Astérisque

JEAN GINIBRE

Le problème de Cauchy pour des EDP semi-linéaires périodiques en variables d'espace

Astérisque, tome 237 (1996), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 796, p. 163-187

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__163_0>

Séminaire BOURBAKI
47ème année, 1994-95, n° 796

Mars 1995

LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR DES EDP SEMI-LINÉAIRES PÉRIODIQUES EN VARIABLES D'ESPACE
[d'après Bourgain]

par **Jean GINIBRE**

1. INTRODUCTION

Le but de cet exposé est de donner un aperçu d'une série de travaux récents de Bourgain [B 1-8] sur le problème de Cauchy pour un certain nombre d'équations d'évolution classiques lorsque la variable d'espace varie dans le tore $\mathbf{T}^n$. Ces équations sont des EDP semi-linéaires dispersives pour des fonctions définies dans l'espace temps $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ ou $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}$ (n est la dimension d'espace). On s'intéresse principalement aux équations suivantes :

• L'équation de Schrödinger non-linéaire (SNL)

$$i\,\partial_t\, u = -\Delta u + f(u), \tag{1.1}$$

où u est une fonction complexe définie dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ ou $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}$, et $f(u)$ est un terme d'interaction non-linéaire, typiquement :

$$f(u) = \lambda\,|u|^{p-1}\,u \qquad (\lambda \in \mathbf{R}\,,\, p > 1). \tag{1.2}$$

• L'équation de Korteweg-de Vries (KdV)

$$\partial_t\, u + \partial_x^3\, u = u\,\partial_x\, u \tag{1.3}$$

et, plus généralement, l'équation de Korteweg-de Vries généralisée (KdVG)

$$\partial_t\, u + \partial_x^3\, u = \partial_x\, f(u) \tag{1.4}$$

où u est une fonction réelle définie dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ou $\mathbf{T} \times \mathbf{R}$, et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

• L'équation de Kadomtsev-Petviashvili (KP)

$$\partial_t\, u + \partial_x^3\, u + \varepsilon\,\partial_y^2\, v = u\,\partial_x\, u \qquad \text{avec } u = \partial_x\, v, \tag{1.5}$$

où u est une fonction réelle définie dans $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ ou $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}$ et $\varepsilon = +1$ (équation dite KP II) ou $\varepsilon = -1$ (équation dite KP I).

Le problème de Cauchy pour ces équations (au moins pour SNL et KdVG) est assez bien compris dans $\mathbf{R}^n$ (voir [C], [KPV2] et leur bibliographie). On peut l'étudier de la façon suivante. L'équation est du type :

$$\partial_t u = Lu + f_0(u), \tag{1.6}$$

où L est un opérateur linéaire anti-autoadjoint dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, typiquement L^2 ou un espace de Sobolev H^s, et engendre un groupe unitaire à un paramètre $U(t) = \exp(tL)$ dans $\mathcal{H}$. Le problème de Cauchy pour l'équation (1.6) avec donnée initiale $u(t=0) = \varphi \in \mathcal{H}$ est alors équivalent à l'équation intégrale :

$$\begin{aligned} u(t) &= U(t)\varphi + \int_0^t dt'\, U(t-t')\, f_0(u(t')) \\ &\equiv U(t)\varphi + (U *_R f_0)(t) \equiv (Au)(t) \end{aligned} \tag{1.7}$$

où la notation $*_R$ désigne la convolution retardée en temps (retardée référant au fait que $t' \leq t$ dans l'intégrale). On résoud cette équation en deux étapes qui sont les suivantes, dans les cas favorables :

1) On résoud d'abord le problème de Cauchy local, *i.e.* on résoud (1.7) dans un intervalle de temps $[-T, T]$ pour T assez petit, par une méthode de contraction consistant à montrer que l'opérateur A défini dans (1.7) est une contraction dans un espace de Banach X convenable de fonctions de (x,t) pour $\varphi \in \mathcal{H}$ et T assez petit. La méthode donne en même temps l'existence et l'unicité de la solution dans X et la continuité de l'application $\varphi \to u$ de $\mathcal{H}$ dans X. Si cette situation est réalisée, on dira que le problème de Cauchy pour (1.6) avec donnée initiale dans $\mathcal{H}$ est localement bien posé dans X.

2) On étend ensuite les solutions à tout temps $t \in \mathbf{R}$ en itérant la première étape. Cette extension requiert un contrôle a priori de la norme de $u(t)$ dans $\mathcal{H}$, qui est fourni par les lois de conservation associées à l'équation. Par exemple pour toutes les équations ci-dessus, la norme de $u(t)$ dans L^2 est constante et il existe une autre loi de conservation, celle de l'énergie qui, dans les cas favorables, contrôle la norme de $u(t)$ dans H^1. Si les étapes (1) et (2) sont réalisées, on dira que le problème de Cauchy est globalement bien posé (dans les espaces adéquats).

Un élément essentiel du succès de la première étape dans le cas de $\mathbf{R}^n$ est l'existence de propriétés dispersives de l'équation linéaire sous-jacente : les solutions de celle-ci s'étalent dans l'espace au cours du temps, par exemple $\|U(t)\,\varphi\|_r \to 0$ quand $t \to \infty$ pour $r > 2$, tandis que $\|U(t)\,\varphi\|_2$ est constante. La preuve de la propriété de contraction utilise alors deux types d'estimations :

1) des estimations linéaires assurant que l'application $\varphi \to U(\cdot)\,\varphi$ est bornée de $\mathcal{H}$ dans X et que l'application $f \to U *_R f$ est bornée de X' dans X, où X' est un espace auxiliaire. Ces estimations sont souvent appelées inégalités de Strichartz généralisées [S] ;

2) des estimations non-linéaires assurant que l'application $u \to f_0(u)$ est bornée et lipschitzienne de X dans X'. Ces estimations sont souvent des combinaisons d'inégalités de Sobolev et de variantes de la formule de Leibnitz avec des dérivées éventuellement fractionnaires.

On donnera dans la Section 2 l'exemple le plus simple de l'équation SNL dans $\mathbf{R}^n$ comme illustration du schéma précédent.

Dans le cas de $\mathbf{T}^n$, les propriétés dispersives n'existent pas car $U(t)\,\varphi$ ne peut pas tendre vers zéro dans L^r quand $t \to \infty$. Par exemple pour les équations SNL et KdVG, avec φ 2π-périodique en x, $U(\cdot)\,\varphi$ est également 2π-périodique en t. Le problème est alors beaucoup plus difficile. Un élément essentiel de la méthode de Bourgain est de réorganiser les estimations au moyen d'un choix approprié d'espaces fonctionnels de façon à trivialiser les estimations linéaires et à concentrer toute la difficulté sur les estimations non-linéaires. Celles ainsi requises peuvent alors être effectivement obtenues dans le cas de $\mathbf{T}^n$. La méthode n'est cependant pas restreinte dans son principe au cas de $\mathbf{T}^n$ et elle s'applique aussi aux problèmes dans $\mathbf{R}^n$, où elle a des retombées intéressantes. Le cas le plus spectaculaire est celui de l'équation KdV où elle a permis d'améliorer les résultats précédemment connus et de résoudre le problème de Cauchy dans H^s pour des valeurs négatives de s, $s > -\frac{3}{4}$ [KPV3,4]. Par ailleurs, la méthode ne fait pas perdre le bénéfice des inégalités de Strichartz lorsqu'elles existent, et il est facile de les y injecter. On exposera dans la Section 3 les idées générales de la méthode.

Dans le cas de $\mathbf{T}^n$, pour les équations de Schrödinger et d'Airy qui sont les parties linéaires de SNL et KdVG, Bourgain a obtenu un certain nombre d'inégalités de Strichartz qui sont des versions affaiblies de celles connues dans $\mathbf{R}^n$. On passera en revue ces inégalités dans la Section 4. On décrira ensuite l'application de la méthode à l'équation SNL dans la Section 5 et à l'équation KdV dans la Section 6. Dans ce dernier cas, on considérera en parallèle le cas de $\mathbf{R}$ et le cas de $\mathbf{T}$. On mentionnera ensuite brièvement quelques résultats sur l'équation KdVG et sur l'équation KP II. On se borne à citer, faute de place, le traitement par une méthode voisine d'une équation des ondes semi-linéaire avec non-linéarité quadratique dans les dérivées premières [KM].

On note (x,t) les variables d'espace temps, (ξ,τ) les variables conjuguées de Fourier, parfois $m = \xi$ dans le cas périodique, $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier, $\hat{u} = \mathcal{F}u$, $\mathcal{F}_x$ et $\mathcal{F}_t$ les transformations de Fourier partielles en x et t. Les notations d'espaces fonctionnels, en particulier L^p et H^s, sont standard. En cas d'ambiguïté, on indiquera le nom de la variable en indice ou son domaine entre parenthèses. Par exemple, $L^r = L^r_x = L^r(\mathbf{T}^n)$ ou $L^r(\mathbf{R}^n)$ suivant le contexte. De même, $L^q_t(\mathbf{R}, L^r_x)$ désigne l'espace L^q de la variable t à valeurs dans L^r de la variable x. On note $\chi(\mathcal{P})$ la fonction caractéristique de l'ensemble où la propriété $\mathcal{P}$ est vraie, $\langle\lambda\rangle = 1 + |\lambda|$ ou $\sqrt{1+\lambda^2}$ indifféremment. Enfin, $f(N) \ll N^\varepsilon$ signifie $\forall\varepsilon > 0$, $\exists C_\varepsilon$ tel que $f(N) \leq C_\varepsilon N^\varepsilon$.

2. LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR L'ÉQUATION SNL DANS $\mathbf{R}^n$

On suit le schéma précédent. Les inégalités de Strichartz généralisées sont les suivantes [Y] (voir aussi [C] [K] [GV]). On dira qu'un couple d'exposants (q,r) est admissible si $0 \leq \frac{2}{q} = \frac{n}{2} - \frac{n}{r} < 1$ ($\leq \frac{1}{2}$ pour $n = 1$). On note $\bar{r}$ l'exposant Hölder conjugué de r : $\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}} = 1$.

PROPOSITION 2.1.— *Les inégalités suivantes sont satisfaites* :

$$\|U(\cdot)\,u\,;\, L^q_t(\mathbf{R}, L^r_x)\| \leq C_r\,\|u\|_2, \tag{2.1}$$

pour tout $u \in L^2_x$ et tout (q,r) admissible.

$$\|U *_R f\,;\, L^{q_1}_t(I, L^{r_1}_x)\| \leq C_{r_1}\, C_{r_2}\,\|f\,;\, L^{\bar{q}_2}_t(I, L^{\bar{r}_2}_x)\|, \tag{2.2}$$

pour tout intervalle $I \subset \mathbf{R}$, toute f dans l'espace adéquat (prolongée par zéro hors de I) et tous (q_i, r_i) admissibles $(i = 1,2)$.

La résolution locale dans l'intervalle $I = [-T,T]$ avec donnée initiale $\varphi \in H^s$, $s \geq 0$, s'effectue selon le schéma précédent dans des espaces qui sont à un détail technique près :

$$X^0(I) = \{u : u \in \mathcal{C}(I, L^2_x) \text{ et } u \in L^q_t(I, L^r_x) \text{ pour tout } (q,r) \text{ admissible}\} \tag{2.3}$$

pour $s = 0$,

$$X^1(I) = \{u : u \in \mathcal{C}(I, H^1) \text{ et } \nabla u \in L^q_t(I, L^r_x) \text{ pour tout } (q,r) \text{ admissible}\} \tag{2.4}$$

pour $s = 1$, et des généralisations appropriées pour les autres $s \geq 0$. On montre alors [CW] :

THÉORÈME 2.1.— *Le problème de Cauchy pour l'équation SNL* (1.1) (1.2) *avec donnée initiale dans H^s, $s \geq 0$, est localement bien posé dans X^s pour $p-1 \leq \frac{4}{n-2s}$, $p-1 > [s]$.*

L'équation (1.1) (1.2) possède deux lois de conservation utiles :

1) La norme dans L^2_x est conservée, *i.e.* $\|u(t)\|_2 = \|\varphi\|_2$ pour tout t.

2) L'énergie est conservée : $E(u(t)) = E(\varphi)$ pour tout t, où

$$E(u) = \|\nabla u\|_2^2 + 2\lambda(p+1)^{-1} \ \|u\|_{p+1}^{p+1} \tag{2.5}$$

dans le cas (1.1) (1.2). Ces deux lois de conservation assurent un contrôle uniforme en temps de $u(t)$ dans H^1 si 1) $\lambda > 0$ ou 2) $p-1 < \frac{4}{n}$ ou 3) $p-1 = \frac{4}{n}$ et $\|\varphi\|_2$ est assez petit ou 4) $p-1 \leq \frac{4}{(n-2)}$ et $\|\varphi;\, H^1\|$ est assez petit. Combinant ces informations avec les résultats de résolution locale, on obtient les résultats globaux suivants [K] (voir aussi [C]).

THÉORÈME 2.2.— *Le problème de Cauchy pour l'équation SNL* (1.1) (1.2) *dans* $\mathbf{R}^n$ *avec donnée initiale dans H^s, $s \geq 0$, est globalement bien posé*

- *pour $s = 0$ dans $X^0_{\rm loc}(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R}, L^2)$ si $p-1 < \frac{4}{n}$*
- *pour $s = 1$ dans $X^1_{\rm loc}(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R}, H^1)$ si $p-1 < \frac{4}{(n-2)}$ et si l'énergie contrôle la norme H^1*
- *pour $s = 2$ dans $X^2_{\rm loc}(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R}, H^1)$ sous les mêmes hypothèses.*

3. LA MÉTHODE DE BOURGAIN. GÉNÉRALITÉS

La méthode reprend la séparation du problème en deux étapes : problème local en temps et globalisation. La seconde étape est la même que précédemment, basée sur des estimations a priori déduites des lois de conservation, qui sont les mêmes dans les cas de $\mathbf{T}^n$ et de $\mathbf{R}^n$. La première étape est modifiée et utilise des espaces fonctionnels différents. Les deux points essentiels sont les suivants :

1) Les normes dans les espaces fonctionnels sont exprimées en terme des modules des transformées de Fourier des fonctions considérées et les estimations principales effectuées sur ces mêmes modules. Dans ce but, on utilise en priorité les espaces de

Sobolev basés sur L^2 :

$$H^{s,b} = \{u : \|u\,;\, H^{s,b}\| \equiv \|\langle\xi\rangle^s\,\langle\tau\rangle^b\,\hat{u}\|_2 < \infty\}. \tag{3.1}$$

On utilise aussi des espaces plus compliqués où on met $\hat{u}$ dans diverses combinaisons d'espaces L^p ou ℓ^p (après découpage dyadique par exemple) pondérés dans les variables ξ et τ.

Pour utiliser la transformée de Fourier dans le problème local, c'est-à-dire avec des fonctions définies seulement a priori dans un intervalle de temps fini, il est utile et naturel de tronquer l'équation (1.7). Soit $\psi_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, $0 \leq \psi_1 \leq 1$, $\psi_1(t) = 1$ pour $|t| \leq 1$, $\psi_1(t) = 0$ pour $|t| \geq 2$, et pour $T > 0$, soit $\psi_T(t) = \psi_1(t/T)$. On remplace l'équation (1.7) par l'équation tronquée (avec $T_0 \geq T$) :

$$u(t) = \psi_{T_0}(t)\,U(t)\,\varphi + \psi_T(t)\int_0^t dt'\,U(t-t')\,f_0(u(t')). \tag{3.2}$$

Il est clair que toute solution de (3.2) résoud (1.7) localement en temps dans l'intervalle $[-T,T]$. On concentre son attention sur (3.2) qu'on essaiera de résoudre pour T petit. T sera le temps de résolution locale de (1.7). On suppose désormais $T \leq 1$. En fonction des besoins des estimations, et en particulier en vue d'obtenir un facteur de contraction petit, on pourra prendre $T_0 = T$ ou T_0 fixe, par exemple $T_0 = 1 \geq T$. On pourra aussi effectuer des troncatures supplémentaires, par exemple remplacer $f_0(u)$ par $\psi_{T_1}\,f_0(\psi_{T_1}\,u)$ avec $T_1 = T$, ou $T_1 = 2T$, ou toute autre valeur jugée utile. Dans les cas comme SNL et KdVG où $U(t)\varphi$ est 2π-périodique en t pour tout φ 2π-périodique en x, on pourra aussi 2π-périodiser ψ_T de façon à travailler dans $\mathbf{T}^{n+1}$ et injecter ainsi directement les inégalités de Strichartz démontrées dans ce cas (voir Section 4 ci-dessous). Une autre méthode permettant d'utiliser des fonctions u définies seulement dans un intervalle $I = [-T,T]$ et des espaces fonctionnels X où la norme nécessite l'usage de la transformée de Fourier est de considérer des normes d'extension (ou de restriction) du type :

$$|\!|\!|u|\!|\!| = \inf_{\widetilde{u}} \|\widetilde{u}\,;\, X\|,$$

où l'infimum est pris sur tous les prolongements $\widetilde{u}$ de u à $\mathbf{R}$ *i.e.* tels que $\widetilde{u}_{|I} = u$. Il semble que le travail d'estimation est essentiellement le même dans cette deuxième méthode et qu'elle ne dispense pas totalement des troncatures de la première. On se cantonnera donc à la première.

2) Dans la méthode habituelle (voir Section 2), on utilise un espace fonctionnel classique H (construit à partir d'espaces L^p, d'espaces de Sobolev, de Besov, etc.) pour la fonction inconnue et on doit effectuer séparément, comme on l'a vu plus haut, des estimations d'applications linéaires $\varphi \to U(t)\,\varphi$ et $f \to U *_R f$ à valeurs dans H, et des estimations de l'application non-linéaire f_0. Le point essentiel de la méthode de Bourgain est d'utiliser un espace fonctionnel classique pour la fonction $U(-t)\,u$, *i.e.* d'utiliser pour u un espace X défini par :

$$\|u\,;\,X\| = \|U(-t)\,u\,;\,H\|. \tag{3.3}$$

Le résultat immédiat est d'évacuer l'évolution libre des estimations linéaires et de concentrer la difficulté sur l'estimation non-linéaire de f_0 dans des normes du type (3.3). En effet :

$$\|\psi_{T_0}\,U(\cdot)\,\varphi\,;\,X\| \le C\,\|\varphi\,;\,\mathcal{H}\| \iff \|\psi_{T_0}\,\varphi\,;\,H\| \le C\,\|\varphi\,;\,\mathcal{H}\|, \tag{3.4}$$

$$\|\psi_T(U *_R f)\,;\,X\| \le C\,\|f\,;\,X'\| \iff \|Kf\,;\,H\| \le C\,\|f\,;\,H'\|, \tag{3.5}$$

où K est l'opérateur défini par :

$$(Kf)(t) = \psi_T(t) \int_0^t dt'\,f(t'). \tag{3.6}$$

On utilisera en priorité les espaces $X^{s,b}$ associés selon (3.3) aux espaces $H^{s,b}$ définis par (3.1) :

$$X^{s,b} = \{u : \|u\,;\,X^{s,b}\| \equiv \|U(-t)u\,;\,H^{s,b}\| < \infty\}. \tag{3.7}$$

On s'intéresse à des situations où l'opérateur linéaire L est de la forme $L = i\,\phi(-i\nabla)$, avec par exemple $\phi(\xi) = \xi^3$ pour KdV et $\phi(\xi) = -\xi^2$ pour Schrödinger, et dans tous les cas :

$$U(t) = \mathcal{F}_x^*\,\exp[it\,\phi(\xi)]\,\mathcal{F}_x. \tag{3.8}$$

La norme dans $X^{s,b}$ s'écrit alors explicitement sous la forme :

$$\|u\,;\,X^{s,b}\|^2 = \int d\xi\,d\tau\,\langle\xi\rangle^{2s}\,\langle\tau - \phi(\xi)\rangle^{2b}\,|\hat{u}(\xi,\tau)|^2, \tag{3.9}$$

qui est le point de départ des estimations non-linéaires de f_0.

Les estimations linéaires deviennent alors très simples, et en particulier (3.4) devient triviale :

Lemme 3.1 :

$$\|\psi_{T_0} U(\cdot)\,\varphi\,;\,X^{s,b}\| = \|\psi_{T_0}\,;\,H^b\|\,\|\varphi\,;\,H^s\| \leq C\,T_0^{\frac{1}{2}-b}\,\|\varphi\,;\,H^s\|. \tag{3.10}$$

(Noter que dans une résolution par contraction dans $X^{s,b}$ avec $b > \frac{1}{2}$ et T petit, on a intérêt à prendre $T_0 = 1$ et non pas $T_0 = T$, de manière à pouvoir travailler dans une boule de taille fixe indépendante de T.)

Une forme typique de l'estimation (3.5) est la suivante :

Lemme 3.2 : *Soit* $-\frac{1}{2} < b' \leq 0 \leq b \leq b' + 1$ *et* $T \leq 1$. *Alors :*

$$\|Kg\,;\,H_t^b\| \leq C\,T^{1-(b-b')}\,\|g\,;\,H_t^{b'}\|, \tag{3.11}$$

$$\|\psi_T(U *_R f)\,;\,X^{s,b}\| \leq C\,T^{1-(b-b')}\,\|f\,;\,X^{s,b'}\|, \tag{3.12}$$

pour tout $s \in \mathbf{R}$ *et avec le même* C.

Preuve : Intuitivement, (3.11) exprime que l'intégration sur t dans un intervalle $O(T)$ fait gagner un facteur T (petit) à régularité constante ($b = b'$) ou un degré de dérivation en t ($b = b' + 1$) uniformément en T, ou n'importe quel interpolé convexe de ces deux bénéfices.

L'estimation (3.12) résulte trivialement de (3.5), et par intégration sur ξ, de (3.11) appliquée à $\widehat{g}_\xi(\tau) = \widehat{f}(\tau, \xi)$ à ξ fixé.

L'estimation (3.11) peut être démontrée indifféremment en variable t ou en transformée de Fourier. On donne la deuxième preuve, qui est celle de Bourgain. On écrit, en séparant les contributions des régions $|\tau| T \lesseqgtr 1$,

(3.13)

$$\begin{aligned}\psi_T \int_0^t dt'\,f(t') &= \psi_T \int d\tau (i\tau)^{-1}\,(e^{it\tau} - 1)\,\widehat{f}(\tau)\\ &= \psi_T \sum_{k \geq 1} \frac{t^k}{k!} \int_{|\tau| T \leq 1} d\tau\,(i\tau)^{k-1}\,\widehat{f}(\tau) - \psi_T \int_{|\tau| T \geq 1} d\tau\,(i\tau)^{-1}\,\widehat{f}(\tau)\\ &\quad + \psi_T \int_{|\tau| T \geq 1} d\tau\,(i\tau)^{-1}\,e^{it\tau}\,\widehat{f}(\tau) = I + II + III.\end{aligned}$$

On estime les trois termes successivement dans H^b.

$$\begin{aligned}\|I\,;\,H^b\| &\leq \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\,\|t^k\psi_T\,;\,H^b\|\,T^{1-k}\,\|f\,;\,H_t^{b'}\|\left\{\int_{|\tau|T\leq 1} d\tau\,\langle\tau\rangle^{-2b'}\right\}^{\frac12} \\ &\leq C\,T^{1-(b-b')}\,\|f\,;\,H^{b'}\| \qquad \text{pour tout } b\geq 0,\ b'\leq 0.\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\|II\,;\,H^b\| &\leq \|\psi_T\,;\,H^b\|\,\|f\,;\,H^{b'}\|\left\{\int_{|\tau|T\geq 1} d\tau\,|\tau|^{-2}\,\langle\tau\rangle^{-2b'}\right\}^{\frac12} \\ &\leq C\,T^{1-(b-b')}\,\|f\,;\,H^{b'}\| \qquad \text{pour tout } b\geq 0,\ b'> -\frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

On estime l'intégrale J qui figure dans III par :

$$\begin{aligned}\|J\,;\,H^b\| &\leq \|f\,;\,H^{b'}\|\,\sup_{|\tau|T\geq 1}\,\tau^{-1}\,\langle\tau\rangle^{b-b'} \\ &\leq C\,T^{1-(b-b')}\,\|f\,;\,H^{b'}\| \qquad \text{pour tous } b,b'\in\mathbf{R},\ b-b'\leq 1,\end{aligned} \tag{3.16}$$

et de même :

$$\|J\|_2 \leq C\,T^{1+b'}\,\|f\,;\,H^{b'}\| \qquad \text{pour tout } b'\geq -1, \tag{3.17}$$

si bien que :

(3.18)

$$\begin{aligned}\|III\,;\,H^b\| &= \|\langle\tau\rangle^b(\widehat{\psi}_T * \widehat{J})\|_2 \\ &\leq C(\||\tau|^b\,\widehat{\psi}_T\|_1\,\|J\|_2 + \|\widehat{\psi}_T\|_1\,\|J\,;\,H^b\|) \\ &\leq C\,T^{1-(b-b')}\,\|f\,;\,H^{b'}\| \qquad \text{pour tout } b\geq 0,\ b'\geq -1,\ b-b'\leq 1.\end{aligned}$$

L'estimation (3.11) résulte alors de (3.13) (3.14) (3.15) (3.18). □

Remarques : 1) Pour $b - b' < 1$, le facteur $T^{1-(b-b')}$ peut être utilisé directement pour obtenir un facteur de contraction pour T assez petit. Pour $b - b' = 1$, un tel facteur doit être cherché dans l'estimation de $f_0(\psi_T\,u)$ en fonction de u.

2) Le cas limite $b' = -\frac{1}{2}$ est autorisé dans l'estimation de I et III, mais non dans celle de II, où par contre on a effectué un gaspillage en utilisant l'inégalité de Schwarz. Dans les cas où on insiste pour utiliser ce cas limite (c'est le cas de l'équation KdV périodique), on doit estimer directement l'intégrale qui figure dans II dans les normes adéquates.

3) Si on utilise des espaces plus compliqués que $X^{s,b}$, il peut arriver que les variables d'espace et de temps ne se découplent pas de façon aussi élémentaire. On utilise alors au lieu de (3.12) des estimations plus compliquées calquées sur les précédentes.

On va voir maintenant qu'on peut injecter dans le cadre précédent des informations du type des inégalités de Strichartz. Ces inégalités sont de la forme :

$$\|U(\cdot)\, u\, ;\, Y\| \leq C\, \|u\|_2 \tag{3.19}$$

pour tout $u \in L^2_x$, où Y est un espace convenable de fonctions de (x,t), par exemple $L^q_t(L^r_x)$, et donnent des estimations dans Y de solutions de l'équation linéaire. On va en déduire des estimations de fonctions de (x,t) quelconques, en fonction de normes du type précédent.

Lemme 3.3 : *On suppose que Y est stable par multiplication par L^∞_t, i.e. que :*

$$\|\psi f\, ;\, Y\| \leq C\, \|\psi\, ;\, L^\infty_t\|\, \|f\, ;\, Y\| \quad \forall \psi \in L^\infty_t, \forall f \in Y. \tag{3.20}$$

On suppose que l'inégalité (3.19) vaut pour tout $u \in L^2_x$. Alors, pour tout $b > \frac{1}{2}$, on a l'inégalité suivante :

$$\|f\, ;\, Y\| \leq C_b\, \|f\, ;\, X^{0,b}\| \tag{3.21}$$

pour tout $f \in X^{0,b}$, avec $C_b = C\, b^{\frac{1}{2}}(2b-1)^{-\frac{1}{2}}$.

Preuve : On écrit :

$$f = U(t) \int d\tau\, e^{it\tau} (\mathcal{F}_t U(-\cdot) f)(\tau)$$

et on applique (3.20) et (3.19) à τ fixé avec $\psi = e^{it\tau}$ et $u = (\mathcal{F}_t U(-\cdot) f)(\tau)$. On obtient :

$$\|f\, ;\, Y\| \leq C \int d\tau\, \|(\mathcal{F}_t U(-\cdot) f)(\tau)\, ;\, L^2_x\| \tag{3.22}$$

et, en appliquant l'inégalité de Schwarz :

$$\|f\, ;\, Y\| \leq C\, \|f\, ;\, X^{0,b}\| \left\{ \int d\tau\, \langle \tau \rangle^{-2b} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.23}$$

qui donne (3.21). $\square$

Remarque : Le gaspillage consenti en passant de (3.22) à (3.23) peut être réduit en utilisant des espaces fonctionnels plus compliqués. On peut par exemple utiliser une décomposition dyadique en τ et remplacer l'espace de Sobolev H^b par l'espace de Besov $B^{\frac{1}{2}}_{2,1}$.

Si on dispose d'une famille d'espace Y^θ, $0 \leq \theta \leq 1$ interpolant entre $Y^0 = L^2_{x\times t}$ et $Y^1 = Y$, on déduit du lemme 3.3 par interpolation, le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.1.— *Dans les hypothèses du lemme* 3.1 *et avec* Y^θ *comme ci-dessus, on a l'inégalité suivante pour tout* $b > \frac{\theta}{2}$:

$$\|f\,;\, Y^\theta\| \leq C\,\|f\,;\, X^{0,b}\|. \tag{3.24}$$

Preuve : Interpoler entre $(Y^1, X^{0,b}\,(b > \frac{1}{2}))$ et $(Y^0 = L^2_{x\times t},\, X^{0,0} = L^2_{x\times t})$. □

La méthode de Bourgain pour l'étude du problème de Cauchy local consiste en une méthode de contraction dans des espaces fonctionnels du type précédent, dont les $X^{s,b}$ sont les exemples les plus simples. Les estimations linéaires sont des variantes plus ou moins compliquées du lemme 3.2 et le gros du travail consiste en des estimations non-linéaires de $f_0(u)$ dans les normes précédentes, partant d'expressions comme (3.9). Ces estimations sont soit effectuées directement, soit par l'intermédiaire d'inégalités du type Strichartz, exploitées par des variantes du lemme 3.3 et du corollaire 3.1.

4. INÉGALITÉS DE STRICHARTZ PÉRIODIQUES

Les inégalités de Strichartz considérées ici sont des cas particuliers de réponses au problème suivant :

Problème : Soit $d \geq 1$ et $S \subset \mathbf{Z}^d$, et $q > 2$. Déterminer la (ou une estimation de la) meilleure constante $K_q(S)$ telle que :

$$\|\sum_{s\in S} u(s)\, \exp(i\,\langle x, s\rangle)\,;\, L^q(\mathbf{T}^d)\| \leq K_q(S)\,\|u\,;\, \ell^2(S)\|. \tag{4.1}$$

On considère d'abord le cas de l'équation de Schrödinger dans $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}$. Soit $d = n+1$. Pour $u \in L^2(\mathbf{T}^n)$, on définit :

$$f = U(t)u = \sum_m \hat{u}(m)\, \exp(imx - im^2 t). \tag{4.2}$$

Soit :

$$S_d = \{(m, -m^2) : m \in \mathbf{Z}^n\} \subset \mathbf{Z}^d. \tag{4.3}$$

Alors l'inégalité (4.1) avec $S = S_d$ est (à une normalisation près) :

$$\|f\,;\,L^q(\mathbf{T}^{n+1})\| \leq K_q(S_d)\,\|u\|_2, \tag{4.4}$$

c'est-à-dire précisément une inégalité de Strichartz. Plus généralement, pour toute équation $\partial_t u = Lu$ avec $L = i\phi(-i\nabla)$ et $\phi : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z}$, on aurait une situation analogue en prenant :

$$S = \{(m, \phi(m)) : m \in \mathbf{Z}^n\}.$$

On s'intéresse aussi à des inégalités plus générales que (4.4) où on introduit une troncature sur $\hat{u}$ pour m grand. Soit χ_N la fonction caractéristique de :

$$\{m : m \in \mathbf{Z}^n \quad \text{et} \quad |m_i| \leq N,\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Soit :

$$S_{d,N} = S_d \cap (\operatorname{Supp}\chi_N \times \mathbf{Z}). \tag{4.5}$$

On cherche alors des inégalités du type :

$$\|f\,;\,L^q(\mathbf{T}^{n+1})\| \leq K_q(S_{d,N})\,\|u\|_2, \tag{4.6}$$

valables pour tout $u \in L^2$ avec $\hat{u} = \chi_N\,\hat{u}$. Cette extension est intéressante dans les cas où $K_q(S_{d,N}) \to \infty$ quand $N \to \infty$. Une telle inégalité avec $K_q(S_{d,N}) \leq C\,N^\beta$ est essentiellement équivalente à une inégalité du type :

$$\|f\,;\,L^q(\mathbf{T}^{n+1})\| \leq C\,\|u\,;\,H^\beta\|. \tag{4.7}$$

On se limite maintenant à l'équation de Schrödinger. Dans ce cas, Bourgain a proposé et démontré en partie une conjecture sur les valeurs de $K_q(S_{d,N})$ qu'on comprend bien en comparant (4.7) avec les inégalités de Strichartz valables dans $\mathbf{R}^n$. Dans ce cas, l'inégalité (2.1) admet un exposant critique $q = r = r_S \equiv 2 + \frac{4}{n}$. Pour $q \geq r_S$, on en déduit, par une inégalité de Sobolev :

$$\|U(t)u\,;\,L^q(\mathbf{R}^{n+1})\| \leq C\,\|U(t)u\,;\,L^q(\mathbf{R}, W_r^\beta)\| \leq C\,\|u : H^\beta\|, \tag{4.8}$$

avec $\beta \equiv \beta(q) = \frac{n}{r} - \frac{n}{q} = \frac{n}{2} - \frac{(n+2)}{q}$. La comparaison de (4.7) et (4.8) conduit à la première partie de la conjecture suivante dans le cas périodique :

Conjecture 4.1 :

$$K_q(S_{d,N}) \begin{cases} \leq C_q\, N^{\beta(q)} & \text{pour } q > r_S, \\ \ll N^{\varepsilon} & \text{pour } q = r_S, \\ \leq C_q & \text{pour } q < r_S. \end{cases}$$

La deuxième partie de la conjecture est un affaiblissement par une puissance ε de l'analogue périodique du cas de $\mathbf{R}^n$, imposé par l'existence de contre-exemples. La troisième partie est naturelle en raison de l'emboîtement des espaces L^q sur le tore.

La conjecture a été démontrée partiellement, par l'usage de deux méthodes. La première méthode s'applique au cas où $q = 2s$ est un entier pair. On écrit alors par Plancherel :

$$\|f\,;\, L^q(\mathbf{T}^{n+1})\|^q = C\, \|\mathcal{F}(f^s)\,;\, \ell^2(\mathbf{Z}^{n+1})\|^2 \tag{4.9}$$

et pour $(m,p) \in \mathbf{Z}^n \times \mathbf{Z}$ et $\hat{u} = \chi_N\, \hat{u}$,

$$\mathcal{F}(f^s)(m,p) = \sideset{}{'}\sum_{\{m_1,\cdots,m_s\}} \hat{u}(m_1)\cdots\hat{u}(m_s), \tag{4.10}$$

où la somme porte sur tous les $\{m_1,\cdots,m_s\} \in (\mathbf{Z}^n)^s$ tels que :

$$|(m_j)_i| \leq N \qquad \text{pour } 1 \leq j \leq s,\ 1 \leq i \leq n, \tag{4.11}$$

$$m_1 + \cdots + m_s = m, \tag{4.12}$$

$$m_1^2 + \cdots + m_s^2 = -p. \tag{4.13}$$

(Plus généralement, pour une équation $\partial_t u = Lu$, $L = i\phi(-i\nabla)$, on remplacerait (4.13) par $\phi(m_1) + \cdots + \phi(m_s) = p$.)

Soit $r_{m,p}$ le nombre de telles décompositions (à N fixé). On déduit de (4.10) par l'inégalité de Schwarz :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(f^s)\,;\, \ell^2(\mathbf{Z}^{n+1})\|^2 &= \sum_{m,p} |\textstyle\sum' \hat{u}(m_1)\cdots\hat{u}(m_s)|^2 \\ &\leq \sum_{m,p} r_{m,p} \textstyle\sum' |\hat{u}(m_1)|^2 \cdots |\hat{u}(m_s)|^2 \\ &\leq \sup_{m,p} r_{m,p}\, \|u\|_2^{2s}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

et on est ramené à estimer $r_{m,p}$. L'étude est simple si n et s ne sont pas trop grands. Pour $q = 4$, *i.e.* $s = 2$, on a seulement deux vecteurs m_1 et m_2 ; on connaît $m_1 + m_2$ et (4.13) détermine $(m_1 - m_2)^2 = -(2p + m^2)$. Le nombre de solutions pour (m_1, m_2) est au plus 2^n fois (à cause des signes des $(m_1 - m_2)_i$) le nombre de décompositions de l'entier $-(2p + m^2)$ en somme de n carrés. En particulier $r_{m,p} \leq 2$ pour $n = 1$ uniformément en N. Les résultats connus pour ce problème [G] permettent essentiellement de démontrer la conjecture pour $q = 4$ et $n \geq 1$. Pour $n = 1$ et $q = 6$, *i.e.* $s = 3$, on est ramené à une équation diophantienne quadratique en deux variables, et les résultats connus permettent encore de démontrer la conjecture dans ce cas avec $K_6(S_{2,N}) \leq \exp\left(\frac{C \operatorname{Log} N}{(\operatorname{Log}\operatorname{Log} N)}\right)$. Le cas $n = 1$, $q = 4$ avait été obtenu précédemment dans [Z].

La deuxième méthode d'étude de la conjecture 4.1 est l'extension au cas périodique d'une méthode générale de démonstration des inégalités de Strichartz dans le cas de $\mathbf{R}^n$ et consiste à obtenir des estimations sur $\sigma = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\sigma})$ où $\hat{\sigma}$ est la mesure :

$$\hat{\sigma} = \sum_{s \in S_{d,N}} \delta_s$$

et sur l'opérateur de convolution avec σ. Le résultat principal est le suivant [B1], proposition 3.82 et [B3], proposition 1.1 :

PROPOSITION 4.1.— *Soit $n \geq 1$, $u \in L^2(\mathbf{T}^n)$ avec $\|u\|_2 \leq 1$ et $\chi_N \hat{u} = \hat{u}$ et soit $f = U(t)\, u$. Alors, pour tout $\lambda \geq N^{\frac{n}{4}}$:*

$$\operatorname{Mes}\{(x,t) \in \mathbf{T}^{n+1} : |f(x,t)| \geq \lambda\} \leq C_q\, N^{q\beta(q)}\, \lambda^{-q} \tag{4.15}$$

pour tout $q > r_S$, et :

$$\operatorname{Mes}\{(x,t) \in \mathbf{T}^{n+1} : |f(x,t)| \geq \lambda\} \ll N^{\varepsilon}\, \lambda^{-r_S}. \tag{4.16}$$

On renvoie à [B1] pour la preuve, qui est difficile. Si on décompose :

$$f = f\,\chi(|f| < N^{\frac{n}{4}}) + f\,\chi(|f| \geq N^{\frac{n}{4}}) = f_1 + f_2,$$

alors la proposition 4.1 dit que $f_2 \in L^q_w(\mathbf{T}^{n+1})$ pour tout $q \geq r_S$ et par suite $f_2 \in L^q(\mathbf{T}^{n+1})$ pour tout $q > r_S$ par un argument d'interpolation élémentaire, avec l'estimation de norme attendue. Par ailleurs, pour tout $q \geq 2$:

$$\|f_1\,;\, L^q(\mathbf{T}^{n+1})\| \leq N^{(1-\frac{2}{q})\frac{n}{4}}\, \|f_1\,;\, L^2(\mathbf{T}^{n+1})\|^{\frac{2}{q}}, \tag{4.17}$$

ce qui démontre la conjecture 4.1, pourvu que $(1-\frac{2}{q})\frac{n}{4} \leq \beta(q)$, *i.e.* pour $q \geq 2+\frac{8}{n}$.

Combinant ce résultat avec ceux de la première méthode, on obtient finalement les résultats suivants :

PROPOSITION 4.2.— *La conjecture* 4.1 *est démontrée*

pour $n=1$ *pour* $2 \leq q \leq 4$ *et tout* $q \geq 6$ $(= r_S)$,

pour $n=2$ *et tout* $q \geq 4$ $(= r_S)$,

pour $n=3$ *et tout* $q > 4$ $(> r_S = \frac{10}{3})$,

pour $n \geq 4$ *et tout* $q \geq 2+\frac{8}{n}$ $(> r_S = 2+\frac{4}{n})$.

On conclut cette section avec deux inégalités en dimension $n = 1$, pour l'équation de Schrödinger et l'équation d'Airy. Ces inégalités sont très voisines de (3.24) et sont naturelles dans le cadre du corollaire 3.1. Dans le cas de $\mathbf{R}^n$ pour $n=1$, pour $L=-i\phi(-i\nabla)$, $\phi(\xi)=\xi^k$ avec k entier ≥ 2, on dispose de l'inégalité de Strichartz (3.19) avec $Y=L^q(\mathbf{R}^2)$ où $q=r_S=6$ pour $k=2$ et plus généralement $q=r_S=2(k+1)$ [KPV1]. Interpolant comme dans le corollaire 3.1 de façon à obtenir $Y^\theta = L^4$, *i.e.* avec $\theta=\frac{(k+1)}{2k}$, on obtient :

$$\|f\,;\,L^4(\mathbf{R}^2)\| \leq C\,\|f\,;\,X^{0,b}\| \tag{4.18}$$

pour $b > \frac{(k+1)}{4k}$. Le chemin précédent n'est pas praticable dans le cas périodique, faute de disposer de l'inégalité de Strichartz de départ avec $L^{2(k+1)}(\mathbf{T}^2)$. On peut néanmoins obtenir pour $k=2,3$ l'équivalent de (4.18) par une estimation directe, qui a l'avantage de regagner en outre le cas limite précédemment perdu dans la preuve du lemme 3.3 ([B1], proposition 2.6 et [B2], proposition 7.15).

PROPOSITION 4.3.— *Soit* $n=1$ *et* $\phi(\xi)=\xi^k$, $k=2$ *ou* 3. *Alors :*

$$\|f\,;\,L^4(\mathbf{T}^2)\| \leq C\,\|f\,;\,X^{0,b}\| \tag{4.19}$$

pour $b=\frac{(k+1)}{4k}$, *i.e.* $b=\frac{3}{8}$ *pour* $k=2$ *(équation de Schrödinger) et* $b=\frac{1}{3}$ *pour* $k=3$ *(équation d'Airy).*

Ces estimations seront utilisées plus loin pour traiter le problème de Cauchy pour les équations SNL et KdV respectivement.

5. LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR L'ÉQUATION SNL PÉRIODIQUE

On considère le problème de Cauchy pour l'équation SNL en se limitant principalement à une interaction f du type (1.2). Les résultats s'étendent à des f plus généraux sous des hypothèses convenables de régularité locale et de comportement à l'infini en puissance p. On commence par un cas simple où les résultats des Sections 3 et 4 donnent immédiatement le résultat [B1].

THÉORÈME 5.1.— *Soit $n = 1$ et $p = 3$. Alors le problème de Cauchy pour l'équation SNL* (1.1) (1.2) *avec donnée initiale dans $L^2(\mathbf{T})$ est localement bien posé dans $L^4(\mathbf{T} \times \mathbf{R})$ et dans $X^{0,b}$ pour $\frac{3}{8} \leq b < \frac{5}{8}$.*

Preuve : Il suffit de remarquer qu'après périodisation en t (voir Section 3)

$$\|f(u)\,;\, X^{0,-\frac{3}{8}}\| \leq C\,\|f(u)\,;\, L^{\frac{4}{3}}(\mathbf{T}^2)\| \leq C\,\|u\,;\, L^4(\mathbf{T}^2)\|^3 \leq C\,\|u\,;\, X^{0,\frac{3}{8}}\|^3 \tag{5.1}$$

et qu'une chaîne d'inégalités analogue vaut pour la différence $f(u_1) - f(u_2)$. Les troisième et première inégalités de (5.1) sont respectivement (4.19) et sa duale, et la seconde est triviale. Il est alors immédiat de résoudre (3.2) par contraction dans $L^4(\mathbf{T}^2)$ ou dans $X^{0,b}$ pour T assez petit, en utilisant les lemmes 3.1 et 3.2. □

On passe maintenant à une situation plus compliquée qui relève de la conjecture 4.1, *i.e.* de la proposition 4.2 avec une puissance non nulle de N. Cette puissance $\beta(q)$ signifie une perte de dérivée dans l'inégalité de Strichartz (voir (4.7) (4.8)), donc dans l'estimation de f qu'on en déduit par le lemme 3.3, et cette perte n'est pas rattrapée par le lemme 3.2 qui opère à s constant. La démonstration devient alors beaucoup plus difficile. Le résultat est le suivant ([B1], proposition 5.73 (essentiellement)).

THÉORÈME 5.2.— *Soit $n \geq 1$, $s > 0$ et $2 \leq p - 1 < \frac{4}{(n-2s)}$. On suppose de plus qu'il existe $q > p + 1$, $q > r_S$ pour lequel la conjecture* 4.1 *est vraie, et tel que $(p+1)\,\beta(q) < (p-1)\,s$. Alors le problème de Cauchy pour l'équation SNL* (1.1) (1.2) *avec donnée initiale dans H^s est bien posé dans $X^{s,\frac{1}{2}}$.*

Commentaires : La condition $p-1 < \frac{4}{(n-2s)}$ est celle qu'on attend par comparaison avec le cas de $\mathbf{R}^n$ (voir théorème (2.1)). La condition $p - 1 \geq 2$ sert à assurer une régularité suffisante de f et pourrait sans doute être remplacé par $f \in C^k$ pour k assez grand. Le besoin d'un q comme indiqué vient du fait qu'on utilise la conjecture 4.1 pour un tel q et qu'on estime une norme L^{p+1} en terme d'une norme L^q. La dernière restriction sur q et s se réduit à $s > 0$ si on dispose de la conjecture 4.1 pour tout $q > r_S$ car $\beta(r_S) = 0$, et à la borne précédente pour p dans le cas limite $q = p + 1$.

Esquisse de preuve : On applique comme précédemment une méthode de contraction à l'équation (3.2), et d'après les lemmes 3.1 et 3.2, il suffit d'estimer $f(u)$ dans $X^{s,b'}$ pour un $b' > -\frac{1}{2}$. Il est commode d'utiliser une décomposition dyadique en τ (voir Section 3), ce qui permet de se ramener à estimer la composante de $\widehat{f(u)}$ avec $\tau - \phi(\xi) \equiv \tau + \xi^2 = O(2^k)$. Fixant désormais k, on effectue en outre une décomposition dyadique en ξ. On illustre le principe de la méthode sur le cas $f(u) = u^3$. Le cas de (1.2) avec p entier impair se traite de la même façon, tandis que le cas général présente des difficultés techniques (partiellement traitées dans [B1]). Soit $B_j = \{\xi : |\xi| < 2^j\}$ et $C_j = B_{j+1} \backslash B_j$. On décompose $u = \sum u_j$ avec $\operatorname{Supp} \hat{u}_j \subset C_j$ et on pose $v_j = \sum_{j' \leq j} u_j$ si bien que $\operatorname{Supp} \hat{v}_j \subset B_{j+1}$. On peut alors décomposer :

$$f(u) = \sum_m f(v_m) - f(v_{m-1}) = \sum_{\ell \leq m} u_m w_\ell = \sum_\ell (u - v_{\ell-1})\, w_\ell, \tag{5.2}$$

avec :

$$w_\ell = u_\ell(v_\ell + v_{\ell-1}) + u_{\ell-1}(v_{\ell-1} + v_{\ell-2}) + v_{\ell-1}(u_\ell + u_{\ell-1})$$

et

$$\operatorname{Supp} \hat{w}_\ell \subset B_{\ell+2}.$$

Une propriété, essentielle ici, de l'équation de Schrödinger est que l'estimation de base (4.6) est invariante par translation de $\hat{u}$ en ξ, *i.e.* que la constante dépend en fait du diamètre de $\operatorname{Supp} \hat{u}$ mais non de sa position. On exploite cette propriété en décomposant $u - v_{\ell-1} = \sum u_\alpha$ où les supports des $\hat{u}_\alpha$ ont pour diamètre $2^{\ell+1}$ et sont presque disjoints, si bien que les u_α et les $u_\alpha w_\ell$ sont presque orthogonaux (à un facteur de recouvrement près ne dépendant que de la dimension). Soit $m(\alpha)$ l'exposant de la couronne qui contient le support de $\hat{u}_\alpha$ et $j(\alpha)$ celui de la couronne qui contient celui de $\widehat{u_\alpha w_\ell}$. On note que si $j(\alpha) \geq \ell$ ou $m(\alpha) \geq \ell$, alors $j(\alpha) \simeq m(\alpha)$. Pour estimer $f(u)$ dans H^s, on doit pour chaque (α, ℓ) estimer $2^{s\,j(\alpha)} \|u_\alpha w_\ell\|_2$ et, laissant pour plus tard la somme sur ℓ et utilisant la presque orthogonalité citée plus haut, estimer le résultat dans ℓ^2 de la variable α. On estime la norme précédente en utilisant l'inégalité duale de (4.6), l'inégalité de Hölder et l'inégalité (4.6) comme dans (5.1). Le point essentiel est que les facteurs qui apparaissent dans l'application de (4.6) et sa duale, grâce à la propriété d'invariance citée plus haut, sont $2^{\ell \beta(q)}$ et non pas $2^{m(\alpha)\,\beta(q)}$ ou $2^{j(\alpha)\,\beta(q)}$. Par suite, quand on estime la norme dans H^s en prenant la norme dans ℓ^2_α, le facteur $2^{s\,j(\alpha)} \sim 2^{s\,m(\alpha)}$ reconstitue (à ℓ fixé) la norme de u dans H^s et non dans un espace de Sobolev d'ordre supérieur, ce qui permet de rattraper la perte de dérivée citée plus haut. Il ne reste plus alors qu'à effectuer la somme sur ℓ et la somme sur k, qui convergent géométriquement dès qu'on dispose d'un peu de marge dans les exposants, ce qui est le cas avec les conditions d'inégalité strictes imposées aux paramètres p, s et q. $\square$.

Les théorèmes 5.1 et 5.2 résolvent le problème de Cauchy local en temps. Comme on l'a dit plus haut, l'extension à $\mathbf{R}$ entier des solutions ainsi obtenues repose sur les estimations a priori déduites des lois de conservation, et la situation dans le cas de $\mathbf{T}^n$ est très semblable à celle de $\mathbf{R}^n$. L'équation (1.1) (1.2) possède les mêmes lois de conservation, celle de la norme dans L^2_x et celle de l'énergie $E(u)$ encore donnée par (2.5). Ces lois contrôlent la norme dans H^1 dans les mêmes conditions que dans le cas de $\mathbf{R}^n$. En particulier, les solutions du théorème 5.1 sont prolongeables en solutions globales, et il en est de même de celles du théorème 5.2 correspondant au cas $s = 1$ si l'énergie contrôle la norme H^1.

On conclut cette section en citant brièvement quelques résultats complémentaires. Le premier [B3] a trait au problème de Cauchy pour (1.1) en dimension $n = 4$ pour f généralisant (1.2) avec $p = 2$ (*i.e.* $p + 1 = 3 = 2 + \frac{4}{n} = r_S$) et pour des données initiales $\varphi \in H^2$. L'espace X est toujours du type (3.3) avec pour H une variante de $H^{2,\frac{1}{2}}$, où dans la variable temps on remplace $H^{\frac{1}{2}}$ par l'espace de Birman-Solomjak (non comparable mais dimensionnellement équivalent à l'infini en τ) $\mathcal{F}(\ell^1(L^2))$, *i.e.* H est défini par la norme :

$$\|u\,;\,H\| = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \left\{ \int_{k\le\tau\le k+1} d\tau \sum_{\xi} (1 + |\xi| + \gamma\xi^2)^2\,|\hat{u}(\xi,\tau)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{5.4}$$

où $\gamma > 0$ est un paramètre qu'on ajuste en fonction des besoins. On obtient alors [B3] :

THÉORÈME 5.3.— *Soit* $n = 4$ *et* $f(u) = u\,g(|u|^2)$ *avec* $g \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^+,\mathbf{R})$ *et* $|g(s)| \le c\,s^{\frac{1}{2}}$, $|g'(s)| \le c\,s^{-\frac{1}{2}}$, $|g''(s)| \le c\,s^{-\frac{3}{2}}$. *Alors le problème de Cauchy pour l'équation SNL* (1.1) *avec donnée initiale* $\varphi \in H^2(\mathbf{T}^4)$ *est localement bien posé dans* X *défini par* (3.3) (5.4).

Les solutions ainsi obtenues se prolongent globalement si l'énergie contrôle la norme dans H^1, *en particulier si* $g \ge 0$ *ou si* $\|\varphi\|_2$ *est petit.*

La preuve du résultat local repose sur une méthode de contraction partielle dans X, dans laquelle on montre que le second membre de l'équation (3.2) laisse invariant un borné de X et y contracte une norme plus faible. La preuve est compliquée et utilise des décompositions dyadiques comme celle du théorème 5.2. La globalisation demande un argument supplémentaire pour contrôler la norme dans H^2. Cet argument utilise de façon essentielle le fait que, à $\|\varphi\,;\, H^1\|$ fixé, le temps de résolution locale dépend logarithmiquement de $\|\varphi\,;\, H^2\|$.

Enfin, les théorèmes 5.1 et 5.2 ont été utilisés pour construire des mesures de Gibbs sur l'espace des données initiales invariantes par le flot local défini par l'équation (1.1) et en déduire des résultats d'existence globale presque partout par rapport à ces mesures [B6,7].

6. LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR L'ÉQUATION KdV ET SES GÉNÉRALISATIONS

La méthode de Bourgain est conçue pour traiter le cas de l'équation KdV périodique, mais elle s'applique aussi bien au cas de l'équation dans $\mathbf{R}$, où elle améliore les résultats précédemment connus et permet de traiter des données initiales dans H^s pour certains s négatifs. Le résultat initial [B2] donnait $s \geq 0$. Il a été amélioré à $s > -\frac{1}{2}$ dans le cas périodique et successivement à $s > -\frac{5}{8}$ et $s > -\frac{3}{4}$ dans le cas de $\mathbf{R}$ [KPV3,4]. Les méthodes précédentes donnaient seulement $s > \frac{3}{4}$ dans le cas de $\mathbf{R}$ [KPV2]. On énonce directement le meilleur résultat et on esquisse les différentes variantes de preuve donnant accès aux différents cas.

THÉORÈME 6.1.— *Le problème de Cauchy pour l'équation KdV* (1.3) *dans* $\mathbf{T} \times \mathbf{R}$ *avec donnée initiale dans* $H^s(\mathbf{T})$ *est localement bien posé dans* $X^{s,\frac{1}{2}}$ *pour tout* $s > -\frac{1}{2}$. *Le problème de Cauchy pour l'équation KdV* (1.3) *dans* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ *avec donnée initiale dans* $H^s(\mathbf{R})$ *est localement bien posé dans* $X^{s,b}$ *pour tout* $s > -\frac{3}{4}$, *pour un* $b > \frac{1}{2}$ *(dépendant de* s *et assez voisin de* $\frac{1}{2}$*).*

Esquisse de preuve

1) *Arguments généraux*

Dans le cas de $\mathbf{R}$, par le lemme 3.2, il suffit de montrer que l'application $u \to f(u) = u\,\partial_x u$ est bornée de $X^{s,b}$ dans $X^{s,b'}$ pour un $b' > b-1$. Dans le cas périodique, il semble impossible d'éviter d'utiliser le couple $(X^{s,\frac{1}{2}}, X^{s,-\frac{1}{2}})$. On montre que f est bornée du premier dans le second, mais on doit aussi extraire de cette estimation le facteur de contraction, et on doit en outre estimer séparément l'intégrale venant de II dans (3.13) (voir les remarques 1) et 2) après le lemme 3.2). Par ailleurs, dans le cas périodique, grâce à la loi de conservation $\int u\,dx = const.$, on peut se ramener facilement au cas où $\hat{u}(\xi = 0) = 0$ pour tout t. On se limite ci-dessous à l'estimation de f de $X^{s,b}$ dans $X^{s,b'}$. La propriété de Lipschitz de f résulte immédiatement de cette estimation et du fait que f est quadratique en u. Par dualité et après un changement de fonction approprié pour éliminer les facteurs figurant dans les normes (3.9), on est ramené à établir une estimation du type :

$$J \equiv \int d\tau_1\, d\tau_2\, d\xi_1\, d\xi_2 \frac{\xi \hat{v}(1+2)\, \hat{v}_1(1)\, \hat{v}_2(2)\, \langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s \langle\xi_2\rangle^s \langle\sigma\rangle^c \langle\sigma_1\rangle^b \langle\sigma_2\rangle^b} \leq C\, \|v\|_2\, \|v_1\|_2\, \|v_2\|_2, \tag{6.1}$$

où $c = -b' \geq 0$, les arguments des $\hat{v}_{(i)}$ sont $1 = (\xi_1, \tau_1)$, $2 = (\xi_2, \tau_2)$ et $1 + 2 = (\xi = \xi_1 + \xi_2, \tau = \tau_1 + \tau_2)$ et $\sigma_{(i)} = \tau_{(i)} - \xi^3_{(i)}$.

Dans le cas périodique, les intégrales sont des sommes et les sommes sur ξ_1, ξ_2 sont restreintes à $\xi_1 \neq 0$, $\xi_2 \neq 0$, $\xi \neq 0$, si bien que $|\xi_1| \geq 1$, $|\xi_2| \geq 1$ et $|\xi| \geq 1$. Une information cruciale que la méthode permet d'injecter est le fait que :

$$\sigma - \sigma_1 - \sigma_2 = -\xi^3 + \xi_1^3 + \xi_2^3 = -3\,\xi\,\xi_1\,\xi_2, \tag{6.2}$$

si bien que :

$$\mathrm{Max}(|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|) \geq |\xi\,\xi_1\,\xi_2|. \tag{6.3}$$

Le $\sigma_{(i)}$ de module maximum sera dit dominant. Par ailleurs :

$$1 + |\xi| \leq (1 + |\xi_1|)(1 + |\xi_2|),$$

donc J est monotone décroissante en s et la difficulté est de descendre s.

2) *Méthode originale* [B2] [KPV3]

Cette méthode donne $s \geq 0$ dans le cas périodique et $s > -\frac{5}{8}$ dans le cas de $\mathbf{R}$. On estime séparément les contributions des régions σ dominant et σ_1 (ou σ_2) dominant. On se limite ici au cas σ dominant, et dans le cas de $\mathbf{R}$, à la région la plus dangereuse $|\xi_1| \geq 1$, $|\xi_2| \geq 1$ (cette condition est automatique dans le cas périodique).

Dans le cas périodique, on minore par (6.3) :

$$\langle\sigma\rangle^c = \langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}} \geq |\xi\,\xi_1\,\xi_2|^{\frac{1}{2}} \geq \frac{|\xi|}{\sqrt{2}}, \tag{6.4}$$

si bien que, pour $s = 0$:

$$\begin{aligned} |J| &\leq C\,\|v\|_2 \prod_{i=1,2} \|\mathcal{F}^*(\hat{v}_i\,\langle\sigma\rangle^{-\frac{1}{2}})\|_4 \\ &\leq C\,\|v\|_2\,\|v_1\|_2\,\|v_2\|_2, \end{aligned} \tag{6.5}$$

en appliquant l'inégalité de Hölder en (x,t) ou de Young en (ξ,τ), puis la proposition 4.3 avec $k = 3$, $b = \frac{1}{3}$ et $f = \mathcal{F}^*(\hat{v}_i\,\langle\sigma\rangle^{-\frac{1}{2}})$. De plus un argument supplémentaire simple permet d'exploiter la marge de $\frac{1}{6}$ sur b pour extraire un facteur de contraction T^θ avec $\theta > 0$.

Dans le cas de $\mathbf{R}$, dans la région σ dominant, $|\xi_1| \geq 1$, $|\xi_2| \geq 1$, on élimine $\langle\sigma\rangle^c$ en dénominateur dans J par (6.3) et pour $s \leq c-1$, on estime comme plus haut par Hölder et/ou Young :

$$J \leq C\,\|v\|_2 \prod_{i=1,2} \|\mathcal{F}^*(\hat{v}_i\,\langle\xi\rangle^{-(s+c)}\,\langle\sigma\rangle^{-b})\|_4^2 \tag{6.6}$$

et on conclut en exploitant, au moyen du lemme 3.3 et du corollaire 3.1 les inégalités dites de lissage local de l'équation d'Airy [KPV1], qui sont des inégalités du type (3.19) avec :

$$\|f\,;\,Y\| = \|\,|\partial_x|^{1-\frac{5\alpha}{2}}\,f\,;\,L_x^q(L_t^r)\| \tag{6.7}$$

et $0 \leq \frac{2}{q} = \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2}$. Un choix approprié des paramètres r dans (6.7) et θ dans (3.19) conduit directement à la condition $s > -\frac{5}{8}$ pour un $b > \frac{1}{2}$.

3) *Méthode modifiée* [KPV4]

Cette méthode est une estimation directe élémentaire de J dont on donne le principe dans le cas de $\mathbf{R}$ et dans la même région, σ dominant, $|\xi_1| \geq 1$ et $|\xi_2| \geq 1$. Avec $\zeta_1 = (\xi_1,\tau_1)$, $\zeta_2 = (\xi_2,\tau_2)$, $\zeta = (\xi,\tau)$, l'intégrale à estimer est de la forme :

$$J = \int d\zeta_1\;d\zeta_2\;\widehat{v}(\zeta)\;\widehat{v}_1(\zeta_1)\;\widehat{v}_2(\zeta_2)\;K(\zeta_1,\zeta_2).$$

Appliquant l'inégalité de Schwarz à l'ensemble des variables, on obtient :

$$(6.8)\qquad \begin{aligned} |J| &\leq \|v_1\|_2\ \|v_2\|_2 \left\{\int d\zeta_1\ d\zeta_2\ |K(\zeta_1,\zeta_2)\,\widehat{v}(\zeta)|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|v_1\|_2\ \|v_2\|_2\ \|v\|_2 \left\{\operatorname*{Sup}_{\zeta}\int d\zeta_2\ \ |K(\zeta-\zeta_2\,,\,\zeta_2)|^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On reporte l'expression de K, on estime l'intégrale sur τ_2 à ξ, ξ_2, τ fixés de façon élémentaire, on prend comme variable d'intégration $z = -\xi\,\xi_1\,\xi_2$, et on obtient, en tenant compte de (6.3) :

$$(6.9)\qquad \begin{aligned} |J| \leq C \operatorname*{Sup}_{\xi,\sigma}\langle\xi\rangle^s\langle\sigma\rangle^{-c}&\left\{\int_{|z|\leq\sigma} dz\left|\frac{dz}{d\xi_2}\right|_{\xi}^{-1}\langle\sigma-3z\rangle^{-2b}\langle\xi_1\rangle^{-2s}\langle\xi_2\rangle^{-2s}\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\times \|v\|_2\,\|v_1\|_2\,\|v_2\|_2, \end{aligned}$$

où $\left(\frac{dz}{d\xi_2}\right)_{\xi} = \xi(\xi_2-\xi_1)$ à ξ fixé et ξ_1 et ξ_2 sont considérés comme fonctions de ξ et z. Il ne reste plus qu'à estimer une intégrale complètement explicite. Cette estimation (et celle de l'intégrale analogue venant de la région σ_1 (ou σ_2) dominant) conduit à la condition $s > -\frac{3}{4}$ dans le cas de $\mathbf{R}$.

La méthode dans le cas périodique est analogue et donne la condition $s > -\frac{1}{2}$.
□

Comme dans le cas de l'équation SNL, le passage du local au global en temps s'effectue en utilisant les estimations a priori résultant des lois de conservation. Pour l'équation KdV, la norme de u dans L_x^2 est conservée, et le problème de Cauchy est donc globalement bien posé pour des données dans L_2.

On conclut cette section en citant brièvement quelques résultats relatifs à l'équation [KdVG] (1.4) périodique ([B2], Sec. 8 et [B5]) et à l'équation KP [B4].

Dans le cas le plus simple de l'équation (1.4) avec $f(u) = u^3$ (équation KdV "modifiée"), le problème de Cauchy périodique est localement bien posé pour des données initiales dans H^s avec $s \geq \frac{1}{2}$ et globalement bien posé pour $s \geq 1$, grâce à la conservation de l'énergie qui contrôle la norme dans H^1. Le problème local se résoud par contraction dans un espace voisin de $X^{s,\frac{1}{2}}$, après une réduction du problème au cas où $\hat{u}(\xi = 0) = 0$ pour tout t, permise par la conservation de la norme dans L^2. L'estimation fondamentale qui remplace (6.1) comporte maintenant quatre fonctions au lieu de trois, et l'identité (6.2) est remplacée avec des notations évidentes par :

$$(6.10)\qquad \sigma-\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3 = -\xi^3+\xi_1^3+\xi_2^3+\xi_3^3 = -3(\xi_1+\xi_2)(\xi_2+\xi_3)(\xi_3+\xi_1)$$

donnant encore une minoration du σ dominant si les trois derniers facteurs sont non nuls.

Dans le cas plus général où $f(u)$ est une puissance $f(u) = u^k$, $k > 2$, ou plus généralement une fonction régulière de u, le problème est plus difficile. On ne peut plus se ramener de façon simple au cas où $\hat{u}(\xi = 0) = 0$. On perd le bénéfice de la méthode de contraction et on doit utiliser le théorème de point fixe de Schauder qui donne un résultat d'existence sans unicité pour des données initiales dans H^s avec $s \geq 1$. On retrouve ensuite un résultat d'unicité (donc un problème localement bien posé) pour $s > \frac{3}{2}$ par un argument élémentaire bien connu dans le cas de $\mathbf{R}$, et qui s'applique verbatim dans le cas périodique. Les estimations sont beaucoup plus difficiles et l'espace de résolution locale est taillé sur mesure pour les exploiter.

On considère enfin le cas de l'équation KP (1.5). On note $(x, y) \in \mathbf{T}^2$ ou $\mathbf{R}^2$ les variables d'espace, en accord avec (1.5), et $(\xi, \eta) \in \mathbf{Z}^2$ ou $\mathbf{R}^2$ les variables conjuguées de Fourier. Dans le cas périodique et comme pour l'équation KdV, on se ramène facilement au cas où $\hat{u}(\xi = 0, \eta) = 0$ pour tout η et tout t, si bien que pour u périodique, v est également périodique. L'équation linéaire sous-jacente correspond à $\phi(\xi, \eta) = \xi^3 - \varepsilon \frac{\eta^2}{\xi}$. L'espace de résolution locale est une variante $\widetilde{X}^{s,\frac{1}{2}}$ de $X^{s,\frac{1}{2}}$ définie (*cf.* (3.3)) par :

$$\|u\,;\, \widetilde{X}^{s,\frac{1}{2}}\| = \|U(-\cdot)\,u\,;\, \widetilde{H}^{s,\frac{1}{2}}\|,$$

$$\|u\,;\, \widetilde{H}^{s,\frac{1}{2}}\|^2 = \int d\xi\, d\eta\, d\tau\, \langle |\xi| + |\eta| \rangle^{2s} (\mu + |\tau|) \left(1 + \frac{|\tau|}{\mu + |\xi|^3}\right)^{\frac{1}{2}} |\hat{u}(\xi, \eta, \tau)|^2, \tag{6.11}$$

où μ est un paramètre, $\mu = 0(T^{-1})$ et les intégrales deviennent des sommes avec $\xi \neq 0$ dans le cas périodique. Le résultat est le suivant [B4].

THÉORÈME 6.2.— *Le problème de Cauchy pour l'équation KPII ($\varepsilon = +1$) dans $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$) est globalement bien posé dans $\widetilde{X}^{s,\frac{1}{2}}$ pour des données initiales dans $H^s(\mathbf{T}^2)$ (resp. $H^s(\mathbf{R}^2)$) pour $s \geq 0$.*

La preuve suit le schéma général de celle adaptée à l'équation KdV. Les estimations linéaires sont à reprendre en s'inspirant du lemme 3.2 et des remarques qui le suivent. L'estimation non-linéaire porte sur une intégrale analogue à (6.1) avec des facteurs supplémentaires venant de la définition (6.11) de la norme. La relation (6.2) est remplacée par :

$$\begin{aligned} \sigma - \sigma_1 - \sigma_2 &= -\phi(\xi, \eta) + \phi(\xi_1, \eta_1) + \phi(\xi_2, \eta_2) \\ &= -3\,\xi\,\xi_1\,\xi_2 - \varepsilon(\xi\,\xi_1\,\xi_2)^{-1}(\xi_1\,\eta_2 - \xi_2\,\eta_1)^2 \end{aligned} \tag{6.12}$$

qui n'a de bonnes propriétés de signe et ne fournit des minorations utiles du σ dominant que pour $\varepsilon = +1$ (équation KPII), ce qui restreint à ce cas l'application de la méthode. Les estimations utilisent en outre des décomposition dyadiques en ξ et τ (mais non en η) dans le même esprit que pour l'équation SNL (théorème 5.2). La globalisation pour $s = 0$ résulte de la conservation de la norme L^2 et, pour $s > 0$, utilise en outre une estimation linéaire de la norme supplémentaire requise.

BIBLIOGRAPHIE

[B1] J. BOURGAIN - *Fourier restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations* I, *Schrödinger equations*, Geom. and Funct. Anal. **3** (1993), 107-156.

[B2] J. BOURGAIN - Id. II, *The KdV equations*, Ibid. **3** (1993), 209-262.

[B3] J. BOURGAIN - *Exponential sums and nonlinear Schrödinger equations*, Ibid. **3** (1993), 157-178.

[B4] J. BOURGAIN - *On the Cauchy problem for the Kadomtsev-Petviashvili equation*, Ibid. **3** (1993), 315-341.

[B5] J. BOURGAIN - *On the Cauchy problem for periodic KdV type equations*, prétirage IHES (1994).

[B6] J. BOURGAIN - *Periodic nonlinear Schrödinger equation and invariant measures*, Commun. Math. Phys. **166** (1994), 1-26.

[B7] J. BOURGAIN - *Invariant measures for the 2D-defocusing nonlinear Schrödinger equation*, prétirage IHES (1994).

[B8] J. BOURGAIN - *On the long time behaviour of nonlinear Hamiltonian equations*, prétirage IHES (1994).

[C] T. CAZENAVE - *An introduction to nonlinear Schrödinger equations*, Text. Met. Mat. **22**, Inst. Mat., Rio de Janeiro (1989).

[CW] T. CAZENAVE and F. WEISSLER - *The Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation in H^s*, Nonlinear Anal. TMA **14** (1990), 807-836.

[GV] J. GINIBRE and G. VELO - *Smoothing properties and retarded estimates for some dispersive evolution equations*, Commun. Math. Phys. **144** (1992), 163-188.

[G] E. GROSSWALD - *Representation of integers as sums of squares*, Springer, Berlin (1985).

[K] T. KATO - *On nonlinear Schrödinger equations*, Ann. IHP (Phys. Théor.) **46** (1987), 113-129.

[KPV1] C. KENIG, G. PONCE and L. VEGA - *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations*, Indiana U. Math. J. **40** (1991), 33-69.

[KPV2] C. KENIG, G. PONCE and L. VEGA - *Well posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 527-620.

[KPV3] C. KENIG, G. PONCE and L. VEGA - *The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices*, Duke Math. J. **71** (1993), 1-21.

[KPV4] C. KENIG, G. PONCE and L. VEGA - *A bilinear estimate with applications to the KdV equation*, prétirage (1994).

[KM] S. KLAINERMAN and M. MACHEDON - *Smoothing estimates for null forms and applications*, prétirage (1994).

[S] R. STRICHARTZ - *Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations*, Duke Math. J. **44** (1977), 705-714.

[Y] K. YAJIMA - *Existence of solutions for Schrödinger evolution equations*, Commun. Math. Phys. **110** (1987), 415-426.

[Z] A. ZYGMUND - *On Fourier coefficients and transforms of functions of two variables*, Studia Math. **50** (1974), 189-201.

Jean GINIBRE

Université de Paris XI
Département de Physique
Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies
URA 063 du CNRS
Bâtiment 211
F-91405 ORSAY CEDEX