Astérisque

ADRIEN DOUADY

Prolongement de mouvements holomorphes

Astérisque, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki, exp. nº 775, p. 7-20

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__7_0>

Séminaire BOURBAKI
46ème année, 1993-94, n° 775

Novembre 1993

PROLONGEMENT DE MOUVEMENTS HOLOMORPHES [d'après Słodkowski et autres]

par **Adrien DOUADY**

INTRODUCTION

Si Λ, X et Y sont trois ensembles, une application $\phi : \Lambda \times X \to \Lambda \times Y$ *au-dessus de* Λ est une application telle que $p_Y \circ \phi = p_X$, où $p_X : \Lambda \times X \to \Lambda$ et $p_Y : \Lambda \times Y \to \Lambda$ sont les projections. Nous l'écrivons $(\lambda, x) \mapsto (\lambda, \phi_\lambda(x)) = (\lambda, \phi^x(\lambda))$. Soient Λ une variété $\mathbf{C}$-analytique connexe munie d'un point de base λ_0 et X une partie de $\overline{\mathbf{C}}$. Un *mouvement holomorphe* de X paramétré par Λ est une application $\phi : \Lambda \times X \to \Lambda \times \overline{\mathbf{C}}$ telle que :

(i) $\phi_{\lambda_0} : X \to \mathbf{C}$ est l'injection canonique ;

(ii) ϕ est injective (*i.e.* $\forall\lambda$, ϕ_λ est injective) ;

(iii) $(\forall x \in X)$, $\phi^x : \Lambda \to \overline{\mathbf{C}}$ est $\mathbf{C}$-analytique.

On ne suppose pas X fermé. On ne suppose pas non plus ϕ continue, mais nous allons voir que c'est automatique ("λ-lemma" de Mañe-Sad-Sullivan, § 1).

On dit que ϕ est normalisé si 0, 1, ∞ appartiennent à X et sont des points fixes de ϕ_λ pour tout λ. Soit ϕ un mouvement holomorphe quelconque de X (avec $\# X \geq 3$). Choisissons 3 points distincts a, b, c de X et pour tout λ, notons g_λ la transformation de Mœbius qui envoie $(\phi_\lambda(a), \phi_\lambda(b), \phi_\lambda(c))$ en $(0, 1, \infty)$. Alors, $(g_\lambda \circ \phi_\lambda \circ g_{\lambda_0}^{-1})_{\lambda \in \Lambda}$ est un mouvement holomorphe de $\phi_{\lambda_0}(X)$ qu'on appelle le *normalisé* de ϕ (à partir de (a, b, c)). Pour la plupart des questions concernant les mouvements holomorphes, on peut se restreindre à ceux qui sont normalisés.

Question : *Peut-on toujours prolonger un mouvement holomorphe ϕ de X en un mouvement holomorphe de $\overline{\mathbf{C}}$?* :

La réponse est *non* en général, mais *oui* si Λ est le disque unité $\mathbf{D}$: c'est le

Théorème de Słodkowski.

Nous donnons ici (§ 3 à 7) une démonstration de ce théorème qui suit l'idée de la démonstration originale de Słodkowski, mais la présentation est différente.

Nous indiquons ensuite deux contre-exemples, un avec $\# X = 4$, $\Lambda = M_{0,4} = \mathbf{C} - \{0, 1\}$ (§ 9), un autre dû à Hubbard avec $\# X = 5$, $\Lambda = T_{0,5}$ (espace de Teichmüller), pour montrer qu'on ne sauve pas la situation en supposant Λ simplement connexe (§ 10). Ce résultat n'est pas explicitement dans la thèse de Hubbard. Il s'agit d'une variante établie par Earle et Kra lors d'une réécriture.

Mentionnons un résultat de Bers-Royden pour Λ de dimension quelconque :

THÉORÈME.— *Si Λ est la boule-unité ouverte d'un espace normé E sur $\mathbf{C}$, pour tout mouvement holomorphe ϕ de $X \subset \overline{\mathbf{C}}$ paramétré par Λ, on peut trouver un mouvement de $\overline{\mathbf{C}}$ paramétré par la boule de rayon $\frac{1}{3}$ qui coïncide avec ϕ là où ils sont tous deux définis.*

Sullivan-Thurston ont obtenu indépendamment un résultat un peu moins précis. Bers et Royden ont écrit la démonstration dans le cas $\Lambda = \mathbf{D}$ (aujourd'hui périmé par le résultat de Słodkowski), mais leur démonstration s'étend au cas d'un espace vectoriel normé E quelconque, de dimension finie ou banachique.

Nous tenons à remercier Marguerite Flexor et Bodil Branner pour leur participation à la rédaction de cet exposé.

1. PROLONGEMENT A LA FERMETURE

THÉORÈME 1 ("Λ-lemma" de Mañe-Sad-Sullivan).— *Soit $\phi : \Lambda \times X \to \Lambda \times \overline{\mathbf{C}}$ un mouvement holomorphe d'une partie X de $\overline{\mathbf{C}}$. Alors, ϕ est continue et se prolonge en une application continue $\widehat{\phi} : \Lambda \times \overline{X} \to \Lambda \times \overline{\mathbf{C}}$ qui est un mouvement holomorphe de la fermeture $\overline{X}$ de X.*

Lemme.— Soit x un point de $\overline{X}$ et (x_n) une suite de points de X tendant vers x. Les fonctions $\phi^{x_n} : \Lambda \to \overline{\mathbf{C}}$ tendent, uniformément sur tout compact de Λ, vers une fonction $\widehat{\phi}^x : \Lambda \to \overline{\mathbf{C}}$, indépendante de la suite (x_n) choisie.

Démonstration.— On peut supposer ϕ normalisé et $x \neq \infty$. Les fonctions ϕ^{x_n} évitent $\{0, 1, \infty\}$ ou sont constantes. Elles forment donc une famille normale, et on peut en extraire une suite ayant une limite f. Si (x_n) et (y_n) sont deux suites tendant vers x telles que ϕ^{x_n} et ϕ^{y_n} aient des limites f et g, la fonction $\phi^{y_n} - \phi^{x_n}$ tend vers $g - f$, mais elle est à valeurs dans $\mathbf{C}^*$ ou identiquement nulle, et il en est de même de $g - f$. Comme $g(\lambda_0) = f(\lambda_0) = x$, on a $g = f$. Le lemme en résulte.

cqfd.

Démonstration du théorème.— Pour $x \in X$, on a $\widehat{\phi}^x = \phi^x$. On peut en effet prendre $x_n = x$ pour tout n. Il résulte du lemme que ϕ est continue. L'application $\widehat{\phi} : (\lambda, x) \mapsto (\lambda, \widehat{\phi}(\lambda))$ est injective. En effet, pour $x \neq y$, si (x_n) et (y_n) tendent vers x et y respectivement, $\phi^{y_n} - \phi^{x_n}$ ne s'annule pas, donc $\widehat{\phi}^y - \widehat{\phi}^x$ ne s'annule pas ou est identiquement 0. Comme elle ne s'annule pas en λ_0, elle ne s'annule nulle part. Par suite, $\widehat{\phi}$ est un mouvement holomorphe de $\overline{X}$, et il résulte du lemme appliqué à $\widehat{\phi}$ que $\widehat{\phi}$ est continue.

cqfd.

Mañe, Sad et Sullivan ont également établi que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'application $\widehat{\phi}_\lambda$ se prolonge en une application quasi-conforme $\overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$. Nous obtiendrons ce résultat au § 8 comme conséquence du théorème de Słodkowski.

2. MOUVEMENT HOLOMORPHE DES ENSEMBLES DE JULIA

Nous donnons à titre d'application le résultat pour lequel le théorème 1 a été démontré par Mañe-Sad-Sullivan. Si $f : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ est une fraction rationnelle, l'*ensemble de Julia* $J(f)$ est la fermeture de l'ensemble des points périodiques répulsifs.

COROLLAIRE DU THÉORÈME 1.— *Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille $\mathbf{C}$-analytique d'applications rationnelles paramétrée par une variété $\mathbf{C}$-analytique Λ. Soit S la fermeture de l'ensemble des $\lambda \in \Lambda$ tels que f_λ admette un cycle indifférent et soit U une composante connexe de $\Lambda - S$. Alors pour λ_0 et λ_1 dans U, les ensembles de Julia $J(f_{\lambda_0})$ et $J(f_{\lambda_1})$ sont homéomorphes.*

Démonstration.— Soit Λ' un ouvert simplement connexe de u contenant λ_0 et λ_1. Pour tout k, notons $\mathcal{X}_k$ l'ensemble des $(\lambda, z) \in \Lambda' \times \overline{\mathbf{C}}$ tels que $f_\lambda^k(z) = z$. Un tel point z est toujours racine simple de l'équation $f^k(z) - z = 0$, car sinon on aurait $(f^k)'(z) = 1$ et f admettrait un cycle indifférent. Par suite, $\mathcal{X}_k$ est un revêtement de Λ'. Comme Λ' est simplement connexe, ce revêtement est trivial et définit un mouvement holomorphe de $X_k = \mathcal{X}_k(\lambda_0)$. L'ensemble $\mathcal{X}_k^*$ des $(\lambda, z) \in \mathcal{X}_k$ avec z répulsif est un sous-revêtement (puisque les points périodiques indifférents sont interdits), d'où un mouvement holomorphe de $X_k^* = \mathcal{X}_k^*(\lambda_0)$. En prenant la réunion sur tous les k, on obtient un mouvement holomorphe $\phi : \Lambda' \times X^* \to \Lambda' \times \overline{\mathbf{C}}$ de l'ensemble des points périodiques répulsifs tel que $\phi_\lambda(X^*)$ soit l'ensemble des points périodiques répulsifs de f_λ. D'après le théorème 1, ϕ se prolonge en un mouvement holomorphe $\widehat{\phi} : \Lambda' \times J(f_{\lambda_0}) \to \Lambda' \times \overline{\mathbf{C}}$ de l'ensemble de Julia f_{λ_0} tel que $\widehat{\phi}_\lambda(J(f_{\lambda_0})) = J(f_\lambda)$ pour $\lambda \in \Lambda$. En échangeant les rôles de λ_0 et λ, on voit que $\widehat{\phi}_\lambda$ est un homéomorphisme.

cqfd.

Remarques : 1) L'homéomorphisme $\widehat{\phi}_{\lambda_1} : J(f_{\lambda_0}) \to J(f_{\lambda_1})$ est compatible avec la dynamique, autrement dit il conjugue $f_{\lambda_0} : J(f_{\lambda_0}) \to J(f_{\lambda_0})$ à $f_{\lambda_1} : J(f_{\lambda_1}) \to J(f_{\lambda_1})$. En outre, d'après la Prop. 5 du § 8, il se prolonge en un homéomorphisme quasi-conforme de $\overline{\mathbf{C}}$ sur lui-même (qu'on ne peut peut-être pas choisir compatible avec la dynamique).

2) Mañe, Sad et Sullivan considèrent également le cas où il y aurait des points périodiques indifférents persistants. On obtient un résultat un peu meilleur en prenant pour S la fermeture de l'ensemble des λ pour lesquels f_λ admet un cycle indifférent *non persistant.*

2. THÉORÈME DE SŁODKOWSKI ET VARIANTES

$\mathbf{D}$ désigne le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$, muni de 0 comme point de base, $\mathbf{D}_r$ (resp. $\overline{\mathbf{D}}_r$) est le disque ouvert (resp. fermé) de rayon r.

THÉORÈME 2 (Słodkowski).— *Soit X une partie de $\overline{\mathbf{C}}$. Tout mouvement holomorphe de X paramétré par $\mathbf{D}$ admet un prolongement en un mouvement holomorphe de $\overline{\mathbf{C}}$ paramétré par $\mathbf{D}$.*

Nous allons établir au § 7 une variante, finie et avec un peu de perte, du Th. 2.

THÉORÈME 2'.— *Soit X une partie finie de $\overline{\mathbf{C}}$ contenant $\{0,\infty\}$ et $\phi : \mathbf{D}_r \times X \to \mathbf{D}_r \times \overline{\mathbf{C}}$ un mouvement holomorphe de X paramétré par $\mathbf{D}_r$ avec $r > 1$, coïncidant avec l'identité sur $\mathbf{D}_r \times \{0,\infty\}$. Il existe alors un mouvement holomorphe $\widehat{\phi} : \mathbf{D}\times\overline{\mathbf{C}} \to \mathbf{D}\times\overline{\mathbf{C}}$ de $\overline{\mathbf{C}}$ paramétré par $\mathbf{D}$, qui coïncide avec ϕ sur $\mathbf{D}\times X$, et qui est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty_{\mathbf{R}}$.*

Démonstration du Th. 2 à partir du Th. 2'.— Soient X une partie quelconque de $\overline{\mathbf{C}}$ et $\phi : \mathbf{D} \times X \to \mathbf{D} \times \overline{\mathbf{C}}$ un mouvement holomorphe de X, que nous supposons normalisé. Soient (X_n) une suite croissante de parties finies de X telles que $X_\infty = \cup X_n$ soit dense dans X, et Y un ensemble dénombrable dense dans $\overline{\mathbf{C}}$ contenant X_∞. On suppose $X_0 \supset \{0,1,\infty\}$. Soit (ρ_n) une suite tendant vers 1, avec $\rho_n < 1$ pour tout n.

Par le Th. 2', on peut trouver pour chaque n un mouvement holomorphe $\widehat{\phi}_n$ de $\overline{\mathbf{C}}$ paramétré par D_{ρ_n}, coïncidant avec ϕ sur $\mathbf{D}_{\rho_n} \times X_n$. Pour $y \in Y$, les fonctions $\widehat{\phi}^y_n : \mathbf{D}_{\rho_n} \to \overline{\mathbf{C}}$ forment une famille normale. Par un procédé diagonal, on peut trouver une suite (n_k) telle que $\widehat{\phi}^y_{n_k}$ converge vers une fonction $\widehat{\phi}^y : \mathbf{D} \to \overline{\mathbf{C}}$ pour tout $y \in Y$. On définit ainsi un mouvement holomorphe $\widehat{\phi}$ de Y paramétré par $\mathbf{D}$. Pour $y \in X_\infty$, on a $\widehat{\phi}^y_n = \phi^y|\mathbf{D}_{\rho_n}$ pour n assez grand, donc $\widehat{\phi}^y = \phi^y$. En vertu du Th. 1, $\widehat{\phi}$ se prolonge en un mouvement holomorphe, que nous notons encore $\widehat{\phi}$, de $\overline{\mathbf{C}}$ paramétré par Λ, et $\widehat{\phi} = \phi$ sur X.

cqfd.

4. TRIVIALITÉ $\mathcal{C}^\infty$

Nous commençons la démonstration du Th. 2', qui sera achevée au § 7. Nous nous plaçons donc dans les hypothèses et avec les notations de ce théorème. Nous supposons en outre ϕ normalisé.

PROPOSITION 1.— *On peut trouver un difféomorphisme $F : \mathbf{D}_r\times\overline{\mathbf{C}} \to \mathbf{D}_r\times\overline{\mathbf{C}}$ de classe $\mathcal{C}^\infty_{\mathbf{R}}$ au-dessus de $\mathbf{D}_r$, coïncidant avec l'identité au voisinage de $\mathbf{D}_r \times \{0,\infty\}$, tel que $F \circ \phi : \mathbf{D}_r \times X \to \mathbf{D}_r \times \overline{\mathbf{C}}$ soit l'injection canonique.*

Démonstration.— Grâce à une partition de l'unité, construisons $f_1 : \mathbf{D}_r \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f_1(0,z) = z$ pour $z \in \mathbf{C}$, et $f_1(\phi(\lambda,x)) = x$ pour

$(\lambda, x) \in \mathbf{D}_r \times X$, $f_1(\lambda, z) = z$ sur un voisinage de $\mathbf{D}_r \times \{0, \infty\}$. Posons $F_1(s, z) = ((\lambda, f_1(\lambda, z))$. On a $F_1 \circ \phi = r$ sur $\mathbf{D}_r \times X$. Il existe $r_1 > 0$ tel que F_1 induise un difféomorphisme de $\mathbf{D}_{r_1} \times \mathbf{C}$ sur lui-même.

Soit ξ_0 le champ de vecteurs sur $\mathbf{D}_{r_1} \times \mathbf{C}$ défini par $\xi(\lambda, z) = (-\lambda, 0)$, soit ξ_1 le champ image directe de ξ_0 par F_1 sur $\mathbf{D}_{r_1} \times \mathbf{C}$, et construisons un champ de vecteurs ξ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{D}_r \times \mathbf{C}$ coïncidant avec ξ_1 sur $\mathbf{D}_{r_1} \times \mathbf{C}$ et avec ξ_0 au voisinage de $\mathbf{D}_r \times \{0, \infty\}$, et tangent à $\phi(\mathbf{D}_r \times X)$. Définissons $f : \mathbf{D}_r \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ par $f(\lambda, x) = f_1(\exp t\xi(\lambda, z))$ pour t grand. L'application $F(\lambda, z) \mapsto (\lambda, f(\lambda, z))$ répond à la question.

cqfd.

Pour la suite de la démonstration du Th. 2', nous fixons un tel difféomorphisme F. Nous définissons le *F-rayon* passant par un point (λ, z) de $\Lambda \times \mathbf{C}^*$ comme l'image réciproque par F du rayon $\{\lambda, e^t F_\lambda(z)\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ passant par $F(\lambda, z)$, et le *F-argument* de (λ, z) comme $\mathrm{Arg}(F_\lambda(z))$.

5. UN ESPACE DE SOBOLEV

Nous aimerions définir une loi d'évolution sur l'espace $\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ des fonctions holomorphes au voisinage de $\overline{\mathbf{D}}$. Pour cela, il faut résoudre une équation differentielle, mais l'espace $\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ n'est pas un espace de Banach et cela mène à des difficultés. Nous allons donc le remplacer par un espace de Banach, et même de Hilbert.

Pour $s \geq 1$, notons $\mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ l'espace des fonctions $f : z \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n\, z_n$ telles que $(n^s\, a_n) \in \ell^2(\mathbf{C})$. C'est un espace de Hilbert. Les fonctions de $\mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ sont de classe $\mathcal{C}^{[s]-1}$ sur $\overline{\mathbf{D}}$ et holomorphes sur $\mathbf{D}$. L'espace $\mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ est stable par Log des fonctions ne s'annulant pas sur $\overline{\mathbf{D}}$, et par exp.

Notons $\mathcal{H}^s(S^1; \mathbf{R})$ l'espace des fonctions $u : S^1 \to \mathbf{R}$ de la forme $z \mapsto \sum_{n \geq \mathbf{Z}} a_n\, z_n$ avec $(n^s\, a_n) \in \ell^2(\mathbf{Z}; \mathbf{C})$, $a_{-n} = \overline{a}_n$. On pose $\mathcal{H}^s(S^1; \mathbf{C}) = \{u + iv \,|\, u, v \in \mathcal{H}^s(S^1; \mathbf{R})\}$. Pour $f \in \mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$, on a $f_{|S^1} \in \mathcal{H}^s(S^1; \mathbf{C})$, et pour $u \in \mathcal{H}^s(S^1; \mathbf{R})$, on obtient une fonction $u + iv \in \mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ en prolongeant u par une fonction harmonique et en prenant pour v une fonction harmonique conjuguée.

Soient $s \geq 1$ et $u \in \mathcal{H}^s(S^1; \mathbf{R})$. Pour $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, on a $\phi \circ u \in \mathcal{H}^s(S^1; \mathbf{R})$. Si Σ est une variété et $\phi : \Sigma \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$, l'application $\sigma \mapsto \phi_\sigma \circ u$ de Σ dans $\mathcal{H}^s(S^1;\mathbf{R})$ est $\mathcal{C}^\infty$.

Nous utiliserons la propriété suivante :

PROPOSITION 2.— *Soit* $u \in \mathcal{H}^s(S^1;\mathbf{C})$ *une fonction ne s'annulant pas et admettant un prolongement continu* $\overline{\mathbf{D}} \to \mathbf{C}^*$. *Il existe alors une fonction* $v \in \mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ *unique, telle que* $v(z)/u(z) \in \mathbf{R}_+^*$ *pour* $|z| = 1$ *et* $v(1) = u(1)$. *La fonction* v *ne s'annule pas sur* $\overline{\mathbf{D}}$. *L'application* $u \mapsto v$ *est une application* $\mathcal{C}^\infty_{\mathbf{R}}$ *d'un ouvert de* $\mathcal{H}^s(S^1;\mathbf{C})$ *dans* $\mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$.

Démonstration.— Le nombre complexe $u(z)$ fait 0 tour autour de 0 quand z parcourt S^1. Si v répond à la question, il en est de même de $v(z)$ et v ne s'annule pas sur $\overline{\mathbf{D}}$.

Mettons u sous forme $e^{U_1+iU_2}$. On a U_1 et U_2 dans $\mathcal{H}^s(S^1;\mathbf{R})$. On obtient $v = e^{V_1+iV_2} \in \mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ en prenant pour V_2 la fonction harmonique $\overline{\mathbf{D}} \to \mathbf{R}$ prolongeant U_2 et pour V_1 la fonction harmonique conjuguée à $-V_2$ telle que $V_1(1) = U_1(1)$. Il est clair que c'est la seule solution, et la dépendance $\mathcal{C}^\infty$ résulte des propriétés mentionnées plus haut.

cqfd.

6. UNE LOI D'ÉVOLUTION

Reprenons les notations du Th. 2' et soit F comme au § 4.

PROPOSITION 3.— *Soit* $f \in \mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ *une fonction ne s'annulant pas. Il existe une unique famille* $(f_t)_{t\in\mathbf{R}}$ *de fonctions de* $\mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ *telle que*

(i) $f_0 = f$;

(ii) $t \mapsto f_t$ *soit une application* $\mathcal{C}^\infty$ *de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$;

(iii) *pour* $\lambda \in S^1$, *le point* $(\lambda, f_t(\lambda))$ *parcoure le* F*-rayon passant par* $(\lambda, f(\lambda))$;

(iv) $F_1(f_t(1)) = e^t \cdot F_1(f(1))$.

Les fonctions f_t *ne s'annulent pas sur* $\overline{\mathbf{D}}$.

Démonstration.— Notons ξ le champ de vecteur vertical radial sur $\mathbf{D}_r \times \mathbf{C}$ défini par $\xi(\lambda, z) = (0, z)$, de sorte que $\exp t\xi(\lambda, z) = (\lambda, e^t z)$. Notons η le champ de vecteurs $F^*\xi$ sur $\mathbf{D}_r \times \mathbf{C}$. Le champ de vecteurs η est tangent aux F-rayons.

Définissons $u_f : \overline{\mathbf{D}} \to \mathcal{C}$ par $\eta(\lambda, f(\lambda)) = (0, u_f(\lambda))$. Autrement dit,

$$u_f(\lambda) = (T_{f(\lambda)}\, F_\lambda)^{-1}(F_\lambda(f(\lambda))).$$

On a $u_{f|S^1} \in \mathcal{H}^s(S^1; \mathbf{C})$, et l'application $f \mapsto u_f$ de $\mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ dans $\mathcal{H}^s(S^1; \mathbf{C})$ est $\mathcal{C}^\infty$.

Les conditions (ii), (iii), (iv) équivalent à l'équation différentielle

$$\frac{d\,f_t}{d\,t} = v_{f_t},$$

où v_f est la fonction associée à u_f par la Prop. 2. La Prop. 3 résulte alors du théorème d'existence et d'unicité des solutions d'équations différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$.

cqfd.

Nous dirons que la fonction f_t est obtenue en laissant évoluer f pendant le temps t, et nous la noterons $E_t(f)$. On a $E_{t_1+t_2}(f) = E_{t_1}(E_{t_2}(f))$. Il existe $r > 0$ tel que $E_t(f) = e^t f$ pour $t \leq 0$ si $\|f\|_{L^\infty} \leq r$ et $E_t(f) = e^t f$ pour $t \geq 0$ si $(\forall z \in \overline{\mathbf{D}})$ $|f(z)| \geq \frac{1}{r}$.

Pour f fixée, quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$, pour tout $\lambda \in S^1$, le point $(\lambda, f_t(\lambda))$ parcourt le F-rayon passant par $(\lambda, f(\lambda))$ de façon monotone de 0 à ∞, avec une vitesse minorée dans la couronne $r \leq |z| \leq \frac{1}{r}$. La fonction $E_t(f)$ tend vers 0 (resp. vers ∞) quand $t \to -\infty$ (resp. $+\infty$), uniformément sur $\overline{\mathbf{D}}$.

Si $f \in \mathcal{C}^\infty\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$, *i.e.* est de classe $\mathcal{C}^\infty_{\mathbf{R}}$ et holomorphe sur $\overline{\mathbf{D}}$, on peut la considérer comme dans $\mathcal{H}^s\mathcal{O}$ pour tout s, et $f_t = E_t(f)$ ne dépend pas du s choisi pour la définition. On a $E_t(f) \in \mathcal{C}^\infty\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$, et $(t, \lambda) \mapsto f_t(\lambda)$ est $\mathcal{C}^\infty$.

7. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2'

Pour $z \in \mathbf{C}^*$, notons Ψ^z la fonction obtenue en laissant évoluer pendant le temps τ (suivant la loi définie au § 6) la fonction constante $e^{-\tau}z$, le temps τ étant choisi suffisamment grand pour que $|e^{-\tau}z| \leq r$. La fonction Ψ^z ainsi définie ne dépend pas du choix de τ sous cette réserve. On définit ainsi une application $\Psi : \overline{\mathbf{D}} \times \mathbf{C}^* \to \overline{\mathbf{D}} \times \mathbf{C}^*$ au-dessus de $\overline{\mathbf{D}}$, de classe $\mathcal{C}^\infty_{\mathbf{R}}$, holomorphe en λ pour $\lambda \in \mathbf{D}$. On pose $\Psi^0(\lambda) = 0$ et $\phi^\infty(\lambda) = \infty$ pour tout λ.

PROPOSITION 4.— *L'application* $\Psi : \overline{\mathbf{D}} \times \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{D}} \times \overline{\mathbf{C}}$ *est un difféomorphisme qui coïncide avec l'identité au voisinage de* $\overline{\mathbf{D}} \times \{0, \infty\}$, *et avec* ϕ *sur* $\overline{\mathbf{D}} \times X$.

Démonstration.— Il est clair que $\Psi^z = z$ si $|z| \leq r$ (on peut alors prendre $\tau = 0$). Montrons qu'il en est de même pour $|z|$ assez grand. Choisissons $\zeta = re^{i\theta} \in S^1_r$. Le F-argument de $(\lambda, E_\tau(\zeta)(\lambda))$ est θ pour tout $\lambda \in S^1$ et tout τ. Pour τ assez grand, c'est l'argument au sens ordinaire de $E_\tau(\zeta)(\lambda)$. La fonction $E_\tau(\zeta)$ est donc constante et sa valeur est celle obtenue pour $\lambda = 1$, c'est $e^\tau \zeta$. On a donc $\Psi^z(\lambda) = z$ pour $z = e^\tau re^{i\theta}$, θ quelconque, τ assez grand (*i.e.* $\tau \geq \tau_0$ qu'on peut prendre indépendant de θ).

Pour $x \in X - \{0, \infty\}$, montrons que $\Psi^x = \phi^x$. Le F-argument de ϕ^x est constant, égal à $\operatorname{Arg} x$ par construction de F. Pour tout τ, le F-argument de $(\lambda, E_{-\tau}(\phi^x)(\lambda))$ est constant pour $\lambda \in S^1$. Mais pour τ assez grand, c'est l'argument au sens ordinaire, donc $E_{-\tau}\, \phi^x$ est constant et sa valeur est $e^{-\tau} F^x(1) = e^{-\tau} x$. Par suite, $\phi^x = E_\tau(e^{-\tau} x) = \Psi^x$.

Montrons que Ψ est un difféomorphisme local. Soit $z \in \mathbf{C}^*$ et posons $f = \Psi^z = E_\tau(e^{-\tau} z)$ (τ grand). Donnons à z une variation infinitésimale $D_z = \alpha$ non nulle et soit $g = Df \in \mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ la variation infinitésimale correspondante de f ("infinitésimale" signifie seulement que $\alpha \mapsto g$ est l'application linéaire tangente à $z \mapsto \Psi^z$). Il faut montrer que g est une fonction qui ne s'annule pas sur $\overline{\mathbf{D}}$. La variation infinitésimale de $e^{-\tau} z$ est $e^{-\tau} \alpha$ (on fixe τ). Si α est un vecteur radical sortant (resp. rentrant), pour $\lambda \in S^1$, le vecteur $g(\lambda)$ est tangent en $f(\lambda)$ au F-rayon passant par $(\lambda, f(\lambda))$, non nul en direction de ∞ (resp. de 0). Par suite, $g(\lambda)$ fait 0 tour autour de 0 quand λ parcourt S^1, et g ne s'annule pas sur $\overline{\mathbf{D}}$. Si α pointe à gauche (resp. à droite) par rapport au rayon, pour tout $\lambda \in S^1$, le vecteur $g(\lambda)$ pointe à gauche (resp. à droite) par rapport à la tangente au F-rayon passant par $(\lambda, f(\lambda))$, et encore $g(\lambda)$ fait 0 tour et g ne s'annule pas sur $\overline{\mathbf{D}}$. Pour tout $\lambda \in \overline{\mathbf{D}}$, Ψ_λ induit un difféomorphisme local $\mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$ qui coïncide avec l'identité au voisinage de 0 et ∞, et on a $\Psi_\lambda(0) = 0$, $\Psi_\lambda(\infty) = \infty$; l'application Ψ_λ est donc un difféomorphisme de $\mathbf{C}$.

cqfd.

Démonstration du Théorème 2'.— L'application $\Psi : \mathbf{D} \times \overline{\mathbf{C}} \to \mathbf{D} \times \overline{\mathbf{C}}$ est un difféomorphisme au-dessus de $\mathbf{D}$, injectif bien sûr, et holomorphe en λ. Mais

Ψ_0 n'est pas nécessairement l'identité de $\overline{\mathbf{C}}$. On a cependant $\Psi_0(x) = x$ pour $x \in X$. Posons $\widehat{\phi}(\lambda, z) = \Psi(\lambda, \Psi_0^{-1}(z))$. Alors $\widehat{\phi}_0 = \mathrm{Id}_{\overline{\mathbf{C}}}$, et $\widehat{\phi}$ est un mouvement holomorphe de $\overline{\mathbf{C}}$ qui est un difféomorphisme de $\mathbf{D} \times \overline{\mathbf{C}}$ et qui induit ϕ sur $\mathbf{D} \times X$.

cqfd.

8. PROPRIÉTÉS DE QUASI-CONFORMITÉ

PROPOSITION 5.— *Soit $\phi : \mathbf{D} \times \overline{\mathbf{C}} \to \mathbf{D} \times \overline{\mathbf{C}}$ un mouvement holomorphe de $\overline{\mathbf{C}}$. Alors pour $\lambda \in D$, l'application ϕ_λ est quasi-conforme de rapport K avec $K = \frac{1+|\lambda|}{1-|\lambda|}$.*

Démonstration.— On peut supposer ϕ normalisé. Supposons d'abord que ϕ est en outre un difféomorphisme $\mathcal{C}^1_{\mathbf{R}}$. Pour tout $z \in \mathbf{C}^*$, $\mu(\lambda, z) = \overline{\partial}\,\phi_\lambda / \partial\,\phi_\lambda(z)$ est un fonction holomorphe de λ à valeur dans $\mathbf{D}$, nulle en 0, donc $|\mu(\lambda, z)| \leq \lambda$, d'où la propriété.

Dans le cas général, la démonstration faite au § 3 montre qu'il existe un ensemble dénombrable Y dense dans $\overline{\mathbf{C}}$ et une suite (ϕ_n) de mouvements holomorphes de $\overline{\mathbf{C}}$ qui sont des difféomorphismes $\mathcal{C}^\infty$, telle que $\phi_n^y \to \phi^y$. Pour $\lambda \in \mathbf{D}$, les $\phi_{n,\lambda}$ sont K-quasi-conformes avec un K indépendant de n. Ils forment donc une famille équicontinue, par suite $\phi_{n,\lambda} \to \phi_\lambda$ uniformément et ϕ_λ est K-quasi-conforme avec $K = \frac{1+|\lambda|}{1-|\lambda|}$.

cqfd.

9. UN CONTRE-EXEMPLE AVEC Λ DE DIMENSION 1

Un mouvement holomorphe $\phi : \Lambda \times X \to \Lambda \times \overline{\mathbf{C}}$ est *maximal* s'il ne peut être prolongé en un mouvement holomorphe d'un ensemble Y contenant X strictement. Le théorème de Słodkowski dit qu'un mouvement holomorphe paramétré par $\mathbf{D}$ ne peut être maximal que si c'est un mouvement de $\overline{\mathbf{C}}$ tout entier.

Dans ce paragraphe et le suivant, nous donnons deux exemples de mouvements holomorphes maximaux avec X fini. Le premier est le mouvement holomorphe normalisé universel avec $\# X = 4$:

On prend $\Lambda = \overline{\mathbf{C}} - \{0, 1, \infty\} = \mathbf{C} - \{0, 1\}$, λ_0 un point quelconque de Λ (par exemple $\lambda_0 = 2$), $X = \{0, 1, \infty, \lambda_0\}$, ϕ normalisé avec $\phi^{\lambda_0}(\lambda) = \lambda$. Montrer que ce mouvement holomorphe est maximal revient à démontrer :

PROPOSITION 6.— *Il n'existe pas de fonction holomorphe $f : \Lambda \to \Lambda$ sans point fixe.*

Démonstration.— Supposons que f soit une telle fonction. La fonction f, évitant 0, 1 et ∞, ne peut avoir en 0, 1 ou ∞ une singularité essentielle. C'est donc une fraction rationnelle et elle définit une application encore notée $f : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$. Cette application ne peut être constante avec une valeur $\lambda_1 \in \Lambda$, car elle aurait un point fixe en λ_1. Elle est donc surjective. On a $f^{-1}(\{0, 1, \infty\}) \subset \{0, 1, \infty\}$, donc f induit une bijection de $\{0, 1, \infty\}$ sur lui-même. L'application $f : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ a nécessairement au moins un point fixe, il est nécessairement dans $\{0, 1, \infty\}$, et quitte à conjuguer par un automorphisme de $\overline{\mathbf{C}}$, on peut supposer que c'est ∞. On a alors $f^{-1}(\infty) = \{\infty\}$, donc f est un polynôme. Notons d son degré. On a $f(\{0, 1\}) = \{0, 1\}$. Si $d = 1$, f est l'identité ou $z \mapsto 1 - z$, mais tous deux admettent $\frac{1}{2}$ comme point fixe. Si $d \geq 2$, $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$ sont tous deux réduits à un point, donc la dérivée f' a un zéro d'ordre $d - 1$ en 0 et un autre en 1, ce qui est impossible car $2d - 2 > d - 1$.

cqfd.

Le revêtement universel $\widetilde{\Lambda}$ de Λ est isomorphe à $\mathbf{D}$. Notons ϖ la projection $\widetilde{\Lambda} \to \Lambda$. Il résulte du théorème 2 que le mouvement $\widetilde{\phi} : \widetilde{\Lambda} \times X \to \widetilde{\Lambda} \times \overline{\mathbf{C}}$ obtenu en remontant ϕ à $\widetilde{\Lambda}$ peut se prolonger en un mouvement holomorphe $\widehat{\phi}$ de $\overline{\mathbf{C}}$ paramétré par $\widetilde{\Lambda}$. On peut en fait définir explicitement un tel prolongement :

Posons $A = \{(\lambda, x, y) \in \Lambda \times \overline{\mathbf{C}} \times \overline{\mathbf{C}} \mid y^2 = x.(x-1)/(x-\lambda)\}$. Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, la surface de Riemann $A(\lambda) = \{(x, y) \mid (\lambda, x, y) \in A\}$ s'identifie à $\mathbf{C}/\Gamma_\lambda$ où Γ_λ est un réseau dans $\mathbf{C}$. On peut choisir Γ_λ dépendant de façon holomorphe de λ. En remontant à $\widetilde{\Lambda}$, on obtient une variété $\widetilde{A}$ au-dessus de $\widetilde{\Lambda}$ avec $\widetilde{A}(\widetilde{\lambda}) = A(\lambda) = \mathbf{C}/\Gamma_\lambda$ pour $\widetilde{\lambda} \in \widetilde{\Lambda}$ et $\lambda = \varpi(\widetilde{\lambda})$. On peut choisir de façon continue – et donc holomorphe – pour chaque $\widetilde{\lambda} \in \widetilde{\Lambda}$ une base $(\alpha(\widetilde{\lambda}), \beta(\widetilde{\lambda}))$ de $\Gamma_{\widetilde{\lambda}} = \Gamma_{\varpi(\widetilde{\lambda})}$. On obtient alors une trivialisation horizontale analytique $\Psi : \widetilde{\Lambda} \times A(\lambda_0) \to \widetilde{A}$ par

$$\Psi(\widetilde{\lambda}, u.\alpha(\lambda_0) + v.\beta(\lambda_0)) = (\widetilde{\lambda}, u.\alpha(\lambda) + v.\beta(\lambda)),$$

$(u, v) \in \mathbf{T}^2$. La relation d'équivalence définie sur A par la projection

$(\lambda, x, y) \mapsto (\lambda, x)$ de A sur $\Lambda \times \overline{\mathbf{C}}$ est celle qui identifie (λ, w) à $(\lambda, -w)$ pour $w \in \mathbf{C}/\Gamma_\lambda$. De même, pour la projection $\widetilde{A} \to \widetilde{\Lambda} \times \overline{\mathbf{C}}$. L'application Ψ, étant compatible avec cette relation d'équivalence, descend en une application $\widetilde{\phi} : \widetilde{\Lambda} \times \overline{\mathbf{C}} \to \widetilde{\Lambda} \times \overline{\mathbf{C}}$ qui est le mouvement holomorphe cherché.

10. SECTIONS DES ESPACES DE TEICHMÜLLER

Pour $k \geq 3$, notons $\mathcal{M}_{0,k}$ l'espace modulaire pour le genre 0 avec k points marqués numérotés, *i.e.* l'espace des injections normalisées $i \mapsto z_i$ de $\{1, \cdots, k\}$ dans $\overline{\mathbf{C}}$ ("normalisées" signifie $(z_1, z_2, z_3) = (0, 1, \infty)$). L'espace $\mathcal{M}_{0,k}$ s'identifie à $(\mathbf{C} - \{0,1\})^{k-3} - \bigcup_{1 \leq i < j \leq k-3} H_{i,j}$, où $H_{i,j}$ est l'hyperplan diagonal défini par $z_i = z_j$. En particulier, $\mathcal{M}_{0,4} = \mathbf{C} - \{0,1\}$.

Notons $\mathcal{T}_{0,k}$ l'espace de Teichmüller revêtement universel de $\mathcal{M}_{0,k}$. L'oubli des derniers points définit pour $k' > k$ des projections $p_k^{k'} : \mathcal{M}_{0,k'} \to \mathcal{M}_{0,k}$ et $\widetilde{p}_k^{k'} : \mathcal{T}_{0,k'} \to \mathcal{T}_{0,k}$.

On a vu au § 9 (Prop. 6) que p_4^5 n'a pas de section holomorphe $\mathcal{M}_{0,4} \to \mathcal{M}_{0,5}$, mais $\widetilde{p}_4^5 : \mathcal{T}_{0,5} \to \mathcal{T}_{0,4}$ est une fibration qui admet une trivialisation horizontalement analytique $\mathcal{T}_{0,4} \times (\mathbf{C} - \{0,1,2\})^\sim \to \mathcal{T}_{0,5}$ (relevant $\widehat{\phi} : \mathcal{T}_{0,4} \times (\mathbf{C} - \{0,1,2\}) \to \mathcal{T}_{0,4} \times \overline{\mathbf{C}} - \phi(\mathcal{T}_{0,4} \times X)$).

PROPOSITION 7 (Hubbard, Earle-Kra).— *Pour $k' > k \geq 5$, la projection $\widetilde{p}_k^{k'} : \mathcal{T}_{0,k'} \to \mathcal{T}_{0,k}$ n'a pas de section holomorphe.*

COROLLAIRE.— *Pour $k \geq 5$, le mouvement holomorphe universel de $\{0, 1, 2, \cdots, k-2, \infty\}$ paramétré par $\mathcal{T}_{0,5}$ est maximal.*

Dans sa thèse, J.H. Hubbard examine les relations entre espaces de Teichmüller. Notons $\mathcal{T}_{g,k}$ l'espace de Teichmüller pour le genre g avec k points marqués et, pour $k' \geq k$, considérons la projection $\widetilde{p}_{g,k}^{g,k'} : \mathcal{T}_{g,k'} \to \mathcal{T}_{g,k}$. Hubbard démontre les résultats suivants :

- Pour $g \geq 3$, aucune projection $\widetilde{p}_{g,k}^{g,k'}$ avec $k' > k$ n'admet de section holomorphe.
- Pour $g = 2$, on a des sections holomorphes $\mathcal{T}_{2,0} \to \mathcal{T}_{2,k'}$ pour $k' \geq 6$ définies par les points de Weierstrass. A part ça, aucune projection $\widetilde{p}_{2,k}^{2,k'}$ avec $k' > k$

n'a de section holomorphe.

- Pour $g = 1$, $\widetilde{p}_{1,0}^{1,1}$ est un isomorphisme et $\widetilde{p}_{1,1}^{1,2}$ admet une trivialisation horizontalement analytique, d'où des sections de $\widetilde{p}_{1,1}^{1,k'}$ pour tout k'. Pour $k' > k \geq 2$, la projection $\widetilde{p}_{1,k}^{1,k'}$ n'a pas de section holomorphe.

La méthode de Hubbard est la suivante. Soit S une surface de Riemann compacte de genre g et $A = \{a_1, \cdots, a_k\}$ où $a_1, \cdots, a_k$ sont k points distincts de S. L'espace cotangent à $\mathcal{T}_{g,k}$ au point $[S, A]$ s'identifie à l'espace $Q(S, A)$ des formes quadratiques holomorphes sur $S - A$ ayant aux points de A au pire des pôles simples. Par un théorème de Royden, la norme L^1 sur $Q(S, A)$ est la norme duale de la norme de Kobayashi sur l'espace tangent à $\mathcal{T}_{g,k}$. Une condition nécessaire pour qu'il existe une section $\sigma : \mathcal{T}_{g,k} \to \mathcal{T}_{g,k'}$ avec $\sigma([S, A]) = [S, A']$ est qu'il existe une projection de norme 1 de $Q(S, A')$ sur $Q(S, A)$. Pour $k' = k + 1$, cela signifie qu'il existe $q' \in Q(S, A')$ non nul tel que $\forall q \in Q(S, A)$, $D_q\mathcal{N}(q') = 0$, où $\mathcal{N}$ est la norme L^1 et $D_q\mathcal{N}$ sa différentielle en q. Cette différentielle est donnée par : $D_q\mathcal{N}(q') = \mathcal{R}e \int_S \frac{\overline{q}}{|q|} q'$. La relation $D_q\mathcal{N}(q') = D_{iq}\mathcal{N}(q') = 0$ s'écrit donc $\int_S \frac{\overline{q}}{|q|} q' = 0$.

Cette méthode peut s'appliquer en genre 0 pour démontrer la Prop. 7. Il suffit d'établir :

Lemme.— Soient $A \subset A' \subset \overline{\mathbf{C}}$ avec $\# A = k \geq 5$, $A' = A \cup \{a'\}$, $a' \notin A$. Pour $q' \in Q(\overline{\mathbf{C}}, A)$, l'application $q \mapsto \int_{\overline{\mathbf{C}}} \frac{\overline{q}}{|q|} q'$ de $Q(\overline{\mathbf{C}}, A)$ dans $\overline{\mathbf{C}}$ n'est pas identiquement nulle.

Démonstration.— Si $q' \in Q(A)$, on peut prendre $q = q'$. Supposons que q' ait effectivement un pôle en a', et soit (q_α) une famille analytique de formes appartenant à $Q(A)$, paramétrée par un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$, telle que q_α ait un zéro en $a' + \alpha$. Alors $\int \frac{\overline{q}_\alpha}{q_\alpha} q'$ est de la forme $C \iint_D \frac{\overline{z - \alpha}}{|z - \alpha|} \frac{1}{z} \, dxdy + h(\alpha)$ où C est une constante $\neq 0$ et $h(\alpha)$ est de classe $\mathcal{C}_{\mathbf{R}}^\infty$ de α. On peut remplacer $\iint_D \frac{\overline{z - \alpha}}{|z - \alpha|} \frac{1}{z} \, dxdy$ par $\iint_D \frac{\overline{z}}{|z|} \frac{1}{z - \alpha} \, dxdy = \frac{-2M}{3} \frac{\overline{\alpha}^2}{|\alpha|}$ qui a en 0 une singularité qui ne peut être compensée.

cqfd.

Les mouvements holomorphes maximaux décrits ci-dessus sont des mouvements d'un ensemble X fini, donc non connexe. Les théorèmes de Hubbard mentionnés plus haut permettent de construire un mouvement holomorphe maximal de $\overline{\mathbf{D}}$ paramétré par $\mathcal{T}_3$ (qui est de dimension 6).

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. ASTALA and G.J. MARTIN - *Holomorphic motions*, Preprint University of Helsinki and University of Auckland (1993).

[2] L. BERS and H.L. ROYDEN - *Holomorphic families of injections*, Acta Math. **157** (1986), 259-286.

[3] C.J. EARLE and I. KRA - *On holomorphic mappings between Teichmüller spaces*, Contributions to Analysis, Academic Press (New York) (1974), 107-124.

[4] J. HUBBARD - *Sur les sections analytiques de la courbe universelle de Teichmüller*, Mem. Am. Math. Soc. **4** (1976).

[5] R. MAÑE, P. SAD and D. SULLIVAN - *On the dynamics of rational maps*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **16** (1983), 193-217.

[6] Z. SŁODKOWSKI - *Holomorphic motions and polynomial hulls*, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), 347-355.

[7] Z. SŁODKOWSKI - *Invariant extensions of holomorphic motions*, Abstract N° 873-30-234 in : Abstracts of the Papers Presented to the Amer. Math. Soc. **13** (1992), 259.

[8] Z. SŁODKOWSKI - *Extensions of holomorphic motions*, Preprint IHES/M/92/96.

[9] D. SULLIVAN and W.P. THURSTON - *Extending holomorphic motions*, Acta Math. **157** (1986), 243-257.

Adrien DOUADY

Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 405
F-91405 ORSAY CEDEX