Astérisque

OLIVIER MATHIEU

Équations de Knizhnik-Zamolodchikov et théorie des représentations

Astérisque, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki, exp. n° 777, p. 47-67
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__47_0>

Séminaire BOURBAKI
46ème année, 1993-94, n° 777

Novembre 1993

ÉQUATIONS DE KNIZHNIK-ZAMOLODCHIKOV ET THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS

par **Olivier MATHIEU**

INTRODUCTION

Les équations de Knizhnik-Zamolodchikov sont des équations aux différences totales de la forme $d\Phi = \omega.\Phi$ avec $\omega = \sum_{0\leq i<j\leq n} X_{i,j}(d(z_i - z_j))/(z_i - z_j)$, où $X_{i,j}$ sont des matrices à coefficients constants opérant sur un certain espace W. De plus W est un produit tensoriel de m représentations d'une algèbre de Lie semi-simple et les matrices $X_{i,j}$ s'obtiennent comme des combinaisons d'actions d'éléments de Casimir.

Ces équations apparaissent dans les travaux de Knizhnik, Zamolodchikov **[KZ]**, Belavin, Poliakov, Zamolodchikov **[BPZ]** comme des équations satisfaites par certaines fonctions de corrélation (en théorie conforme des champs en genre 0).

D'après les travaux de Drinfeld, Kohno et Jimbo, la monodromie de ces équations peut être calculée à l'aide de R-matrices associées aux représentations des groupes quantiques.

Récemment Kazhdan et Lusztig ont établi un théorème d'équivalence de catégories entre représentations de groupes quantiques et représentations d'algèbres de Kač-Moody de niveau négatif à l'aide de constructions inspirées de la théorie conforme des champs. En fait de telles équivalences de catégorie avaient été suggérées dans les travaux de Moore, Seiberg, Drinfeld et autres, mais uniquement pour des catégories de représentations de niveau positif. Ce résultat de Kazhdan et Lusztig est un pas crucial vers la solution du problème classique de déterminer les dimensions (et plus généralement les caractères) des représentations simples des groupes algébriques en caractéristique finie.

Remerciements : Je tiens à remercier G. Georgiev et J. Lepowsky pour les conversations que nous avons eues.

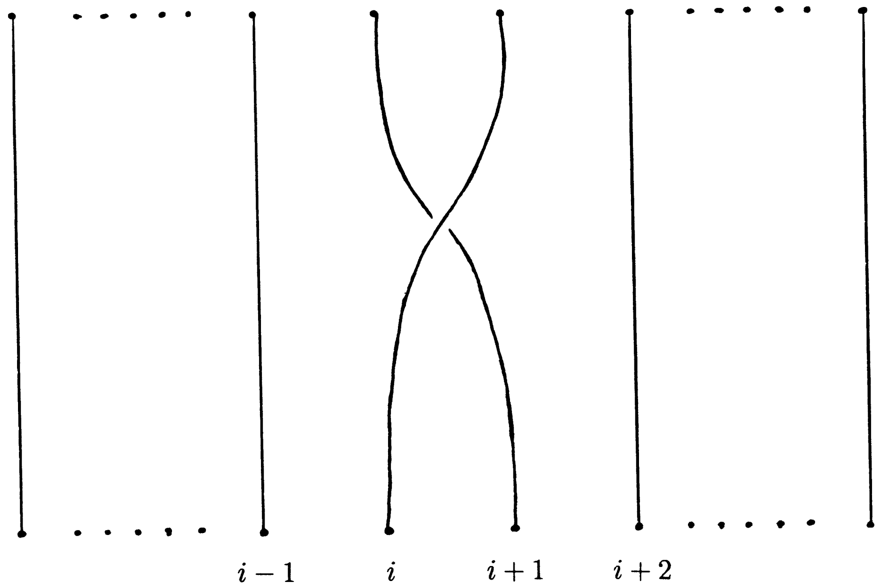
1. CALCULS DE QUELQUES REPRÉSENTATIONS DE MONODROMIE DU GROUPE DES TRESSES

Soit Y_n l'espace de tous les sous-ensembles à n-éléments de $\mathbf{C}$ et posons $X_n = \{(z_1, ..., z_n) \in \mathbf{C} | z_i \neq z_j \text{pour } i \neq j\}$. Le groupe fondamental de Y_n admet la présentation suivante, due à E. Artin.

Générateurs : $S_1, ..., S_{n-1}$.

Relations : $S_i S_j S_i = S_j S_i S_j$ pour $i = j \pm 1$, $S_i S_j = S_j S_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

Si on choisit $\{1, ..., n\}$ comme point base de Y_n, alors le générateur S_i est réalisé par un chemin qui échange la position de i et de $i + 1$, comme indiqué sur le dessin.



Ce dessin suggère d'ailleurs le nom classique de groupe de tresses pour B_n. Notons aussi que les générateurs de B_n sont tous dans la même classe de conjugaison. Par exemple le calcul suivant prouve que S_1 et S_2 sont conjugués.

$$\begin{aligned}(S_1S_2S_1)S_2(S_1S_2S_1)^{-1} &= S_1\,(S_2S_1S_2)\,(S_1S_2S_1)^{-1} \\ &= S_1\,(S_1S_2S_1)\,(S_1S_2S_1)^{-1} \\ &= S_1.\end{aligned}$$

L'application naturelle $\pi : X_n \to Y_n, (z_1, ..., z_n) \mapsto \{z_1, ..., z_n\}$ est un revêtement galoisien de groupe S_n (le groupe des permutations d'un ensemble à n éléments). Le groupe fondamental de X_n, *i.e.* le noyau du morphisme $B_n \to S_n$ est appelé le groupe des tresses pures et noté P_n. Le groupe P_n est engendré par S_1^2 et ses conjugués. Plus précisément pour $i < j$, posons $\Gamma_{i,j} = (S_i S_{i+1} ... S_{j-1}) S_j^2 (S_i S_{i+1} ... S_{j-1})^{-1}$. Alors P_n est engendré par ces $(n(n-1)/2)$ générateurs $\Gamma_{i,j}$.

Soit W un espace vectoriel complexe de dimension finie et une collection d'endomorphismes $(X_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$. Alors la forme $\omega = \sum_{i<j} X_{i,j}(d(z_i - z_j))/(z_i - z_j)$ à valeurs dans $End(W)$ définit une connexion sur le fibré trivial $W \times X_n$ au-dessus de X_n. Un calcul simple prouve :

Lemme 1.1 (Kohno).— *La connexion donnée par* ω *est plate si et seulement si on a :*

$$[X_{i,j}, X_{i,k} + X_{j,k}] = [X_{i,j} + X_{j,k}, X_{j,k}] = 0 \qquad \textit{pour } i < j < k, \textit{ et}$$
$$[X_{i,j}, X_{k,\ell}] = 0 \qquad \textit{pour } i, j, k, \ell \textit{ tous distincts.}$$

Signalons une réciproque au lemme précédent. Considérons, dans l'algèbre $\mathbf{C} \ll x_{i,j} \gg$ des séries formelles en les variables non-commutatives $(x_{i,j})_{1 \leq i < j \leq j}$, l'idéal engendré par les éléments suivants :

$$[x_{i,j}, x_{i,k} + x_{j,k}] = [x_{i,j} + x_{j,k}, x_{j,k}] = 0 \qquad \text{pour } i < j < k, \text{ et}$$
$$[x_{i,j}, x_{k,\ell}] = 0 \qquad \text{pour } i, j, k, \ell \text{ tous distincts.}$$

Notons $\mathcal{A}$ l'algèbre quotient. Pour tout ℓ, notons $\mathcal{A}_\ell$ le sous-espace des éléments de la forme $P(x_{i,j})$, où P est un polynôme non-commutatif homogène de degré ℓ. Comme les relations définissant $\mathcal{A}$ sont homogènes de degré deux, on a $\mathcal{A} = \prod_{\ell \geq 0} \mathcal{A}_\ell$ et $\mathcal{A}_i . \mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j}$. Pour tout entier m, notons μ_m l'application $\mathcal{A}_1^{\otimes m} \to \mathcal{A}_m, (a_1, a_2, ..., a_m) \mapsto a_1 . a_2 ... a_m$.

Considérons $\omega = \sum_{i<j} x_{i,j}(d(z_i - z_j))/(z_i - z_j)$ comme une 1-forme sur X_n à valeur dans $\mathcal{A}_1$. Pour tout entier m, $\omega^{\otimes m}$ est une m-forme sur $(X_n)^m$ à valeur dans $\mathcal{A}_1^{\otimes m}$, et $\mu_m(\omega^{\otimes m})$ est à valeur dans $\mathcal{A}_m$. Pour tout chemin $\gamma : [0,1] \to X_n, t \mapsto \gamma(t))$, notons $\gamma_m : I_m \to (X_n)^m, (t_1, ..., t_m) \mapsto (\gamma(t_1), \cdots, \gamma(t_m))$, où I_m est le m-simplexe $\{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_m \leq 1\}$.

Choisissons un point base p pour X_n. Définissons une application $\phi : P_n \to \mathcal{A}$ par la formule suivante :

$\phi(g) = \sum_{m\geq 0} \int_{\gamma_m} \mu_m(\omega^{\otimes m})$, où γ est n'importe quel lacet représentant $g \in P_n$.

Le terme de droite de la formule précédente est l'expression de la monodromie en terme d'intégrales itérées de Chen. En fait, cette formule n'est qu'une reformulation de la technique des itérées successives de Picard (de la forme $\Phi_0 = 1$ et $\Phi_{n+1} = \Phi_n + \int_\gamma \omega.\Phi_n$).

D'après ce qui précède, ϕ est un morphisme du groupe P_n dans le groupe multiplicatif des éléments de $\mathcal{A}$ de la forme $1 + \sum_{i>0} p_i$, $(p_i \in A_i)$.

Soit I l'idéal d'augmentation de $\mathbf{C}[P_n]$, et notons $\mathcal{B}$ le complété de $\mathbf{C}[P_n]$ relatif aux puissances de I (i.e. $\mathcal{B} = \text{lim.proj.}\mathbf{C}[P_n]/I^m$).

THÉORÈME 1.2 (Aomoto, Hain, Kohno).— *Le morphisme ϕ induit un isomorphisme $\psi : B \to A$. De plus, $\phi : P_n \to \mathcal{A}$ est injective.*

Paraphrasons le théorème 1.2. Rappelons la construction du complexifié de la complétion pronilpotente d'un groupe discret. Soit G un groupe discret (que l'on supposera de type fini pour éviter les détails techniques). Supposons d'abord que G soit nilpotent. On peut associer un groupe de Lie nilpotent $G(\mathbf{C})$ et un morphisme $\tau : G \to G(\mathbf{C})$. La paire $(G(\mathbf{C}), \tau)$ est caractérisée par la propriété universelle suivante. Toute représentation complexe de dimension finie $\rho : G \to GL(W)$ telle que $\rho(g)$ soit nilpotente pour tout $g \in G$ s'étend uniquement en une représentation du groupe de Lie $G(\mathbf{C})$. Lorsque G est un groupe commutatif, on a $G(\mathbf{C}) = G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$. Pour un groupe G quelconque, on peut considérer la suite centrale descendante : $\cdots G_{m+1} \subset G_m \subset \cdots \subset G_1 = (G, G) \subset G$. Notons $G^{pro.nil.}(\mathbf{C})$ la limite projective des $G/G_m(\mathbf{C})$. Le groupe obtenu est une limite projective de groupes de Lie nilpotents.

Soit $\mathcal{L}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathcal{A}$ engendrée par les générateurs $x_{i,j}$, et soit $\overline{\mathcal{L}}$ sa fermeture dans $\mathcal{A}$. Notons que les relations définissant $\mathcal{A}$ sont dans $\mathcal{L}$. Donc $\mathcal{A}$ est l'algèbre enveloppante topologique de $\mathcal{L}$. Essentiellement le théorème 1.2. signifie que l'algèbre de Lie du complété pronilpotent $P_n^{pro.nil}(\mathbf{C})$ de P_n est isomorphe à l'algèbre de Lie $\overline{\mathcal{L}}$. De plus l'application $P_n \to P_n^{pro.nil}(\mathbf{C})$ est injective.

Le théorème 1.2 ne concerne que les représentations nilpotentes du groupe

P_n. Néanmoins en utilisant l'injectivité de l'application $\phi : \mathcal{P}_n \to \mathcal{A}$, Kohno en déduit le résultat suivant (un analogue multidimensionel du XXIème problème de Hilbert).

THÉORÈME 1.3 (Kohno).— *Soit $\rho : P_n \to GL(N)$ une représentation de P_n telle que $1 - \rho(\Gamma_{i,j})$ est suffisamment petit pour tout $1 \leq i < j \leq n$. Alors on peut trouver des matrices $N \times N$ à coefficients constants $X_{i,j}$ telles que la connexion $\omega = \sum_{i<j} X_{i,j}(d(z_i - z_j))/(z_i - z_j)$ soit plate et de monodromie ρ.*

Le théorème 1.3 réduit essentiellement le problème de trouver des représentations linéaires des groupes de tresses pures à celui de trouver des endomorphismes $X_{i,j}$ d'un espace vectoriel W satisfaisant aux relations

$$(1) \qquad \begin{aligned} &[X_{i,j}, X_{i,k} + X_{j,k}] = [X_{i,j} + X_{j,k}, X_{j,k}] = 0 \quad &&\text{pour } i < j < k, \text{ et} \\ &[X_{i,j}, X_{k,l}] = 0 &&\text{pour } i, j, k, \ell \text{ tous distincts.} \end{aligned}$$

De plus la représentation obtenue s'étendra au groupe des tresses B_n, dès que l'on disposera en plus d'une représentation $\pi : S_n \to W$ compatible aux endomorphimes $X_{i,j}$ (*i.e.* $\pi(w)X_{i,j}\pi(w^{-1}) = X_{w(i),w(j)}$ pour tout $w \in W$).

La théorie des algèbres de Lie fournit des solutions à ce problème. Nous allons maintenant décrire les plus simples de telles solutions.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie, $U(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante et $\Delta : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ la comultiplication. Rappelons que Δ est un morphisme d'algèbre tel que $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

Pour tous entiers $0 < i < j \leq n$, notons $\Theta_{i,j}$ le morphisme de $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ dans $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ défini par $\Theta_{i,j}(a \otimes b) = 1 \otimes 1.... \otimes a.... \otimes b \otimes 1...$, où a et b sont en position i et j. Pour $R \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \subset U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$, posons $R_{i,j} = \Theta_{i,j}(R)$. Notons que l'on a $[R_{1,2}, R_{2,3}] \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.

Supposons donné un élément $R \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ qui, pour simplifier, sera supposé symétrique, *i.e.* invariant par l'échange des facteurs dans $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Supposons de plus que l'on ait :

$$(2) \qquad [R_{1,2}, R_{1,3} + R_{2,3}] = 0.$$

Soit $W = V_1 \otimes V_2 ... \otimes V_n$ une représentation de $\mathfrak{g}^n$. Alors les endomorphismes $X_{i,j}$ définis par l'action des $R_{i,j}$ seront une solution du problème posé.

Il y a une solution remarquable à ce problème lorsque l'algèbre de Lie possède un produit scalaire non dégénéré (symétrique) invariant κ. En effet, choisissons une base orthonormée e_α et posons $t = \sum e_\alpha \otimes e_\alpha \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.

Lemme 1.4 (Drinfeld).— *On a* $[t_{1,2}, t_{1,3} + t_{2,3}] = 0$.

Indiquons la preuve, qui est très courte. Puisque t est le tenseur qui définit la forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}^*$ inverse de κ, ce tenseur est invariant sous l'action diagonale. On a donc $[\Delta(x), t] = 0$, pour tout $x \in \mathfrak{g}$. Or on a $t_{1,3} + t_{2,3} = \sum e_\alpha \otimes 1 \otimes e_\alpha + 1 \otimes e_\alpha \otimes e_\alpha = \sum \Delta_{1,2}(e_\alpha) \otimes e_\alpha$, d'où le lemme.

Lorsque $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple et κ la forme de Killing, l'équation aux dérivées totales $d\Phi = \omega.\Phi$ associée à cette connexion (*i.e.* l'équation aux dérivées partielles des sections horizontales) est appelée équation de Knizhnik et Zamolodchikov.

Donnons d'abord un exemple de construction de représentations du groupe de tresses comme monodromie de ces équations.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie $sl(N)$. Dans ce cas la forme κ est la forme de Killing $x, y \mapsto 2(N-1)tr(xy)$. Soit V la représentation naturelle de dimension N et soit $W = V^{\otimes n}$. Soit λ un paramètre complexe. Sur le fibré $W \times X_n$, considérons la connexion $\omega = \lambda \sum_{i<j} t_{i,j}(d(z_i - z_j))/(z_i - z_j)$. Notons que la connexion est invariante par S_n donc le fibré à connexion (W, ω) provient de Y_n. Ainsi la monodromie définit une représentation du groupe des tresses B_n.

Cette monodromie peut être explicitement calculée, à l'aide de représentations d'algèbres de Hecke.

Soit q un nombre complexe non nul, et supposons fixée une base $E_1, \cdots, E_m$ de V. Tout d'abord, définissons l'opérateur $R^q : V \otimes V \to V \otimes V$ par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
&R^q(E_i \otimes E_i) = q.E_i \otimes E_i, \\
&R^q(E_i \otimes E_j) = (E_j \otimes E_i) + (q - q^{-1}).E_i \otimes E_j \quad \text{si } i > j \quad \text{et} \\
&R^q(E_i \otimes E_j) = E_i \otimes E_j \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{si } i < j.
\end{aligned}$$

Cette matrice est appelée matrice de Lieb et Temperley.

THÉORÈME 1.5 (Kohno).— *Pour une valeur générique de λ, il existe un automorphisme linéaire S de W tel que la monodromie de la connexion ω est donnée par*

$S_i \mapsto q^\nu.S^{-1}R^q_{i,i+1}S$, *pour* $q = e^{i\pi.\lambda}$ *et* $\nu = (N-1)/2.N$

Indiquons la preuve de ce théorème, basée sur les propriétés élémentaires des algèbres de Hecke. Rappelons que l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_n(q)$ admet la présentation suivante :

Générateurs : $T_1, \ldots, T_{n-1}$.

Relations : $T_iT_jT_i = T_jT_iT_j$ pour $i = j \pm 1$

$T_iT_j = T_jT_i$ pour $|i-j| \geq 2$

$(T_i - q)(T_i + q^{-1}) = 0.$

Pour tout i, $1 \leq i < n$, soit s_i la transposition de S_n qui échange i et $i+1$. Ces transpositions engendrent le groupe S_n. Une décomposition $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ d'un élement w de S_n est dite décomposition réduite si on ne peut écrire w comme un produit de ℓ transposition s_i avec $\ell < k$. Soit $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ une décomposition réduite d'un élement w de S_n. L'élément $T_w = T_{s_{i_1}} \cdots T_{s_{i_k}}$ est indépendant de la décomposition choisie et la famille $(T_w)_{w \in W}$ est une base de l'algèbre de Hecke (en particulier sa dimension est finie et vaut $n!$). Pour $q = 1$, l'algèbre de Hecke est isomorphe à $\mathbf{C}[S_n]$. Cette dernière est une algèbre de matrice et n'admet que des déformations triviales. Donc au moins pour q générique (en fait, comme l'a montré Tits pour q non racine de l'unité), $\mathcal{H}_n(q)$ est isomorphe à $\mathbf{C}[S_n]$. Pour la preuve du théorème, seule l'existence d'un tel isomorphisme est nécessaire.

Un calcul simple montre que $T_i \mapsto R^q_{i,i+1}$ fournit une représentation de $\mathcal{H}_n(q)$ sur $V^{\otimes m}$. Comme à $q = 1$ la représentation obtenue est la représentation standard de S_n, on en déduit de même que, pour q générique, la représentation obtenue est conjuguée à la représentation standard.

La présentation de l'algèbre de Hecke se déduit de celle de $\mathbf{C}[P_n]$ uniquement en ajoutant la dernière relation quadratique. Notons que cette relation signifie que, dans toute représentation, T_i agit comme un opérateur diagonalisable avec seulement deux valeurs propres $\pm q^{\mp 1}$ (du moins si $q \neq \pm i$). Par conséquent une représentation U du groupe de tresses provient d'une représentation de l'algèbre de Hecke exactement quand S_1 agit de manière semi-simple avec au plus deux valeurs propres. En effet on pourra trouver alors deux nombres μ et q tels que ces deux valeurs propres soient $\mu.q$ et $-\mu.q^{-1}$, et la représentation factorisera à travers le morphisme $\mathbf{C}[P_n] \to \mathcal{H}_n(q), S_i \mapsto \mu^{-1}.T_i$.

Reste donc à prouver que dans la représentation de monodromie ρ associée à la connexion ω l'opérateur $\rho(S_1)$ a bien la propriété indiquée. Soit X' le quotient de X_n obtenu en identifiant $(z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n)$ et $(z_2, z_1, z_3, \cdots, z_n)$. Le revêtement $X_n \to X'$ est galoisien de groupe $\{1, s_1\}$. De plus $\rho(S_1)$ est la monodromie locale autour de l'hypersurface $(z_1 - z_2)^2 = 0$ dans X'. Le résidu de la connexion le long de cette hypersurface est $1/2\lambda.t_{1,2}$. Or $V \otimes V$ se décompose en deux représentations irréductibles sous l'action de $sl(N)$, à savoir $V \otimes V = S^2V \oplus \Lambda^2 V$. Comme t agit scalairement sur chaque composante, on en déduit que l'action de $t_{1,2}$ sur W est semi-simple et ne possède que deux valeurs propres, proportionelles à λ. Pour λ générique, la différence de ces valeurs propres n'est pas entière, et donc $\rho(S_1)$ est conjuguée à $\exp(i\pi.t_{1,2})$, ce qui démontre la semi-simplicité et qu'il n'y a au plus que deux valeurs propres. Enfin pour déterminer explicitement la valeur de q et le facteur q^ν, il suffit de calculer explicitement ces valeurs propres. C.Q.F.D.

Remarque.— La présentation usuelle de l'algèbre de Hecke est légèrement différente. En général, la relation quadratique est sous la forme $T_i^2 + (1-q).T_i + q = 0$, ou $(T_i + 1)(T_i - q) = 0$. Cette présentation est essentiellement la même. En effet, si l'on pose $q' = q^{1/2}$ et $T_i' = q'^{-1}.T_i$, on obtient $(T_i' - q')(T_i' + q'^{-1}) = 0$.

Soient maintenant $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie arbitraire, V une représentation irréductible et $W = V^{\otimes n}$. La forme de Killing $x, y \in \mathfrak{g} \mapsto tr(ad(x) \circ ad(y))$ permet de définir le tenseur t de $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. A nouveau on considère la connexion $\omega = \lambda \sum_{i<j} t_{i,j}(d(z_i - z_j))/(z_i - z_j)$ sur le fibré $W \times X_n$ au-dessus de X_n. Comme ce fibré et sa connexion sont S_n invariants, ils proviennent de Y_n et la monodromie définit une représentation ρ de B_n sur W. Pour identifier cette représentation, nous allons à nouveau utiliser une matrice R. Cette matrice R sera une solution d'une équation de Yang et Baxter obtenue à l'aide de la théorie des groupes quantiques.

Soit $R \in GL(V \otimes V)$. Alors $R_{1,2} = R \otimes id$ et $R_{2,3} = id \otimes R$ sont des automorphismes de $V \otimes V \otimes V$. Les solutions de l'équation de Yang-Baxter sont les matrices R satisfaisant à :

$$R_{1,2} \circ R_{2,3} \circ R_{1,2} = R_{2,3} \circ R_{1,2} \circ R_{2,3}.$$

À toute solution R de l'équation de Yang et Baxter, on peut associer une représentation θ de B_n sur $V^{\otimes n}$ en posant $\theta(S_i) = R_{i,i+1}$, où $R_{i,i+1}(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes R(v_i \otimes v_{i+1}) \otimes v_{i+2} \otimes \cdots$. Il est clair que cela fournit une représentation de B_n car les relations de tresses sont dans ce cas exactement équivalentes à l'équation de Yang et Baxter.

Soit $U_q(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante quantique de $\mathfrak{g}$, définie par Jimbo et Drinfeld. Drinfeld a défini un élément $\mathcal{R}$ appartenant à une certaine complétion de $U_q(\mathfrak{g} \otimes U_q(\mathfrak{g}))$. L'action de $\mathfrak{g}$ sur V peut être déformée en une représentation de $U_q(\mathfrak{g})$. Notons R^q l'automorphisme de $V \otimes V$ défini par $R^q = \sigma \circ \mathcal{R}$, où $\sigma : V \otimes V \to V \otimes V$ dénote l'échange des deux facteurs.

THÉORÈME 1.6 (Drinfeld).— *L'automorphisme R^q est une solution de l'équation de Yang et Baxter.*

THÉORÈME (Kohno).— *Pour λ générique et $q = \exp(i\pi.\lambda)$ la représentation de monodromie ρ de B_n sur W et la représentation déduite de la solution R_q de l'équation de Yang et Baxter sont équivalentes.*

Cette matrice R_q n'est pas aussi explicite que dans le cas où V est la représentation de base de $sl(N)$. Dans de nombreux cas, elle a été calculée explicitement par Jimbo.

2. ÉQUATION DE KNIZHNIK ET ZAMOLODCHIKOV

L'algèbre W des champs de vecteurs à coefficients réguliers sur $\mathbf{C}^*$ a pour base $(L_m = -z^{m+1}d/dz)_{m\in\mathbf{Z}}$ et l'on a $[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}$. L'algèbre de Virasoro Vir est une extension centrale de cette algèbre. Elle a pour base $(L_m)_{m\in\mathbf{Z}}, \mathbf{c}$ et les crochets sont donnés par $[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \delta_{m,-n}(m^3-m)/12.\mathbf{c}$ et $[\mathbf{c}, L_m] = 0$. Notons aussi que $L_n \mapsto L_{-n}$ induit une anti-involution t de Vir.

Donnons d'abord une définition de champ primaire, du moins la plus usuelle dans la littérature de la physique mathématique. Soient V et U deux représentations de l'algèbre de Virasoro. On supposera que U et V sont pré-hilbertiens, de sorte que U et V soient des représentations pré-unitaires pour la sous-algèbre de Lie des points fixes de $-t$. On appelle champ primaire d'anomalie a un opérateur $\Phi(z) : U \to V$ tel que $[L_m, \Phi(z)] = (z^{m+1}d/dz + a(m+1)z^m).\Phi(z)$. En fait, ces opérateurs $\Phi(z)$ peuvent avoir un domaine de définition vide, mais leurs coefficients matriciaux sont bien définis. En d'autres termes pour u, v dans un certain sous-espace dense de $U \times V$, le coefficient matriciel associé est bien défini. Ce coefficient est noté $< v|\Phi(z)|u >$. Ces coefficients matriciaux sont supposés être des fonctions holomorphes multivaluées. Dans les exemples donnés plus bas, les champs $\Phi(z)$ seront décrits comme des séries formelles en z et en z^{-1}.

Décrivons d'abord les représentations de l'algèbre de Virasoro qui nous intéresse. L'algèbre de Virasoro Vir a une graduation naturelle, $Vir = \oplus_{n\in\mathbf{Z}} Vir_n$ (où $Vir_n = \mathbf{C}.L_n$ pour $n \neq 0$ et $Vir_0 = \mathbf{C}.L_0 \oplus \mathbf{C}.\mathbf{c}$). Posons $Vir^+ = \oplus_{n>0} Vir_n$ et $\mathcal{B}^+ = Vir^+ \oplus Vir_0$. Soit h, c deux scalaires. Notons $\mathbf{C}_{h,c}$ le $\mathcal{B}^+$-module de dimension un pour lequel Vir^+ agit trivialement, et L_0, $\mathbf{c}$ agissent par multiplication par h et c respectivement. Soit $V_{h,c}$ le Vir-module induit. Ce module (appelé module de Verma) possède un unique quotient simple $L_{h,c}$. Pour certaines valeurs de c, le module $L_{h,c}$ est pré-unitarisable.

Exemple 2.1.— Donnons un exemple évident de champ primaire. Soit $V = L_{h,c}$ un module simple unitarisable. Définissons le champ primaire $\Phi(z) : V \to V$ par la formule $\Phi(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} z^{-2-n}.L_n$. Ce champ est d'anomalie -2. Un champ donné sous la forme d'une série formelle à la fois en z et z^{-1} est appelé un opérateur vertex.

Notons que, pour tout $v \in V$, on a $L_m.v = 0$ pour m suffisamment grand. Par conséquent $\Phi(z).v$ est une série de Laurent en z^{-1} (*i.e.* est une série formelle en z^{-1} et un polynôme en z). Il existe une graduation naturelle du module V, $V = \oplus_n V_n$ compatible avec la graduation de Vir telle que $V_0 = \mathbf{C}_{h,c}$, et $V_n = 0$ pour $n > 0$. Considérons le sous-module $V' = \oplus(V_n)^*$ dans V^*. Alors pour tout $v \in V, v' \in V'$, le coefficient matriciel $\langle v'|\Phi(z)|v\rangle$ est un polynôme de Laurent bien défini.

L'intérêt des champs primaires est d'intervenir dans la théorie des représentations des algèbres de Kač-Moody affines. Dans les quelques paragraphes qui suivent, nous allons d'abord rappeler leur définition et la construction de leurs représentations. Nous verrons ensuite comment construire des champs primaires dans ce cas.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de dimension finie. Soit $\mathcal{L}$ l'extension centrale de l'algèbre de Lie $L(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}[t, t^{-1}]$ définie par le cocycle $C(f(t), g(t)) = Res|_{t=0}\kappa(f(t)dg(t))$, pour tous $f(t), g(t) \in L(\mathfrak{g})$. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, posons $x(n) = x \otimes t^n$. Ainsi l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est engendrée par les $x(n)$ et un certain élément central encore noté $\mathbf{c}$ et les crochets de Lie sont donnés par la formule :

$$[x(n), y(m)] = [x, y](n + m) + m.\delta_{m,-n}\mathbf{c}.$$

Malheureusement la théorie des algèbres de Lie simples requiert un certain nombre (élevé) de notations et définitions que je vais rappeler maintenant. Choisissons une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ (*i.e.* l'algèbre de Lie d'un tore maximal H du groupe simplement connexe G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$) et une sous-algèbre de Borel (*i.e.* résoluble maximale) contenant $\mathfrak{h}$. Un tel choix est unique à isomorphisme près et l'on pose $\mathfrak{n} = [b, b]$. On note P le groupe des caractères de H. Via la différentielle, P s'identifie à un sous-groupe de $\mathfrak{h}^*$. L'action de H sur $\mathfrak{n}$ est diagonalisable, et les caractères des sous-représentations de dimension un sont appelés les racines positives. Les racines correspondant aux caractères de $\mathfrak{n}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ sont appelées indécomposables et notées $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$. Le centre de $\mathfrak{n}$ est de dimension 1 et le caractère correspondant sera noté α_0. La restriction de la forme de Killing à $\mathfrak{h}$ est non dégénérée. Pour toute racine α, il existe donc un unique élément $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ tel que $h \in \mathfrak{h} \mapsto h - \alpha(h)h_\alpha$ soit une reflexion hyperplane orthogonale. Cet élément est appelé la coracine associée à α. Quand α est l'une des racines α_i, la coracine correspondante sera notée simplement h_i. Notons que les $(h_i)_{0<i\leq\ell}$ forment une base de $\mathfrak{h}^*$ et que l'on a $h_0 = \sum_{0<i\leq\ell} m_i h_i$ où les m_i sont des entiers > 0. Posons $g = 1 + \sum_i m_i$ (nombre de Coxeter dual).

Posons $P^+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | \lambda(h_i) \in \mathbf{N} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq \ell\}$. Toute représentation simple L de dimension finie de $\mathfrak{g}$ contient un unique vecteur v (à un multiple près) tel que $\mathfrak{n}.v = 0$. On a $h.v = \lambda(h).v$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$ pour un certain $\lambda = \lambda(L) \in P^+$. Le poids λ est appelé plus haut poids de la représentation L et l'application $L \mapsto \lambda(L)$ est une bijection de l'ensemble des représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$ sur P^+ (E. Cartan). On note la bijection inverse $\lambda \mapsto L(\lambda)$. On notera que les représentations simples sont classifiées par la donnée de ℓ entiers ≥ 0 $\lambda(h_1), \cdots, \lambda(h_\ell)$.

Revenons aux algèbres affines. Comme pour l'algèbre de Virasoro, l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est graduée, $\mathcal{L} = \oplus\mathcal{L}_n$ (où $\mathcal{L}_n = \mathfrak{g} \otimes t^n$ pour $n \neq 0$ et $\mathcal{L}_0 = \mathfrak{g} \oplus \mathbf{C}.\mathbf{c}$). Posons $\mathcal{L}^+ = \oplus_{n>0}\mathcal{L}_n$, $\mathcal{P} = \mathcal{L}^+ \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathbf{C}.\mathbf{c}$. Soit $\lambda \in P^+$ et $\ell \in \mathbf{C}$. Considérons $L(\lambda)$ comme un $\mathcal{P}$-module, pour lequel l'action de $\mathcal{L}^+$ est triviale, et $\mathbf{c}$ qui agit comme le scalaire ℓ. Soit $V_\ell(\lambda)$ le module induit à $\mathcal{L}$ (module de Verma généralisé) et soit $L_\ell(\lambda)$ l'unique quotient irréductible de $V_\ell(\lambda)$ (en fait cette définition n'est pas correcte quand $\ell+g=0$, cas que nous ne considérerons pas ici : dans cette section on aura $\ell>0$, tandis que dans la section suivante, on aura $\ell+g<0$). L'élément central $\mathbf{c}$ agit sur $L_\ell(\lambda)$ comme $\ell.id$ et ce nombre ℓ est appelé le niveau de la représentation. Plus généralement une représentation est dite de niveau ℓ si $\mathbf{c}$ y agit comme le scalaire ℓ. Une représentation ρ de $\mathcal{L}$ est dite intégrable si $\rho(x(m))$ est localement nilpotent pour tout élément ad-nilpotent $x\in\mathfrak{g}$ et tout $m\in\mathbf{Z}$.

Lemme 2.2. (V. Kač).— *La représentation $L_\ell(\lambda)$ est intégrable si et seulement si ℓ est un entier et l'on a :*

$$\sum_i \lambda(h_i)\le\ell.$$

Dans cette section nous supposerons désormais que les couples (λ,ℓ) satisfont aux conditions du lemme de Kač. Notons $\mathcal{O}_\ell^{int}$ la catégorie de tous les $\mathcal{L}$-modules intégrables de niveau ℓ de longueur finie et pour lesquels $\mathcal{L}^+$ agit de manière localement nilpotente (*i.e.* tous les sous-$\mathcal{L}^+$-modules cycliques sont de dimension finie et nilpotente). Ce lemme indique la nécessité de considérer l'extension centrale $\mathcal{L}$ de $L(\mathfrak{g})$. En effet tout module intégrable de niveau 0 de la catégorie $\mathcal{O}$ est trivial. Rappelons aussi :

THÉORÈME 2.3 (Deodhar, Gabber, Kač).— *Toute représentation de $\mathcal{O}_\ell^{int}$ est somme directe de modules $L_\ell(\lambda)$. En particulier, cette catégorie est semi-simple avec un nombre fini d'objets simples.*

Notons Δ le simplexe de tous les ℓ-uplets de nombres réels $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_\ell)$ avec $\lambda_1\ge0,\lambda_2\ge0,\cdots,\lambda_\ell\ge0$ et $\sum_i a_i\lambda_i\le\ell$. Alors les représentations simples dans $\mathcal{O}_\ell^{int}$ sont exactement paramétrées par les points à coordonnées entières du simplexe $\ell.\Delta$. On notera cet ensemble fini $\mathcal{P}_\ell$.

Le théorème suivant a été prouvé par de nombreux auteurs. Notons aussi t l'anti-involution de $\mathcal{L}$, $t: x(n)\mapsto x(-n)$.

THÉORÈME 2.4 (Garland, Kač, Lepowsky...).— *Tout module intégrable $L_\ell(\lambda)$ est pré-unitarisable relativement à l'anti-involution t.*

Notons que l'algèbre de Virasoro agit comme une algèbre de dérivation de $\mathcal{L}$.

Le produit semi-direct $Vir \times \mathcal{L}$ est appelé algèbre de courant. Les représentations $L_\ell(\lambda)$ s'étendent en des représentations de l'algèbre de courant. Ce fait n'est pas difficile à montrer par une preuve abstraite, mais Shugawara a trouvé une remarquable formule explicite pour cette action. Décrivons maintenant cette formule explicite. Pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$, définissons le produit ordre normal de $x(n)$ et $y(m)$ en posant :

$$: x(n)y(m) := \begin{cases} x(n)y(m) & \text{si } n < m, \\ y(m)x(n) & \text{si } m > n, \\ 1/2(x(n)y(m) + y(m)x(n)) & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Choisissons une base orthonormée e_α pour $\mathfrak{g}$. Posons $2(\ell + g).L_n = \oplus_{n \in \mathbf{Z}, \alpha} :$ $e_\alpha(-k), e_\alpha(n+k)$. Soit $M \in \mathcal{O}_\ell^{int}$ et $v \in M$. Comme on a $e_\alpha(n).v = 0$ pour tout $n \gg 0$, la somme calculant $L_n.v$ est en fait finie. Ainsi L_k agit sur M.

THÉORÈME 2.5 (Sugawara) *L'action des opérateurs L_k sur n'importe quelle représentation $M \in \mathcal{O}_\ell^{int}$ définit une représentation de l'algèbre de Virasoro. Combinée avec l'action de $\mathcal{L}$, on obtient ainsi une représentation de l'algèbre de courant.*

Soient $\pi : \mathfrak{g} \to End(V)$ une représentation simple de dimension finie et soient $L, M \in \mathcal{O}_\ell^{int}$. Un opérateur $\Phi(u, z) : L \to M$ est appelé primaire de type π s'il satisfait les conditions suivantes:

- $\Phi(u, z)$ est linéaire en $u \in V$;
- $[X(m), \Phi(u, z)] = z^m.\Phi(X.u, z)$, pour tout $X \in \mathfrak{g}$;
- $[L_m, \Phi(z)] = (z^{m+1}d/dz + (a(\pi)/(l+g))(m+1)z^m).\Phi(z)$,

où $a(\pi)$ est l'unique valeur propre du Casimir sur V.

Pour tout nombre b, notons M_b l'action de l'algèbre de Virasoro pour laquelle L_m agit comme $b.z^m - z^{m+1}d/dz$. De même, étant donné une représentation V de dimension finie de $\mathfrak{g}$, on peut définir une représentation $M_b(V)$ de l'algèbre de courant sur l'espace $V \otimes \mathbf{C}[t, t^{-1}]$ en faisant agir les éléments $X(n)$ de $\mathcal{L}$ comme $X \otimes t^n$ et les éléments L_m de Vir comme $b.z^m - z^{m+1}d/dz$.

Considérons des champs donnés sous la forme $\Phi(z) = \sum_n z^{-1-n}\Phi_n$ d'une série formelle en z et z^{-1}, des représentations U, V de Vir pour lesquelles l'action de L_0 est semi-simple et avec des valeurs propres dont la partie réelle est bornée supérieurement. Par une construction inverse à celle de l'exemple 2.1, on voit qu'un champ primaire d'anomalie a, $\Phi(z) : U \to V$ s'identifie à un morphisme de Vir-module $\Phi : M_{a-1} \otimes U \to V$. De même un champ primaire $\Phi(z, u) : M \to N$ de type $\rho : \mathfrak{g} \to End(V)$ entre deux modules M, N dans $\mathcal{O}_\ell^{int}$ s'identifie à un morphisme pour l'algèbre de courant $\Phi : L_b(V) \otimes M \to N$, avec $b = ((a(\pi)/(\ell + g)) - 1$.

Etant donnée une représentation $L_\ell(\lambda)$ de $\mathcal{L}$, le vecteur "vide" est un vecteur non nul v de $L(\lambda) \subset L_\ell(\lambda)$ et tel que $\mathfrak{n}.v = 0$. Choisissons n représentations simples V_i de $\mathfrak{g}$, $(n+1)$ poids $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}$ dans $\mathcal{P}_\ell$, et n champs primaires de type V_i $\Phi_i(u, z) : L_\ell(\lambda_i) \to L_\ell(\lambda_{i+1})$, et posons $W = (V_n \otimes \cdots \otimes V_1)^*$.

THÉORÈME 2.6 (Knizhnik et Zamolodchikov).— *La fonction à n points $\langle vide|\Phi_n(u_n, z_n) \circ \cdots \circ \Phi_1(u_1, z_1)|vide\rangle$ est une solution multivaluée de l'équation de Knizhnik et Zamolodchikov avec paramètre $1/(\ell + g)$.*

Du point de vue strictement mathématique, la procédure pour définir le produit $\Phi_n(u_n, z_n) \circ \cdots \circ \Phi_1(u_1, z_1)$ est difficile à justifier. Cette construction a été rigoureusement décrite dans le travail de Tsuchiya, Kanie **[TK]**, Tsuchiya, Kanie et Yamada **[TKY]**, au moins dans des cas importants.

Notons $Y_\ell(\lambda, \mu, \nu)$ l'ensemble des champs primaires $\Phi(u, z) : L_\ell(\mu) \to L_\ell(\nu)$ de type $L(\lambda)$. Si l'on écrit ce champ sous la forme d'une série formelle en z et z^{-1}, alors le terme de degré zéro (appelé terme initial) définit un morphisme de $L(\lambda) \otimes L(\mu) \to L(\nu)$. De plus, si le terme initial est nul, alors le champ est nul. Donc on peut considérer que l'on a : $Y_\ell(\lambda, \mu, \nu) \subset Hom_G(L(\lambda) \otimes L(\mu), L(\nu)$. Posons $dim(Y_\ell(\lambda, \mu, \nu) = V^\nu_{\lambda,\mu}$ et $dim(Hom_G(L(\lambda) \otimes L(\mu), L(\nu)) = K^\nu_{\lambda,\mu}$. Il résulte des propriétés usuelles du produit tensoriel des représentations que les coefficients (bien connus) $K^\nu_{\lambda,\mu}$ sont les constantes de structures d'une algèbre associative. Il a été constaté que les constantes $V^\nu_{\lambda,\mu}$ forment aussi les constantes de structures d'une algèbre associative. Aussi Moore et Seiberg ont-ils eu l'idée que la catégorie $\mathcal{O}_\ell^{int}$ a une structure de catégorie tensorielle, liée aux groupes quantiques. Signalons aussi un cas particulier où l'une des formules de Verlinde calcule explicitement ces nombres : on a pour tous $\lambda, \mu, \nu \in \mathcal{P}_\ell$

$$V^\nu_{\lambda,\mu} = \Sigma_{w \in W_\ell/W}\ \epsilon(w).K_{\lambda,\mu}^{w^{-1}(\nu+\rho)-\rho},$$

où W (respectivement W_ℓ) désigne le groupe de Weyl affine. Ces faits sont maintenant établis (voir **[TK]**, **[TUY]**).

Signalons que dans **[GM]** on calcule certaines multiplicités de décomposition de produits tensoriels de représentations modulaires de groupes de Chevalley et on observe que ces multiplicités sont les nombres $V_{\lambda,\mu}^{\nu}$ dans le cas de groupes de type ADE. Dans le cas de groupes de type non ADE, les multiplicités sont données par une formule identique, avec un autre groupe de Weyl affine. Cette coïncidence est complètement élucidée par les équivalences de catégories prouvées par Kazhdan et Lusztig et le travail de Finkelberg (voir **[KL][F]**).

3. TRAVAUX DE KAZHDAN ET LUSZTIG

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de type ADE, soit $G(\mathbf{C})$ le groupe connexe et simplement connexe, et soit $\mathcal{L}$ l'algèbre de Lie affine associée à $\mathfrak{g}$ (voir section 3 pour la définition). Pour un complexe κ notons $\mathcal{O}$ la catégorie de toute les représentations M de $\mathcal{L}$ qui satisfont aux propriétés suivantes :

(1) M est de longueur finie et de niveau $\kappa - g$,

(2) l'action de $\mathcal{L}^+$ est localement nilpotente,

(3) comme $\mathfrak{g}$-module, M s'intègre à G.

En fait, Kazhdan et Lusztig s'intéressent principalement au cas où κ est un nombre rationnel < 0. Dans ce cas, la catégorie $\mathcal{O}_\kappa$ ne contient aucune représentation intégrable.

Voici quelques résultats principaux des travaux récents de Kazhdan et Lusztig.

THÉORÈME 3.1 [KL2] .— *(κ rationnel $\ll 0$) Il existe une équivalence de catégorie entre $\mathcal{O}_\kappa$ et la catégorie des représentations du groupe quantique $U_q(\mathfrak{g})$ à $q = e^{i\pi/\kappa}$.*

Ce résultat s'inscrit dans le programme de Lusztig pour résoudre le problème suivant. Soit $\mathbf{F}$ la clôture algébrique d'un corps à p-éléments et soit $G(F)$ le groupe algébrique sur $\mathbf{F}$ "analogue" à $G(\mathbf{C})$ (pour fixer les idées, si $G(\mathbf{C}) = SL_n(\mathbf{C})$, alors $G(\mathbf{F}) = SL_n(\mathbf{F})$). Les représentations (sur $\mathbf{F}$) rationnelles irréductibles de $G(\mathbf{F})$ sont classifiées par le même ensemble P^+ qu'en caractéristique 0. En fait la correspondance de Cartan, qui, à une représentation simple L, associe son plus haut poids $\lambda(L)$, est construite comme en caractéristique 0, à ceci près qu'il convient de remplacer les algèbres de Lie par les groupes correspondants. Notons $(L_p(\lambda))_{\lambda\in P^+}$ ces représentations. Aux développements très récents près, peu de choses étaient connues au sujet de ces représentations simples. Par exemple la dimension de ces représentations n'était pas connue. En fait, on cherche plus généralement à connaître les caractères de ces représentations, c'est-à-dire les valeurs propres et les multiplicités de l'action d'un élément générique de $G(\mathbf{F})$. Bien que la formule de Weyl (*i.e.* la formule analogue en caractéristique 0) ait été établie depuis longtemps, en caractéristique finie même l'énoncé d'une conjecture a été un problème ouvert jusqu'en 1980 quand Lusztig a énoncé sa conjecture basée sur la combinatoire des polynômes de Kazhdan-Lusztig **[L1]**.

Précisons que, dans l'énoncé de sa conjecture, Lusztig donne une borne explicite inférieure sur p (essentiellement p doit être au moins de la taille de g^2). En 1988 Lusztig a proposé le programme suivant pour prouver sa conjecture.

Première étape. Rappelons que les problèmes analogues en caractéristique zéro sont bien connus (formule de Weyl). Le module $L(\lambda)$ peut être défini sur $\mathbf{Z}$. Soit $L_0(\lambda)$ une $\mathbf{Z}$-forme de ce module. Alors $\mathbf{F}_p \otimes_{\mathbf{Z}} L_0(\lambda)$ contient $L_p(\lambda)$ comme sous-quotient. En particulier on a $dim\, L_p(\lambda) \leq dim\, L(\lambda)$. De plus pour beaucoup de λ cette dimension est strictement inférieure. Donc il est impossible de "remonter" $L_p(\lambda)$ en caractéristique zéro. Or Lusztig a prouvé que lorsque q est une racine de l'unité, la réduction modulo p d'une certaine forme de $U_q(\mathfrak{g})$ est exactement l'(hyper-)algèbre ordinaire de $G(\mathbf{F})$. D'où la première étape proposée par Lusztig est de relever en caractéristique zéro les représentations de $G(\mathbf{F})$ en des représentations de l'algèbre enveloppante quantique à une racine p-ième de l'unité (plus précisement pas toutes les représentations car cela serait impossible, mais au moins celles qui sont restreintes, *i.e.* celles dont le plus haut poids satisfait à $0 \leq \lambda(h_i) \leq (p-1)$). Cette étape a été résolue récemment par Andersen, Jantzen et Soergel **[AJS]**, mais avec une borne inférieure pour p non explicite.

Deuxième étape. Prouver une équivalence entre représentations de groupes quantiques aux racines ℓ-ièmes de l'identité et les représentations de niveau $-\ell-g$ de l'algèbre de Kač-Moody affine associée. Pour des algèbres de Lie de type ADE, cela est couvert par le théorème 3.1. De plus, le preprint **[L2]** explique comment modifier **[KL1]** pour prouver le théorème 3.1 en général.

Troisième étape. Prouver une formule de caractères pour les représentations des algèbres de Lie affines au niveau négatif. Une contribution est apportée dans un preprint de Casian [C]. En fait [C] annonce ce résultat, mais un point de la preuve est encore l'objet de discussions d'experts[1].

Donnons quelques détails sur la preuve du théorème 3.1. qui est le résultat principal d'une série de cinq articles **[KL]**. Notons que la catégorie des représentations d'un groupe quantique est naturellement une catégorie tensorielle (de plus tressée). Le point crucial est de démontrer *a priori* que la catégorie $\mathcal{O}_k$ est une catégorie tensorielle (tressée). Notons que le produit tensoriel ordinaire de deux représentations de niveau $\kappa - g$ est de niveau $2\kappa - 2g$. Donc pour définir un produit tensoriel sur $\mathcal{O}_\kappa$, il est nécessaire d'utiliser une nouvelle approche.

Comme indiqué au précédent paragraphe, des structures de produits tensoriels extra-ordinaires avaient été dégagées pour les catégories de représentations intégrables, en particulier de niveau ≥ 0. Le fait qu'on puisse définir un produit tensoriel en niveau négatif semblait inattendu.

Indiquons brièvement la construction du produit tensoriel $T(U_1, U_2)$ de deux modules $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_\kappa$.

Définissons d'abord la notion de vecteur lisse. Soit M une représentation arbitraire de $\mathcal{L}$. Un vecteur v est dit lisse si le $\mathcal{P}$-module N engendré par v est de dimension finie et qu'en outre N est un $\mathcal{L}^+$-module nilpotent. Le sous-espace des vecteurs lisses est un $\mathcal{L}$-module et de plus on peut étendre l'action à l'algèbre de Lie $\overline{\mathcal{L}} = \mathbf{C}.\mathbf{c} \oplus \mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}[t^{-1}, t]]$ (où $\mathbf{C}[t^{-1}, t]$ désigne le corps des séries de Laurent). Rappelons que le corps des fonctions rationnelles sur $\mathbf{P}^1$ est isomorphe à $\mathbf{C}(z)$. En outre tous les autres générateurs y de ce corps se déduisent de z par une homographie, *i.e.* $y = (ax+b)/(cx+d)$. Ces générateurs forment une variété de dimension 3 et les paramètres en un point qui sont des générateurs du corps en forment une sous-variété de dimension deux. Appelons ces paramètres spéciaux.

Le produit tensoriel modifié n'est pas intrinsèque. Il dépend du choix de trois points p_1, p_2 et P sur $\mathbf{P}^1$ et du choix de paramètres spéciaux $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon$ en chacun de ces points. De manière imagée, on va placer U_1 en p_1, U_2 en p_2 et "à l'arrivée" on

[1] Ajout octobre 94 : les formules de caractères au niveau négatif sont maintenant prouvées dans le preprint suivant :
M. KASHIWARA ET T. TANISAKI - *Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras at the negative level*, RIMS preprint 983 (juin 94).

va obtenir le produit tensoriel placé en P.

Soit A l'anneau des fonctions régulières sur $\mathbf{P}^1 \setminus \{p_1, p_2, P\}$. Notons $\Gamma = \mathfrak{g} \otimes A \oplus \mathbf{C}.\mathbf{c}$ l'extension centrale de $\mathfrak{g} \otimes R$ définie par n'importe lequel des deux 2-cocycles suivants (qui sont égaux par la formule des résidus) :

$$(X \otimes f, Y \otimes g) \mapsto \kappa(x,y)(Res_{p_1}(fdg) + Res_{p_2}(fdg)$$

$$(X \otimes f, Y \otimes g) \mapsto -\kappa(x,y)(Res_{p_1}(fdg),$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$ et $f, g \in A$.

Pour $f \in A$, notons f_1, f_2, F les séries de Laurent en t telles que $f_1(\epsilon_1) = f_2(\epsilon_2) = F(\epsilon) = f(t)$ (autrement dit f_1, f_2, F sont les développements en séries de Laurent de f aux points p_1, p_2 et P).

Posons $\overline{\mathcal{L}}_{1,2} = (\overline{\mathcal{L}} \oplus \overline{\mathcal{L}})/\mathbf{C}.(\mathbf{c}, -\mathbf{c})$. Nous noterons encore $\mathbf{c}$ l'elément de $\overline{\mathcal{L}}_{1,2}$ qui est l'image de $\mathbf{c}, 0$. Définissons $a : \Gamma \to \overline{\mathcal{L}}_{1,2}$ et $b : \Gamma \to \overline{\mathcal{L}}$ par les formules suivantes :

$$a(X \otimes f(t)) = (X \otimes f_1(t), X \otimes f_2(t)),$$

$$a(\mathbf{c}) = \mathbf{c},$$

$$b(X \otimes f(t)) = X \otimes F(t)\ ,\ b(\mathbf{c}) = -\mathbf{c}.$$

Soit F_1 l'idéal d'augmentation $\overline{\mathcal{L}}^+.U(\overline{\mathcal{L}}^+)$ de $U(\overline{\mathcal{L}}^+)$. Définissons une filtration décroissante F_n de $U(\overline{\mathcal{L}}^+)$ par les formules récurrentes $F_0 = U(\overline{\mathcal{L}}^+)$ et $F_{n+1} = F_1.F_n$ pour $n \geq 0$ (cette filtration est simplement la filtration par les puissances de l'idéal d'augmentation). Posons $G_n = b^{-1}(F_n)$. Posons aussi $\lambda = \kappa - g$.

La construction du produit tensoriel extraordinaire est la suivante. Posons $W = U_1 \otimes U_2$. Puisque U_1 et U_2 sont des $\mathcal{L}$-modules lisses de même niveau λ, W est un $\overline{\mathcal{L}}_{1,2}$-module, donc un Γ-module (utiliser le morphisme a). Le niveau de ce module est λ. Considérons maintenant $\widehat{W} = lim.proj.W/G_n.W$. Le morphisme $b : \Gamma \to \overline{\mathcal{L}}$ est simplement le morphisme de complétion de Γ au point P. Par une démonstration un peu analogue (mais un peu plus compliquée) du fait que les vecteurs lisses forment une sous-représentation, on montre que $\widehat{W}$ est naturellement un $\overline{\mathcal{L}}$-module. Ainsi $\widehat{W}$ est un $\mathcal{L}$-module. Son niveau est maintenant $-\lambda$. Tordant le module par l'involution $-t$, on obtient un module $(\widehat{W})^{-t}$ de niveau λ.

Par définition le produit tensoriel extraordinaire de U_1 et de U_2 est le sous-module des vecteurs lisses de $(\widehat{W})^{-t}$.

Pour vérifier des conditions de compatibilité du produit ainsi défini, Kazhdan et Lusztig sont conduits à définir des produits tensoriels extraordinaires d'un nombre arbitraire de représentations et plusieurs places "à l'arrivée" situées sur plusieurs copies de $\mathbf{P}^1$. Nous omettrons cette définition plus générale.

Pour décrire les contraintes de commutativité et d'associativité, Kazhdan et Lusztig construisent des fibrés à connexion qui généralisent les connexions de Knizhnik et Zamolodchikov. Les variétés sur lesquelles sont définis ces fibrés ne sont plus des espaces X_n, mais des espaces du type suivant :

Ensemble Z_n formé de $(2n+1)$-uplets $P, z_1, ..., z_n, \epsilon_1, ..., \epsilon_n$ modulo l'action de $SL(2)$, où $P, z_1, ..., z_n$ sont $(n+1)$-points distincts de $\mathbf{P}^1$, et où $\epsilon_1, ..., \epsilon_n$ sont des coordonnées spéciales en $z_1, ..., z_n$. Partant de n représentations, Kazhdan et Lusztig définissent un espace de covariant (de leur produit tensoriel). Cet espace de covariant est un module sur l'algèbre des fonctions régulières sur Z_n. Les opérateurs de Sugawara sont alors utilisés pour construire une connexion sur ce fibré. Cela montre que ce module est celui des sections d'un fibré vectoriel. Ceci montre déjà que le produit tensoriel extraordinaire ne dépend pas des choix faits (mais non canoniquement). Ensuite, Kazhdan et Lusztig ont à construire des contraintes de commutativité et associativité.

BIBLIOGRAPHIE

[A] H.H. ANDERSEN - *Quantum groups, invariants of 3-manifolds and semi-simple tensor categories*, Preprint.

[AJS] H.H. ANDERSEN, J.C. JANTZEN and W. SOERGEL - *Representation of quantum groups at p-root of unity and of semi-simple groups in characteristic p : independence of p*, Astérisque **220** (1994).

[Ao1] K. AOMOTO - *Fonctions hyperlogarithmiques et groupes de monodromie unipotent*, J. Fac. Sc. Tokyo, **25** (1978) 149-156.

[Ao2] K. AOMOTO - *Gauss-Manin connection of integrals of different products*, J. Fac. Sc. Tokyo, **39** (1987) 191-208.

[BPZ] A.A. BELAVIN, A.N. POLYAKOV and A.B. ZAMOLODCHIKOV - *Infinite conformal symmetries in two-dimensional conformal field theory*, Nucl. Phys.

B, **241** (1984) 333-380.

[C] L. CASIAN - *Kazhdan-Lusztig conjecture in the negative level case (Kač-Moody Lie algebras of affine type)*, Preprint.

[D] V.G. DRINFELD - *On almost cocommutative Hopf algebras*, Algebra and Analysis **1** (1987) 30-46.

[FSV] B.L. FEIGIN, V.V. SCHECHTMAN and A.N. VARCHENKO - *On algebraic equations satisfied by correlators in the Wess-Zumino-Witten model*, Letter Mat. Phys. **20** (1990) 291-297.

[F] M. FINKELBERG - *Fusion categories*, Harvard P.H.D. (Mai 1993).

[J1] M. JIMBO - *Quantum R-matrix for the generalized Todda system*, Comm. Math. Phys. **102** (1986) 537-547.

[J2] M. JIMBO: *Quantum R-matrix related to the generalized Todda lattice*, Lect. Notes Phys., Springer Verlag **246** (1986).

[G] C. GAWĘDZKI - *Conformal field theory*, Sém. Bourbaki, exp. n° 704, novembre 1988, Astérisque **177-178** (1989), 95-126.

[GM1] G. GEORGIEV et O. MATHIEU - *Catégorie de fusion pour les groupes de Chevalley*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, **315** (1992) 659-662.

[GM2] G. GEORGIEV et O. MATHIEU - *Fusion category for Chevalley groups*, Proceedings de la conf. Conformal field theory, Mount Holliock, Juin 1992 (À paraître).

[G] P. GODDARD - *Meromorphic conformal field theory*, Preprint.

[HL] Y.Z. HUANG and J. LEPOWSKY - *Towards a theory for tensor products for representations of a vertex operator algebra*, Proc. 20th International Conference on Differential Geometry Methods in Theoritical Physics, New York 1991, ed. S. Catto and A. Rocha Carridi, World Sc., Singapore, **1** (1992) 344-354.

[K] V.G. KAČ - *Infinite dimensional Lie algebras*, Birkhaüser, Prog. Math. **44** (1983).

[KR] V.G. KAČ and A.K.RAINA - *Highest weights representations of infinite dimensional Lie algebras*, World Sc., Singapore. Adv. Ser. Math. Phys. **2** (1988).

[KL1] D. KAZHDAN G. LUSZTIG - *Affine Lie algebras and quantum groups,* Int. Math. Research Notices, Duke Math. J. **62** (1991) 21-29.

[KL2] D. KAZHDAN G. LUSZTIG - *Tensor structures arising from affine Lie algebras* (Preprint en 5 parties).

[KnZ] V.G. KNIZHNIK and A.B. ZAMOLODCHIKOV - *Current algebras and Wess-Zumino model in two dimensions*, Nucl. Phys. B **247** (1984) 83-103.

[K1] T. KOHNO - *Hecke algebra representations of braid groups and classical Yang-Baxter equations.* Comtemp. Math **78** (1988) 339-363.

[K2] T. KOHNO - *Monodromy representations of braid groups and classical Yang-Baxter equations*, Ann. Ins. Fourrier **37** (1987) 139-160.

[L1] G. LUSZTIG - *Some problems in the representation theory of finite groups*, Proc. Symp. Pure Math. **36** (1980) 185-203.

[L2] G. LUSZTIG - *Monodromic system on affine flag manifolds*, Preprint.

[MS] G. MOORE and N. SEIBERG - *Classical and quantum conformal field theory*, Comm. Math. Phys. **123** (1988) 177-254.

[R] M. ROSSO - *Représentations irréductibles du q-analogue de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie*, C.R.A.S. **305** (1987) 587-590.

[SV] V.V. SCHECHTMAN and A.N. VARCHENKO - *Hypergeometric solutions of Knizhnik-Zamolodchikov equations*, Letters Math. Phys. **20** (1990) 279-283.

[TK] A. TSUCHIYA and Y. KANIE - *Vertex operators in conformal field theory on $\mathbf{P}^1$ and monodromy representations of braid groups*, Adv. Study in Pure Math. **19** (1989) 459-565.

[TUY] A. TSUCHIYA, K. UENO and Y. YAMADA - *Conformal field theory on universal family of stable curve with gauges symmetries*, Adv. Studies in Pures Math. *19* (1989) 459-565.

[V] E. VERLINDE - *Fusion rules and modular transformations in $2D$-conformal field theory*, Nucl. Phys. B **300** (1988) 360-375.

[W] E. WITTEN - *Quantum field theory, Grassmannians and algebraic curves*, Comm. Math. Phys. **113** (1987) 529

Olivier MATHIEU

UA 1 du CNRS
Université Louis Pasteur
I.R.M.A.
7, rue René Descartes
F-67084 STRASBOURG CEDEX