

Astérisque

OLIVIER MATHIEU

Le modèle des chemins

Astérisque, tome 237 (1996), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 798, p. 209-224

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__209_0>

© Société mathématique de France, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LE MODÈLE DES CHEMINS
[d'après P. Littelmann]
par Olivier MATHIEU

INTRODUCTION

Soit G un groupe de Lie complexe simple (ou un groupe de Kač-Moody). Soit M un G -module simple de dimension finie (resp. une représentation standard), et notons $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(M)$ le morphisme correspondant. On sait que M peut être entièrement décrit à l'aide de son caractère. De manière informelle, le caractère prescrit, pour chaque élément $g \in G$, le spectre avec multiplicités de l'opérateur $\rho(g)$. En fait, soit H un tore maximal de G . On a $H \cong (\mathbf{C}^*)^\ell$, où ℓ est le rang de G . Puisque tout élément semi-simple de G est conjugué à un élément de H , le caractère de M décrit M comme H -module. Si on note P le groupe des caractères de H , on a :

$$M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda,$$

où $M_\lambda = \{m \in M \mid h \cdot m = \lambda(h)m \ \forall h \in H\}$.

Le caractère de M peut donc être vu comme l'élément $\mathrm{ch}(M)$ de $\mathbf{Z}[P]$ défini par :

$$\mathrm{ch}(M) = \sum_{\lambda \in P} (\dim M_\lambda) e^\lambda.$$

Il existe des formules théoriques (formules de Weyl et Steinberg) pour calculer le caractère de M . Ces formules ont une grande importance théorique, mais ne sont pas très satisfaisantes du point de vue combinatoire. En effet, elles s'écrivent sous la forme $\dim M_\lambda = \mathrm{Card}(X(\lambda)) - \mathrm{Card}(Y(\lambda))$, où $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ sont deux ensembles définis de manière intrinsèque à partir de λ et M . Il n'est pas combinatoirement clair que le terme de droite soit ≥ 0 . Supposons G de dimension finie pour simplifier. De même, on peut définir les multiplicités de produits tensoriels $C_{M,N}^L$ par

$M \otimes N = \bigoplus_L C_{M,N}^L L$, où M, N sont simples et L décrit l'ensemble des G -modules simples. La formule théorique de Kostant, qui calcule les multiplicités $C_{M,N}^L$ contient également de nombreux termes de signes distincts.

La nouveauté de la combinatoire de Littelmann consiste à décrire un ensemble naturellement attaché à M et λ tel que $\dim M_\lambda$ soit le cardinal de cet ensemble. En fait, Littelmann décrit un objet M' (le modèle des chemins) qui est un H -module, qui possède une base naturelle formée de chemins, tel que M' et M soient isomorphes comme H -modules. De même, dans cette combinatoire, les multiplicités de produits tensoriels sont décrites comme le cardinal d'un ensemble de chemins.

Remerciements : Je remercie P. Littelmann et P. Cartier pour d'utiles conseils.

1. LE MODÈLE DES CHEMINS EN RANG 1

Soit \mathcal{C} l'ensemble des applications continues $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ avec $f(0) = 0$. Suivant [Li1], nous allons définir deux applications $E, F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \cup \{\emptyset\}$ (l'utilité du symbole formel \emptyset sera précisée plus bas).

Définition de E : Pour $f \in \mathcal{C}$, désignons par M_f son minimum. Si $M_f > -1$, on dira que Ef n'est pas défini et on posera $Ef = \emptyset$.

On suppose maintenant que l'on a $M_f \leq -1$. Puisque l'on a $f(0) = 0$ et $M_f + 1 \leq 0$, on a $f([0, 1]) \supseteq [M_f, M_f + 1]$. Notons t_0, t_1 les premiers instants auxquels f atteint les valeurs $M_f + 1$ et M_f respectivement. Formellement, on a :

$$\begin{aligned} t_0 &= \min \{t \in [0, 1] \mid f(t) = M_f + 1\}, \\ t_1 &= \min \{t \in [0, 1] \mid f(t) = M_f\}. \end{aligned}$$

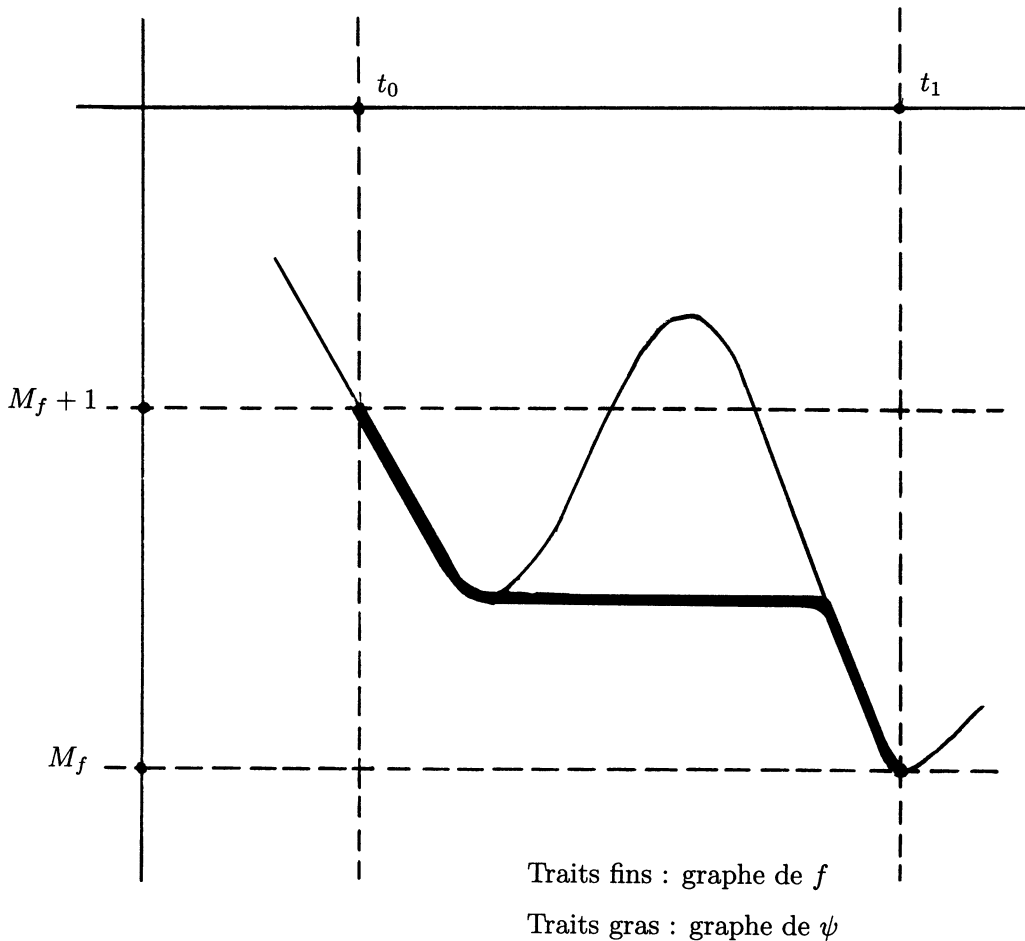
Notons que l'on a $t_0 < t_1$. Pour $v \in [t_0, t_1]$, posons $\varphi(v) = \min \{f(t) \mid t \in [t_0, v]\} - (M_f + 1)$. On a $\varphi(t_0) = 0$, $\varphi(t_1) = -1$ et φ est décroissante. Sur la figure ci-dessous, on a représenté le graphe de la fonction $\psi(t) = \varphi(t) + M_f + 1$. Elle est caractérisée par le fait que $\psi(t)$ est décroissante, $\psi(t) \leq f(t)$ et ψ est maximale sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ avec ces propriétés (voir figure page suivante).

On pose :

$$\begin{aligned} Ef(t) &= f(t) \text{ pour } t \leq t_0, \\ Ef(t) &= f(t) - 2\varphi(t) \text{ pour } t_0 \leq t \leq t_1, \end{aligned}$$

$$Ef(t) = f(t) + 2 \text{ pour } t \geq t_1.$$

Cette nouvelle fonction Ef est continue, et l'on a $Ef(1) = f(1) + 2$.



Autre définition de E : Supposons à nouveau $M_f \leq -1$. Pour tout v dans $[M_f, M_f + 1]$, notons $p(v)$ le premier instant auquel f atteint la valeur v . Formellement, $p(v) = \min\{t \in [0, 1] \mid f(t) = v\}$. La restriction de f à l'ensemble $\mathcal{P} = \{p(v) \mid v \in [M_f, M_f + 1]\}$ est strictement décroissante et l'on a $\int f' d\mathcal{P} = -1$ où $d\mathcal{P}$ est la mesure de Lebesgue de \mathcal{P} . La fonction continue Ef est alors simplement

définie par :

$$\begin{aligned} (Ef)'(u) &= f'(u) & \text{si } u \notin \mathcal{P} \\ (Ef)'(u) &= -f'(u) & \text{si } u \in \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Pour rendre cette définition rigoureuse, on pourra supposer f à variation bornée (ou remarquer que $(Ef) - f$ est automatiquement à variation bornée).

Notons enfin que E est invariant par reparamétrisation : si $\Phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est un homéomorphisme avec $\Phi(0) = 0$ et $\Phi(1) = 1$, on a $(Ef) \circ \Phi = E(f \circ \Phi)$.

Définition de F : Soit $*$: $\mathcal{C} \cup \{\emptyset\} \rightarrow \mathcal{C} \cup \{\emptyset\}$ l'involution définie par $*\emptyset = \emptyset$ et :

$$(*f)(t) = f(1-t) - f(1) \quad \text{pour } f \in \mathcal{C}.$$

On pose $F = *E*$.

De manière plus explicite, soient $f \in \mathcal{C}$ et M_f son minimum. Si $M_f + 1 > f(1)$, on pose $Ff = \emptyset$ et on dit que Ff n'est pas défini. Si $M_f + 1 \leq f(1)$, on a alors $f([0, 1]) \supseteq [M_f, M_f + 1]$. Pour tout $v \in [M_f, M_f + 1]$, on note $d(v)$ le dernier instant auquel f atteint la valeur v .

On note $\mathcal{D} = \{d(v) \mid v \in [M_f, M_f + 1]\}$ l'ensemble des derniers instants. La fonction f est alors croissante sur \mathcal{D} et l'on a $\int f' d\mathcal{D} = 1$ où $d\mathcal{D}$ est la mesure de Lebesgue de \mathcal{D} . On définit alors Ff par :

$$\begin{aligned} (Ff)'(u) &= f'(u) & \text{si } u \notin \mathcal{D} \\ (Ff)'(u) &= -f'(u) & \text{si } u \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

On a $Ff(1) = f(1) - 2$.

Bien que ces opérateurs E et F aient une définition très élémentaire, ils semblent ne pas avoir été considérés auparavant.

PROPOSITION 1.— Soit $f \in \mathcal{C}$.

- a) Si $Ef \neq \emptyset$, on a $FEf = f$.
- b) Si $Ff \neq \emptyset$, on a $EFf = f$.

Posons $\mathcal{C}_{\text{int}} = \{f \in \mathcal{C} \mid f(1) \in \mathbf{Z}\}$, et soit $\mathbf{C}\mathcal{C}_{\text{int}}$ le \mathbf{C} -espace vectoriel de base \mathcal{C}_{int} . Les opérateurs E, F définissent des endomorphismes linéaires de $\mathbf{C}\mathcal{C}_{\text{int}}$ (avec la convention que $Ef = 0$ ou $Ff = 0$ si Ef ou Ff n'est pas défini). Soit h l'endomorphisme de $\mathbf{C}\mathcal{C}_{\text{int}}$ défini par $hf = f(1) \cdot f$ pour $f \in \mathcal{C}$, et soit \mathcal{A} l'algèbre d'endomorphismes de $\mathbf{C}\mathcal{C}_{\text{int}}$ engendrée par E, F et h . L'algèbre \mathcal{A} est très similaire à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$, ainsi que le montrent les lemmes suivants.

Rappelons que $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ a pour base les matrices $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (nous avons utilisé la même notation h pour la matrice diagonale de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ et l'élément de \mathcal{A}). Les représentations simples de dimension finie de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ sont classifiées par les entiers $n \geq 0$. L'espace de la représentation correspondante, noté $L(n)$, s'identifie à l'espace des polynômes homogènes de degré n en deux variables x, y . L'action de e, h, f est donnée par $x \frac{\partial}{\partial y}$, $x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$ et $y \frac{\partial}{\partial x}$ respectivement. En utilisant le fait que les monômes $x^a y^b$ (pour $a + b = n$) forment une base de $L(n)$, on vérifie aisément les faits suivants.

Lemme 2 : Soit M un $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ -module simple de dimension finie.

a) Soient $m \in \mathbf{Z}$ et $v \in M - \{0\}$ avec $h \cdot v = mv$. Si p, q sont les entiers positifs définis par :

$$\begin{aligned} e^p \cdot v \neq 0 & \quad \text{et} & \quad e^{p+1} \cdot v = 0, \\ f^q \cdot v \neq 0 & \quad \text{et} & \quad f^{q+1} \cdot v = 0, \end{aligned}$$

on a $q - p = m$ et $q + p = n$ si M est isomorphe à $L(n)$.

b) Si M est isomorphe à $L(n)$, le spectre de h sur M est simple et ses valeurs propres sont $n, n - 2, n - 4, \dots, -n$.

c) Si M est isomorphe à $L(n)$ et $v \in M - \{0\}$ satisfait à $h \cdot v = nv$, alors $\{f^\ell \cdot v \mid 0 \leq \ell \leq n\}$ est une base de M .

d) Soient $m \in \mathbf{Z}$ et $v \in M - \{0\}$ avec $h \cdot v = mv$. Si $e \cdot v \neq 0$, alors $f e \cdot v = \lambda v$, où $\lambda \neq 0$. De même, si $f \cdot v \neq 0$, alors $e f \cdot v = \mu v$ où $\mu \neq 0$. En général, λ et μ sont différents de 1.

e) Soient n, m deux entiers ≥ 0 . On a :

$$L(n) \otimes L(m) = L(n + m) \oplus L(n + m - 2) \oplus \dots \oplus L(|n - m|).$$

Nous allons voir en quoi l'algèbre \mathcal{A} est analogue à $U(\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}))$. Posons :

$$\mathcal{C}_{\text{int}}^+ = \{f \in \mathcal{C}_{\text{int}} \mid M_f > -1\}.$$

Pour tout $f \in \mathcal{C}_{\text{int}}^+$, notons $L(f)$ le \mathcal{A} -module engendré par f .

On montre que, pour tout $f \in \mathcal{C}_{\text{int}}^+$, le \mathcal{A} -module $L(f)$ est simple et l'on a $\mathcal{C}\mathcal{C}_{\text{int}} = \bigoplus_{f \in \mathcal{C}_{\text{int}}^+} L(f)$. De plus, les \mathcal{A} -modules $L(f)$ et $L(g)$ sont isomorphes si et seulement si $f(1) = g(1)$. Les points a), b) et c) du lemme 2 se généralisent aux modules $L(f)$ comme suit.

Lemme 3 : a) Soient $m \in \mathbf{Z}$ et $f \in \mathcal{C}_{\text{int}}$ avec $f(1) = m$. Si p, q sont les entiers positifs définis par :

$$\begin{aligned} E^p \cdot f &\neq \emptyset & \text{et} & & E^{p+1} \cdot f &= \emptyset, \\ F^q \cdot f &\neq \emptyset & \text{et} & & F^{q+1} \cdot f &= \emptyset, \end{aligned}$$

on a $q - p = m$.

b) Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{int}}^+$. Le spectre de h sur $L(f)$ est simple et ses valeurs propres sont $f(1), f(1) - 2, \dots, -f(1)$.

c) Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{int}}^+$. Alors $\{F^\ell \cdot f \mid 0 \leq \ell \leq f(1)\}$ est une base de $L(f)$.

La généralisation du point d) du lemme 2 est la proposition 1. On voit que la structure de l'algèbre des chemins est beaucoup plus simple que $U(\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}))$. Ici, les constantes λ et μ sont toujours 1.

Enfin, la généralisation du point e) du lemme 2 est la suivante. Pour $f, g \in \mathcal{C}_{\text{int}}$, notons $f * g$ la concaténation de f et de g , définie par :

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= f(2t) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (f * g)(t) &= g(2t - 1) + f(1) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Pour $f, g \in \mathcal{C}_{\text{int}}^+$, notons $L(f) * L(g)$ l'espace de base $\varphi * \psi$ où φ, ψ décrivent respectivement les bases de $L(f)$ et $L(g)$ formées de chemins.

PROPOSITION 4.— $L(f) * L(g)$ est un \mathcal{A} -module et l'on a $L(f) * L(g) = \bigoplus_{\ell} L(f * g)$ où ℓ décrit l'ensemble $\{0, \dots, \inf(f(1), g(1))\}$.

On voit que le \mathcal{A} -module $L(f) * L(g)$ se décompose comme le $U(\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}))$ -module $L(f(1)) \otimes L(g(1))$. Cependant, cette décomposition est beaucoup plus aisée que dans le cas de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$. En effet, lorsqu'on décompose le $U(\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}))$ -module $L(n) \otimes L(m)$, les vecteurs de poids des composantes simples de $L(n) \otimes L(m)$ sont des tenseurs compliqués (en général, ils ne sont pas de la forme $u \otimes v$ où $u \in L(n)$, $v \in L(m)$). En revanche, la \mathcal{A} -composante de $L(f) * L(g)$ est simplement formée de concaténations $\varphi * \psi$ où $\varphi \in L(f)$ et $\psi \in L(g)$. Cela provient du lemme élémentaire suivant.

Lemme 5 : Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_{\text{int}}$.

a) Si $M_\varphi \leq \varphi(1) + M_\psi$, on a :

$$E(\varphi * \psi) = (E\varphi) * \psi.$$

b) *Simon*, on a $E(\varphi * \psi) = \varphi * E\psi$.

Dans ce lemme, on convient que $\emptyset * \psi = \varphi * \emptyset = \emptyset$.

Dans le cas du rang un, on peut retrouver l'action de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ à l'aide de l'algèbre des chemins. Notons que les opérateurs E et F sont localement nilpotents. Si l'on pose :

$$e = \sum_{n \geq 0} F^{n-1} E^n$$

$$f = \sum_{n \geq 0} E^{n-1} F^n,$$

alors on a $[e, f] = h$, $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$. Malheureusement, une construction aussi explicite n'est pas encore connue en rang ≥ 1 .

Remarque : Soit $L(n)$ l'espace des polynômes homogènes de degré n en x, y . La multiplication par x/y ne stabilise pas $L(n)$. Notons E l'opérateur de multiplication par x/y tronqué, *i.e.* :

$$E x^a y^b = \begin{cases} x^{a+1} y^{b-1} & \text{si } b > 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et notons de même F l'opérateur tronqué de multiplication par y/x . Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{int}}^+$ avec $f(1) = n$. Il est facile d'identifier le \mathcal{A} -module $L(f)$ avec $L(n)$.

2. LE MODÈLE DES CHEMINS EN GÉNÉRAL

Soit $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ une algèbre de Kač-Moody déployée sur \mathbf{R} (voir l'annexe pour les définitions). Notons \prod_{int} l'ensemble des chemins continus $\pi : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^*$ tels que $\pi(0) = 0$ et $\pi(1) \in P$. Soit α une racine simple. Puisque l'on a $\alpha(h_\alpha) = 2$, on peut identifier $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^*$ à $K_\alpha \oplus \mathbf{R} \cdot \frac{\alpha}{2}$ où $K_\alpha = \text{Ker } h_\alpha$. Tout $\pi \in \prod_{\text{int}}$ s'écrit donc sous la forme $\pi(t) = \pi_1(t) + \frac{1}{2} f(t) \alpha$, où $\pi_1(t) \in K_\alpha$ et $f \in \mathcal{C}_{\text{int}}$. On définit des opérateurs de chemins $E_\alpha, F_\alpha : \prod_{\text{int}} \rightarrow \prod_{\text{int}} \cup \{\emptyset\}$ en posant :

$$E_\alpha \pi = \pi_1 + \frac{1}{2} (Ef) \alpha,$$

$$F_\alpha \pi = \pi_1 + \frac{1}{2} (Ff) \alpha,$$

avec la convention que $E_\alpha \pi = \emptyset$ (ou $F_\alpha \pi = \emptyset$) si Ef n'est pas défini (ou si Ff n'est pas défini).

Une définition analogue plus explicite est la suivante. Soit $\pi \in \prod_{\text{int}}$ un chemin qu'on supposera de longueur finie et soit α une racine simple. Notons M le minimum de la fonction $f(t) = \langle \pi(t) | h_\alpha \rangle$.

Si $M > -1$, on pose $E_\alpha \pi = \emptyset$. Sinon, la fonction f prend toutes les valeurs de l'intervalle $[M, M + 1]$ et pour tout $v \in [M, M + 1]$, on note $p(v)$ le premier instant auquel f atteint la valeur v . Enfin, on note \mathcal{P} l'ensemble des premiers instants. On définit $E_\alpha \pi$ par :

$$\begin{aligned} (E_\alpha \pi)'(u) &= \pi'(u) & \text{si } u \notin \mathcal{P} \\ (E_\alpha \pi)'(u) &= s_\alpha \pi'(u) & \text{si } u \in \mathcal{P}. \end{aligned}$$

On définit de manière analogue $F_\alpha \pi$. Si $M + 1 > f(1)$, on pose $F_\alpha \pi = \emptyset$. Sinon, on note \mathcal{D} l'ensemble des derniers instants auxquels f atteint les valeurs $v \in [M, M + 1]$ et l'on définit $F_\alpha \pi$ par :

$$\begin{aligned} (F_\alpha \pi)'(u) &= \pi'(u) & \text{si } u \notin \mathcal{D} \\ (F_\alpha \pi)'(u) &= s_\alpha \pi'(u) & \text{si } u \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Lorsque les opérateurs sont définis, on a :

$$\begin{aligned} E_\alpha \pi(1) &= \pi(1) + \alpha \\ F_\alpha \pi(1) &= \pi(1) - \alpha. \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{R} \prod_{\text{int}}$ l'espace vectoriel de base \prod_{int} . Les opérateurs E_α, F_α définissent des opérateurs linéaires dans $\mathbf{R} \prod_{\text{int}}$. Leurs actions sont données par :

$$\begin{aligned} E_\alpha \cdot \pi &= E_\alpha \pi & \text{si } E_\alpha \pi \text{ est défini,} \\ E_\alpha \cdot \pi &= 0 & \text{si } E_\alpha \pi = \emptyset, \end{aligned}$$

et similairement pour F_α . L'algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ agit sur $\mathbf{R} \prod_{\text{int}}$ par :

$$h \cdot \pi = \langle \pi(1) | h \rangle \cdot \pi,$$

pour $h \in \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ et $\pi \in \prod_{\text{int}}$. Soit $\lambda \in P^+$. On appelle *modèle de $L(\lambda)$* un $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ -module V qui soit diagonalisable, tel que $\dim V_\mu = \dim L(\lambda)_\mu$ pour tout $\mu \in P$. Cette condition signifie que V et $L(\lambda)$ sont des $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ -modules isomorphes.

Soit \mathcal{A} l'algèbre des chemins, c'est-à-dire l'algèbre des endomorphismes de $\mathbf{R} \prod_{\text{int}}$ engendrée par les E_α, F_α où α décrit l'ensemble S des racines simples.

Un chemin π est dit *dominant* si l'on a $\langle \pi(t) | h_\alpha \rangle \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ et $\alpha \in S$. Appelons quasi-base d'un espace vectoriel V une collection B de vecteurs de

V telle que l'ensemble des $v \in B$, $v \neq 0$ soit une base de V . Autrement dit, dans une quasi-base, on a éventuellement le même élément qui apparaît plusieurs fois et éventuellement 0, mais, une fois éliminés 0 et les répétitions, on obtient une vraie base.

THÉORÈME 6.— Soit $\lambda \in P^+$ et soit π un chemin dominant tel que $\pi(1) = \lambda$. Posons $V_\pi = \mathcal{A} \cdot \pi$. Alors V_π est un modèle de $L(\lambda)$ et la collection $B_\pi = (F_{\alpha_1}^{m_1} \cdots F_{\alpha_n}^{m_n} \pi, \alpha_i \in S, m_i > 0)$ forme une quasi-base de V .

Ainsi, le modèle V_π a une base formée de chemins, et $L(\lambda)_\mu$ a pour dimension le nombre des $\nu \in B_\pi$ tels que $\nu(1) = \mu$.

Étant donnés deux chemins π, π' dans \prod_{int} , on définit leur concaténation $\pi * \pi'$ comme précédemment. Pour simplifier, supposons que \mathfrak{g}_R soit de dimension finie (ou symétrisable) de sorte que l'on peut définir les multiplicités des produits tensoriels $C_{\lambda\mu}^\nu$ ($\lambda, \mu, \nu \in P^+$) par :

$$L(\lambda) \otimes L(\mu) = \bigoplus_{\nu} C_{\lambda\mu}^\nu L(\nu).$$

THÉORÈME 7 [Li2].— Soient π, π' des chemins dominants tels que $\pi(1) = \lambda$ et $\pi'(1) = \mu$. Alors $C_{\lambda\mu}^\nu$ est le nombre de chemins dominants θ qui sont des concaténations de la forme $\pi * \varphi$ où $\varphi \in B_{\pi'}$ et $\varphi(1) = \nu - \lambda$.

Les multiplicités $C_{\lambda\mu}^\nu$ sont symétriques en λ, μ, ν . Si, pour tout $\sigma \in P^+$, on définit σ^* par $L(\sigma^*) = L(\sigma)^*$, on a en effet : $C_{\lambda\mu}^\nu = C_{\mu\lambda}^\nu$ et $C_{\lambda\mu}^\nu = C_{\lambda\nu}^{\mu^*}$. En revanche, la combinatoire de Littelmann ne traduit pas de manière évidente cette symétrie. Cela suggère l'existence de matrices R et Φ .

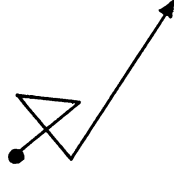
Le théorème est en particulier basé sur le curieux fait suivant difficile à prouver :

Lemme 8 : Soit $\pi' \in \prod_{\text{int}}$ un chemin dominant. Pour tout $\varphi \in B_{\pi'}$ et toute racine simple α , le minimum de la fonction $t \mapsto \langle \varphi(t) | h_\alpha \rangle$ est entier.

L'approche dans cette section est théorique. Dans la section suivante, on va voir une réalisation explicite de V_π .

3. UNE RÉALISATION EXPLICITE DU MODÈLE DES CHEMINS

Soit $\lambda \in P^+$. Si l'on prend un chemin dominant π arbitraire, avec $\pi(1) = \lambda$, comme par exemple :



il est difficile d'obtenir une description explicite des chemins de B_π . Le choix le plus simple est de prendre le chemin droit $\pi_\lambda(t) = t\lambda$. Littelmann a alors déterminé tous les chemins de B_{π_λ} . Ces chemins sont appelés dans [Lil] les chemins de Lakshmi-bai-Seshadri. Pour décrire ces chemins, nous aurons besoin de quelques définitions.

Soient $a \in]0, 1[$ et $\tau, \sigma \in W/W_\lambda$ avec $\tau > \sigma$. Posons $s = \ell(\tau) - \ell(\sigma)$. Une a -chaîne de forme λ est une suite d'éléments $\tau = \kappa_0 > \kappa_1 > \dots > \kappa_s = \sigma$ de W/W_λ avec $\ell(\kappa_i) = \ell(\tau) - i$ tels que :

$$a \cdot (\kappa_i(\lambda) - \kappa_{i-1}(\lambda)) \in Q.$$

Comme $\kappa_i = S_{\beta_i} \kappa_{i-1}$ pour une certaine racine réelle β_i , cette condition est en fait équivalente à $a \langle \kappa_{i-1}(\lambda) | h_{\beta_i} \rangle \in \mathbf{Z}$. L'existence d'une a -chaîne signifie donc que a est un nombre rationnel avec une certaine condition sur le dénominateur.

À toute paire de suites $(\underline{\tau}, \mathbf{a})$, où :

$\underline{\tau} : \tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_r$ est une suite d'éléments de W/W_λ ,

$\mathbf{a} : 0 = a_1 < a_2 < \dots < a_r = 1$ est une suite de réels,

on associe un chemin $\pi_{\underline{\tau}, \mathbf{a}}$ ou $\pi : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^*$, linéaire par morceaux, et dont les points extrémaux sont $0, (a_1 - a_0) \tau_1(\lambda), (a_1 - a_0) \tau_1 \lambda + (a_2 - a_1) \tau_2 \lambda, \dots, \sum_{i=1}^j (a_i - a_{i-1}) \tau_i \lambda \dots$. La paramétrisation exacte de ce chemin est donnée par :

$$\pi(t) = \sum_{i=1}^{j-1} (a_i - a_{i-1}) \tau_i(\lambda) + (t - a_{j-1}) \tau_j(\lambda)$$

pour $a_{j-1} \leq t \leq a_j$. Par définition, π est dit de Lakshmi-bai-Seshadri de forme λ si et seulement si, pour tout i , il existe une a_i -chaîne reliant τ_i à τ_{i+1} . Cela implique

que :

$$\lambda - \pi(1) = (\lambda - \tau_r \lambda) + \sum_{i=1}^{r-1} a_i (\tau_{i+1}(\lambda) - \tau_i(\lambda))$$

est élément de Q , donc $\pi(1) \in P$.

THÉORÈME 9 [Li1].— Soient $\lambda \in P^+$ et $\mu \in P$. La dimension de l'espace propre $L(\lambda)_\mu$ est le nombre de chemins de Lakshmibai-Seshadri π de forme λ tels que $\pi(1) = \mu$.

En fait, on a un résultat plus précis. Pour $w \in W/W_\lambda$, $L(\lambda)_{w\lambda}$ est de dimension 1.

Posons $E_w(\lambda) = U(\mathfrak{b}) e_{w\lambda}$ où $e_{w\lambda}$ est une base de $L(\lambda)_{w\lambda}$. Notons aussi $\mathcal{P}_w(\lambda)$ l'ensemble des chemins de Lakshmibai-Seshadri de forme λ associés à une suite $(\underline{\tau}, \mathbf{a})$ avec $\tau_1 \leq w$. Le \mathfrak{b} -module $E_w(\lambda)$ est appelé module de Demazure.

THÉORÈME 10.— Soient $\lambda \in P^+$ et $\mu \in P$. On a :

$$\dim E_w(\lambda)_\mu = \text{Card} \{ \pi \in \mathcal{P}_w(\lambda) \mid \pi(1) = \mu \}.$$

Comparons le théorème 9 avec les formules connues auparavant. Pour tout $\mu \in Q$, notons $K(\mu)$ le nombre de manières d'exprimer μ comme une somme de racines positives (comptées avec multiplicités). Cette fonction K est classiquement appelée fonction de Kostant et peut être définie par la série génératrice :

$$\sum K(\mu) e^\mu = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{1}{1 - e^\alpha}$$

(rappelons que Δ^+ est considéré comme un ensemble à multiplicités). La formule classique suivante (due à Steinberg) :

$$\dim L(\lambda)_\mu = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) K(w(\lambda + \rho) - (\mu + \rho))$$

a un intérêt théorique considérable. Néanmoins, elle est combinatoirement peu pratique : par exemple, il n'est pas combinatoirement évident que le terme de droite soit ≥ 0 , à cause de la présence de signes $+$ et $-$. La formule de Littelmann a l'intérêt de décrire les multiplicités comme le nombre d'éléments d'un ensemble (et non plus comme différence de deux cardinaux).

À ce stade, le modèle des chemins n'a été utilisé que pour le chemin dominant rectiligne $\pi(t) = t\lambda$. Cependant, des chemins dominants plus complexes sont utiles pour trouver les multiplicités de produits tensoriels. Rappelons la formule de Kostant. On supposera que $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ est symétrisable pour simplifier. Alors on a $L(\lambda) \otimes L(\mu) = \bigoplus C_{\lambda\mu}^{\nu} L(\nu)$ où :

$$C_{\lambda\mu}^{\nu} = \sum_{x,y \in W} \varepsilon(x)\varepsilon(y) K(x(\lambda + \rho) + y(\mu + \rho) - (\nu + \rho)).$$

Par comparaison, Littelmann a obtenu (comme corollaire du théorème 7) :

THÉORÈME 11.— *Le coefficient $C_{\lambda\mu}^{\nu}$ est le nombre de chemins de Lakshmibai-Seshadri π de forme μ tels que $\pi_{\lambda} * \pi$ soit dominant et $\pi_{\lambda} * \pi(1) = \nu$.*

4. INTERPRÉTATION DES CHEMINS DE LAKSHMIBAI-SESHADRI EN TERMES DE POLYTOPES À SOMMETS ENTIERS

Soit X un ensemble simplicial, c'est-à-dire la donnée d'une collection de parties I de X (appelées simplexes) de sorte que tout sous-ensemble d'un simplexe soit encore un simplexe. Pour éviter des discussions techniques, nous allons supposer X fini. Soit $\mathbf{R}X$ l'espace vectoriel de base X , et soit Δ_X le polytope associé à X , i.e. Δ_X est le sous-espace de $\mathbf{R}X$ formé des combinaisons linéaires $\sum_{x \in X} a_x x$ où $a_x \geq 0$, $\sum a_x = 1$ et $\{x | a_x \neq 0\}$ est un simplexe de X . Tout simplexe I de X correspond à un simplexe topologique Δ_I de Δ_X .

Une structure entière sur Δ_X sera la donnée pour tout entier $n > 0$ d'un sous-ensemble $\Delta_X(n)$ de Δ_X de sorte que, pour tout simplexe I de X , il existe un réseau Γ_I de $\mathbf{R}I$ contenant I tel que :

$$\Delta_I(n) = \Delta_I \cap \frac{1}{n} \Gamma_I,$$

où $\Delta_I(n) = \Delta_X(n) \cap \Delta_I$.

Cette définition généralise la notion de polytopes à sommets entiers.

On peut vérifier ([D]) que la condition de a -chaîne pour les chemins de Lakshmibai-Seshadri est indépendante du choix de la chaîne. Soient $\lambda \in P^+$ et $w \in W/W_{\lambda}$. L'ensemble $X(w) = \{u \in W/W_{\lambda} | u \leq w\}$ a une structure simpliciale avec, pour simplexes, tous les sous-ensembles totalement ordonnés. Notons P_w le polytope

associé. Alors il existe une structure entière naturelle sur P_w de telle sorte que, pour tout entier $n > 0$, il existe une bijection naturelle :

$$\mathcal{P}_w(n\lambda) \simeq P_w(n).$$

Cela permet d'interpréter les dimensions des modules de Demazure comme des polynômes d'Ehrhart. Je ne sais pas s'il est toujours possible de réaliser P_w comme un polytope à sommets entiers.

Pour une utilisation des bases de Littelmann, voir [S].

5. ANNEXE. ALGÈBRES DE KAČ-MOODY

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dite *matrice de Cartan généralisée* si elle satisfait aux trois conditions suivantes :

- i) $a_{ii} = 2$;
- ii) a_{ij} est un entier ≤ 0 pour $i \neq j$;
- iii) $a_{ij} = 0$ si et seulement si $a_{ji} = 0$.

Une *réalisation* de A est la donnée d'un espace vectoriel réel $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ et de deux familles d'éléments $h_i \in \mathfrak{h}$, $\alpha_i \in \mathfrak{h}^*$ tels que $\alpha_i(h_j) = a_{ji}$. On impose aussi aux famille h_i , α_i d'être linéairement indépendantes. Un calcul d'algèbre linéaire implique alors que $\dim \mathfrak{h} \geq 2n - rg(A)$. Lorsque cette inégalité est une égalité, la réalisation est unique à isomorphisme près.

L'*algèbre de Kač-Moody* (réelle déployée) associée à la réalisation \mathfrak{h} de \mathbf{R} est l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ (notée aussi \mathfrak{g}) engendrée par l'espace vectoriel \mathfrak{h} et des générateurs f_i, e_i ($1 \leq i \leq n$) soumis aux seules relations :

$$\begin{aligned} [h, h'] &= 0 \text{ pour } h, h' \in \mathfrak{h}, \\ [e_i, f_i] &= h_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n, \\ [e_i, f_j] &= 0 \text{ pour } 1 \leq i \neq j \leq n, \\ [h, e_i] &= \alpha_i(h) e_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n, \\ [h, f_i] &= -\alpha_i(h) f_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

et aux relations de Serre :

$$\begin{aligned} ad^{m_{ij}}(e_i)(e_j) &= 0, \\ ad^{m_{ij}}(f_i)(f_j) &= 0, \end{aligned}$$

où $m_{ij} = 1 - a_{ij}$, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

Les éléments α_i de \mathfrak{h}^* sont appelés *racines simples* et les éléments h_i les *coracines simples*. Lorsque α est une racine simple, on notera h_α la coracine correspondante.

Pour toute racine simple α , on a $\alpha(h_\alpha) = 2$. Donc $s_\alpha = 1 - \alpha \otimes h_\alpha$ est une réflexion hyperplane de \mathfrak{h}^* . Le groupe W engendré par ces réflexions est dit *groupe de Weyl*. Puisque $s_\alpha^2 = 1$, tout élément $w \in W$ peut être écrit sous la forme d'un produit $\sigma_1 \cdots \sigma_N$ de réflexions simples. Lorsque N est minimal, une telle décomposition est dite *réduite*. On pose alors $\ell(w) = N$ et $\ell(w)$ s'appelle la *longueur* de w .

Un *poids* est un élément $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tel que $\lambda(h_\alpha) \in \mathbf{Z}$ pour toute racine simple α . L'ensemble des poids est noté P . Il existe un poids ρ tel que $\rho(h_\alpha) = 1$ pour toute racine simple α . Ce poids n'est pas unique, mais $\rho - w\rho$ est indépendant du choix de ρ pour tout $w \in W$. Le réseau des racines est $Q = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathbf{Z} \alpha_i$ (ce n'est vraiment un réseau de \mathfrak{h} que lorsque $\dim \mathfrak{h} = n$). On a $Q \subset P$.

La *chambre dominante* de \mathfrak{h} est le convexe $C = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(h_\alpha) \geq 0 \text{ pour toute racine simple } \alpha\}$. On pose $P^+ = P \cap C$. Pour $\lambda \in P^+$, on notera W_λ le stabilisateur de λ . Toute classe de W/W_λ possède un unique représentant dans W de longueur minimale. On identifiera ainsi W/W_λ à un sous-ensemble de W que l'on munira de l'ordre de Bruhat induit.

Si M est un \mathfrak{h} -module et $\lambda \in P$, on pose $M_\lambda = \{m \in M \mid h \cdot m = \lambda(h)m \text{ pour tout } h \in \mathfrak{h}\}$. On appelle M_λ l'espace de poids λ de M et sa dimension est la multiplicité de λ . Quand $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda$, on dit que M est diagonalisable.

L'algèbre de Lie \mathfrak{g} est diagonalisable comme \mathfrak{h} -module pour la représentation adjointe. On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}_\alpha$. Les éléments $\alpha \in P - \{0\}$ tels que $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ sont appelés les *racines*. On considère l'ensemble Δ des racines comme un ensemble à multiplicités (chaque racine α apparaît avec multiplicité $\dim \mathfrak{g}_\alpha$). Une racine α est *positive* si l'on a $\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} m_i \alpha_i$ où les m_i sont des entiers ≥ 0 (pour toute racine α , α est positive ou $-\alpha$ est positive). L'ensemble des racines positives est noté Δ^+ . On note \mathfrak{b} la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$. Pour $\lambda \in P^+$, on note $L(\lambda)$ le module cyclique sur $U(\mathfrak{g})$ engendré par un vecteur v soumis aux seules relations :

$$\begin{aligned} h \cdot v &= \lambda(h)v \text{ pour } h \in \mathfrak{h}, \\ e_i \cdot v &= 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq n, \\ f_i^{m_i} \cdot v &= 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq n, \text{ où } m_i = \lambda(h_i) + 1. \end{aligned}$$

Lorsque A est symétrisable (*i.e.* $A = DS$ où D est diagonale et S symétrique), le module $L(\lambda)$ est simple.

Exemple : Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$, la matrice de Cartan telle que :

$$\begin{cases} a_{ii} = 2, \\ a_{ij} = -1 & \text{si } |i - j| = 1, \\ a_{ij} = 0 & \text{si } |i - j| > 1. \end{cases}$$

Notons $\mathfrak{h} = \mathbf{R}^n$ avec sa base canonique $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$. Soit $(\varepsilon_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ la base duale de \mathfrak{h}^* et posons $h_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$, $\alpha_i = \varepsilon_i^* - \varepsilon_{i+1}^*$. Alors $(\mathfrak{h}, h_1, \dots, h_{n-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ est une réalisation de A et l'algèbre de Kač-Moody associée est $\text{gl}(n, \mathbf{R})$.

Dans le cas du \mathfrak{g} -module naturel de dimension n , les chemins de Lakshmibai-Seshadri sont simplement les n chemins rectilignes $t \mapsto t\varepsilon_i$. Ce chemin sera simplement noté ε_i . On a $P^+ = \{\sum_{i=1}^n m_i \varepsilon_i \mid m_i \geq m_{i+1}\}$. Donc pour qu'une concaténation $\varepsilon_{i_1} * \dots * \varepsilon_{i_m}$ soit un chemin dans C , il est nécessaire et suffisant que l'on ait $\varepsilon_{i_1} + \dots + \varepsilon_{i_r} \in P^+$ pour tout $1 \leq r \leq m$.

Montrons que ces chemins peuvent être identifiés à des tableaux standard. On a $\varepsilon_{i_1} + \dots + \varepsilon_{i_m} = \sum_{i=1}^n m_i \varepsilon_i$ où $m_1 \geq m_2 \dots$. Remplissons le diagramme de Young avec les entiers $1, 2, \dots, m$ comme suit : on place l'indice r sur la ligne i_r et aussi à gauche que possible. Par exemple, le chemin $\varepsilon_1 * \varepsilon_2 * \varepsilon_1 * \varepsilon_3 * \varepsilon_1$ correspond au tableau standard

1	3	5
2		
4		

BIBLIOGRAPHIE

- [D] R. DEHY - Thèse (en préparation).
- [Jo] A. JOSEPH - *Quantum groups and their primitive ideals*, Springer-Verlag, 1995.
- [Hu] J. HUMPHREYS - *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer-Verlag, 1968.
- [Kač] V.G. KAČ - *Infinite dimensional Lie algebras*, 3rd edition, Cambridge University Press, 1990.
- [Kas1] M. KASHIWARA - *Crystalizing the q -analogue of universal enveloping algebras*, Comm. Math. Phys. **133** (1990), 249-260.
- [Kas2] M. KASHIWARA - *Crystal bases and Littelmann's refined Demazure character formula*, RIMS preprint, 1992.
- [Ku] S. KUMAR - *Demazure character formula in arbitrary Kač-Moody settings*,

- Invent. Math. **89** (1987), 395-423.
- [La] V. LAKSHMIBAI - *Demazure modules*, preprint, 1994.
- [LaS] V. LAKSHMIBAI and C.S. SESHADRI - *Standard monomial theory*, Proceedings of Hyderabad Conference on Algebraic groups, 1991.
- [Li1] P. LITTELMANN - *A Littlewood-Richardson rule for symmetrisable Kač-Moody algebras*, Invent. Math. **116** (1994), 329-346.
- [Li2] P. LITTELMANN - *Paths and root operators in representation theory*, à paraître aux Ann. of Math.
- [Li3] P. LITTELMANN - *A plactic algebra for semi-simple Lie algebras*, preprint, 1994.
- [Lu] G. LUSZTIG - *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras, II*, Prog. Theor. Phys. **102** (1990), 175-201.
- [Ma] O. MATHIEU - *Formule de caractères pour les algèbres de Kač-Moody générales*, Astérisque **159-160** (1988).
- [S] Y. SANDERSON - *Dimension of Demazure modules for rank 2 affine Lie algebras*, thèse, à paraître dans Compositio Mathematica.

Olivier MATHIEU

Université Louis Pasteur et C.N.R.S.

IRMA

UA 1 du CNRS

7, rue René Descartes

F-67084 STRASBOURG CEDEX

e-mail : mathieu@math.u-strasbg.fr