PIERRE PANSU

# Sous-groupes discrets des groupes de Lie : rigidité, arithméticité

*Astérisque*, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki, exp. nº 778, p. 69-105
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__69_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 1993
46ème année, 1993-94, n° 778

# SOUS-GROUPES DISCRETS DES GROUPES DE LIE : RIGIDITÉ, ARITHMÉTICITÉ

par **Pierre PANSU**

## 1. INTRODUCTION

On s'intéresse aux pavages en géométrie hyperbolique, et, plus généralement, dans les géométries attachées aux groupes de Lie semi-simples. Si la forme du pavé fondamental peut connaître d'infinies variations (cf. l'oeuvre de M. Escher), le groupe de symétrie d'un pavage, sous-groupe discret dans un groupe de Lie, est relativement rigide. En ce sens, la géométrie affine plane compte seulement 17 types de pavages. La géométrie hyperbolique plane, en revanche, comporte une infinité de types de pavages, la plupart étant déformables. En dimension supérieure, il existe encore une infinité de pavages, bien qu'ils soient plus difficiles à construire. Toutefois, ces pavages ne sont pas déformables.

A mesure que la dimension (et la complexité du groupe de Lie concerné) augmente, on s'attend à ce que les sous-groupes discrets présentent des propriétés de rigidité de plus en plus frappantes. En fait, il existe assez peu de résultats généraux. Ce qui fait l'intérêt du sujet, c'est plutôt la diversité des techniques employées : théorie ergodique, géométrie différentielle, analyse non linéaire. L'objet du présent exposé est de donner un aperçu de quelques unes de ces techniques.

Les développements récents apportent un éclairage nouveau sur un problème ancien : caracériser les groupes fondamentaux des variétés projectives complexes. En un sens, le groupe fondamental est un invariant transcendant. Toutefois, ses représentations de dimension finie sont à nouveau des objets algébriques (fibrés de Higgs). Les propriétés particulières des représentations et des espaces de représentations mises ainsi en évidence sont autant de contraintes sur le groupe fondamental.

Je tiens à remercier A. Beauville et H.C. ImHof pour leur aide, ainsi que V. Le Dret pour la mise au point finale du texte.

## 1.1. Les différents types de rigidité.

Commençons par décrire, sur une famille d'exemples élémentaires, ce qu'on entend par rigidité.

La figure 1 ci-contre représente un pavage du plan hyperbolique $\mathbf{H}^2$. Le pavé fondamental est un triangle dont les angles valent $\pi/2$, $\pi/4$ et $\pi/6$. Tout triangle d'angles $\pi/p$, $\pi/q$ et $\pi/r$ où $p$, $q$ et $r$ sont des entiers tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$ pave le plan hyperbolique, accréditant l'idée que la géométrie hyperbolique est très riche en pavages, plus riche en tout cas que les géométries euclidienne ou elliptique (sphérique).

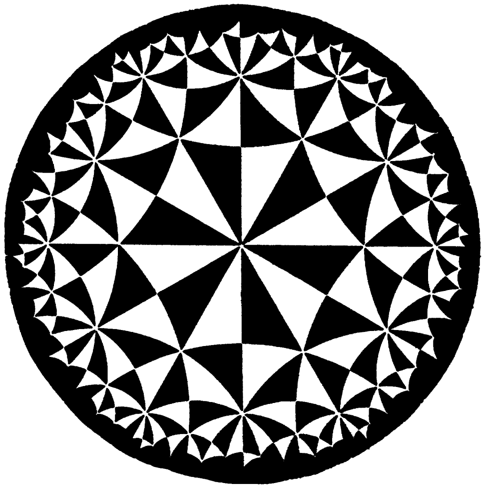

Figure 1

Le groupe des symétries de ce pavage est noté $T(p,q,r)$. Il est engendré par les réflexions $s_{pq}$, $s_{qr}$ et $s_{rp}$ par rapport aux côtés d'un seul pavé, sujettes aux six relations $s_{pq}^2=1$, $(s_{pq}s_{qr})^q=1$, etc... Le groupe $T(2,4,6)$ est *rigide* au sens suivant : tout sous-groupe d'isométries du plan hyperbolique isomorphe, en tant que groupe abstrait, à $T(2,4,6)$, est engendré par les réflexions par rapport aux côtés d'un triangle, et par conséquent, conjugué à $T(2,4,6)$ dans le groupe Isom$\,(\mathbf{H}^2)$ des isométries du plan hyperbolique.

Cette propriété s'étend en partie aux dimensions supérieures. Les actions isométriques de $T(2,4,6)$ sur l'espace hyperbolique de dimension $n$ se rangent en trois catégories :

- ou bien il y a un point fixé par tous les éléments de $T(2,4,6)$ ;

  dans ce cas l'image de $T(2,4,6)$ est contenue dans un sous-groupe compact du groupe Isom$\,(\mathbf{H}^n)$ ;
- ou bien il y a un point à l'infini fixé par tous les éléments de $T(2,4,6)$ ;

dans ce cas l'image de $T(2,4,6)$ est contenue dans un sous-groupe fermé connexe non réductif du groupe $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$ ;

- ou bien l'action laisse invariant un plan hyperbolique et préserve un pavage de ce plan par des triangles ;

dans ce cas l'image de $T(2,4,6)$ est contenue dans un sous-groupe isomorphe au produit de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^2)$ et d'un sous-groupe compact de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$, de façon qu'en projetant sur le facteur $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^2)$, on retrouve $T(p,q,r)$.

On dit que le groupe $T(2,4,6)$ est *superrigide* pour les groupes $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$.

Ce phénomène de rigidité est plutôt exceptionnel en dimension 2. Lorsque $r$ tend vers $+\infty$, le triangle d'angles $\pi/p$, $\pi/q$ et $\pi/r$ converge vers un triangle d'angles $\pi/p$, $\pi/q$, dont un sommet est à l'infini, mais dont l'aire reste finie (elle vaut $\pi(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$). Ce triangle pave le plan hyperbolique, et son groupe de symétrie $T(p,q,\infty)$ a simplement perdu une relation. Ce groupe n'est plus rigide. En effet, le sous-groupe (non discret) engendré par les réflexions par rapport aux côtés d'un triangle d'angles $\pi/p$, $\pi/q$ et $\pi/r$ où $r$ est irrationnel engendrent un groupe isomorphe à $T(p,q,\infty)$.

Toutefois, la rigidité persiste sous des hypothèses supplémentaires : un sous-groupe de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^2)$ isomorphe à $T(p,q,\infty)$ qui admet un domaine fondamental d'aire finie est conjugué à $T(p,q,\infty)$. On parle de rigidité *à la Mostow*.

Evidemment, la superrigidité est aussi en défaut. On peut même construire des sous-groupes de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^3)$ isomorphes à $T(p,q,\infty)$ qui ne laissent invariant ni point, ni point à l'infini, ni plan.

Même la rigidité à la Mostow est l'exception en dimension 2. A isométrie près, un hexagone à angles droits dépend de trois paramètres continus, les longueurs de 3 côtés non contigus. Par conséquent, le groupe $\Gamma$, d'indice 12 dans $T(2,4,6)$, engendré par les réflexions par rapport aux côtés de l'hexagone, réunion de 12 triangles de la figure 1, peut-être déformé continûment, tout en conservant un domaine fondamental compact.

Enfin, pour un sous-groupe d'indice 4 $\Gamma'$ de $\Gamma$, l'espace des orbites est une surface de genre 2. Le théorème d'uniformisation de Poincaré-Koebe établit un dictionnaire entre surfaces de Riemann compactes de genre $\geq 2$ et sous-groupes discrets sans torsion de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^2)$ préservant l'orientation et admettant un domaine fondamental compact (à conjugaison près). Par conséquent, un groupe dont l'espace des orbites est une surface compacte est toujours déformable.

## 1.2. De l'espace hyperbolique aux espaces symétriques.

Donnons maintenant un aperçu de l'histoire de la rigidité des pavages.

C'est A. Selberg qui, a la fin des années 50, a eu l'intuition que les pavages de l'espace hyperbolique sont rigides. C'était le moment où K. Kodaira développait la théorie des déformations de variétés complexes. En adaptant la méthode de Kodaira aux déformations de variétés riemanniennes compactes à courbure constante, E. Calabi a pu prouver leur *rigidité locale*, (non publié, voir toutefois [C]). En termes de groupes discrets, cela signifie que si $\Gamma$ est un sous-groupe discret sans torsion de $\mathrm{Isom}\,(\mathbf{H}^n)$ dont l'espace des orbites est compact, tout sous-groupe de $\mathrm{Isom}\,(\mathbf{H}^n)$ suffisamment voisin de $\Gamma$ lui est conjugué.

En 1960, E. Calabi et E. Vesentini ont étendu cette propriété aux groupes d'isométries des domaines symétriques de $\mathbf{C}^n$, [C-V].

Cette généralisation est naturelle à plus d'un titre.

En 1925, E. Cartan menait de front deux entreprises de classification. D'une part celle des groupes de Lie simples, d'autre part, celle des variétés riemanniennes symétriques. Une variété riemannienne est dite *symétrique* si chaque point est un point fixe isolé d'au moins une isométrie. E. Cartan a découvert deux classifications parallèles. Entre autres, il établit un dictionnaire entre variétés symétriques à courbure négative ou nulle mais non nulle et groupes de Lie semi-simples sans facteurs compacts. Si $M$ est une variété symétrique non plate, son groupe d'isométries est semi-simple. Inversement, si $G$ est un groupe de Lie semi-simple sans facteurs compacts, et $K$ un sous-groupe compact maximal, alors l'espace homogène $G/K$ admet une métrique riemannienne $G$-invariante, essentiellement unique, dont la courbure est négative ou nulle.

L'espace hyperbolique est symétrique, et son groupe d'isométries $\mathrm{Isom}\,(\mathbf{H}^n) = PO(n,1)$ est presque simple, formé de deux composantes connexes du groupe orthogonal d'une forme quadratique réelle de signature $(n,1)$.

Une variété riemannienne est dite *localement symétrique* si son revêtement universel est symétrique. L'étude des variétés riemanniennes localement symétriques à courbure négative ou nulle s'identifie donc à celle des sous-groupes discrets sans torsion des groupes de Lie semi-simples sans facteurs compacts. Désormais, on désignera par *réseau* un sous-groupe discret d'un groupe de Lie dont l'espace des orbites est une variété de volume fini. Si l'espace des orbites est compact, on parlera de *réseau uniforme.* Un réseau dans un produit de groupes est dit *irréductible* si sa projection dans chacun des facteurs est dense.

Le résultat de E. Calabi et E. Vesentini affirme la rigidité locale des réseaux uniformes dans certains groupes de Lie semi-simples. Le cas général est dû à A. Weil, [W], pour les réseaux uniformes, à H. Garland, [Ga1], pour les réseaux non uniformes.

**1.3** THÉORÈME .– *Soit $G$ un groupe de Lie semi-simple sans facteurs compacts. Soit $\Gamma$ un réseau irréductible de $G$. Supposons $G$ distinct de (i.e. non isogène à) $Sl(2,\mathbf{C})$ ou $Sl(2,\mathbf{R})$ ($\neq Sl(2,\mathbf{R})$ suffit si $\Gamma$ est uniforme). Alors toute déformation continue de $\Gamma$ dans $G$ est triviale, i.e., obtenue en appliquant à $\Gamma$ une famille continue d'automorphismes intérieurs de $G$.*

**1.4. Superrigidité en rang $\geq 2$.**

En 1966, G.D. Mostow établit la forme de rigidité qui porte son nom pour les sous-groupes discrets cocompacts de Isom$(\mathbf{H}^n)$, $n \geq 3$, [M1]. En 1971, il parvient à étendre sa méthode aux autres espaces symétriques à courbure sectionnelle strictement négative, [M2], puis au cas général, [M3].

**1.5** THÉORÈME [M3].– *Soit $G$ un groupe de Lie semi-simple sans facteurs de dimension 3. Soient $\Gamma$ et $\Gamma'$ deux réseaux irréductibles de $G$. Tout isomorphisme $\Gamma \to \Gamma'$ provient d'un automorphisme de $G$.*

Autrement dit, on peut reconstruire le groupe de Lie $G$ à partir du réseau $\Gamma$. En fait, la relation entre le groupe de Lie et ses réseaux est encore plus profonde comme en témoigne la superrigidité, découverte par G.A. Margulis en 1974 (la résolution du problème des sous-groupes de congruence, [B-M-S], entrainait dès 1967 des cas particuliers de superrigidité).

Le résultat de G.A. Margulis concerne les groupes discrets d'isométries des espaces symétriques de rang au moins égal à deux. Cela recouvre la plupart des cas, mais pas l'espace hyperbolique.

Le *rang réel* d'un espace symétrique $M$ est la dimension maximale d'un sous-espace totalement géodésique de $M$ isométrique à l'espace euclidien. $M$ est à courbure sectionnelle strictement négative si et seulement si son rang est égal à un. Alors son groupe d'isométries est dans la (courte) liste suivante : $PO(n,1)$, $n \geq 2$, $PU(n,1)$, $n \geq 1$, $Sp(n,1)$, $n \geq 1$, $F_4^{-20}$. Les espaces symétriques correspondants sont l'espace hyperbolique et ses variantes où le corps de base $\mathbf{R}$ est remplacé par les complexes $\mathbf{C}$, les quaternions $\mathbf{H}$ ou les octaves de Cayley $\mathbf{Ca}$.

**1.6** THÉORÈME [Ma2], [Ma3], voir aussi [T3].– *Soit $\mathbf{K}$ un corps local de caractéristique zéro. Soit $H$ un groupe algébrique semi-simple sur $\mathbf{K}$. Soit $G$ un groupe de Lie semi-simple sans facteurs compacts, dont l'espace symétrique a un rang réel $\geq 2$. Soit $\Gamma$ un réseau irréductible de $G$. Soit $\pi : \Gamma \to H$ un homomorphisme dont l'image est Zariski dense dans $H$. Alors $\pi$ s'obtient en composant un plongement de $\Gamma$ dans un produit $G \times L$ (où $L$ est un sous-groupe compact de $H$) avec un homomorphisme $G \times L \to H$. En particulier, si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $\pi$ s'étend en un homomorphisme de $G$ dans $H$. Si $K \neq \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, l'image de $\pi$ est relativement compacte dans $H$.*

Géométriquement, la superrigidité par rapport aux groupes semi-simples sur $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ signifie ceci : si $N$ est une variété localement symétrique compacte, et $M \subset N$ une sous-variété qui admet une métrique localement symétrique de rang $\geq 2$, alors $M$ est homotope à une sous-variété totalement géodésique. Elle est en défaut pour les sous-groupes de $PO(n,1)$. En effet, on peut construire des variétés à courbure constante qui contiennent des hypersurfaces totalement géodésiques "brisées", voir en 2.7.

La superrigidité de $\Gamma$ par rapport aux groupes semi-simples sur les corps $p$-adiques, combinée avec le cas de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$, entraîne que $\Gamma$ est essentiellement obtenu par la seule construction générale connue : prendre les matrices à coefficients entiers dans une représentation linéaire du groupe ambiant $G$ définie sur $\mathbf{Q}$. On voit ainsi que la superrigidité (sur $\mathbf{R}$ du moins) ne s'étend pas aux sous-groupes de $PU(n,1)$ pour $n = 2,\ 3$. En effet, ces groupes admettent des sous-groupes "non arithmétiques", voir en 2.6.

### 1.7. Superrigidité en rang un.

Dès 1974, il était naturel de penser que la superrigidité devait s'étendre aux familles restantes $Sp(n,1)$, $n \geq 2$, et $F_4^{-20}$. Une autre propriété liée aux représentations, la propriété (T) de Kazhdan, avait fait apparaître une coupure au sein des espaces de rang un. Elle est en défaut exactement pour les groupes $PO(n,1)$ et $PU(n,1)$.

En 1990, K. Corlette a démontré que les sous-groupes de $Sp(n,1)$, $n \geq 2$, et de $F_4^{-20}$ sont superrigides par rapport aux groupes réductifs sur $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$. M. Gromov et R. Schoen ont étendu sa méthode au cas des représentations sur les corps $p$-adiques, et la propriété d'arithméticité en résulte. Cette méthode ramène la superrigidité à un théorème d'annulation relatif aux applications harmoniques entre espaces symétriques (resp. immeubles). Elle repose sur une formule à la Bochner. Celle de K. Corlette s'applique en fait à une classe plus vaste d'espaces symétriques, ceux qui admettent une forme différentielle invariante “rigide”. Récemment, N. Mok, Y.T. Siu et S.K. Yeung ont proposé une autre formule qui couvre toutes les situations où la superrigidité est connue.

### 1.8. Groupes kählériens.

La méthode précédente permet d'analyser une représentation du groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte. Au lieu d'entraîner sa rigidité, le théorème d'annulation lui assigne un objet holomorphe : un fibré de Higgs (N. Hitchin, [H]). Ce procédé est vu comme une version non abélienne de l'isomorphisme entre cohomologie de Dolbeault et de de Rham. La décomposition de Hodge se traduit par une action du groupe $\mathbf{C}^*$ sur l'espace des représentations (C. Simpson, [Si1]). L'étude des points fixes de cette action apporte des informations sur la topologie de l'espace des représentations.

L'exposé ne suivra pas l'ordre chronologique mais plutôt quelques lignes directrices.

- Comment construire des réseaux ;
- le rôle croissant de la théorie ergodique ;
- intégration par parties.

## 2. CONSTRUCTION DE SOUS-GROUPES DISCRETS

### 2.1. Groupes engendrés par réflexions.

Soit $P$ un polyèdre convexe de l'espace hyperbolique de dimension $n$. Le groupe engendré par les réflexions par rapport aux faces de $P$ est discret si et seulement si les angles diédraux (i.e., le long des faces de codimension 2) sont de la forme $2\pi/p$ avec $p$ entier.

En dimension 3, de tels polyèdres sont fréquents. En effet, le théorème d'Andreev [A] affirme l'existence et l'unicité d'un polyèdre dont le type combinatoire (triangulation de la sphère) et d'angles diédraux donnés (pourvu que les angles ne soient pas trop grands). Un décompte des paramètres montre que ce théorème ne peut s'étendre en dimensions supérieures.

De fait, la dimension la plus élevée des exemples connus est 21, R. Borcherds [Bo]. Un théorème de A.G. Khovanskii et M.N. Prokhorov affirme qu'aucun polyèdre de volume fini ne peut paver l'espace hyperbolique $H^n$ par réflexions si $n \geq 996$, [Kh], [Pr].

### 2.2. Cas de l'espace hyperbolique complexe.

Il possède des réflexions complexes, i.e., des isométries qui fixent un hyperplan complexe et sont d'ordre fini. G.D. Mostow a construit des réseaux engendrés par réflexions complexes dans $PU(n,1)$ pour $n \leq 9$, [M5]. Certains des espaces quotients ont une interprétation comme espace de modules de configurations de points sur $\mathbf{C}P^1$, [D-M], ou de métriques à singularités coniques sur $\mathbf{C}P^1$, [Th2].

### 2.3. Autres constructions.

En dimension 2, on a encore deux autres façons de construire des surfaces à courbure constante à partir de pièces élémentaires.

La première (plomberie) consiste à emboîter des pantalons à bord géodésique. En dimension supérieure, cette méthode n'a pas été exploitée systématiquement (voir cependant en 2.6).

La seconde (ébénisterie) consiste à coller bord à bord des triangles géodésiques idéaux. Cette méthode s'étend à la dimension 3. Elle permet de munir le complémentaire de nombreux noeuds et enlacements de $S^3$ d'une structure hyperbolique, voir [Th1]. Là encore, il y a peu d'espoir d'obtenir des exemples de grande dimension.

### 2.4. Groupes arithmétiques.

Le miracle est qu'il existe une construction générale. Elle consiste à s'appuyer sur l'existence du réseau $Sl(N, \mathbf{Z})$ de $Sl(N, \mathbf{R})$. Elle s'applique à tous les groupes de Lie semi-simples réels $G$. En effet, à isogénie près, $G$ se plonge (de multiples façons) dans $Sl(N, \mathbf{R})$, comme lieu des zéros communs à des polynomes à coefficients rationnels. Alors $\Gamma = G \cap Sl(N, \mathbf{Z})$ est un réseau de $G$, voir [B3].

*Exemple* : Soit $q$ une forme quadratique entière sur $\mathbf{R}^N$, de signature $(1, N-1)$. Alors $\Gamma = O(q) \cap Sl(N, \mathbf{Z})$ est un réseau de $G = O(q)$. On voit aisément que $\Gamma$ est uniforme si et seulement si $q$ ne représente par zéro. Malheureusement, cela ne se produit jamais si $N \geq 4$.

Modifions la construction. Réalisons $G' = O(N) \times O(N-1, 1)$ comme groupe de matrices $2N \times 2N$ défini sur $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ comme suit : $G'$ est le sous-groupe qui préserve la décomposition $\mathbf{R}^{2N} = \mathbf{R}^N \oplus \mathbf{R}^N$ et la forme quadratique $q(x, y) = q_+(x) + q_-(y)$ où $q_\pm(x) = \sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 \pm \sqrt{2} x_N^2$. Alors $\Gamma = G' \cap Sl(N, \mathbf{Z}(\sqrt{2}))$ est un réseau de $G'$. En effet, si $\Phi(x, y) = (x + \sqrt{2}y, x - \sqrt{2}y)$, alors $\Phi^{-1} G' \Phi$ est défini sur $\mathbf{Q}$ et $\Phi^{-1} \Gamma \Phi = \Phi^{-1} G' \Phi \cap Sl(2N, \mathbf{Z})$. Comme $q$ ne représente pas zéro sur $\mathbf{Z}^{2N}$, $\Gamma$ est uniforme. Sa projection sur le facteur $O(N-1, 1)$ est un réseau uniforme.

**2.5** DÉFINITION .- *Soit $G$ un groupe de Lie semi-simple réel. Un sous-groupe $\Gamma$ de $G$ est dit* arithmétique *s'il admet un sous-groupe d'indice fini obtenu comme suit : On réalise un produit $G \times L$ (où $L$ est un groupe de Lie compact) comme sous-groupe de $Sl(N, \mathbf{R})$ défini sur $\mathbf{Q}$, on prend la projection dans $G$ du sous-groupe des matrices à coefficients entiers de $G \times K$.*

Cette construction permet d'obtenir des réseaux uniformes et non uniformes dans tous les groupes de Lie semi-simples, [B2].

### 2.6. Groupes non arithmétiques.

Il existe des critères d'arithméticité pour les groupes engendrés par réflexions, voir [V] dans le cas hyperbolique réel et [D-M] dans le cas hyperbolique complexe.

On trouve ainsi des exemples non arithmétiques dans $PO(n,1)$ pour $n \leq 10$ (O.P. Ruzmanov, [Ru]) ainsi que dans $PU(n,1)$ pour $n \leq 3$, [D-M].

M. Gromov et I. Piatetskii-Shapiro [G-P] construisent des variétés à courbure constante non arithmétiques en toute dimension, par le procédé d'hybridation contre nature. On part de deux variétés arithmétiques $V_1$ et $V_2$ qui possèdent une symétrie, et telles que le lieu des points fixes, des hypersurfaces $H_1$ et $H_2$, soient isométriques. La variété $V$ obtenue en recollant une moitié de $V_1$ à une moitié de $V_2$ le long de $H$ n'est pas arithmétique en général. Le critère d'arithméticité utilisé est le suivant : dans une variété arithmétique, toute surface immergée totalement géodésiquement qui contient au moins deux géodésiques fermées est fermée.

### 2.7. Groupes non superrigides.

Hypersurfaces totalement géodésiques brisées. Les variétés construites en 2.4 possèdent un groupe $D_4$ de symétrie qui les divisent en 4 parts de gâteau. Le bord de chaque part constitue un plongement non totalement géodésique d'une variété à courbure constante dans une autre.

Pliage. On peut plier continûment un $n$-plan de $H^n$ dans $H^{n+1}$ le long d'une collection de $n-1$-plans. Si la collection est invariante par un réseau $\Gamma$ de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$, on obtient une déformation continue non triviale de $\Gamma$ dans $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^{n+1})$, [Th1].

## 3. BORDS À L'INFINI

Dans ce paragraphe, on explique l'enchaînement d'idées qui, de A. Selberg à G.D. Mostow et G.A. Margulis, culmine avec le théorème d'arithméticité des réseaux en rang $\geq 2$.

### 3.1. L'approche de A. Selberg.

Vers 1958, A. Selberg a constaté que les réseaux uniformes de $Sl(n,\mathbf{R})$, $n \geq 3$, n'ont pas de déformations continues non triviales. Il me semble que son argument est, pour l'essentiel, valable pour un réseau uniforme $\Gamma$ d'un groupe semi-simple $G$ dont l'espace symétrique a un rang $r \geq 2$.

Il repose sur l'étude des sous-groupes abéliens libres maximaux de $\Gamma$. Un argument de densité ramène le problème à montrer que, dans une déformation, les centralisateurs $\Gamma_a$ des éléments $a \in \Gamma$ suffisamment hyperboliques restent conjugués à eux-mêmes. Or chaque quotient $\Gamma_a \backslash G_a$ est compact, donc $\Gamma_a$ est un réseau dans $G_a = \mathbf{R}^r$. Dans $G_a$, il y a un sous-ensemble $\mu$ (une réunion d'hyperplans, les murs des chambres de Weyl) formé des $b$ tels que $\dim G_b > r$. L'intersection $\mu \cap \Gamma_a = \{b \in \Gamma_a \; ; \; \Gamma_b$ n'est pas abélien$\}$ est un invariant du groupe abstrait $\Gamma$. Ne pouvant traverser les murs des chambres de Weyl, le réseau $\Gamma_a$ reste homothétique à lui-même dans une déformation continue.

### 3.2. Remarque.

Si on pouvait affirmer que pour suffisamment de $a$, $\mu \cap \Gamma_a$ est non vide, on pourrait s'affranchir du raisonnement par continuité, et établir la rigidité à la Mostow. L'idée de G.D. Mostow est d'étendre la correspondance entre centralisateurs $\Gamma_a$ équipés de leurs murs $\mu \cap \Gamma_a$ (en général triviaux), induite par un isomorphisme de réseaux à tous les centralisateurs $G_g$ d'éléments hyperboliques réguliers $g$ de $G$ équipés de leurs murs $\mu$ non triviaux.

### 3.3. Rigidité à la Mostow.

Donnons un aperçu de la preuve du théorème 1.5 dans le cas de réseaux uniformes.

Les centralisateurs d'éléments hyperboliques réguliers ont une traduction géométrique dans l'espace symétrique $G/K$ : ce sont les *plats*, i.e., les sous-espaces plats totalement géodésiques maximaux. Etant donné un point $m$ d'un plat $P$, les autres plats passant par $m$ découpent $P$ en *chambres de Weyl*. Deux chambres de Weyl sont dites *asymptotes* si chacune reste dans un voisinage de largeur bornée de l'autre. L'espace des classes d'équivalence de chambres de Weyl est appelé la *frontière maximale* de $G$, et notée $G/P$. C'est le plus grand espace homogène compact de $G$. Lorsque la courbure est strictement négative, $G/K \cup G/P$ est homéomorphe à un disque fermé (voir la figure 1).

Etant donné un réseau $\Gamma$, les classes de chambres de Weyl portées par un plat laissé invariant par un sous-groupe de rang $r$ de $\Gamma$ forment un ensemble dense dans la frontière maximale. Si $h : \Gamma \to \Gamma'$ est un isomorphisme, il induit une bijection entre sous-ensembles denses de $G/P$, qu'on parvient à prolonger en un homéomorphisme $\partial h$.

Lorsque le rang de $G/K$ est au moins 2, on conclut en utilisant une caractérisation de l'action de $G$ sur $G/P$ due à J. Tits [T2]. En effet, $\partial h$ préserve les relations d'incidence entre plats, et les seules symétries de cette "géométrie d'incidence" sont les éléments de $G$.

En rang un, il n'y a pas de géométrie d'incidence au bord, mais une géométrie conforme. Il est classique que les prolongements au bord d'isométries de $H^n$, $n \geq 3$, sont caractérisés par la propriété d'être *conformes*, i.e., différentiables avec une différentielle qui préserve les angles. Dans ce cas, le défaut de conformité est mesuré par une fonction $\Gamma$-invariante sur un espace homogène compact de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$ (c'est ici que le cas de $H^2$ se distingue). L'ergodicité de $\Gamma$ sur cet espace (F.I. Mautner) force $\partial h$ a être conforme.

### 3.4. Commentaire.

De la méthode de G.D. Mostow, deux aspects seront repris dans les développements ultérieurs. D'abord l'idée qu'on sait reconnaître, parmi les applications entre des espaces homogènes de $G$, même peu régulières, celles qui sont induites par un élément de $G$. Ensuite, l'ergodicité de l'action d'un réseau $\Gamma$ dans un espace homogène $G/Q$ exprime que des objets $\Gamma$-invariants sont automatiquement $G$-invariants, et c'est un bon point de départ vers la superrigidité.

### 3.5. Remarque.

L'argument de G.D. Mostow a un aspect dynamique : la dynamique topologique de l'action d'un réseau sur le bord détermine le réseau à conjugaison près. On connaît peu d'exemples d'actions différentiables de réseaux sur des variétés compactes. On peut considérer l'étude de ces actions comme une généralisation de l'étude des représentations de dimension finie des réseaux et on s'attend a des phénomènes de rigidité analogues, voir [K-L].

### 3.6. Bords de groupes discrets.

Pour exprimer la relation profonde entre un réseau uniforme et le groupe de Lie qui le contient, G.A. Margulis a dégagé le concept de *quasiisométrie* entre espaces métriques (application bilipschitzienne entre sous-ensembles discrets). M. Gromov a mis en évidence un grand nombre d'invariants de quasiisométrie des groupes discrets. C'est dans le cadre des espaces métriques hyperboliques (généralisation de la courbure strictement négative) que cette notion est la plus utile. M. Gromov attache à un tel espace un bord à l'infini, fonctoriel sous les quasiisométries, et qui porte une géométrie "quasiconforme". Ce bord est le principal outil d'investigation des groupes hyperboliques, [G1].

### 3.7. Preuve topologique.

M. Gromov a donné une preuve de la rigidité à la Mostow des réseaux de Isom $(\mathbf{H}^n)$ qui repose sur une caractérisation des isométries au moyen des simplexes idéaux réguliers, et sur l'invariance topologique du volume des variétés à courbure constante, voir [Th].

### 3.8. Groupes géométriquement finis.

Un groupe d'isométries de $H^3$ est dit *géométriquement fini* s'il possède un polyèdre fondamental qui n'a qu'un nombre fini de faces. Pour un tel groupe $\Gamma$, l'espace des orbites $\Gamma \backslash H^3$ n'est pas en général compact, mais il a un bord à l'infini qui est une surface de type topologique fini, munie d'une structure conforme. Les déformations de $\Gamma$ dans Isom $(\mathbf{H}^3)$ sont exactement paramétrées par les structures conformes sur le bord à l'infini. Ce résultat, qu'on peut voir comme une forme de la rigidité à la Mostow, joue un rôle essentiel dans le théorème d'hyperbolisation de W. Thurston, [Th].

### 3.9. Superrigidité.

Le mot est dû à G.D. Mostow.

Echafaudant à partir des idées de G.D. Mostow, la preuve de G.A. Margulis apporte un ingrédient supplémentaire, les propriétés spécifiques des actions algébriques de groupes algébriques sur des variétés algébriques. Naïvement, la Zariski densité d'un réseau $\Gamma$ dans $G$ (A. Borel) exprime à nouveau que les fonctions $\Gamma$-invariantes sont automatiquement $G$-invariantes, et cela a aussi à voir avec la superrigidité.

La stratégie consiste à produire des objets dans des espaces très vastes, en vertus de principes généraux, puis à prouver leur régularité grâce à l'ergodicité de l'action d'un réseau sur tout espace homogène. Les espaces vastes sont

- l'espace $\mathcal{M}(V)$ des mesures de probabilité sur une variété algébrique $V$ ;
- l'espace $F(X, V)$ des applications mesurables d'un espace mesuré $X$ dans $V$.

Du point de vue de la dynamique d'une action algébrique, ces espaces sont aussi bons que des variétés algébriques : si $H$ agit sur $V$, les stabilisateurs des points de $\mathcal{M}(V)$ ou de $F(X, V)$ sont des sous-groupes algébriques (à un compact près), et les quotients $\mathcal{M}(V)/H$ et $F(X, V)/H$ ont une bonne structure borélienne.

**3.10. La preuve.**

D'après [Z]. Soit $\Gamma$ un réseau irréductible de $G$ et $\pi : G \to H$ un homomorphisme Zariski dense.

1) Construction d'une application mesurable $\Gamma$-equivariante de $G/P$ dans un espace homogène de $H$. Le sous-groupe $P$ étant moyennable, il a un point fixe $\phi$ dans le convexe faiblement compact des applications mesurables $\Gamma$-équivariantes de $G$ dans $\mathcal{M}(V)$, où $V$ est le bord de $H$. Projetée dans l'espace des orbites $\mathcal{M}(V)/H$, cette application est $\Gamma$-invariante donc constante. $\phi$ est donc à valeurs dans une seule orbite, notée $W$, de $H$.

2) Caractérisation des homomorphismes. En général, les applications $f : G \to W$ qui sont les orbites pour un homomorphisme $G \to H$ correspondent aux points fixes de $G$ dans l'espace quotient $F(G, W)/H$. Si $\Gamma$ agissait ergodiquement sur $G$, on concluerait immédiatement que $\phi$ provient d'un homomorphisme $G \to H$. Evidemment, ce n'est pas vrai, mais ce raisonnement s'applique si on remplace $G$ par un sous-groupe $C$ de $G$ qui commute avec un sous-groupe $T$ de $P$ : l'application $\phi$ induit une application $G/T \to F(C, W)/H$, qui est $\Gamma$-invariante donc constante. Par conséquent, le long de chaque orbite de $C$, $\phi$ est un homomorphisme, donc analytique. Si de plus $C$ est unipotent, alors $\phi$ est polynomiale.

3) Avec des sous-groupes unipotents centralisant des éléments singuliers de $P$, on obtient un système de coordonnées rationnel du bord $G/P$ (c'est impossible en rang 1). L'application $\phi$, polynomiale le long des axes de coordonnées, est globalement rationnelle. On en déduit que l'adhérence de Zariski du graphe de $\pi$ dans $G \times H$ est le graphe d'un homomorphisme de $G$ dans $H$ prolongeant $\pi$.

**3.11. Remarques.**

Le cadre naturel du théorème de G.A. Margulis est la théorie des groupes algébriques sur les corps locaux. La méthode s'étend naturellement au cas où $G$ est un produit de groupes simples sur $\mathbf{R}$ et les $\mathbf{Q}_p$, voir [Ma3].

H. Furstenberg a proposé une méthode plus géométrique pour la première étape. L'idée est qu'une vaste classe de marches aléatoires sur $G$ ont pour frontière de Poisson le bord $G/P$. Cette classe inclut les marches concentrées sur des sous-groupes pourvu qu'ils soient Zariski denses, voir [F]. N. A'Campo et M. Burger proposent dans [A-B] une preuve plus intuitive : l'argument décisif est, comme dans Selberg et Mostow, le fait qu'on peut relier deux éléments hyperboliques réguliers de $G$ par une chaîne d'éléments hyperboliques qui commutent deux à deux.

Il existe deux résultats de superrigidité en rang 1 qui utilisent la première partie du raisonnement de G.A. Margulis. W. Thurston, [Th], montre que toute application de degré non nul entre variétés compactes à courbure constante est homotope à un revêtement isométrique. D. Toledo, [To], montre qu'un homomorphisme d'un groupe de surface dans $U(n,1)$ de première classe de Chern maximale passe par $U(n-1) \times U(1,1)$.

**3.12. Arithméticité.**

Voici comment G.A. Margulis montre qu'un réseau superrigide est arithmétique, [Ma1].

a. D'après A. Selberg (voir en 4.3), on peut supposer que, dans une représentation de $G$ définie sur $\mathbf{Q}$, les coefficients de matrices de $\Gamma$ sont algébriques. En fait, comme $\Gamma$ a un nombre fini de générateurs, dans une extension $\mathbf{K}$ de degré $d$ de $\mathbf{Q}$. Quitte à plonger $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{Q}^d$, on se ramène au cas où $G$ est un facteur d'un produit $G \times G'$, sous-groupe de $Sl(N, \mathbf{R})$ défini sur $\mathbf{Q}$, et $\Gamma \subset Sl(N, \mathbf{Q})$.

b. La superrigidité de $\Gamma$ par rapport à $G'$ entraîne que $G'$ est compact.

c. Pour chaque nombre premier $p$, l'image de $\Gamma$ dans $Sl(N, \mathbf{Q}_p)$ est relativement compacte (superrigidité par rapport à $Sl(N, \mathbf{Q}_p)$), donc un sous-groupe d'indice fini a son image dans $Sl(N, \mathbf{Z}_p)$. On conclut que $\Gamma \cap Sl(N, \mathbf{Z})$ est d'indice fini dans $\Gamma$.

**3.13. Remarques.**

1. Dans une certaine mesure, les groupes algébriques sur $\mathbf{Q}$ sont tous connus, J. Tits, [T1]. On peut donc dire que le théorème d'arithméticité constitue une classification, à commensurabilité près, des réseaux dans les groupes semi-simples de rang $\geq 2$.

2. Dans les exemples connus de réseaux non arithmétiques, c'est l'étape b qui est en défaut. Pour chacun de ces exemples, le groupe $\Gamma$ est un sous-groupe d'un réseau arithmétique irréductible d'un produit $G \times G'$, où $G'$ est non compact, mais dont la projection sur $G$ est néanmoins discrète. Voir par exemple [C-W].

## 4. INTEGRATION PAR PARTIES

C'est une autre manière de montrer que certains objets $\Gamma$-invariants sont forcément $G$-invariants. Dans ce paragraphe, on explique les fondements de la méthode, et ses applications à des problèmes linéaires : rigidité locale de représentations, annulation de cohomologie, propriété (T) de D. Kazhdan.

**4.1. La formule de Bochner.**

Plaçons nous dans le cas simple où $G = \mathbf{R}^n$ et $\Gamma = \mathbf{Z}^n$. Si $f$ est une fonction $\Gamma$-invariante sur $G$, alors en intégrant par parties le carré de la norme des dérivées secondes, on trouve

$$\int_{\Gamma \backslash G} |\Delta f|^2 - |D^2 f| = 0.$$

Si $f$ est harmonique, on conclut que $f$ est linéaire puis constante, i.e., $G$-invariante.

La formule s'étend aux 1-formes $\alpha$ (et pas seulement $\alpha = df$). Sur une variété compacte non plate, un terme en courbure (la courbure de Ricci) apparaît, c'est la formule de S. Bochner :

$$\int_M |d\alpha|^2 + |\delta\alpha| - |D\alpha|^2 = \int_M Ricci(\alpha, \alpha)$$

où $D$ est la connexion de Levi-Civita.

La formule se généralise au cas des formes à valeurs dans un fibré $E$ muni d'une connexion orthogonale $D$.

$$(1) \qquad \int_M |d^D\alpha|^2 + |\delta^D\alpha| - |D\alpha|^2 = \int_M Ricci(\alpha,\alpha) - \mathrm{tr}(\alpha^* R^E)$$

où $R^E$ est la courbure du fibré $(E, D)$, qui, prenant ses valeurs dans $End(E)$, est ramenée dans $End(TM)$ au moyen de $\alpha \in Hom(TM, E)$. Même lorsque la courbure de Ricci est négative (c'est toujours le cas pour les espaces symétriques non compacts), la formule peut donner des résultats à condition que la courbure de $E$ soit suffisamment positive.

Lorsque le fibré $E$ est donné avec une connexion $\nabla$ non orthogonale, on applique la formule à la partie antisymétrique $D$ de $\nabla$, qui est une connexion orthogonale.

### 4.2. L'approche cohomologique de la rigidité locale.

Soit $\Gamma$ un groupe discret, et $\pi : \Gamma \to G$ un homomorphisme dans un groupe de Lie semi-simple. Les déformations infinitésimales de $\pi$ sont mesurées par $H^1(\Gamma, Lie(G)_\pi)$. Si $\Gamma$ est le groupe fondamental d'une variété asphérique $N$, la représentation $\pi$ composée avec la représentation adjointe détermine un fibré $E$ sur $N$ muni d'une connexion plate $\nabla$, et on peut calculer $H^1(\Gamma, Lie(G)_\pi) = H^1(N, E)$ au moyen du complexe des formes différentielles à valeurs dans $E$. On choisit une métrique sur $E$ (cela revient à choisir une application équivariante de $\tilde{N}$ dans $G/K$). Si $N$ est compacte, chaque classe de cohomologie contient une unique 1-forme harmonique, i.e., dans $\ker d^\nabla \cap \ker \delta^\nabla$.

La preuve du théorème de rigidité infinitésimale d'A. Weil (dont A. Weil attribue la paternité à E. Calabi) consiste à montrer que toute 1-forme harmonique est nulle en appliquant la formule de S. Bochner. Il faut calculer la courbure de la connexion unitaire $D$ sur le fibré $E$. Celui-ci s'identifie à $TM \oplus KM$ où $M = G/K$ est l'espace symétrique de $G$, $KM$ est l'algèbre de Lie de $K$ vue comme un sous-espace de $End(TM)$, est $D$ n'est autre que la connexion de Levi-Civita de $M$. Si on décompose $\alpha = \beta + \gamma$ où $\beta$ (resp. $\gamma$) est à valeurs dans $TM$ (resp. $KM$), alors

$$(2) \qquad \mathrm{tr}(\alpha^* R^E) = 2\langle \mathring{R}\,\beta, \beta\rangle + 2\mathrm{tr}(\hat{R} \circ [\gamma \wedge \gamma])$$

(ici, $\overset{\circ}{R}$ et $\hat{R}$ sont les deux manières de faire d'un tenseur de courbure un endomorphisme symétrique de $End(TM)$ ; $\hat{R}$, qui est nul sur les endomorphismes symétriques, s'appelle traditionnellement l'opérateur de courbure).

A. Weil choisit évidemment $N = \pi(\Gamma) \setminus M$ et vérifie que, sauf dans le cas où $M$ est de dimension 2, les deux termes de (2) compensent largement la courbure de Ricci ainsi que la contribution de $d^D\alpha$ et $\delta^D\alpha$ (qui ne sont pas nuls).

La méthode, qui s'appuie seulement sur la compensation entre la courbure de $G/K$ et celle de $N$, devrait s'appliquer à l'étude des représentations du groupe fondamental de variétés non localement symétriques.

### 4.3. Algébricité.

A. Selberg remarque que l'annulation de $H^1(\Gamma, Lie(G)_\pi)$ entraîne qu'on peut plonger $G$ dans $Sl(N, \mathbf{C})$ de façon que les matrices des éléments de $\Gamma$ aient des coefficients algébriques sur $\mathbf{Q}$. En effet, réalisons $G$ comme les points réels d'un groupe algébrique sur $\mathbf{Q}$, et soit $G^{\mathbf{C}}$ le groupe de ses points complexes. L'espace des représentations $X^{\mathbf{C}} = Hom(\Gamma, G^{\mathbf{C}})$ est un ensemble analytique complexe, sur lequel le groupe $G^{\mathbf{C}}$ agit par conjugaison. Soit $\pi : \Gamma \to G$ un homomorphisme. Son orbite $G^{\mathbf{C}}\pi$ est une sous-variété lisse. Si $H^1(\Gamma, Lie(G^{\mathbf{C}})_\pi) = H^1(\Gamma, Lie(G)_\pi) \otimes \mathbf{C} = 0$, alors l'orbite et $X^{\mathbf{C}}$ ont même espace tangent de Zariski, donc $G^{\mathbf{C}}\pi$ est ouvert dans $X^{\mathbf{C}}$. D'après le Nullstellensatz, les points algébriques sur $\mathbf{Q}$ de $X^{\mathbf{C}}$ sont denses dans $X^{\mathbf{C}}$, donc, à conjugaison près, $\pi \in X^{\overline{\mathbf{Q}}}$.

### 4.4. La formule de Matsushima.

En lisant A. Weil, Y. Matsushima a découvert une variante de la formule de Bochner qui permet d'obtenir des résultats d'annulation plus fins. La présentation qu'on va en donner est due à N. Mok, Y.T. Siu et S.K. Yeung.

En contemplant la formule (2), on a envie d'intégrer par parties une expression comme $\langle \overset{\circ}{R}\,\beta, \beta \rangle$. Sur un espace localement symétrique, ça se passe bien parce que le tenseur de courbure est parallèle. Rappelons qu'un *tenseur de courbure* sur un espace vectoriel $V$ est un 4-tenseur covariant qui possède les mêmes symétries que le tenseur de courbure d'une variété riemannienne (rendu covariant), à savoir

$$Q(X,Y,Z,T) = -Q(Y,X,Z,T) = Q(Z,T,X,Y)$$
$$Q(X,Y,Z,T) + Q(Y,Z,X,T) + Q(Z,X,Y,T) = 0.$$

En présence d'une métrique $g$ sur $V$, on fait agir $Q$ sur les 1-formes et les 2-tenseurs comme suit : $Q(\alpha) = g_{km}Q^{ijkl}\alpha^m \in \Lambda^2 V^* \otimes V^*$ et $\overset{\circ}{Q}\ \tau = g_{km}g_{ln}Q^{ikjl}\tau^{mn} \in V^* \otimes V^*$. Enfin, il existe un unique tenseur de courbure, noté $I$ tel que $\overset{\circ}{I}$ soit l'identité ($-I$ est le tenseur de courbure de l'espace hyperbolique).

**4.5** PROPOSITION .– *Soit $M$ une variété riemannienne compacte, $R$ son tenseur de courbure, $E$ un fibré vectoriel sur $M$ muni d'une métrique et d'une connexion orthogonale $D$. Soit $\alpha$ une 1-forme sur $M$ à valeurs dans $E$. Soit $Q$ un tenseur de courbure parallèle sur $M$. On a (intégration par parties)*

$$\int_M \langle \overset{\circ}{Q}\ D\alpha, D\alpha\rangle = \frac{1}{2}\int_M \left(\langle Q, \alpha^* R^E\rangle + \langle Q(\alpha), R(\alpha)\rangle\right). \tag{3}$$

Sur toute variété riemannienne, on peut transplanter le tenseur $I$ et il est parallèle. En faisant $Q = I$, on retrouve la formule (1). En général, $I$ est le seul tenseur de courbure parallèle. En effet, pour une variété riemannienne générique, le groupe d'holonomie de la connexion de Levi-Civita est $SO(n)$ ou $O(n)$, qui ne laisse invariante qu'une droite de tenseurs de courbure.

Les variétés localement symétriques sont caractérisées par le fait que leur tenseur de courbure est parallèle. On peut donc prendre pour $Q$ une combinaison de $I$ et de $R$. Sur une variété localement symétrique *localement irréductible* (i.e., le revêtement universel n'est pas un produit riemannien, ou, ce qui revient au même, son groupe d'isométries est simple), le terme $\langle Q(\alpha), R(\alpha)\rangle$ est automatiquement proportionnel à $\langle Q, R\rangle|\alpha|^2$. Dans ce cas, pour des formes scalaires et si $Q = R_\perp$ est la composante de $I$ orthogonale au tenseur de courbure, la formule (3) devient simplement

$$\int_M \langle \overset{\circ}{R}_\perp\ D\alpha, D\alpha\rangle = 0.$$

**4.6** COROLLAIRE .– *Si $\Gamma$ est un réseau uniforme d'un groupe de Lie semi-simple distinct de $SO(n,1)$ ou $SU(n,1)$, alors $H^1(\Gamma,\mathbf{R})=0$.*

En effet, si $\alpha$ est une 1-forme harmonique, $D\alpha$ est symétrique à trace nulle. Or $\overset{\circ}{R}_\perp$ est défini positif dans tous les cas indiqués dans l'énoncé. Cette propriété algébrique résulte des efforts de E. Calabi, E. Vesentini [C-V], A. Borel [B1], Y. Matsushima et S. Kaneyuki, T. Nagano [K-N] (et sans doute d'autres encore). On trouve que $D\alpha=0$, et enfin $\alpha=0$.

### 4.7. Remarques.

1. La méthode s'étend aux formes de degré supérieur, voir le livre [B-W].
2. Une preuve conceptuelle de la positivité de $\overset{\circ}{R}_\perp$ est souhaitable.
3. H. Garland, [Ga2], a découvert une sorte de version simpliciale de la méthode de Y. Matsushima. Elle s'applique avec succès aux quotients compacts des immeubles de Tits associés aux groupes semi-simples sur $\mathbf{Q}_p$, et fournit un théorème d'annulation de cohomologie pour les réseaux. En particulier, $H^1(\Gamma,\mathbf{R})=0$ dès que l'immeuble est de dimension $\geq 2$ (et $p$ assez grand, sinon, voir [B-W]).

### 4.8. La propriété (T) de Kazhdan.

En 1968, D. Kazhdan, a découvert une autre manière de montrer la nullité de $H^1(\Gamma,\mathbf{R})$ lorsque $\Gamma$ est un réseau dans un groupe de Lie semi-simple de rang $\geq 2$. Le point remarquable est le fait que la propriété suivante

(T) *La représentation triviale est isolée dans l'espace des représentations unitaires de $G$*

est vraie simultanément pour $G$ et pour un réseau $\Gamma$ de $G$. Clairement, la propriété $T$ pour les représentations de dimension 1 entraîne que $H^1(\Gamma,\mathbf{R})=0$.

D. Kazhdan a prouvé que les groupes de Lie semi-simples de rang $\geq 2$ possèdent la propriété (T) ([K], [D-K]). Les groupes $Sp(n,1)$, $n\geq 2$ et $F_4^{-20}$ l'ont aussi (B. Kostant).

L'analyse de l'espace tangent à l'espace des représentations unitaires de $\Gamma$ conduit à la formulation équivalente : (T) $\Leftrightarrow$ $H^1(\Gamma,\pi)=0$ pour toute représentation unitaire $\pi$ de $\Gamma$. Cette annulation est aussi une conséquence de la formule de

Y. Matsushima (3). En effet, $\pi$ définit un fibré unitaire plat $(E, \nabla)$ (en général de dimension infinie) sur $M = \Gamma \setminus G/K$, et $H^1(\Gamma, \pi) = 0$ se calcule au moyen des formes différentielles $L^2$ à valeurs dans $E$. De $\int \langle \mathring{R}_\perp D\alpha, D\alpha \rangle = 0$, et avec $\mathring{R}_\perp \gg 0$, on tire une inégalité de la forme $|D\alpha|^2 \leq C(\| d\alpha \|^2 + \| \delta\alpha \|^2)$. En particulier, le laplacien est inversible sur $L^2$, et on peut résoudre l'équation cohomologique $d\beta = \alpha$ par $\beta = \delta\Delta^{-1}\alpha$. Le même argument, s'appuyant sur les résultats de H. Garland, prouve la propriété (T) pour les réseaux des groupes semi-simples $p$-adiques.

**4.9. Le cas de $SO(n,1)$ et de $SU(n,1)$.**

Ces groupes n'ont pas la propriété (T). En un certain sens, ils sont incompatibles avec (T) : tout homomorphisme d'un groupe possédant la propriété (T) dans $SO(n,1)$ ou $SU(n,1)$ a une image relativement compacte, voir le livre [H-V].

**4.10. Tenseurs de courbure parallèles.**

On peut se demander si il y a d'autres candidats que $I$ et $R$ à mettre dans la formule (3). En général non.

Pour un espace symétrique $M = G/K$, l'holonomie de la connexion de Levi-Civita est exactement $adK \subset End(TM)$. Les objets parallèles sur $M$ correspondent aux objets $adK$ -invariants sur $End(TM)$. Comme un tenseur de courbure peut être vu comme une forme quadratique sur $\Lambda^2 TM$, la dimension $d(M)$ de l'espace des tenseurs de courbure parallèle est inférieure au nombre de composantes irréductibles dans la décomposition de $End(TM)$ sous $K$. Visiblement, $Lie(K)$ est un sous-espace invariant. Dans le cas où $G$ est simple, il s'avère, [W-Z], que son orthogonal est toujours irréductible. Par conséquent, $d(M)$ ne dépend que du nombre de facteurs simples dans $K$. Il vient

$d(M) = 2$ en général ;

$d(M) = 1$ pour l'espace hyperbolique ;

$d(M) = 3$ si $M$ est hermitien $(K = U(1)K')$ ou quaternionien $(K = Sp(1)K')$ avec les exceptions suivantes ;

$d(M) = 4$ si $M$ est dual d'une grassmannienne (alors $K$ a trois facteurs simples).

Les tenseurs parallèles autres que $I$ et $R$ joueront effectivement un rôle dans la preuve de la superrigidité, voir en 5.1.

### 4.11. Variétés non symétriques.

D'après M. Berger, parmi les sous-groupes de $O(n)$, il n'y a qu'un petit nombre de choix possibles pour l'holonomie d'une variété riemannienne qui n'est pas localement un produit riemannien. Seules trois familles peuvent avoir une courbure de Ricci non nulle : $SO(n)$, $U(n/2)$ et $Sp(n/4)Sp(1)$. Les variétés à holonomie $U(n/2)$ sont les variétés *kählériennes*. Elles portent un tenseur de courbure parallèle $I_{\mathbf{C}}$, transplanté de l'espace projectif complexe. Quand on fait $Q = (I_{\mathbf{C}})_{\perp}$ dans la formule (3), on démontre la fameuse décomposition de Hodge

$$H^1(M, \mathbf{R}) = H^0(M, \Omega^1) + \overline{H^0(M, \Omega^1)}.$$

En effet, comme $\langle \overset{\circ}{Q}\, D\alpha, D\alpha\rangle = |d''\alpha^{1,0}|^2$, si $\alpha$ est harmonique, alors sa composante de type $(1,0)$ est holomorphe.

Les variétés à holonomie $Sp(n/4)Sp(1)$ sont les variétés *quaternion-kählériennes*, plus rares. Elles portent un tenseur de courbure parallèle $I_{\mathbf{H}}$, transplanté de l'espace projectif quaternionien. Quand on fait $Q = (I_{\mathbf{H}})_{\perp}$ dans la formule (3), on prouve que $H^1(M, \mathbf{R}) = 0$.

## 5. APPLICATIONS HARMONIQUES

Dans ce paragraphe, on explique comment la méthode d'intégration par parties peut s'appliquer à des problèmes non linéaires comme la superrigidité ou l'arithméticité.

Dès 1964, J. Eells et J. Sampson ont proposé d'utiliser les applications harmoniques pour étudier les homomorphismes d'un groupe discret dans le groupe d'isométries d'une variété à courbure négative ou nulle. Ce n'est qu'en 1980 que Y.T. Siu est parvenu à donner par cette méthode une preuve de la rigidité à la Mostow des réseaux de certains espaces symétriques hermitiens, [Siu]. Depuis, N. Mok a obtenu une preuve de la superrigidité des réseaux des espaces symétriques hermitiens, [Mok]. La grande nouveauté est que cette méthode permet d'étendre la superrigidité aux espaces de rang 1, non couverts par le théorème de Margulis, K. Corlette [Co2]. Depuis, J. Jost et S.T.Yau [J-Y] et N. Mok, Y.T. Siu et S.K. Yeung [M-S-Y] ont trouvé des preuves qui couvrent tous les cas. C'est cette dernière qu'on va exposer en détail.

Le principe est simple, et imite la démarche de Bochner pour l'annulation de cohomologie. Soit $M$ une variété compacte dont le revêtement universel est contractile, soit $\Gamma$ son groupe fondamental. Soit $N$ une variété simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle, $H$ son groupe d'isométries et $\pi : \Gamma \to H$ un homomorphisme. Typiquement, $N = H/L$ est un espace symétrique.

1) (De Rham) On représente $\pi$ par une classe d'homotopie d'applications $M \to \pi(\Gamma) \setminus N$ (si $\pi(\Gamma)$ n'est pas discret, il vaut mieux parler d'applications équivariantes $\tilde{M} \to N$).

2) (Hodge) On choisit un représentant harmonique, i.e., qui minimise l'énergie $\int |df|^2$. Une telle application existe par exemple lorsque $\pi(\Gamma)$ est discret cocompact dans $N$, J. Eells et J. Sampson, [E-S]. En fait, elle existe si et seulement si $\pi(\Gamma)$ est "réductif" (c'est une notion riemannienne, due à F. Labourie [La] ; lorsque $N = H/L$ est un espace symétrique, $\pi(\Gamma)$ est "réductif" si et seulement si son adhérence de Zariski réelle dans $H$ est réductive, K. Corlette, [Co1]). Comme dans la situation linéaire (cohomologie de de Rham), c'est la convexité de l'énergie, conséquence de la courbure sectionnelle négative ou nulle, qui garantit l'existence d'un minimum.

3) Caractérisation des homomorphismes qui s'étendent. Supposons que $\Gamma$ est un réseau de $G$, que $M = \Gamma \setminus G/K$ et $N = H/L$ sont localement symétriques. Alors $\pi$ s'étend en un homomorphisme de $G$ dans $H$ (éventuellement à un groupe compact près) si et seulement si il existe une application équivariante et *totalement géodésique* de $\tilde{M}$ dans $N$. Une application $f : M \to N$ est totalement géodésique si elle envoie géodésique dans géodésique. Si on voit la différentielle de $f$ comme une 1-forme à valeurs dans le fibré $f^*TN$, muni de la connexion ramenée de celle de $N$, on a

$$f \text{ est totalement géodésique} \Leftrightarrow Ddf = 0, \quad f \text{ est harmonique} \Leftrightarrow \operatorname{tr} Ddf = 0.$$

Par conséquent, la superrigidité est ramenée à un théorème d'annulation pour $Ddf$, lorsque $df$ est une 1-forme harmonique à valeurs dans $E = f^*TN$.

4) Formule à la Bochner. Elle dépend des auteurs.

K. Corlette [Co2] exploite l'existence (pour certains espaces localement symétriques) de formes différentielles parallèles. Il s'appuie sur la propriété suivante. Si $C$ désigne l'opérateur sur les formes différentielles de multiplication de Clifford par une forme parallèle $\omega$, alors $C$ commute avec l'opérateur différentiel $d + \delta$. Pour une 1-forme harmonique $\alpha$, on a

$$\int_M |dC\alpha|^2 = -\int_M \langle dC\alpha, \delta C\alpha\rangle = 0.$$

Le noyau de l'opérateur (algébrique) $D\alpha \mapsto dC\alpha$ est l'algèbre de Lie du sous-groupe du groupe linéaire qui laisse invariante la forme parallèle $\omega$. Dans le cas de l'espace hyperbolique quaternionien (resp. de Cayley), $\omega$ est une 4-forme (resp. une 8-forme) dont le stabilisateur est compact. On conclut que, lorsque $\alpha$ est fermée, $dC\alpha = 0 \Rightarrow D\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$. L'argument s'étend aux applications harmoniques à valeurs dans une variété à opérateur de courbure négatif.

N. Mok, Y.T. Siu et S.K. Yeung utilisent la formule (3), qui prend dans ce cas particulier la forme suivante

$$(4) \qquad \int_M \langle \mathring{Q}\, Ddf, Ddf\rangle = \frac{1}{2}\int_M \left(\langle Q, R\rangle |df|^2 + \langle Q, f^*R^N\rangle\right).$$

Noter que $T = f^*R^N$ est un tenseur de courbure sur $M$.

Il reste à choisir un tenseur de courbure parallèle $Q$ qui rende le premier membre positif ou nul et le second négatif ou nul. Ce point est traité avec une remarquable élégance dans [M-S-Y]. Les hypothèses faites sur la courbure de l'espace d'arrivée sont optimales. Lorsque $M$ est de rang $\geq 2$, on suppose simplement que la courbure sectionnelle est négative ou nulle. Lorsque $M$ est de rang un, on fait une hypothèse plus forte (mais qui est satisfaite aussi par les espaces symétriques) qui porte sur la courbure sectionnelle *complexe*, i.e., les expressions de la forme $R(X, Y, \overline{X}, \overline{Y})$ où $X$, $Y \in TN \otimes \mathbf{C}$.

**5.1** THÉORÈME [M-S-Y].- *Soit $M$ un espace symétrique qui n'est ni un espace hyperbolique ni un espace hyperbolique complexe. Il existe un tenseur de courbure parallèle $Q$ tel que i) $\overset{\circ}{Q} \gg 0$ ; ii) pour tout tenseur de courbure $T$ à courbure sectionnelle négative ou nulle, (resp. à courbure sectionnelle complexe négative ou nulle si $M$ est de rang un), $\langle Q, T\rangle \leq 0$.*

*Preuve.* Etant donnés deux vecteurs $X, Y \in TM \otimes \mathbf{C}$, on note $S = S(X,Y)$ le tenseur de courbure tel que $\hat{S}$ soit le projecteur orthogonal sur la droite engendrée par $X \wedge Y$ dans $\Lambda^2 TM \otimes \mathbf{C}$, composé avec la conjugaison. Soit $Q$ le tenseur obtenu en moyennant $S$ sur $K$. Il est $K$-invariant donc parallèle, et pour tout tenseur de courbure $T$, on calcule

$$\langle Q, T\rangle = \int_K \Re e T(kX, kY, \overline{kX}, \overline{kY})\, dk.$$

est une moyenne de courbures sectionnelles complexes. Si $M$ est de rang 1, on peut choisir $X$ et $Y$ dans un plan complexe de courbure nulle (prendre $X, Y \in T^{1,0} H^2_{\mathbf{C}}$ pour un $H^2_{\mathbf{C}} \subset H^n_{\mathbf{H}}$ ou $H^2_{\mathbf{C}a}$ totalement géodésique). Alors les $\langle Q, T\rangle$, moyennes de courbures sectionnelles complexes, sont négatifs ou nuls. On a aussi $\langle Q, R\rangle = 0$ et $\langle Q, I\rangle = 1$. Comme dans ce cas, $d(M) = 2$, $Q$ est un multiple positif de $R_\perp$ et la positivité de $\overset{\circ}{Q}$ a été mentionnée en 3.7.

Si $M$ est de rang $\geq 2$, on peut choisir $X$ et $Y$ dans un plan réel de courbure nulle. Alors $\langle Q, R\rangle = 0$ et les $\langle Q, T\rangle$, moyennes de courbures sectionnelles réelles, sont négatifs ou nuls. Si $d(M) = 2$, on conclut comme précédemment. Sinon, on détermine $Q$ explicitement grâce à ses produits scalaires avec des tenseurs invariants connus, mais des vérifications supplémentaires sont nécessaires.

**5.2** COROLLAIRE .- *Soit $M$ un espace symétrique qui n'est ni un espace hyperbolique ni un espace hyperbolique complexe. Soit $\Gamma$ un groupe discret, cocompact, irréductible d'isométries de $M$. Soit $N$ une variété riemannienne à courbure sectionnelle (resp. complexe si $M$ est de rang 1) négative ou nulle. On suppose que $\Gamma$ agit par isométries sur $N$. Alors toute application harmonique équivariante $M \to N$ est totalement géodésique. En particulier, $\Gamma$ est superrigide pour les groupes semi-simples réels.*

Une mention particulière pour le cas où $M$ est un produit. Si $M = M_1 \times M_2$, on peut ramener sur $M$ les tenseurs de courbure canoniques $I_{M_i}$ des facteurs. On obtient deux tenseurs de courbure parallèles $I_1$ et $I_2$, et $Q = I - I_1 - I_2$ n'est pas nul. Avec ce choix de $Q$, la formule (4) montre que $Ddf(X, Y) = 0$ si $X$ et $Y$ sont tangents à des facteurs différents. Alors la métrique induite par $f$ sur un facteur est parallèle (donc invariante) dans la direction de l'autre facteur. On conclut par densité que cette métrique est invariante par les isométries de $M$, i.e., que $f$ est une homothétie sur chaque facteur.

### 5.3. Réseaux non uniformes.

Le théorème d'existence d'applications harmoniques équivariantes s'étend au cas des sources non compactes, pourvu qu'il existe au moins une application équivariante d'énergie finie. C'est sans doute le cas pour la plupart des variétés localement symétriques de volume fini, mais peut-être pas pour toutes.

### 5.4. Synthèse des deux approches.

Dans [G2], M. Gromov propose une sorte de synthèse de l'approche ergodique et de l'approche utilisant les applications harmoniques. Il développe la théorie des applications harmoniques le long des feuilles d'un feuilletage. La méthode s'applique aux feuilletages suivants.

Le feuilletage de $\Gamma \backslash G$ par les orbites d'un tore déployé sur $\mathbf{R}$ (i.e., le feuilletage du fibré des repères d'un espace localement symétrique de rang $\geq 2$ par les plats).

Le feuilletage de $\Gamma \setminus Sp(n, 1)$ par les orbites de $SU(2, 1) \subset Sp(n, 1)$.

### 5.5. Applications harmoniques et immeubles.

La méthode des applications harmoniques permettre aussi d'obtenir la super-rigidité par rapport aux groupes $p$-adiques. C'est M. Gromov qui a lancé cette idée dans les années 1980, elle a été concrétisée récemment par R. Schoen.

La courbure négative ou nulle joue un rôle essentiel dans la discussion qui précède. Cet aspect se généralise aux groupes semi-simples sur les corps $p$-adiques. F. Bruhat et J. Tits [B-T] attachent à tout groupe semi-simple $G$ sur un corps muni d'une valuation discrète un complexe simplicial $X$, son immeuble, qui a les propriétés suivantes :

1. $G$ agit par isométries sur $X$ ;
2. $X$ est à courbure négative ou nulle au sens suivant : la fonction distance, restreinte à deux géodésiques parcourues à vitesse constante, est convexe ;
3. deux simplexes adjacents sont contenus dans un sous complexe totalement géodésique et isométrique à un espace euclidien.

M. Gromov et R. Schoen, [G-S], ont développé une théorie des applications harmoniques d'une variété riemannienne dans un espace métrique de ce type. Pour une application lipschitzienne $M \to X$, on a une constante de Lipschitz locale, et peut définir l'énergie par $\int Lip_u(x)^2\,dx$. Sous la seule hypothèse 2., ils démontrent une estimée a priori sur $Lip_u$ d'où ils déduisent l'existence d'une application harmonique lipschitzienne dans toute classe d'homotopie. Sous l'hypothèse 3., ils obtiennent un résultat de régularité spectaculaire. Disons que $u : M \to X$ est *régulière* en $x \in M$ si, au voisinage de $x$, $u$ est composée d'une application harmonique de $M$ dans $\mathbf{R}^k$ et d'un plongement isométrique de $\mathbf{R}^k$ dans $X$. Alors *toute application harmonique $M \to X$ est régulière en dehors d'un sous-ensemble de $M$ de codimension au moins deux.* La preuve, qui met en oeuvre des idées classiques dans une situation très dépouillée, est une splendide leçon d'analyse non linéaire.

Cette propriété de régularité suffit pour rendre possible l'intégration par parties qui démontre la formule (4). Si la variété $M$ est un quotient de $H^n_{\mathbf{H}}$, $n \geq 2$ ou de $H^n_{\mathbf{Ca}}$, on conclut que toute application harmonique équivariante est constante.

**5.6** THÉORÈME (M. Gromov, R. Schoen).– *Soit $\Gamma$ un réseau de $Sp(n,1)$, $n \geq 2$ ou de $F_4^{-20}$. Toute action isométrique "réductive" de $\Gamma$ sur un complexe simplicial satisfaisant 2. et 3. fixe un point. Par conséquent, $\Gamma$ est superrigide pour les groupes semi-simples p-adiques. En particulier, il est arithmétique.*

Les problèmes de superrigidité et d'arithméticité tracent une ligne de séparation au milieu des groupes algébriques réels de rang un. Une tel ligne n'existe pas sur les corps non archimédiens : dans ce cas, tous les groupes de rang un admettent (massivement) des réseaux non arithmétiques, voir [Lu].

## 6. GROUPES KÄHLERIENS

La méthode d'intégration par partie s'applique encore lorsque la source, au lieu d'être localement symétrique, est seulement kählérienne.

Dans ce paragraphe, on va décrire quelques conséquences d'une variante du théorème d'annulation 5.2 où la source est une variété kählérienne compacte $M$. Etant donné une application $f : M \to N$, on note $d'f$ la composante de $df$ sur $\Lambda^{1,0}M \otimes f^*TN$. La connexion de Levi-Civita sur ce fibré se décompose aussi en $D' + D''$ où $D''d'f \in \Lambda^{0,1}M \otimes \Lambda^{1,0}M \otimes f^*TN$. Comme on l'a vu en 4.12, $M$ porte un tenseur parallèle $I_{\mathbf{C}}$, copie du tenseur de courbure de l'espace projectif complexe. Posant $Q = (I_{\mathbf{C}})_{\perp}$, on a $\langle \overset{\circ}{Q}\, Ddf, Ddf \rangle = |D''d'f|^2$. En appliquant la formule (4), il vient

**6.1** THÉORÈME (Y.T. Siu [Siu], J. Sampson [Sa]).– *Soit $M$ une variété riemannienne compacte, $N$ une variété riemannienne à courbure sectionnelle complexe négative ou nulle (par exemple, un espace symétrique) sur laquelle agit le groupe fondamental de $M$, et $f : \tilde{M} \to N$ une application harmonique équivariante. Alors $f$ est* pluriharmonique, *i.e.*, $D''d'f = 0$. *De plus, la courbure sectionnelle complexe de $N$ est nulle sur l'image de $d'f$ et de $d''f$.*

Lorsque $N = G/K$ est un espace symétrique, le tenseur de courbure est essentiellement le crochet sur $TN = \mathbf{p} \subset Lie(G)$ et la condition sur la courbure sectionnelle complexe signifie que l'image de $d''f$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathbf{p} \otimes \mathbf{C}$. Le nombre $z(N)$, dimension maximale d'une sous-algèbre abélienne de $\mathbf{p} \otimes \mathbf{C}$, majore donc le rang d'une application harmonique de source kählérienne, et par suite, la dimension des classes de cohomologies réalisables par des applications de source kählérienne. Par exemple, $z(H^n) = 2$, et un réseau de $H^n$, $n \geq 3$ n'est isomorphe au groupe fondamental d'aucune variété kählérienne compacte (J. Sampson).

Entre autres majorations de $z(N)$, J. Carlson et D. Toledo, [C-T], montrent que $z(N) \leq \dim N/2$ avec égalité seulement lorsque $N$ est hermitien, auquel cas les seules sous-algèbres abéliennes de dimension maximale sont $\mathbf{p}^{1,0}$ et $\mathbf{p}^{0,1}$. Cela donne une preuve du théorème de Y.T. Siu : *Une application harmonique d'une variété kählérienne dans un espace localement symétrique hermitien, dont l'image* *est d'intérieur non vide, est holomorphe ou antiholomorphe.* Avec l'invariance biholomorphe de la métrique symétrique, on obtient par exemple la rigidité de Mostow pour les espaces localement symétriques hermitiens.

La même méthode donne des résultats de superrigidité locale. Par exemple (K. Corlette, voir [Co1]), un réseau cocompact de $PU(n,1)$ n'a pas de déformation non triviale dans $PU(n+1,1)$. En effet, un tel réseau possède une classe caractéristique non nulle en dimension $2n$. Une déformation est réalisée par une application harmonique de rang $\geq 2n$, donc holomorphe puis isométrique et enfin totalement géodésique.

**6.2. Métriques harmoniques sur les fibrés plats.**

Soit $(E,\nabla)$ un $\mathbf{C}^r$-fibré sur $M$ muni d'une connexion plate unimodulaire mais non unitaire. Choisir une métrique hermitienne sur $E$, c'est choisir une application équivariante de $\tilde{M}$ dans $N = G/K$ où $G = Sl(r,\mathbf{C})$. On peut donc parler de *métrique harmonique* sur $E$. Si l'adhérence de Zariski de la monodromie de $E$ est semi-simple, une telle métrique existe et est unique.

Lorsque la base est kählérienne, une métrique harmonique détermine une structure de fibré holomorphe sur $E$ (K. Corlette, C. Simpson). En effet, si on voit la métrique comme une application $f : \tilde{M} \to G/K$, on interprète sa différentielle $df$ comme une 1-forme à valeurs dans $End(E)$. La connexion $D = \nabla - df$ est unitaire. La partie de type $(0,1)$ de $D$, $d''^D = d''^\nabla - d''f$, satisfait

$$d''^D \circ d''^D = d''^\nabla \circ d''^\nabla + d''f \wedge d''f$$

car $d''d''f = 0$. Le théorème 6.1 signifie donc, d'une part, que $d''^D$ définit une structure holomorphe sur $E$, d'autre part, que $\theta = d'f$ est une 1-forme holomorphe à valeurs dans $End(E)$, telle que $\theta \wedge \theta = 0$. Une telle paire $(E,\nabla)$ s'appelle, depuis N. Hitchin, un *fibré de Higgs*. Inversement, en résolvant les *équations de Yang-Mills-Higgs*, on attache à un fibré de Higgs *stable* dont les classes de Chern sont nulles une connexion unitaire $D$ puis une connexion plate $\nabla = D + \theta + \overline{\theta}$ à monodromie irréductible. Lorsque la variété $M$ est projective, il s'établit un dictionnaire (découvert par N. Hitchin, [H]) entre des objets de nature topologique, les représentations irréductibles de dimension finie de $\pi_1(\Gamma)$, et des objets algébriques, les fibrés de Higgs stables dont les deux premières classes de Chern sont nulles. C'est une généralisation de l'uniformisation des surfaces de Riemann.

Ce dictionnaire constitue un moyen d'investigation puissant des espaces de représentations de certains groupes discrets. Même pour les groupes fondamentaux des surfaces (on ne peut faire plus explicite), N. Hitchin obtient des résultats frappants. Sur l'espace $\mathcal{M}$ des fibrés de Higgs stables de rang deux sur une surface de Riemann, il y a une action évidente de $\mathbf{C}^*$, par multiplication du champ de Higgs $\theta$ par une constante. Pour la structure symplectique naturelle de $\mathcal{M}$, l'action de $U(1)$ est hamiltonienne, le hamiltonien est une fonction de Morse parfaite. Ses points critiques sont les représentations à valeurs dans une forme réelle de $Sl(2,\mathbf{C})$, et correspondent à des familles calculables de fibrés de Higgs. Il vient, en plus du calcul des nombres de Betti de $\mathcal{M}$,

**6.3** THÉORÈME (N. Hitchin).– *Soit $\Gamma$ le groupe fondamental d'une surface compacte $M$ de genre $g$. Les composantes $\mathbf{R}\mathcal{M}_k$ de l'espace des représentations de $\Gamma$ dans $PSL(2,\mathbf{R})$ sont numérotées par la classe d'Euler, qui varie de 1 à $2g-2$. $\mathbf{R}\mathcal{M}_k$ est difféomorphe à un fibré vectoriel complexe de rang $g-1+k$ sur le produit symétrique $S^{2g-2-k}M$.*

Ce résultat très complet laisse la place, en dimensions supérieures, à des propriétés moins précises mais néanmoins très spécifiques des groupes fondamentaux kähleriens. En voici deux exemples, dus à C. Simpson, [Si1].

Sur les formes différentielles à valeurs dans un fibré de Higgs, on a deux complexes, le $d''$ et la multiplication par le champ de Higgs, qui jouent le rôle que jouent $d'$ et $d''$ pour les formes scalaires. Il résulte que l'algèbre de Lie différentielle graduée des formes à valeurs vectorielles est formelle. En combinant cela avec un théorème de W. Goldman et J. Millson [G-M], C. Simpson conclut que les espaces de représentations des groupes kähleriens ont des singularités au pire quadratiques.

En utilisant le théorème de compacité de K. Uhlenbeck, C. Simpson montre que l'action de $\mathbf{C}^*$ a au moins un point fixe dans chaque composante de l'espace des $G$-fibrés de Higgs. Ces points fixes correspondent à des représentations à valeurs dans une forme réelle $W$ de $G$. Nécessairement, $W$ et son compact maximal ont même rang. Par exemple, $Sl(n,\mathbf{R})$, $n\geq 3$, ou un groupe de Lie complexe, sont exclus. On conclut que leur réseaux ne peuvent pas être isomorphes au groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte. Les points fixes de l'action de $\mathbf{C}^*$ (on les appelle des variations complexes de structures de Hodge) constituent des têtes de pont à partir desquelles étudier l'espace des représentations.

**6.4. Représentations sur des corps valués et intégralité.**

Comme en 5.5, la généralisation aux espaces singuliers de la méthode des applications harmoniques présente de l'intérêt pour les sources kählériennes. C. Simpson énonce une propriété d'intégralité pour les représentations rigides (i.e., isolées dans l'espace des représentations) à valeurs dans $Sl(2,\mathbf{C})$.

**6.5** THÉORÈME (C. Simpson, [Si2]).– *Soit $M$ une variété projective lisse sur $\mathbf{C}$. Soit $\mathbf{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Toute représentation $\pi : \pi_1(M) \to Sl(2,\mathbf{K})$ irréductible et rigide est conjuguée à une représentation par des matrices à coefficients entiers algébriques.*

Comme en 5.6, il s'agit de montrer que si $\Gamma = \pi_1(M)$ agit réductivement par isométries sur un arbre (l'immeuble de $Sl(2)$ relatif à une place d'un corps de nombres), alors il fixe un point. Ce n'est pas vrai en général : les groupes de surfaces agissent sans points fixes sur des arbres (il y a la une riche théorie qui s'apparente à la théorie de Teichmüller). Ce sont les seules exceptions : toute action réductive sans point fixe de $\Gamma$ sur un arbre $T$ provient, via une application holomorphe, de l'action d'un groupe de surface (voir aussi [G-S]). En effet, comme en 6.1, l'application harmonique équivariante $f : \tilde{M} \to T$ est pluriharmonique, i.e., $d'f$ est une 1-forme holomorphe scalaire sur un revêtement ramifié de $M$. On montre que le feuilletage holomorphe défini par $d'f$ est à feuilles fermées, et l'espace des feuilles est une surface de Riemann. L'hypothèse de rigidité permet d'exclure cette factorisation, car les représentations de groupes de surfaces sont rarement rigides.

Inversement, une représentation non rigide a tendance à provenir d'une variété de dimension inférieure. Par exemple, si un fibré de Higgs a un champ de Higgs non nilpotent, ses valeurs propres sont des 1-formes holomorphes sur un revêtement ramifié, qui donnent naissance à une factorisation (K. Zuo, [Zuo]).

**6.6. Géométrie des espaces de représentations.**

Je pense que l'étude des espaces de représentations peut apporter un éclairage utile sur les questions de rigidité. C'est quand elle habite dans un espace de modules non trivial qu'une représentation rigide commence vraiment à exister. Voici quelques exemples.

Représentations unitaires du groupe fondamental d'une variété de dimension 3. Pour définir l'invariant de Casson, on les voit comme intersection de deux sous-variétés dans l'espace des représentations unitaires d'une surface.

Structures hyperboliques sur les variétés hyperbolique de dimension 3. On les obtient comme points fixes de transformations sur l'espace des structures hyperboliques géométriquement finies sur une variété à bord.

Fermeture des cusps des variétés hyperboliques de dimension 3, de volume fini. Dans l'espace des représentations dans $PSL(2,\mathbf{C})$ d'un réseau non uniforme - c'est une variété complexe dont la dimension est égale au nombre de bouts - on voit un ensemble discret correspondant aux représentations discrètes cocompactes (mais non injectives).

Monodromies d'équations hypergéométriques. Dans cette famille continue de groupes engendrés par des réflexions complexes, on trouve une famille discrète de réseaux, [D-M].

Cela dit, les espaces de représentations méritent d'être étudiés pour eux-mêmes. C'est particulièrement frappant dans le cas des groupes kählériens, dont les espaces de représentations portent une structure hyperkählérienne, où se croisent structure symplectique, structures complexes et polarisations réelles.

## REFERENCES


[A] E. Andreev, *Convex polyhedra of finite volume in Lobachevski space,* Mat. Sb. **83** (1970), 256-260.

[A-B] N. A'Campo et M. Burger, *Une preuve du théorème de superrigidité de G.A. Margulis,* Preprint Université de Basel, (1991).

[B-M-S] H. Bass, J. Milnor and J.-P. Serre, *Solution of the congruence subgroup prob-*

*lem for $SL_n$ $(n \geq 3)$ and $Sp_{2n}$ $(n \geq 2)$*, Publ. Math. I. H. E. S. **33** (1967), 59-137.

[Bo] R. Borcherds, *Automorphism groups of Lorentzian lattices*, J. of Algebra **111** (1987), 133-153.

[B1] A. Borel, *On the curvature tensor of the hermitian symmetric manifolds*, Ann. of Math. **71** (1960), 508-521.

[B2] A. Borel, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces*, Topology **2** (1963), 111-122.

[B3] A. Borel, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Hermann, Paris (1969).

[B-W] A. Borel and N. Wallach, *Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups*, Ann. Math. Studies, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1980).

[B-T] F. Bruhat et J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local*, Publ. Math. I. H. E. S. **41** (1972), 5-252.

[C] E. Calabi, *On compact Riemannian manifolds with constant curvature I*, in "Differential Geometry", Proc. Symp. Pure Math. **3**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1961), 155-180.

[C-T] J. Carlson and D. Toledo, *Harmonic mappings of Kähler manifolds to locally symmetric spaces*, Publ. Math. I.H.E.S. **69** (1989), 173-201.

[C-V] E. Calabi and E. Vesentini, *On compact locally symmetric Kähler manifolds*, Ann. of Math. **71** (1960), 472-507.

[C-W] P. Cohen et J. Wolfart, *Fonctions hypergéométriques en plusieurs variables et espaces de modules de variétés abéliennes*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris **26** (1993), 665-690.

[Co1] K. Corlette, *Flat G-bundles with canonical metrics*, J. Differen. Geom. **28** (1988), 361-382.

[Co2] K. Corlette, *Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry*, Ann. of Math. **135** (1992), 165-182.

[D-K] C. Delaroche et A. Kirillov, *Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés*, Séminaire Bourbaki, Exposé $n^0$ 343, (1967-68), Benjamin, New York (1969).

[D-M] P. Deligne and G.D. Mostow, *Monodromy of hypergeometric functions and non lattice integral monodromy,* Publ. Math. I.H.E.S. **63** (1986), 5-89.

[E-S] J. Eells and J. Sampson, *Harmonic maps of Riemannian manifolds,* Amer. J. Math. **86** (1964), 109-160.

[F] H. Furstenberg, *Poisson boundaries and envelopes of discrete groups,* Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 350-356.

[Ga1] H. Garland, *A rigidity theorem for discrete subgroups,* Trans. Amer. Math. Soc. **129** (1967), 1-25.

[Ga2] H. Garland, *p-adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p-adic groups,* Ann. of Math. **97** (1973), 375-423.

[G-M] W. Goldman and J. Millson, *The deformation theory of representations of fundamental groups of compact Kähler manifolds,* Publ. Math. I.H.E.S. **67** (1988), 43-96.

[G1] M. Gromov, *Hyperbolic groups,* in "Essays in group theory", ed. S. Gersten, Springer Verlag, Heidelberg (1987), 75-265.

[G2] M. Gromov, *The foliated Plateau problem I,* Geom. Functional Anal. **1** (1992), 14-79 ; *idem : II,* ibidem 253-320.

[G-P] M. Gromov and I. Piatetski-Shapiro, *Non-arithmetic groups in Lobachevsky spaces,* Publ. Math. I. H. E. S. **66** (1988), 93-103.

[G-S] M. Gromov and R. Schoen, *Harmonic maps into singular spaces and p-adic superrigidity for lattices in groups of rank one,* Publ. Math. I.H.E.S. **76** (1992), 165-246.

[H] N.J. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface,* Proc. London Math. Soc. **55** (1987), 59-126.

[H-V] P. de la Harpe et P. Valette, *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts,* Astérisque **175**, Soc. Math. de France (1989).

[J-Y] J. Jost and S.T. Yau, *Harmonic maps and superrigidity,* Proc. Symp. Pure Math. **54** (1993), 245-280.

[K-N] S. Kaneyuki and T. Nagano, *On certain quadratic forms related to symmetric Riemannian spaces,* Osaka Math. J. **14** (1962), 241-252.

[K-L] A. Katok and J. Lewis, *Global rigidity results for lattice actions on tori and new examples of volume preserving actions,* Preprint Pennsylvania State University (1991).

[K] D. Kazhdan, *Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups,* Funkc. Anal. i Prilozh. **67** (1967), 71-74.

[Kh] A. G. Khovanski, *Hyperplane section of polyhedra, toroidal manifolds and discrete groups in Lobatchevski space,* Funkc. Anal. i Prilozh. **20** (1986), 50-61.

[La] F. Labourie, *Existence d'applications harmoniques tordues à valeurs dans les variétés à courbure négative,* Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), 877-882.

[Lu] A. Lubotsky, *Trees and discrete subgroups of Lie groups over locla fields,* Bull. Amer. Math. Soc. **20** (1989), 27-30.

[Ma1] G.A. Margulis, *Discrete groups of motions of manifolds of nonpositive curvature,* Amer. Math. Soc. Transl. **109** (1977), 33-45.

[Ma2] G.A. Margulis, *Arithmeticity and finite dimensional representations of uniform lattices,* Funkc. Anal. i Prilozh. **8** (1974), 258-259.

[Ma3] G.A. Margulis, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups,* Ergeb. der Math. Band 17, Springer Verlag, Berlin (1990).

[Mat] Y. Matsushima, *On the first Betti number of compact quotient spaces of higher-dimensional symmetric spaces,* Ann. of Math. **75** (1962), 312-330.

[Mok] N. Mok, *Metric rigidity theorems on Hermitian locally symmetric manifolds,* World Sci., Singapore (1989).

[M1] G.D. Mostow, *Quasiconformal mappings in $n$-space and the rigidity of hyperbolic space forms,* Publ. Math. I.H.E.S. **34** (1967), 53-104.

[M2] G.D. Mostow, *The rigidity of locally symmetric spaces,* Proc. Intern. Congress of Math. (1970), 187-197.

[M3] G.D. Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces,* Annals of Math. Studies, Study 78, Princeton Univ. Press, Princeton N.J. (1973).

[M4] G.D. Mostow, *Discrete subgroups of Lie groups,* in "Elie Cartan et les Mathématiques d'aujourd'hui", Astérisque, numéro hors série (1985), 289-309.

[M5] G.D. Mostow, *Generalized Picard lattices arising from half-integral conditions.*, Publ. Math. I.H.E.S. **63** (1986), 91-106.

[M-S-Y] N. Mok, Y.T. Siu and S.K. Yeung, *Geometric superrigidity,* Invent. Math. **113** (1993), 57-83.

[Pr] M.N. Prokhorov, *The absence of discrete reflexion groups with noncompact fundamental polyhedron of finite volume in Lobachevsky space of large dimension,* Izvest. Mat. Nauk **28** (1987), 401-411.

[Ru] O.P. Ruzmanov, *Examples of nonarithmetic crystallographic Coxeter groups in n-dimensional Lobachevsky space for* $6 \leq n \leq 10$, Problems in group theory and homological algebra (1989).

[S] A. Selberg, *On discontinuous groups in higher dimensional symmetric spaces,* in "Intern. Coll. on Function Theory", Tata Institute of Fund. Research, Bombay, (1960), 147-164.

[Sa] J. Sampson, *Applications of harmonic maps to Kähler geometry,* Contemp. Math. **49** (1986), 125-133.

[Si1] C. Simpson, *Higgs bundles and local systems,* Publ. Math. I. H. E. S. **75** (1992), 5-95.

[Si2] C. Simpson, *Integrality of rigid local systems of rank two on a smooth projective variety,* Preprint Université de Toulouse (1992).

[Siu] Y.T. Siu, *Complex analyticity of harmonic maps, and strong rigidity of compact Kähler manifolds,* Ann. of Math. **112** (1980), 73-111.

[Th1] W. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds,* Princeton University Press, Princeton (1978).

[Th2] W. Thurston, *Shape of polyhedra,* Preprint Princeton Univ. (1987).

[T1] J. Tits, *Classification of algebraic groups,* in "Algebraic groups and discrete subgroups", Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, R.I., **9** (1966), 33-62

[T2] J. Tits, *Lectures on buildings of spherical type and finite B-N pairs,* Lecture Notes Band 386, Springer Verlag, Heidelberg (1970).

[T3] J. Tits, *Sur les travaux de Margulis,* Séminaire Bourbaki, Exposé $n^0$ 482, (1975-76), Lect. Notes in Math. Vol 567, Springer Verlag, Berlin (1976).

[To] D. Toledo, *Representations of surface groups in $PSU(n,1)$ with maximum characteristic number*, J. Differen. Geom. **29** (1989), 125-134.

[V] E.B. Vinberg, *Geometry II*, Encyclopedia of Math. Sci., Springer Verlag, Heidelberg, (1990).

[W-Z] McK. Wang and W. Ziller, *Symmetric spaces and strongly isotropy irreducible spaces*, Preprint Univ. of Pennsylvania (1991).

[W] A. Weil, *On discrete subgroups of Lie groups II*, Ann. of Math. **75** (1962), 578-602.

[Z] R. Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups*, Monographs in Math. vol. 81, Birkhäuser, Basel (1984).

[Zuo] K. Zuo, *Factorizations of nonrigid Zariski dense representations of $\pi_1$ of projective algebraic manifolds*, Preprint Universität Kaiserslautern (1991).

Pierre PANSU
U.R.A. 1169 du C.N.R.S.
Mathématiques
Université Paris-Sud
91405 Orsay Cédex