est une superconnexion G-invariante sur $\mathcal{E}$. Notant $F = F^+ + F^-$ la courbure de ∇ et $F(\sigma)$ celle de $\mathbb{A}(\sigma)$, on a

$$F(\sigma) = -\begin{pmatrix} \sigma^*\sigma & 0 \\ 0 & \sigma\sigma^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F^+ & 0 \\ 0 & F^- \end{pmatrix} + i[\nabla, U(\sigma)]. \tag{12}$$

Soit $E = E^+ \oplus E^-$ un superespace vectoriel. Soit $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un endomorphisme de E. La *supertrace* $\mathrm{str}(u)$ est par définition le scalaire $\mathrm{str}(u) = \mathrm{tr}(a) - \mathrm{tr}(d)$. Soit $\mathcal{A}$ une superalgèbre associative supercommutative (e.g. $\mathcal{A} = \mathcal{A}(M)$). La supertrace se prolonge en une forme $\mathcal{A}$-linéaire paire sur l'espace des endomorphismes $\mathcal{A}$-linéaires de $\mathcal{A} \otimes E$, nulle sur les supercommutateurs. Plus généralement, la supertrace d'un endomorphisme $\mathcal{A}(M)$-linéaire de $\mathcal{A}(M, \mathcal{E})$ est un élément de $\mathcal{A}(M)$ de même parité.

Soit $X \in \mathfrak{g}$. La forme différentielle équivariante $\mathrm{ch}(\mathbb{A})$ sur M définie par la formule

$$\mathrm{ch}(\mathbb{A})(X) = \mathrm{str}(e^{F+\mu(X)})$$

est fermée et sa classe dans $H^\infty_G(\mathfrak{g}, M)$ (qui ne dépend pas de $\mathbb{A}$) est égale à $\mathrm{ch}(\mathcal{E}^+) - \mathrm{ch}(\mathcal{E}^-)$. Dans le cas de la superconnexion $\mathbb{A}(\sigma)$ de l'exemple 2, le terme $-U(\sigma)^2$ de $F(\sigma)$ permet de rendre $\mathrm{str}(e^{F(\sigma)+\mu(X)})$ "petit" là où σ est inversible. Précisons cette idée dans le cas particulier qui nous intéresse ici.

1.4 Fibrés cotangents et symboles elliptiques.

Soit M une variété compacte munie d'une action du groupe de Lie compact G. On note p la projection de l'espace cotangent T^*M sur M. Nous noterons $\mathcal{A}_{rap}(T^*M) \subset \mathcal{A}(T^*M)$ l'algèbre des formes sur T^*M, à décroissance rapide[3], et $H^\bullet_{rap}(T^*M)$ la cohomologie correspondante. On définit de même l'algèbre $\mathcal{A}^\infty_{G,rap}(W, T^*M) = C^\infty(W, \mathcal{A}_{rap}(T^*M))^G$ des formes équivariantes à décroissance rapide et l'algèbre de cohomologie correspondante $H^\infty_{G,rap}(W, T^*M)$. L'inclusion $\mathcal{A}_c(T^*M) \subset \mathcal{A}_{rap}(T^*M)$ induit des isomorphismes $H^\bullet_c(T^*M) \simeq H^\bullet_{rap}(T^*M)$ et $H^\infty_{G,c}(W, T^*M) \simeq H^\infty_{G,rap}(W, T^*M)$.

Soient $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ deux fibrés vectoriels complexes G-équivariants sur M, munis de connexions G-invariantes ∇^+ et ∇^-. Un *symbole* σ est un homomorphisme C^∞ entre les fibrés $p^*\mathcal{E}^+$ et $p^*\mathcal{E}^-$, défini en dehors d'un compact de T^*M. Si l'on note (x, ξ) un point de T^*M au dessus de $x \in M$, $\sigma(x, \xi)$ est un homomorphisme de $\mathcal{E}^+_x$ dans $\mathcal{E}^-_x$. On dit qu'un symbole est elliptique s'il est inversible en dehors d'un ensemble compact de T^*M. Un symbole elliptique équivariant représente un élément $[\sigma] \in K_G(T^*M)$.

Un notion plus forte est celle de "bon symbole elliptique" [11]. Choisissons des structures hermitiennes G-invariantes sur $\mathcal{E}^\pm$ comme dans l'exemple 2, dont nous conservons les notations. Le symbole σ est un *bon symbole elliptique* s'il est défini et différentiable dans T^*M tout entier, s'il est à croissance lente et si $U(\sigma)^2(x, \xi)$ (qui est un endomorphisme ≥ 0 de $\mathcal{E}_x$) est minoré en dehors d'un compact de T^*M par $c||\xi||^2$, où $||.||$ est une norme sur T^*M et c une constante > 0.

Proposition 1 *[11] Soit σ un bon symbole elliptique équivariant. Alors le caractère de Chern* $\mathrm{ch}(\mathbb{A}(\sigma))(X) = \mathrm{str}(e^{F(\sigma)+\mu(X)})$ *est à décroissance rapide sur T^*M.*

Notons $\mathrm{ch}([\sigma])$ la classe de $\mathrm{ch}(\mathbb{A}(\sigma))$ dans $H^\infty_{G,rap}(\mathfrak{g}, T^*M) \simeq H^\infty_{G,c}(\mathfrak{g}, T^*M)$ —elle ne dépend que de $[\sigma] \in K_G(T^*M)$. Nous dirons que c'est le *caractère de Chern équivariant de* $[\sigma]$. Il est égal au caractère de Chern équivariant usuel [20, 11]. On peut voir que tout élément de $K_G(T^*M)$ peut être représenté par un bon symbole, de sorte que l'on peut

[3] "à décroissance rapide" signifie "à décroissance rapide ainsi que les dérivées". De même pour "croissance lente".

adopter si l'on veut la construction ci-dessus comme définition du caractère de Chern équivariant sur $K_G(T^*M)$.

La formule des points fixes fait intervenir une généralisation du caractère de Chern dépendant du choix d'un point $s \in G$. La décomposition $TM|M(s) = TM(s) \oplus \mathcal{N}(s)$ permet d'identifier l'espace cotangent $T^*M(s)$ de $M(s)$ et l'espace des points fixes de s dans T^*M. La restriction $\mathcal{E}|M(s)$ de $\mathcal{E}$ à $M(s)$ est un superfibré $G(s)$-équivariant. L'action de s induit dans $\mathcal{E}|M(s)$ un endomorphisme qui sera encore noté s. Pour $X \in \mathfrak{g}(s)$ on pose, en notant encore $F(\sigma) + \mu(X)$ la restriction de $F(\sigma) + \mu(X)$ à $T^*M(s) \subset T^*M$,

$$\mathrm{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma))(X) = \mathrm{str}(se^{F(\sigma)+\mu(X)}). \tag{13}$$

C'est une forme différentielle à décroissance rapide sur $T^*M(s)$ et $\mathrm{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma))$ est une forme $G(s)$-équivariante sur $T^*M(s)$, fermée à décroissance rapide. Sa classe dans $H^\infty_{G(s),rap}(\mathfrak{g}(s), T^*M(s))$ est notée $\mathrm{ch}_s([\sigma])$. La famille $(\mathrm{ch}_s([\sigma]))_{s\in G}$ est appellée le *bouquet de caractères de Chern* de $[\sigma]$.

2 Opérateurs elliptiques et formule de Kirillov.

Dans toute la suite M est une variété compacte munie d'une action du groupe compact G et $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$ un superfibré équivariant sur M. On choisit une structure riemannienne G-invariante sur M, et des structures hermitiennes invariantes sur $\mathcal{E}^\pm$. Suivant [1], nous considérons pour tout $m \in \mathbb{Z}$ la classe des opérateurs pseudo-différentiels $\mathcal{P}^m(M, \mathcal{E}^+, \mathcal{E}^-)$ d'ordre m qui admettent un symbole principal σ_D. Un élément $D \in \mathcal{P}^m(M, \mathcal{E}^+, \mathcal{E}^-)$ envoie l'espace des sections différentiables $C^\infty(M, \mathcal{E}^+)$ dans l'espace correspondant $C^\infty(M, \mathcal{E}^-)$, et le symbole σ_D est un homorphisme entre les fibrés $p^*\mathcal{E}^+$ et $p^*\mathcal{E}^-$, défini en dehors de la section nulle, homogène de degré m. L'adjoint D^* appartient à $\mathcal{P}^m(M, \mathcal{E}^-, \mathcal{E}^+)$.

Dans la suite de ce paragraphe, on considère un opérateur pseudo-différentiel elliptique G-invariant D. Les espaces $\ker D \subset C^\infty(M, \mathcal{E}^+)$ et $\ker D^* \subset C^\infty(M, \mathcal{E}^-)$ sont G-invariants et de dimension finie. On note $R(G)$ le groupe abélien libre ayant pour base l'ensemble $\hat{G}$ des classes de représentations irréductibles de dimension finie de G. L'*indice équivariant* de D est l'élément de $R(G)$ défini par la formule $\mathrm{Ind}(D) = \ker D - \ker D^*$. Si V est une représentation de G, on note $m(\lambda, V)$ la multiplicité d'un élément $\lambda \in \hat{G}$ dans V: si V_λ est un représentant de λ, on a $m(\lambda, V) = \dim \mathrm{Hom}_G(V_\lambda, V) = \dim(V \otimes V_\lambda^*)^G$. Considérons le superfibré $\mathcal{E} \otimes V_\lambda^*$ sur M. L'opérateur D induit un opérateur elliptique

$$D_\lambda : C^\infty(M, \mathcal{E}^+ \otimes V_\lambda^*) \to C^\infty(M, \mathcal{E}^- \otimes V_\lambda^*). \tag{14}$$

Nous notons D_λ^G la restriction de D_λ aux sections invariantes:

$$D_\lambda^G : C^\infty(M, \mathcal{E}^+ \otimes V_\lambda^*)^G \to C^\infty(M, \mathcal{E}^- \otimes V_\lambda^*)^G. \tag{15}$$

On a $m(\lambda, \ker D) = \dim\ker D_\lambda^G$ et $m(\lambda, \ker D^*) = \dim\ker D_\lambda^{*G}$. Posons

$$m(\lambda, \operatorname{Ind} D) = \dim\ker D_\lambda^G - \dim\ker D_\lambda^{*G}. \tag{16}$$

On a $\operatorname{Ind}(D) = \sum_{\lambda\in\hat{G}} m(\lambda, \operatorname{Ind} D)\lambda$.

Notons $\operatorname{Ind}(D, g)$ la valeur du caractère de $\operatorname{Ind} D$ en un point $g \in G$. Donc

$$\operatorname{Ind}(D, g) = \operatorname{tr}(g, \ker D) - \operatorname{tr}(g, \ker D^*) = \sum_{\lambda\in\hat{G}} m(\lambda, \operatorname{Ind} D)\, \chi_\lambda(g) \tag{17}$$

où $\chi_\lambda(g) = \operatorname{tr}(g, V_\lambda)$ est le caractère de la représentation λ. Le caractère $\operatorname{Ind}(D, .)$ est une fonction analytique sur G. Si l'on note dg la mesure de Haar sur G pour laquelle le volume de G est 1 et si l'on connaît le caractère $\operatorname{Ind}(D, .)$, on peut en principe calculer les entiers $m(\lambda, \operatorname{Ind} D)$ par la formule

$$m(\lambda, \operatorname{Ind} D) = \int_G \operatorname{Ind}(D, g)\, \overline{\chi_\lambda(g)}\, dg. \tag{18}$$

Considérons un point s de G. Un point $g \in G$ voisin de s est conjugué d'un point de la forme se^X, où $X \in \mathfrak{g}(s)$ est voisin de 0. Le théorème suivant est dû à Berline-Vergne [9, 11] qui l'appellent "formule de Kirillov" à cause de sa ressemblance remarquable (lorsque $s = 1$) avec la formule proposée par Kirillov pour le caractère des représentations unitaires des groupes de Lie associées à une orbite coadjointe. Dans le théorème suivant, la forme $n_s(M)(X)$ sur $M(s)$ est définie en (10) et on note encore $n_s(M)(X)$ son image réciproque sur $T^*M(s)$. D'autre part la variété $T^*M(s)$ est munie de son orientation symplectique : soient x_i un système de coordonnées locales sur $M(s)$ et y_i les coordonnées duales sur $T^*M(s)$, l'orientation de $T^*M(s)$ est donnée par la forme $\prod dx_i dy_i$.

Théorème 2 *Pour X voisin de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$, on a*

$$\operatorname{Ind}(D, se^X) = \int_{T^*M(s)} \operatorname{ch}_s([\sigma_D])(X)\, n_s(M)(X)^{-1}. \tag{19}$$

En faisant $X = 0$, on retrouve la formule d'Atiyah-Segal-Singer [3, 5] pour $\operatorname{Ind}(D, s)$. La démonstration de [9] consiste à utiliser la formule de localisation de [7]. Celle-ci permet de calculer l'intégrale de la forme équivariante du second membre comme une intégrale sur les points fixes de X dans $T^*M(s)$, c'est-à-dire sur les points fixes de $g = se^X$ dans T^*M. On trouve précisément la formule d'Atiyah-Segal-Singer pour $\operatorname{Ind}(D, g)$.

Remarques. 1. Dans le cas d'un opérateur de Dirac sur une variété spinorielle orientée de dimension paire, l'intégrale ci-dessus peut être écrite comme l'intégrale sur $M(s)$ d'une certaine forme différentielle équivariante faisant intervenir le genre $\hat{A}(M(s))$. Dans cette situation, Bismut a raffiné le théorème 2 en un théorème de l'indice local (voir [14, 6]).

2. La formule 19 permet d'envisager de calculer $\int_G \operatorname{Ind}(D, g)\, \psi(g)\, dg$ lorsque $\psi \in C_c^\infty(G)$ a son support voisin de s. Bien que ce soit un début, ce n'est pas encore suffisant

pour obtenir des formules intéressantes pour $m(\lambda, D)$ par la formule (18) (voir [25, 21]). Mais c'est bien adapté aux problèmes de distributions considérés plus loin.

3. Soit $g \in G$ et supposons que l'on ait deux décompositions de g comme ci-dessus: $g = se^X = s'e^{X'}$. L'identité $\operatorname{Ind}(D, se^X) = \operatorname{Ind}(D, s'e^{X'})$ peut être prouvée directement (grâce à la formule de localisation) à partir de la formule (19). Les familles $(\alpha_s)_{s \in G}$, où chaque α_s est une forme $G(s)$-équivariante, donnant lieu à des identités analogues sont systématiquement étudiées dans [17].

3 Opérateurs transversalement elliptiques.

Les notations sont celles de la section 2. Notons $T^*_G M$ l'espace conormal à l'espace des orbites de G dans M: un vecteur $(x, \xi) \in T^*M$ appartient à $T^*_G M$ si et seulement si $\xi(X_M(x)) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Notons β la 1-forme canonique sur T^*M et posons

$$\omega_{\mathfrak{g}} = -d_{\mathfrak{g}}\beta. \tag{20}$$

Pour $X \in \mathfrak{g}$, on a $\omega_{\mathfrak{g}}(X) = f(X) + \omega$, où $\omega = -d\beta$ est la structure symplectique canonique de T^*M et $f(X)$ la fonction sur T^*M définie par la formule $f(X)(x, \xi) = \xi(X_M(x))$. Donc f est le moment associé à une action hamiltonnienne sur T^*M (voir l'exemple 1). Considérant le moment f comme une application de T^*M dans $\mathfrak{g}^*$, on voit que $T^*_G M$ est égal à $f^{-1}(0)$.

Suivant [1], un opérateur pseudodifférentiel G-invariant $D \in \mathcal{P}^m(M, \mathcal{E}^+, \mathcal{E}^-)$ est dit *transversalement elliptique* si son symbole σ_D est inversible dans $T^*_G M \backslash 0$. Soit D un opérateur transversalement elliptique. Atiyah [1] montre que D induit un opérateur de Fredholm de $C^\infty(M, \mathcal{E}^+)^G$ dans $C^\infty(M, \mathcal{E}^-)^G$. De même, pour tout $\lambda \in \hat{G}$, l'opérateur D_λ défini comme ci-dessus est transversalement elliptique et sa restriction D^G_λ aux sections invariantes est un opérateur de Fredholm. On définit les entiers $m(\lambda, D)$ par la formule (16) et l'indice par la somme (formelle) $\operatorname{Ind}(D) = \sum m(\lambda, \operatorname{Ind} D)\lambda$. Notons $C^{-\infty}(N)$ l'espace des fonctions généralisées sur une variété N (c'est-à-dire le dual au sens de L. Schwartz de l'espace des densités C^∞ à support compact sur N). Atiyah [1] montre que la somme $\sum m(\lambda, \operatorname{Ind} D)\chi_\lambda$ converge dans $C^{-\infty}(G)$. On notera $\operatorname{Ind}(D, .)$ cette fonction généralisée. Avec quelques précautions, on peut encore définir $\operatorname{Ind}(D, .)$ par la première égalité de la formule (17). Notons $R^{-\infty}(G)$ l'espace des fonctions généralisées G-invariantes χ sur G de la forme $\chi = \sum_\lambda m_\lambda \chi_\lambda$, où les coefficients de Fourier m_λ sont entiers.

Le triplet $(\mathcal{E}^+, \mathcal{E}^-, \sigma_D)$, restreint à $T^*_G M$, représente un élément $[\sigma_D]$ de $K_G(T^*_G M)$. Atiyah montre que l'indice $\operatorname{Ind} D \in R^{-\infty}(G)$ ne dépend que de $[\sigma_D]$ et, d'autre part, que tout élément de $K_G(T^*_G M)$ peut être représenté par le symbole d'un opérateur transversalement elliptique. L'indice définit donc un homomorphisme de groupes (et même de

$R(G)$-modules)

$$\text{Ind} : K_G(T^*_G M) \to R^{-\infty}(G) \tag{21}$$

appelé *indice analytique.*

Soient U un ouvert G-invariant de M et $t \in K_G(T^*_G U)$, et notons $j^M_* t$ l'image de t dans $K_G(T^*_G M)$. On pose $\text{Ind}(t) = \text{Ind}(j^M_* t)$. Atiyah montre (c'est la *propriété d'excision*) que $\text{Ind}(t)$ est indépendant du choix du plongement équivariant j^M de U dans la G-variété compacte M et donc qu'il est intrinsèquement défini.

Un opérateur elliptique est évidemment transversalement elliptique, mais il y a d'autres exemples intéressants.

Exemple 3 (Représentations induites). Soient H un sous-groupe fermé de G et E l'espace d'une représentation de dimension finie de H. On considère le fibré $\mathcal{E} = G \times_H E$ de base G/H. On pose $\mathcal{E}^+ = \mathcal{E}$, $\mathcal{E}^- = 0$ et $D = 0$. On a $\ker D = C^\infty(G/H, \mathcal{E})$. C'est l'espace de la représentation de G induite par la représentation E de H et la distribution $\text{Ind}(D, .)$ est le caractère de la représentation induite. Plus généralement, on peut induire un opérateur elliptique H-équivariant sur une H-variété Z en un opérateur transversalement elliptique G-équivariant sur la variété $M = G \times_H Z$, et l'indice commute à l'induction.

Remarque. Sauf si G/H est fini, cette opération d'induction est impossible dans le cadre des opérateurs elliptiques. Elle permet de ramener nombre de problèmes sur les opérateurs G-invariants elliptiques ou transversalement elliptiques en des problèmes sur des opérateurs $U(n)$-transversalement elliptiques (en choisissant n de telle sorte qu'il existe un plongement de G dans $U(n)$) puis, par restriction au sous-groupe des matrices diagonales $T = S^n_1$, en des problèmes sur des opérateurs T-transversalement elliptiques. Malheureusement, cette liberté de mouvement est chèrement payée par le fait que, contrairement à $K_T(T^*V)$ qui est donné par l'isomorphisme de Thom, il est beaucoup plus difficile de décrire $K_T(T^*_T V)$ pour un tore T agissant linéairement dans un espace vectoriel réel V (voir [1]).

Exemple 4 (Actions libres). On considère une variété P dans laquelle opèrent à gauche un groupe compact G et à droite un groupe compact H. On suppose que ces actions commutent et que H opère librement dans P, de sorte que P est un fibré principal G-équivariant de base $M = P/H$. L'espace T^*M s'identifie à l'espace des orbites de H dans $T^*_H P$, de sorte qu'il y a une bijection entre les fibrés vectoriels H-équivariants sur $T^*_H P$ et les fibrés vectoriels sur T^*M. Notant q la projection de P sur P/H, on obtient des isomorphismes[4] $q^* : K_G(T^*M) \simeq K_{G\times H}(T^*_H P)$ et $q^* : K_G(T^*_G M) \simeq K_{G\times H}(T^*_{G\times H} P)$. On peut donc relever[5] un opérateur G-invariant elliptique sur M en

[4] Il serait plus correct dans la suite de considérer le groupe $G \times H^o$, où H^o est le groupe opposé.

[5] au moins au niveau des symboles

un opérateur H-transversalement elliptique $G \times H$-invariant sur P et un opérateur G-invariant transversalement elliptique sur M en un opérateur $G \times H$-transversalement elliptique $G \times H$-invariant sur P. De plus, q^* munit $K_G(T^*_G M)$ d'une structure de $R(H)$-module. Les indices sont reliés par la formule suivante [1]. Soit $[\sigma] \in K_G(T^*_G M)$. On a l'identité de fonctions généralisées sur $G \times H$

$$\operatorname{Ind}(q^*[\sigma], (g,h)) = \sum_{\tau \in \hat{H}} \chi_\tau(h) \operatorname{Ind}(\tau^* \otimes [\sigma], g) \tag{22}$$

où $\tau^* \otimes [\sigma]$ désigne le produit de $\tau^* \in \hat{H} \subset R(H)$ par $[\sigma]$.

Exemple 5 (Représentation régulière). L'opérateur nul $C^\infty(H) \to 0$ est transversalement elliptique pour l'action de H sur lui même par translations (c'est un cas particulier de l'exemple 4 avec $P = H$), son indice est la distribution de Dirac $\delta(h)$, de support $\{1\}$, et la formule (22) est la formule de Peter-Weyl $\delta(h) = \sum_{\tau \in \hat{H}} \chi_\tau(h) \dim \tau$.

Exemple 6 (symbole d'Atiyah). Soient $V = \mathbb{C}$ considéré comme une variété réelle, $G = S^1$ le groupe de nombres complexes de module 1 agissant dans V par multiplication. On identifie V à V^* par la forme $Re(z\bar{\xi})$, et T^*V à $V \times V$. On a $T^*_G V = \{(z,\xi); z \in \mathbb{C}, \xi \in \mathbb{C}, Im(z\bar{\xi}) = 0\}$. Soient $\mathcal{E}^+$ le fibré $V \times \mathbb{C}$ avec l'action triviale de G dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{E}^-$ le fibré $V \times \mathbb{C}$ avec l'action naturelle de G dans $\mathbb{C}$. Posons $m((z,\xi)) = z - i\xi$. Le triplet $(p^*\mathcal{E}^+, p^*\mathcal{E}^-, m)$ représente un élément $[m] \in K_G(T^*V)$. Son indice est calculé dans [1]:

$$\operatorname{Ind}([m], z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n. \tag{23}$$

C'est la valeur au bord de la fonction $-z/(1-z)$ définie pour $|z| < 1$.

4 Indice cohomologique des opérateurs transversalement elliptiques.

N. Berline et M. Vergne associent à $[\sigma] \in K_G(T^*_G M)$ une fonction généralisée $\operatorname{Ind}_c([\sigma]) \in C^{-\infty}(G)^G$, appelée *l'indice cohomologique*. Leur méthode est basée sur la notion de bon symbole transversalement elliptique, généralisant la notion de bon symbole elliptique introduite plus haut: un symbole G-invariant $\sigma \in C^\infty(T^*M, Hom(p^*\mathcal{E}^+, p^*\mathcal{E}^-))^G$ est un *bon symbole transversalement elliptique* s'il est à croissance lente et s'il existe $a > 0$, $c > 0$ et $r > 0$ tels que l'on ait $U(\sigma)^2(x,\xi) \geq c||\xi||^2$ pour tout $(x,\xi) \in T^*M$ tel que $||\xi|| \geq r$ et $||f(x,\xi)|| \leq a||\xi||$. Si D est un opérateur différentiel G-invariant d'ordre ≥ 1 transversalement elliptique, son symbole σ_D est bon. Si D est seulement pseudo-différentiel d'ordre ≥ 1, on obtient un bon symbole en modifiant arbitrairement σ_D dans un voisinage de la section nulle, pour le rendre C^∞. Tout élément de $K_G(T^*_G M)$ peut être représenté par un bon symbole transversalement elliptique.

Nous voulons construire des distributions invariantes sur un ouvert $W \subset \mathfrak{g}$ comme intégrale de formes différentielles équivariantes. Il est naturel d'introduire la notion suivante: une forme différentielle équivariante $\alpha \in \mathcal{A}_G^\infty(W, T^*M)$ sur T^*M est "à décroissance rapide en moyenne" si pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(W)$ la forme différentielle $\int_\mathfrak{g} \alpha(X)\phi(X)dX$ sur T^*M est à décroissance rapide. On note $\mathcal{A}_{G,rap-m}^\infty(W, T^*M)$ l'espace de ces formes. Il est stable par $d_\mathfrak{g}$ et on note $H_{G,rap-m}^\infty(W, T^*M)$ la cohomologie correspondante. Pour $\alpha \in \mathcal{A}_{G,rap-m}^\infty(W, T^*M)$, l'intégrale $\int_{T^*M} \alpha(X)$ est bien définie comme élément de $C^{-\infty}(W)$ et il en est de même pour une classe $\alpha \in H_{G,rap-m}^\infty(W, T^*M)$.

Dans la suite, nous considérons un bon symbole transversalement elliptique σ et sa classe $[\sigma] \in K_G(T_G^*M)$. Pour définir l'indice cohomologique $\mathrm{Ind}_c([\sigma])$, il pourrait être tentant d'essayer directement la formule (19) en utilisant les formes $\mathrm{ch}_s(A(\sigma))$. Mais il semble impossible de donner un sens –même comme distribution– à l'intégrale $\int_{T^*M(s)} \mathrm{ch}_s(A(\sigma))(X)\, n_s(M)(X)^{-1}$ car la forme $\mathrm{ch}_s(A(\sigma))(X)$ ne décroit que dans les directions situées dans un voisinage conique de $f^{-1}(0) \cap T^*M(s)$. On rend $\mathrm{ch}_s(A(\sigma))(X)$ rapidement décroissant en moyenne en le multipliant par un facteur oscillant dans les directions supplémentaires. Rappelons la forme équivariante $\omega_\mathfrak{g} = -d_\mathfrak{g}\beta = f + \omega$ (formule (20) ci-dessus) définissant la structure hamiltonnienne de T^*M. La forme équivariante $e^{i\omega_\mathfrak{g}}$ est fermée. Pour $X \in \mathfrak{g}$, on a $e^{i\omega_\mathfrak{g}}(X) = e^{i(f(X)+\omega)}$.

Théorème 3 *[12] Soit $s \in G$. Pour $X \in \mathfrak{g}(s)$, posons*

$$\mathrm{ch}_s^\omega(\mathbb{A}(\sigma))(X) = e^{i(f(X)+\omega)}\,\mathrm{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma))(X).$$

Cette formule définit une forme $\mathrm{ch}_s^\omega(\mathbb{A}(\sigma)) \in \mathcal{A}_{G(s),rap-m}^\infty(\mathfrak{g}(s), T^*M(s))$.

Sa classe $\mathrm{ch}_s^\omega([\sigma]) \in H_{G(s),rap-m}^\infty(\mathfrak{g}(s), T^*M(s))$ ne dépend que de $[\sigma] \in K_G(T_G^*M)$.

Lorsque σ est elliptique, on voit que $\mathrm{ch}_s^\omega([\sigma])$ est l'image du caractère $\mathrm{ch}_s([\sigma])$ par l'application naturelle de $H_{G(s),rap}^\infty(\mathfrak{g}(s), T^*M(s))$ dans l'espace $H_{G(s),rap-m}^\infty(\mathfrak{g}(s), T^*M(s))$. Il est raisonnable d'appeler la famille $(\mathrm{ch}_s^\omega([\sigma]))_{s\in G}$ le bouquet de caractères de Chern du symbole transversalement elliptique $[\sigma]$.

Remarque. Notons encore β l'endomorphisme de $\mathcal{A}(M, \mathcal{E})$ obtenu par la multiplication par β. On considère la superconnexion $\mathbb{A}(\sigma) - i\beta$ sur $\mathcal{E}$, et on a $\mathrm{ch}_s^\omega(\mathbb{A}(\sigma)) = \mathrm{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma) - i\beta)$.

Théorème 4 *Soit σ un bon symbole transversalement elliptique. Il existe une unique fonction généralisée $\mathrm{Ind}_c(\sigma) \in C^{-\infty}(G)^G$ telle que, pour tout $s \in G$, il existe un voisinage ouvert $G(s)$-invariant W_s de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$ tel que l'on ait l'identité de fonctions généralisées dans W_s:*

$$\mathrm{Ind}_c(\sigma)(se^X) = \int_{T^*M(s)} e^{i(f(X)+\omega)}\,\mathrm{ch}_s(A(\sigma))(X)\, n_s(M)(X)^{-1}. \tag{24}$$

De plus, $\mathrm{Ind}_c(\sigma)$ ne dépend que de la classe $[\sigma]$ de σ dans $K_G(T_G^*M)$.

On posera donc $\mathrm{Ind}_c([\sigma]) = \mathrm{Ind}_c(\sigma)$. C'est l'indice cohomologique. Compte tenu du théorème 3, on peut écrire la formule (24) sous la forme plus cohomologique

$$\mathrm{Ind}_c([\sigma])(se^X) = \int_{T^*M(s)} \mathrm{ch}_s^\omega([\sigma])(X)\, n_s(M)(X)^{-1}.$$

La démonstration de ce théorème fait l'objet de [12]. Elle a deux parties. La première consiste à montrer que l'intégrale figurant dans la formule (24) converge bien vers une fonction généralisée dans W_s. Pour ceci, comme expliqué plus haut, le facteur $e^{i(f(X)+\omega)}$ est crucial. La seconde consiste à montrer que les formules (24) sont compatibles entre elles quand s varie. Cela résulte, plus péniblement que dans le cas des symboles elliptiques (voir la remarque 3 suivant le théorème 2), de la formule de localisation.

La formule de l'indice transversalement elliptique peut maintenant être énoncée.

Théorème 5 *[13] Pour tout* $[\sigma] \in K_G(T_G^*M)$, *on a* $\mathrm{Ind}([\sigma]) = \mathrm{Ind}_c([\sigma])$.

Remarque. 1. Lorsque σ est un symbole elliptique, les formes $\mathrm{ch}_s(A(\sigma))(X)$ et $e^{i(f(X)+\omega)}\,\mathrm{ch}_s(A(\sigma))(X)$ définissent la même classe à décroissance rapide, le facteur $e^{i(f(X)+\omega)}$ de la formule (24) peut être ignoré, et on retrouve la formule (19). Lorsque σ est seulement transversalement elliptique, ce facteur est indispensable pour donner un sens à l'intégrale.

2. Il est intéressant de remarquer que dans le théorème de l'indice de Fedosov [18], qui se situe dans le cadre des variétés symplectiques, le facteur e^ω figure également (voir l'exposé de Weinstein [27]).

Disons quelques mots de la démonstration du théorème 5. Elle consiste à établir que l'indice cohomologique peut être calculé par le même algorithme que celui donné pour l'indice analytique dans [1]. Parmi les points qu'il faut vérifier, mentionnons ceux déjà évoqués dans le paragraphe précédent à propos de l'indice analytique: l'indice cohomologique vérifie la propriété d'excision (permettant de définir l'indice cohomologique pour des variétés U ouvertes dans un espace compact), la formule (22) de l'exemple 4 et la formule (23) de l'exemple 6.

Pour terminer ce rapport, je signale que, comme dans Atiyah [1], les théorèmes ci-dessus, appliqués à des actions presque libres (c'est la situation de l'exemple 4, où l'on suppose seulement que H opère avec des stabilisateurs finis), ont des applications aux orbifolds. Plus précisément, dans [26], M. Vergne donne des formules pour l'indice équivariant des opérateurs elliptiques G-invariants sur les orbifolds compacts munis d'une action du groupe compact G.

Références

[1] M. F. Atiyah. Elliptic operators and compact groups. *Lecture Notes in Mathematics 401, Springer,* 1974.

[2] M. F. Atiyah et R. Bott. The moment map and equivariant cohomology. *Topology,* **23** (1984), 1–28.

[3] M. F. Atiyah et G. B. Segal. The index of elliptic operators II. *Ann. Math.,* **87** (1968), 531–545.

[4] M. F. Atiyah et I. M. Singer. The index of elliptic operators. I. *Ann. Math.,* **87** (1968), 484–530.

[5] M. F. Atiyah et I. M. Singer. The index of elliptic operators. III. *Ann. Math.,* **87** (1968), 546–604.

[6] N. Berline, E. Getzler et M. Vergne. Heat kernels and Dirac operators. *Grundlehren der math. Wissenschaft 298. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York,* 1991.

[7] N. Berline et M. Vergne. Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante. *C. R. Acad. Sci. Paris,* **295** (1982), 539–541.

[8] N. Berline et M. Vergne. Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes. *Duke Math. Journal,* **50** (1983), 539–549.

[9] N. Berline et M. Vergne. The equivariant index and Kirillov character formula. *Amer. J. of Math,* **107** (1985), 1159–1190.

[10] N. Berline et M. Vergne. Indice équivariant et caractère d'une représentation induite. *In* D-modules and Microlocal geometry. *Walter de Gruyter* (1992).

[11] N. Berline et M. Vergne. The equivariant Chern character and index of *G*-invariant operators. *In* D-modules, representation theory and quantum groups, Venezia 1992. *Springer Lecture Notes in Math.* 1565 (1992.)

[12] N. Berline et M. Vergne. The equivariant Chern character of a transversally elliptic symbol and the equivariant index. *Invent. Math., à paraître.*

[13] N. BERLINE ET M. VERGNE. L'indice équivariant des opérateurs transversalement elliptiques. *Invent. Math., à paraître.*

[14] J.-M. BISMUT. The infinitesimal Lefschetz formulas: a heat equation proof. *J. Funct. Analysis,* **62** (1985), 435–457.

[15] H. CARTAN. Notions d'algèbre différentielle; applications aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie. In "Colloque de Topologie". *C. B. R. M., Bruxelles,* (1950), 15-27.

[16] H. CARTAN. La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal. In "Colloque de Topologie". *C. B. R. M., Bruxelles,* (1950), 57-71.

[17] M. DUFLO ET M. VERGNE. Cohomologie équivariante et descente. *Astérisque,* **215** (1993), 5–108.

[18] B. V. FEDOSOV. Index theorem in the algebra of quantum observables. *Sov. Phys. Dokl.* , **34** (1989), 318–321.

[19] B. KOSTANT. Quantization and unitary representations. In *Modern analysis and applications,. Lecture Notes in Mathematics,* **39** (1970), 87–207.

[20] D. QUILLEN. Superconnections and the Chern character. *Topology,* **24** (1985), 89–95.

[21] E. MEINRENKEN. On Riemann-Roch formulas for Multiplicities. Preprint, MIT 1994.

[22] J.M. SOURIAU. Structure des systèmes dynamiques. *Dunod, Paris* , 1991.

[23] M. VERGNE. Formule de Kirillov et indice de l'opérateur de Dirac. In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1983, Varsovie. *PWN- Polish Scientific Publishers. North Holland, Amsterdam, New-York, Oxford,* 1984.

[24] M. VERGNE. Sur l'indice des opérateurs transversalement elliptiques. *C. R. Acad. Sci. Paris,* **310** (1990), 329–332.

[25] M. VERGNE. Quantification géométrique et multiplicités. *C. R. Acad . Sci. Paris,* **319** (1994), 327–332.

[26] M. VERGNE. Equivariant index formulas for orbifolds. *Duke Math. J., à paraître.*

[27] A. WEINSTEIN. Deformation quantization. Séminaire Bourbaki, 789, Juin 1994.

[28] E. WITTEN. Supersymmetry and Morse theory. *J. Diff. Geom.*, **17** (1982), 661–692.

Michel DUFLO

UFR de Mathématiques
URA 748 du CNRS
Université Paris 7-Denis Diderot
2 place Jussieu
F-75251 Paris cedex 05