MICHEL BRION

Points entiers dans les polytopes convexes

Astérisque, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 780, p. 145-169
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__145_0>

Séminaire BOURBAKI — Mars 1994
46ème année, 1993-94, n° 780

POINTS ENTIERS DANS LES POLYTOPES CONVEXES

par **Michel BRION**

Pour aller à Rabastens, vous irez d'abord à Mirepoix, puis à Bauville, et ensuite à Caraman. Et là vous demanderez le chemin pour aller à Rabastens.

Guillaume Bélibaste

1. LE POLYNÔME D'EHRHART D'UN POLYTOPE ENTIER

1.1. Soit M un réseau dans un espace vectoriel réel V de dimension finie. On appelle *polytope entier*, l'enveloppe convexe dans V d'un nombre fini de points de M. Si P est un tel polytope, on note $\mathrm{aff}(P)$ l'espace affine qu'il engendre, et $\dim(P)$ la dimension de $\mathrm{aff}(P)$. On désigne par P^0 l'intérieur de P dans $\mathrm{aff}(P)$.

On s'intéresse à compter les points entiers dans P et P^0, c'est-à-dire à dénombrer les ensembles (finis) $P \cap M$ et $P^0 \cap M$. Dans les années soixante, Ehrhart a découvert des propriétés remarquables des nombres de points entiers dans les multiples nP et nP^0, considérés comme fonctions de l'entier positif n; voir [Eh1], [Eh3], [Eh4]. Voici une partie de ses résultats.

THÉORÈME.— *Il existe une fonction polynomiale i_P telle que $i_P(n) = \mathrm{card}(M \cap nP)$ pour tout entier $n \geq 1$. De plus, on a: $i_P(0) = 1$ et $i_P(-n) = (-1)^{\dim(P)} \mathrm{card}(M \cap nP^0)$ pour tout entier $n \geq 1$ ("loi de réciprocité").*

1.2. Démonstration

Supposons d'abord que P est un simplexe de sommets $s_0, \ldots, s_d$, c'est-à-dire que P est l'enveloppe convexe de $s_0, \ldots, s_d$ et que $\dim(P) = d$. Notons Π le sous-ensemble de $M \times \mathbf{Z}$ formé des points qui peuvent s'écrire $\sum_{i=0}^{d} t_i(s_i, 1)$ avec des

$t_i \in [0,1[$. Pour tout $m \in M \cap nP$, on a une décomposition unique $(m,n) = (m_0,n_0)+\sum_{i=0}^d x_i(s_i,1)$ où $(m_0,n_0) \in \Pi$ et où les x_i sont des entiers non négatifs. Introduisons la série formelle

$$F_P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{card}(M \cap nP)\, z^n = \sum_{m \in M \cap nP} z^n .$$

D'après ce qui précède, on a:

$$F_P(z) = \sum_{(m,n)\in\Pi} z^n(1-z)^{-d-1} .$$

Observons que $0 \leq n < d+1$ pour tout $(m,n) \in \Pi$ et que $n=0$ implique $m=0$. Par suite, il existe des entiers $\delta_0, \ldots, \delta_d$ tels que

$$F_P(z) = (\delta_0 + \delta_1 z + \cdots + \delta_d z^d)\cdot(1-z)^{-d-1} .$$

De plus, $\delta_0 = 1$. On en déduit aussitôt que

$$i_P(n) = \delta_0\binom{n+d}{d} + \delta_1\binom{n+d-1}{d} + \cdots + \delta_d\binom{n}{d}$$

où $\binom{x}{d}$ désigne le polynôme $(d!)^{-1}x(x-1)\cdots(x-d+1)$. De plus, $i_P(0)=1$.

Notons Π' le sous-ensemble de $M \times \mathbf{Z}$ formé des points qui peuvent s'écrire $\sum_{i=0}^d t_i(s_i,1)$ avec des $t_i \in]0,1]$. On montre comme ci-dessus que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{card}(M \cap nP^0)\, z^n = \sum_{(m,n)\in\Pi'} z^n(1-z)^{-d-1} .$$

Observons que Π et Π' sont échangés par la symétrie centrale qui envoie (m,n) sur $(s_0+\cdots+s_d-m, d+1-n)$, d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{card}(M \cap nP^0) = \sum_{(m,n)\in\Pi} z^{d+1-n}(1-z)^{-d-1} = \sum_{i=0}^{d} \delta_i z^{d+1-i}(1-z)^{-d-1}$$

et finalement

$$\mathrm{card}(M \cap nP^0) = \delta_0\binom{n-1}{d} + \delta_1\binom{n}{d} + \cdots + \delta_d\binom{n+d-1}{d}$$

d'où la loi de réciprocité.

Dans le cas général, observons que

$$\operatorname{card}(M \cap P) + \operatorname{card}(M \cap Q) = \operatorname{card}(M \cap (P \cup Q)) + \operatorname{card}(M \cap (P \cap Q))$$

chaque fois que P, Q, $P \cup Q$ et $P \cap Q$ sont des polytopes entiers. De plus, l'expression $(-1)^{\dim(P)} \operatorname{card}(M \cap P^0)$ vérifie la même relation d'additivité. L'existence de i_P et la loi de réciprocité résultent alors du fait que tout polytope entier admet une subdivision par des simplexes entiers, et de la première partie de la démonstration. De même, $i_P(0)$ est la caractéristique d'Euler de P, ce qui termine la preuve.

1.3. Les coefficients du polynôme d'Ehrhart

Avec les notations de 1.1, écrivons

$$i_P(t) = a_0(P) + a_1(P)\,t + \cdots + a_d(P)\,t^d$$

où $a_0(P) = 1$. Il est clair que d est la dimension de P, et que $a_d(P) = vol_d(P)$ où $vol_d(P)$ désigne le volume de P, pour la mesure de Lebesgue sur $\operatorname{aff}(P)$, normalisée de façon que le quotient $\operatorname{aff}(P)/(M \cap \operatorname{aff}(P))$ soit de volume 1. La "loi de réciprocité" entraîne facilement l'égalité

$$a_{d-1}(P) = \frac{1}{2} \sum_{F \subset P} vol_{d-1}(F)$$

où la somme porte sur les $(d-1)$-faces de P, leur volume étant normalisé comme ci-dessus. En particulier, lorsque $d = 2$, on retrouve la *formule de Pick* (voir [Pi]): le nombre de points entiers dans un polygone entier P est égal à l'aire de P, plus la moitié du nombre de points entiers sur le bord de P, plus 1.

Mais les choses se compliquent en dimension 3 ou plus: le terme $a_1(P)$ pour un tétraèdre entier P de dimension 3, n'a été compris que très récemment (voir [Po] ou 3.4 ci-dessous). Observons que ce terme ne peut s'exprimer en fonction des volumes des faces propres de P. En effet, dans $\mathbf{R}^3$ muni du réseau $\mathbf{Z}^3$, considérons le tétraèdre P_r de sommets $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,r)$ où r est un entier positif. Alors P_r ne contient pas d'autre point entier que ses sommets. D'autre part, P_r est de volume $r/6$, toutes ses faces sont de volume $1/2$, et toutes ses arêtes de volume 1. D'où aussitôt $a_1(P_r) = 2 - \frac{r}{6}$ et notre assertion. Cette observation est due à Reeve, voir [Re].

On montre plus généralement que pour $1 \leq k \leq d-2$, le terme $a_k(P)$ ne peut s'exprimer en fonction de la somme des volumes des k-faces de P; voir [Ka]. On verra cependant que $a_k(P)$ est combinaison linéaire de ces volumes, avec des coefficients qui ne dépendent que de la géométrie locale de P; voir 2.4 ci-dessous.

2. POLYNÔME D'EHRHART ET THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH

On rappelle le dictionnaire entre polytopes entiers et varétés toriques projectives munies d'un fibré en droites ample et linéarisé. Grâce au théorème de Riemann-Roch, on en déduit un lien entre les coefficients du polynôme d'Ehrhart et le calcul de la classe de Todd des variétés toriques.

2.1. Polytopes entiers et variétés toriques polarisées (voir [Da], [Fu2], [Od], [Te])

On note $\mathbf{C}[M]$ l'algèbre du groupe M sur $\mathbf{C}$, et $(x^m)_{m\in M}$ sa base canonique. Soit t une indéterminée. A tout polytope entier P, on associe l'espace

$$A_P := \bigoplus_{m\in M\cap nP} \mathbf{C}\, x^m\, t^n \subset \mathbf{C}[M][t] \ .$$

Alors A_P est une sous-algèbre de $\mathbf{C}[M][t]$, graduée par les entiers non négatifs. On vérifie aisément que A_P est normale, et qu'elle est entière sur sa sous-algèbre engendrée par ses éléments de degré 1. On peut donc définir une variété projective normale $X_P := \operatorname{Proj} A_P$ et un fibré en droites ample L_P sur X_P, tels que

$$H^0(X_P, L_P^{\otimes n}) = \bigoplus_{m\in M\cap nP} \mathbf{C}x^m = (A_P)_n \ .$$

On a: $\dim(X_P) = \dim(A_P) - 1 = \dim(P)$ et de plus: $X_{nP} = X_P$, $L_{nP} = L_P^{\otimes n}$.

Notons T le groupe des homomorphismes de M vers $\mathbf{C}^*$, c'est-à-dire le tore dont le groupe des caractères est M. L'algèbre A_P est graduée par $M \times \mathbf{N}$, d'où une opération de T dans X_P, qui se relève à l'espace total de L_P: on dit que L_P est *T-linéarisé*.

Pour toute face F de P, l'algèbre A_F est un quotient de A_P, d'où une inclusion de X_F dans X_P. On construit ainsi toutes les sous-variétés de X_P, qui sont irréductibles et stables par T. Par suite, les orbites de T dans X_P sont en bijection avec les faces de P; en particulier, T a une orbite dense dans X_P.

On appelle *T-variété torique* une variété normale dans laquelle T opère avec une orbite dense. On a une correspondance bijective entre polytopes entiers et couples (X, L) où X est une variété torique projective, et L un fibré en droites ample, T-linéarisé sur X. On peut montrer alors que $H^i(X, L^{\otimes n}) = 0$ lorsque $i \geq 1$ et $n \geq 1$; ce résultat reste valable si L est engendré par ses sections globales. On en déduit que

$$\mathrm{card}(M \cap nP) = h^0(X, L^{\otimes n}) = \chi(X, L^{\otimes n})$$

où χ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré cohérente. Mais $\chi(X, L^{\otimes n})$ est fonction polynomiale de l'entier n (voir [Fu1] 18.3.6 ou 2.3 ci-dessous); de plus, $\chi(X, \mathcal{O}_X) = h^0(X, \mathcal{O}_X) = 1$. *On retrouve ainsi l'existence de i_P et le fait que $i_P(0) = 1$.* On montre aussi que X est de Cohen-Macaulay, et que son faisceau dualisant ω_X vérifie: $h^0(X, \omega_X \otimes L^{\otimes n}) = \mathrm{card}(M \cap nP^0)$. De la dualité de Serre et de l'annulation des $H^i(X, L^{\otimes -n})$ pour $i < \dim(P)$ et $n \geq 1$, on déduit que

$$\mathrm{card}(M \cap nP^0) = \chi(X, \omega_X \otimes L^{\otimes n}) = (-1)^{\dim(P)} \chi(X, L^{\otimes -n})$$

On retrouve ainsi la "loi de réciprocité".

On peut aussi redémontrer et préciser les résultats d'Ehrhart, grâce au fait que l'algèbre graduée A_P est de Cohen-Macaulay et que sa fonction de Hilbert est i_P; voir entre autres [Hi] et [St].

2.2. Éventails et variétés toriques (voir [Da], [Fu2], [Od], [Te])

Soit P un polytope entier. Pour toute face F de P, notons P_F le cône convexe engendré par les points $p - f$ où $f \in F$ et $p \in P$. On pose:

$$\check{P}_F := \{f \in V^* \mid f(x) \geq 0 \ \forall x \in P_F\}$$

(le cône dual de P_F). Chaque $\check{P}_F$ est un cône convexe saillant, engendré par un nombre fini de demi-droites entières par rapport au réseau $N := \mathrm{Hom}(M, \mathbf{Z})$. Un tel cône est appelé *cône convexe rationnel polyédral,* abrégé en c.c.r.p, voire en

cône. Lorsque F décrit les faces de P, les $\check{P}_F$ s'assemblent en un *éventail* Δ_P, c'est-à-dire une collection finie de c.c.r.p. σ, telle que:
(i) Si τ est une face de $\sigma \in \Delta$, alors $\tau \in \Delta$.
(ii) Si σ, $\tau \in \Delta$ alors $\sigma \cap \tau$ est une face de σ et de τ.

Pour tout entier $k \geq 0$, on note $\Delta(k)$ l'ensemble des cônes de dimension k de Δ. Lorsque $\Delta = \Delta_P$, l'application $F \to \check{P}_F$ est une bijection de l'ensemble des faces de codimension k de P, sur $\Delta(k)$.

L'éventail Δ_P est *complet*: ses cônes forment une subdivision de V^*. Soit $H_P : V^* \to \mathbf{R}$ la *fonction d'appui* de P, définie par $H_P(f) = \inf_{p \in P} f(p)$. Alors H_P est convexe, linéaire sur chaque cône de Δ_P, et Δ_P est le plus petit éventail avec ces propriétés. Un tel éventail, de la forme Δ_P, est appelé *projectif.*

A tout éventail Δ on associe une T-variété torique X_Δ en recollant les variétés toriques affines

$$X_\sigma := \operatorname{Spec} \bigoplus_{m \in M \cap \check{\sigma}} \mathbf{C} x^m$$

suivant $X_\sigma \cap X_\tau = X_{\sigma \cap \tau}$. Pour tout $\sigma \in \Delta$, notons $\mathcal{O}_\sigma$ l'unique orbite fermée de T dans X_σ, et notons V_σ l'adhérence de $\mathcal{O}_\sigma$. L'application $\sigma \to \mathcal{O}_\sigma$ est une bijection de Δ sur l'ensemble des orbites de T dans X_Δ. On a: $\dim(\mathcal{O}_\sigma) = \operatorname{codim}(\sigma)$ et de plus: $\sigma \subset \tau$ si et seulement si $V_\sigma \supset V_\tau$.

La variété torique associée à un polytope entier P, ne dépend que de Δ_P. On a un dictionnaire entre éventails et variétés toriques, dont voici quelques extraits.
X_Δ est complète (resp. projective) $\Leftrightarrow$ Δ est complet (resp. projectif).
X_Δ est lisse $\Leftrightarrow$ Δ est régulier (i.e. tout cône de Δ est engendré par une partie d'une base de N).
X_Δ n'a que des singularités quotients par des groupes finis $\Leftrightarrow$ Δ est simplicial (i.e. tout cône de Δ est engendré par des directions linéairement indépendantes).
$\pi : X_{\Delta'} \to X_\Delta$ est un morphisme propre et équivariant (resp. une désingularisation équivariante) $\Leftrightarrow$ Δ' est une subdivision (resp. une subdivision régulière) de Δ. On montre alors que $R^i\pi_*\mathcal{O}_{X'} = 0$ pour tout $i \geq 1$.

2.3. Le théorème de Riemann-Roch (voir [Ful] Chap. 18)

Soit X un schéma de type fini sur $\mathbf{C}$. Pour tout entier $k \geq 0$, on note $A_k(X)$ le groupe de Chow des k-cycles de X, modulo l'équivalence rationnelle. L'image dans $A_k(X)$ du k-cycle irréductible Y est notée $[Y]$. On note $A_*(X)$ le groupe abélien gradué, somme directe des $A_k(X)$; on pose $A_*(X)_{\mathbf{Q}} := A_*(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$. Lorsqu'on considère la graduation par la codimension, on a de même $A^k(X)$, $A^*(X)$ et $A^*(X)_{\mathbf{Q}}$.

Tout fibré en droites L sur X définit une *classe de Chern* $c_1(L)$, qui est un opérateur de degré -1 sur $A_*(X)$: si Y est un k-cycle irréductible, on note $c_1(L) \cap Y$ la classe dans $A_{k-1}(X)$ représentée par le diviseur de Cartier sur Y associé au fibré en droites $L|Y$. Le *caractère de Chern* $ch(L)$ est l'opérateur de $A_*(X)_{\mathbf{Q}}$ défini par :

$$ch(L) = exp(c_1(L)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_1(L)^k}{k!}.$$

Plus généralement, pour tout fibré vectoriel E sur X, on a des classes de Chern $c_i(E) : A_k(X) \to A_{k-i}(E)$ pour $0 \leq i \leq rg(E)$, ainsi qu'un caractère de Chern $ch(E)$, opérant dans $A_*(X)_{\mathbf{Q}}$.

On suppose désormais que X est complet. D'après le théorème de Riemann-Roch, il existe une *classe de Todd* $Td(X)$ dans $A_*(X)_{\mathbf{Q}}$ telle que pour tout fibré vectoriel E sur X, on ait :

$$\chi(X, E) = \int_X ch(E) \cap Td(X)$$

où $\int_X$ désigne le degré (le degré d'un 0-cycle est la somme de ses coefficients, et le degré d'un k-cycle est nul pour tout $k > 0$). De plus, si $\pi : X' \to X$ est un morphisme propre tel que $\pi_* \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X$ et $R^i \pi_* \mathcal{O}_{X'} = 0$ pour tout $i \geq 1$, alors $\pi_* Td(X') = Td(X)$. En notant d la dimension de X, on a: $Td_d(X) = [X]$ et si X est normale, alors $Td_{d-1}(X) = -\frac{1}{2} K_X$ où K_X désigne la classe canonique de X.

On en déduit aussitôt que pour tout fibré en droites L sur X, on a :

$$\chi(X, L^{\otimes n}) = \sum_{k=0}^{d} n^k \int_X \frac{c_1(L)^k}{k!} \cap Td_k(X) .$$

En particulier, $\chi(X, L^{\otimes n})$ est une fonction polynomiale de n, de degré au plus d (on l'appelle polynôme de Snapper-Kleiman). Le coefficient de n^d dans $\chi(X, L^{\otimes n})$ est

$$\int_X \frac{c_1(L)^d}{d!} \cap [X] = \frac{\deg(L)}{d!} .$$

2.4. Polynôme d'Ehrhart et classe de Todd (voir [Fu2], [M4]).

Soient P un polytope entier de dimension d, et

$$i_P(n) = a_0(P) + a_1(P)n + \cdots + a_d(P)n^d$$

son polynôme d'Ehrhart. Soit Δ une subdivision de Δ_P ; soient X la variété torique associée à Δ ; et L le fibré en droites sur X défini par P. D'après ce qui précède, on a :

$$a_k(P) = \int_X \frac{c_1(L)^k}{k!} \cap Td_k(X).$$

En particulier, pour $k = d$ on obtient : $vol_d(P) = \frac{\deg(L)}{d!}$. En outre, comme un diviseur canonique sur X est $-\sum_{\sigma\in\Delta(1)} V_\sigma$, on a :

$$a_{d-1}(P) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\in\Delta(1)} \int_X \frac{c_1(L)^{d-1}}{(d-1)!} \cap [V_\sigma].$$

On retrouve ainsi le fait que $a_{d-1}(P)$ est la demi-somme des volumes des $(d-1)$-faces de P.

On vérifie sans peine que le groupe $A_*(X)$ est engendré par les $[V_\sigma]$; voir [Fu2] 5.1. Ceci conduit à une nouvelle entrée du dictionnaire.

PROPOSITION.— *Soient Δ un éventail simplicial projectif, et $(\mu(\sigma))_{\sigma\in\Delta}$ une famille de nombres rationnels. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout polytope entier P tel que $\Delta = \Delta_P$, et pour tout entier $k \geq 0$, on a :*

$$a_k(P) = \sum_{F\subset P} \mu(\check{P}_F)\, vol_k(F),$$

où la somme porte sur les k-faces de P (notations de 2.2).

(ii) *Dans $A_*(X)_{\mathbf{Q}}$, on a: $Td(X) = \sum_{\sigma\in\Delta} \mu(\sigma)\,[V_\sigma]$.*

Démonstration.— (ii) $\Rightarrow$ (i) résulte du théorème de Riemann-Roch.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Pour tout cône simplicial $\tau \in V^*$, notons $\operatorname{mult}\tau$ l'indice dans $N\cap\langle\tau\rangle$ du sous-réseau engendré par les points entiers sur les arêtes de τ. D'après [Fu2] 5.1, l'espace $A^*(X)_{\mathbf{Q}}$ a une structure d'algèbre graduée, et la "dualité de Poincaré"

$$A^k(X)_{\mathbf{Q}} \otimes A_k(X)_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{Q} : (\alpha,\beta) \to \int_X \alpha\cdot\beta$$

est un isomorphisme. De plus, la multiplication dans $A^*(X)_{\mathbf{Q}}$ est donnée par: $[V_\sigma] \cdot [V_\tau] = (\operatorname{mult} \sigma)(\operatorname{mult} \tau)(\operatorname{mult} \gamma)^{-1}[V_\gamma]$ lorsque σ et τ engendrent un cône γ de Δ tel que $\dim(\sigma) + \dim(\tau) = \dim(\gamma)$.

Il en résulte aussitôt que la $\mathbf{Q}$-algèbre $A^*(X)_{\mathbf{Q}}$ est engendrée par les $[V_\sigma]$, où σ décrit $\Delta(1)$. Mais puisque X est projective, le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $A^1(X)_{\mathbf{Q}}$ est engendré par les classes des diviseurs amples. Grâce à l'identité

$$k! x_1 x_2 \cdots x_k = \sum_{I \subset [1,k]} (-1)^{k-\operatorname{card}(I)} \Big(\sum_{i \in I} x_i\Big)^k ,$$

on en déduit que le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $A^*(X)_{\mathbf{Q}}$ est engendré par les puissances des diviseurs amples. L'assertion en résulte aussitôt.

Remarque.— La classe de Todd ne se représente pas toujours par un cycle effectif. En effet, les coefficients du polynôme d'Ehrhart peuvent être négatifs; voir l'exemple de Reeve en 1.3.

3. CLASSES DE TODD DES VARIÉTÉS TORIQUES, ET SOMMES DE DEDEKIND

On expose les résultats de Pommersheim, voir [Po].

3.1. La classe de Todd d'un variété torique simpliciale

Soient X une variété torique complète, et Δ son éventail. Supposons d'abord que X est lisse; alors la classe de Todd de X est $Td(X) = td(T_X) \cap [X]$ où $td(T_X)$ est la classe de Todd du fibré tangent à X. Rappelons que:

$$td(T_X) = \prod_{\sigma \in \Delta(1)} Y_\sigma (1 - exp(-Y_\sigma))^{-1}$$

où on développe formellement le membre de droite grâce à la structure d'anneau de $A^*(X)$. Si on suppose seulement que X est simpliciale, la formule ci-dessus garde un sens, à cause de la structure d'anneau de $A^*(X)_{\mathbf{Q}}$. On définit ainsi une "fausse classe de Todd" $TD(X) = \sum_k TD^k(X) \in A^*(X)_{\mathbf{Q}}$.

Observons que $TD^k(X)$ est bien définie si on suppose seulement que $\Delta(k)$ est formé de cônes simpliciaux. En particulier, $TD^2(X)$ a toujours un sens. Observons aussi que $Td^k(X) = TD^k(X)$ si $\Delta(k)$ est formé de cônes réguliers. En effet, on peut alors trouver une subdivision régulière Δ' de Δ, qui coïncide avec Δ jusqu'en dimension k. On a donc une désingularisation $\pi : X' \to X$, qui vérifie: $\pi_* TD(X') = \pi_* Td(X') = Td(X)$. Mais $TD^k(X) = \pi_* TD^k(X')$ d'où l'assertion.

Soit $e \geq 1$ un entier. Soit Δ un éventail tel que $\Delta(e-1)$ est formé de cônes réguliers, et $\Delta(e)$ de cônes simpliciaux. D'après les remarques précédentes, on peut écrire dans $A^e(X)_{\mathbf{Q}}$:

$$Td^e(X_\Delta) - TD^e(X_\Delta) = \sum_{\sigma \in \Delta(e)} t(\sigma, \Delta)\, [V_\sigma]$$

pour certains rationnels $t(\sigma, \Delta)$.

THÉORÈME.— *Avec les notations précédentes, on peut trouver des $t(\sigma, \Delta)$ qui ne dépendent que de σ, et la fonction $\sigma \to t(\sigma)$ est alors unique.*

3.2. Démonstration

Choisissons $\sigma \in \Delta(e)$. On peut trouver une subdivision Σ de σ par des cônes réguliers, dont les arêtes (autres que les arêtes de σ) sont dans σ^0. Une telle subdivision est applée *intérieure*. Soit Δ' l'éventail obtenu en remplaçant σ par Σ dans Δ; soit $\pi : X' \to X$ le morphisme associé. Il est clair que l'image de l'ensemble exceptionnel de π est V_σ. Par suite, pour tous $\sigma_1, \ldots, \sigma_e$ dans $\Delta(1)$, on a dans $A^*(X)_{\mathbf{Q}}$:

$$\pi_*(\prod_{i=1}^{e} [V_{\sigma_i}]) - \prod_{i=1}^{e} \pi_* [V_{\sigma_i}] = g(\sigma_1, \ldots, \sigma_e)[V_\sigma]$$

où le rationnel $g(\sigma_1, \ldots, \sigma_e)$ est uniquement défini. Pour le calculer, on peut remplacer X par X_σ et X' par $\pi^{-1}(X_\sigma)$. Par suite, la fonction g ne dépend que de σ et de Σ.

On en déduit qu'il existe un unique rationnel $f_{\sigma,\Sigma}$ tel que

$$\pi_* TD^e(X') - TD^e(X) = f_{\sigma,\Sigma}[V_\sigma] \,.$$

Vérifions que $f_{\sigma,\Sigma}$ ne dépend que de σ, et non de Σ. En effet, soient Σ_1 et Σ_2 deux subdivisions intérieures de Σ. On peut supposer que tout cône de $\Delta(e)$, distinct de σ, est régulier. On obtient ainsi deux éventails Δ_1 et Δ_2, réguliers en dimension e. Soient $\pi_i : X_i \to X$ les morphismes associés. On a: $(\pi_i)_* TD^e(X_i) = (\pi_i)_* Td^e(X_i) = Td^e(X)$ pour $i = 1, 2$; d'où $f_{\sigma,\Sigma_1} = f_{\sigma,\Sigma_2}$.

On termine la preuve en faisant des subdivisions intérieures successives de tous les cônes non réguliers de $\Delta(e)$.

3.3. Sommes de Dedekind et classe de Todd en codimension 2

La fonction t n'a été calculée que pour la valeur (minimale) $e = 2$. Soit σ un cône de dimension 2. On peut trouver une base (n_1, n_2) du réseau $\langle\sigma\rangle \cap N$ telle que σ est engendré par n_1 et $pn_1 + qn_2$ où p, q sont des entiers premiers entre eux, avec $1 \leq p < q$. L'entier q est alors unique (c'est la multiplicité de σ), mais on peut remplacer p par son inverse modulo q. On dit que σ est de type $(p, q) = (p_\sigma, q_\sigma)$.

On définit la *somme de Dedekind* associée à (p, q) par :

$$s(p,q) = \sum_{i=1}^{q} ((\frac{i}{q}))((\frac{pi}{q}))$$

où $((x)) = 0$ si x est entier, et $((x)) = x - [x] - \frac{1}{2}$ sinon.

THÉORÈME.— *Pour tout éventail complet Δ, on a :*

$$Td^2(X_\Delta) - TD^2(X_\Delta) = \sum_{\sigma \in \Delta(2)} (s(p_\sigma, q_\sigma) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4q_\sigma})[V_\sigma] .$$

En particulier, lorsque Δ est de dimension 2, on a : $Td^2(X_\Delta) = [\text{point}] = [V_\sigma]$ pour tout
$\sigma \in \Delta(2)$, et $TD^2(X_\Delta)$ se calcule facilement. Si on ordonne les cônes $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ de $\Delta(2)$ de façon que $\sigma_i \cup \sigma_{i+1} := \tau_i$ soit convexe pour tout i mod n, on trouve:

$$\sum_{i=1}^{n} s(p_i, q_i) = 1 - \frac{n}{4} + \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{n} (\text{mult}\, \tau_i)(\text{mult}\, \sigma_i)^{-1}(\text{mult}\, \sigma_{i+1})^{-1}$$

où on pose: $\text{mult}\, \sigma = |det(u, v)|$ avec u, v les vecteurs entiers indivisibles sur les arêtes de σ. Ceci généralise la "loi de réciprocité" de Rademacher, qui relie trois sommes de Dedekind; voir [Ra].

Voici les ingrédients de la preuve du théorème. On conserve les notations de 3.2, et on identifie chaque $\sigma \in \Delta'(1)$ avec le générateur du semi-groupe $\sigma \cap N$. On définit une application $\tilde{g} : N^e \to \mathbf{Q}$, par:

$$\tilde{g}(n_1, \dots, n_e) = \begin{cases} g(n_1, \dots, n_e) & \text{si } n_1, \dots, n_e \in \Delta'(1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque $n_1, \dots, n_e$ sont tous distincts, on vérifie que:

$$\tilde{g}(n_1, \dots, n_e) = \begin{cases} 1 & \text{si } n_1, \dots, n_e \text{ engendrent un cône de } \Sigma \\ -(\operatorname{mult} \sigma)^{-1} & \text{si } n_1, \dots, n_e \text{ engendrent } \sigma \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, $\tilde{g}$ est symétrique, et on a pour tous $m \in M$ et $n_2, \dots, n_e \in N$:

$$\sum_{n \in \Sigma(1)} \langle m, n \rangle \tilde{g}(n, n_1, \dots, n_e) = 0 \ .$$

Ces propriétés déterminent uniquement $\tilde{g}$; on peut ainsi calculer $t(\sigma)$ lorsqu'on connaît une subdivision régulière de σ. C'est le cas si $e = 2$; en effet, si σ est engendré par n_1 et $pn_1 + qn_2$ comme ci-dessus, définissons des entiers $b_1, \dots b_k \geq 0$ par:

$$\frac{q}{q-p} = b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{\dots - \cfrac{1}{b_k}}}$$

et une suite $(\rho_i)_{0 \leq i \leq k}$ dans N, par:

$$\rho_0 = n_1, \ \rho_1 = n_1 + n_2, \ \rho_{i+1} = b_i \rho_i - \rho_{i-1} \ .$$

Alors $\rho_k = pn_1 + qn_2$; de plus, les cônes σ_i engendrés par ρ_i et ρ_{i+1} forment l'unique subdivision régulière minimale de σ. Enfin, on a:

$$s(p,q) = \frac{1}{12} \Big(\sum_{i=1}^{k} (3 - b_i) + \frac{p + p'}{q} - 2 \Big)$$

où p' désigne l'inverse de p modulo q. Le résultat s'en déduit par un calcul direct.

3.4. Le nombre de points entiers dans un tétraèdre.

Soit P un tétraèdre entier dans un espace vectoriel V de dimension 3. Avec les notations de 2.2, pour toute arête $A = [aa']$ de P, on a un cône P_A, dont l'image dans le quotient $V/\mathbf{R}(a - a')$ est un c.c.r.p. de dimension 2. Comme en 3.3, on associe à A deux entiers p, q, et on pose: $m_A = q$, $d_A = -s(p,q) + \frac{1}{4}$. On note F_A^+, F_A^- les faces de P qui contiennent A.

THÉORÈME.— *Avec les notations précédentes, on a:*

$$a_1(P) = \sum_A \left(\frac{1}{36m_A}\left(\frac{\mathrm{vol}_2(F_A^+)}{\mathrm{vol}_2(F_A^-)} + \frac{\mathrm{vol}_2(F_A^-)}{\mathrm{vol}_2(F_A^+)}\right) + d_A\right) \mathrm{vol}_1(A) .$$

Cela se déduit sans peine de 2.4 et 3.3; dans le calcul de $TD^2(X_P)$, on se débarasse des termes V_F^2 en observant que $\mathrm{vol}_2(F)V_{F'} = \mathrm{vol}_2(F')V_F$ pour toutes faces F, F' de P. En effet, puisque l'espace $A^1(X)_{\mathbf{Q}}$ est de dimension 1, les cycles V_F et $V_{F'}$ sont proportionnels; de plus, le degré de L_P sur V_F est $2\,\mathrm{vol}_2(F)$.

En particulier, lorsque $P \subset \mathbf{R}^3$ a pour sommets $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$ où a, b, c sont des entiers positifs, on trouve:

$$\begin{aligned} a_1(P) = \frac{1}{12}\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{d^2}{abc}\right) + \frac{a+b+c+A+B+C}{4} \\ -As\left(\frac{bc}{d}, \frac{aA}{d}\right) - Bs\left(\frac{ac}{d}, \frac{bB}{d}\right) - Cs\left(\frac{ab}{d}, \frac{cC}{d}\right) \end{aligned}$$

où $A = \mathrm{pgcd}(b,c)$, $B = \mathrm{pgcd}(a,c)$, $C = \mathrm{pgcd}(a,b)$ et $d = ABC$. Si a, b, c sont premiers entre eux deux à deux, on retrouve une formule due à Mordell, et redécouverte par Ehrhart; voir [Mord], [Eh2]. Laterveer a redémontré la formule de Pommersheim, en calculant le genre géométrique de certaines intersections complètes dans des espaces projectifs à poids; voir [La]. D'autre part, Kantor et Khovanskii ont redémontré les résultats de Pommersheim, dans le cadre de leur théorème de Riemann-Roch combinatoire (voir [KK2]). Enfin, Cappell et Shaneson ont annoncé une formule qui dénombre les points entiers dans un simplexe entier de dimension quelconque, voir [CaSh].

4. L'ANNEAU DES POLYTOPES ENTIERS

On expose une partie des résultats de McMullen, Morelli, Kantor, Pukhlikov et Khovanskii sur l'anneau des polytopes, son analogue entier, et les liens avec la K-théorie des variétés toriques.

4.1. L'anneau des polytopes (voir [Mc1], [Mc2])

Soit V un espace vectoriel de dimension finie d. On note $\mathcal{P}(V)$ l'ensemble des polytopes convexes de V. Si P et Q sont dans $\mathcal{P}(V)$, on a leur *somme de Minkowski*

$$P + Q = \{p + q \mid p \in P, q \in Q\}.$$

On note $\mathbf{Z}\mathcal{P}(V)$ le groupe abélien libre sur $\mathcal{P}(V)$, et $\tilde{\Pi}(V)$ le quotient de $\mathbf{Z}\mathcal{P}(V)$ par les relations

$$[P \cup Q] + [P \cap Q] - [P] - [Q]$$

pour tous P, $Q \in \mathcal{P}(V)$ tels que $P \cup Q \in \mathcal{P}(V)$. On désigne par $\Pi(V)$ le quotient de $\tilde{\Pi}(V)$ par les relations $[v + P] - [P]$ pour tous $P \in \mathcal{P}(V)$ et $v \in V$. Du lemme ci-dessous résulte que la formule $[P] \cdot [Q] = [P + Q]$ définit une structure d'anneau sur $\tilde{\Pi}(V)$ et $\Pi(V)$. Ce dernier est appelé *l'anneau des polytopes.*

Lemme.— Soient P, Q, $R \in \mathcal{P}(V)$. Alors $(P \cup Q) + R = (P + R) \cup (Q + R)$. Si de plus $P \cup Q \in \mathcal{P}(V)$ alors $(P \cap Q) + R = (P + R) \cap (Q + R)$.

Démonstration.— La première assertion est évidente, ainsi que l'inclusion de $(P \cap Q) + R$ dans $(P + R) \cap (Q + R)$. Pour l'inclusion opposée, soient $p \in P$, $q \in Q$ et $r_1, r_2 \in R$ tels que $p + r_1 = q + r_2 := x$. Puisque $P \cup Q$ est convexe, le segment $[p, q]$ rencontre $P \cap Q$. Soit $t \in [0, 1]$ tel que $tp + (1 - t)q \in P \cap Q$. Alors $x = tp + (1 - t)q + tr_1 + (1 - t)r_2 \in (P \cap Q) + R$.

A tout polytope P, on associe sa *fonction caractéristique* $\mathbf{1}_P : V \to \{0, 1\}$. Il est clair que cette application passe au quotient en un homomorphisme $\varphi : \tilde{\Pi}(V) \to L(V)$ où $L(V)$ désigne le groupe des applications de V dans $\mathbf{Z}$ dont l'image est finie, et dont chaque fibre est réunion finie de polytopes.

PROPOSITION.— *Avec les notations précédentes, l'application $\varphi : \tilde{\Pi}(V) \to L(V)$ est un isomorphisme.*

Démonstration.— La surjectivité est évidente. Soit $x = \sum[P_i] - \sum[Q_j] \in \tilde{\Pi}(V)$ tel que $\varphi(x) = 0$. Ecrivons les P_i et les Q_j comme intersections finies de demi-espaces; d'où une famille (finie) d'hyperplans (H_α). Les composantes connexes de $V \setminus \cup_\alpha H_\alpha$ n'ont qu'un nombre fini de faces bornées; soit (R_β) la famille finie des adhérences de ces faces.

Pour tout hyperplan H, notons H^+ et H^- les demi-espaces fermés définis par H. Les relations $[P] = [P \cap H_\alpha^+] + [P \cap H_\alpha^-] - [P \cap H_\alpha]$ permettent d'écrire les P_i et Q_j comme combinaisons entières des R_β. Par suite, on a $x = \sum_\beta a_\beta[R_\beta]$ avec des a_β entiers. Choisissons un R_γ dont la dimension est maximale parmi les dimensions des R_β figurant dans x. En évaluant $\varphi(x)$ en un point intérieur de R_β, on obtient $a_\beta = 0$. On conclut par une récurrence immédiate.

Remarque. La preuve ci-dessus montre que les relations de $\tilde{\Pi}(V)$ sont engendrées par les "relations élémentaires" $[P] = [P\cap H^+]+[P\cap H^-]-[P\cap H]$ pour $P \in \mathcal{P}(V)$ et pour H hyperplan de V.

Pour tout entier $k \geq 0$, notons $F_k\mathbf{Z}\mathcal{P}(V)$ le sous-groupe de $\mathbf{Z}\mathcal{P}(V)$ engendré par les polytopes de dimension au plus k. On définit ainsi des filtrations croissantes des algèbres $\tilde{\Pi}(V)$ et $\Pi(V)$. Grâce à la remarque ci-dessus, on montre que le groupe $\Pi(V)/F_{d-1}\Pi(V)$ a pour générateurs les polytopes de dimension d, et pour relations: $[P \cup Q] - [P] - [Q]$ avec P, Q polytopes de dimension d, tels que $P \cup Q$ est convexe et que $P \cap Q$ est contenu dans un hyperplan. Bien sûr, ce groupe joue un rôle essentiel dans les problèmes de décomposition des polyèdres ; pour ceux-ci, renvoyons à l'exposé de Cartier dans ce Séminaire (voir [Ca]).

L'application deg : $\mathbf{Z}\mathcal{P} \to \mathbf{Z}$ définie par $\deg(\sum n_P P) = \sum n_P$ est nulle sur les relations de $\tilde{\Pi}(V)$ et $\Pi(V)$. On peut donc définir des degrés sur $\tilde{\Pi}(V)$ et $\Pi(V)$; ce sont des homomorphismes d'anneaux.

Pour tout $P \in \mathcal{P}(V)$, on pose

$$[P]^* = \sum_{F \subset P} (-1)^{\dim(F)}[F]$$

c'est-à-dire: $[P]^* = (-1)^{\dim(P)}[P^0]$ grâce à l'identité (équivalente à la relation d'Euler): $\mathbf{1}_{P^0} = \sum_{F\subset P} (-1)^{\mathrm{codim}(F)}\mathbf{1}_F$. On vérifie que $*$ est un automorphisme involutif de $\tilde{\Pi}(V)$ et de $\Pi(V)$. Pour $\lambda \in \mathbf{R}$ non nul, on définit l'homothétie de rapport λ, notée Ψ^λ, par:

$$\Psi^\lambda([P]) = \begin{cases} [\lambda P] & \text{si } \lambda > 0 \\ [-\lambda P]^* & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

On obtient ainsi un automorphisme de $\tilde{\Pi}(M)$ et de $\Pi(M)$; on pose: $\Psi^0 = \deg$. Voici une partie du résultat principal de McMullen.

THÉORÈME.— *Il existe une graduation* $\Pi(V) = \oplus_{k=0}^d \Pi_k$ *de l'anneau* $\Pi(V)$ *telle que :*

(i) $\Pi_0 = \mathbf{Z}$ et $\Pi_{\geq 1} = \Pi_1 \oplus \cdots \oplus \Pi_d$ *est le noyau de* deg.

(ii) *L'idéal* $\Pi_{\geq 1}$ *a une structure de* $\mathbf{R}$*-algèbre graduée, telle que pour tout* $k \geq 1$ *et pour tout* $x \in \Pi_k$*, on a :* $\Psi^\lambda(x) = \lambda^k x$.

(iii) *L'espace vectoriel réel* Π_d *est de dimension 1.*

En fait, un isomorphisme de Π_d sur $\mathbf{R}$ est donné par le volume, si on choisit une mesure de Lebesgue sur V.

4.2. L'anneau des polytopes entiers (voir [M1], [M2], [PK1])

Soit M un réseau dans V. On note $\mathcal{P}(M)$ l'ensemble des polytopes entiers. Comme en 4.1, on définit $\tilde{\Pi}(M)$ et son quotient $\Pi(M)$ par le sous-groupe engendré par les $[m+P]-[P]$ où $m \in M$ et $P \in \mathcal{P}(M)$. Les groupes abéliens $\tilde{\Pi}(M)$ et $\Pi(M)$ ont une structure d'anneau augmenté, muni d'une involution $*$.

On note $L(M)$ le sous-groupe de $L(V)$ engendré par les fonctions caractéristiques des éléments de $\mathcal{P}(M)$. *L'application naturelle de* $\tilde{\Pi}(M)$ *vers* $L(M)$ *est un isomorphisme.* Ce résultat, bien plus difficile que son analogue non entier, est démontré par Morelli, alors que Pukhlikov et Khovanskii travaillent directement dans $L(M)$.

Comme ci-dessus, l'homothétie de rapport n définit un endomorphisme Ψ^n de $\tilde{\Pi}(M)$ et de $\Pi(M)$, pour tout entier $n \neq 0$. Les résultats de McMullen s'étendent alors, pourvu que l'on remplace $\Pi(M)$ par son produit tensoriel avec $\mathbf{Q}$; de plus, l'application naturelle de $\Pi(M)$ dans $\Pi(V)$ est injective, voir [M1]. La graduation de $\Pi(V)$ induit donc une filtration décroissante de $\Pi(M)$, par le *poids*.

Voici un corollaire plus concret de ces résultats. Appelons *valuation* sur $\mathcal{P}(M)$ une application $v : \mathcal{P}(M) \to \Gamma$ où Γ est un groupe abélien, telle que: $v(P \cup Q) + v(P \cap Q) = v(P) + v(Q)$ si P, Q et $P \cup Q$ sont dans $\mathcal{P}(M)$. Soit v une valuation, *invariante par translation par* M; soit $P \in \mathcal{P}(M)$. Alors l'application $v_P(n) : \mathbf{Z} \to \Gamma$ définie par

$$v_P(n) = \begin{cases} v(nP) & \text{si } n \geq 0 \\ (-1)^{\dim(P)} v(-nP^0) & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

est polynomiale de degré au plus d (voir [McSc]). En effet, une valuation invariante par translation, à valeurs dans Γ, n'est autre qu'un homomorphisme du groupe $\Pi(M)$ vers Γ, et de plus $v_P(n) = v(\Psi^n([P]))$. Un exemple de telle valuation est donné par: $v(P) = \mathrm{card}(P \cap M)$; on retrouve ainsi les résultats d'Ehrhart.

On doit à Morelli la définition d'une structure de λ-anneau sur l'anneau des polytopes et sur son analogue entier. Cette structure éclaire certaines manipulations de séries formelles, qui jouent un rôle important dans les travaux de McMullen. Rappelons qu'un anneau A est un *λ-anneau* si l'on a des opérations $\lambda^n : A \to A$ pour tout entier $n \geq 0$, telles que :

(i) $\lambda^0(x) = 1$ et $\lambda^1(x) = x$

(ii) $\lambda^n(x+y) = \sum_{i=0}^n \lambda^i(x)\lambda^{n-i}(y)$.

Cela revient à dire que la série formelle

$$\lambda_t(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n(x)t^n \in A[[t]]$$

vit dans $1 + tA[[t]]$ et qu'elle vérifie: $\lambda_t(x+y) = \lambda_t(x) \cdot \lambda_t(y)$. Une *augmentation* du λ-anneau A est un morphisme $\varepsilon : A \to \mathbf{Z}$ de λ-anneaux, où la structure de λ-anneau sur $\mathbf{Z}$ est donnée par $\lambda_t(m) = (1+t)^m$ pour tout $m \in \mathbf{Z}$.

PROPOSITION.— *On a une unique structure de λ-anneau augmenté sur $\tilde{\Pi}(M)$ et $\Pi(M)$, telle que $\lambda_t([P]) = 1 + t[P]$ pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que la définition est compatible avec les relations de $\tilde{\Pi}(M)$, c'est -à-dire que

$$(1 + t[P])(1 + t[Q]) = (1 + t[P \cup Q])(1 + t([P \cap Q])$$

chaque fois que P, Q et $P \cup Q$ sont dans $\mathcal{P}(M)$. Les coefficients de t étant égaux par définition, il reste à montrer que $P + Q = (P \cup Q) + (P \cap Q)$. Mais si $p \in P$ et $q \in Q$ alors il existe $t \in [0,1]$ tel que $tp + (1-t)q \in P \cap Q$. D'où

$p+q = tp+(1-t)q+(1-t)p+tq \in (P\cap Q)+(P\cup Q)$. Réciproquement, il est clair que $(P\cap Q)+(P\cup Q)\subset P+Q$.

Dans tout λ-anneau, on peut définir inductivement des *opérations d'Adams* ψ^n pour $n\geq 1$ entier, par:

$$\psi^1(x)=x,\ \psi^n(x)-\psi^{n-1}(x)\lambda^1(x)+\cdots+(-1)^{n-1}\psi^1(x)\lambda^{n-1}(x)+(-1)^n n\lambda^n(x)=0\,.$$

D'après Morelli, ces opérations coïncident avec les Ψ^n définis ci-dessus; on retrouvera ce résultat en 4.5.

4.3. K-théorie équivariante pour les actions de tores (voir [Th])

Soit X une variété algébrique complexe. On note $K_0(X)$ le quotient du groupe abélien libre sur les faisceaux cohérents sur X, par les relations $[F]-[F']-[F'']$ chaque fois qu'on a une suite exacte $0\to F'\to F\to F''\to 0$. On définit de même le groupe $K^0(X)$ à partir des faisceaux cohérents localement libres sur X. Le produit tensoriel munit $K^0(X)$ d'une structure d'anneau, et $K_0(X)$ d'une structure de $K^0(X)$-module; le rang définit une augmentation $\mathrm{rg}: K^0(X)\to\mathbf{Z}$. Enfin, $K^0(X)$ est un λ-anneau augmenté (voir 4.2) pour les opérations définies par: $\lambda^n([\mathcal{E}])=\wedge^n\mathcal{E}$. La dualité définit un automorphisme involutif de $K^0(X)$, noté $*$.

Lorsque X est lisse, l'application naturelle $K^0(X)\to K_0(X)$ est un isomorphisme; voir [Bo-Se]. On écrit alors $K(X)$.

Supposons X munie d'une opération d'un tore T. A l'aide des faisceaux T-linéarisés, on définit comme ci-dessus des groupes abéliens $K_0^T(X)$ et $K_T^0(X)$, avec des structures analogues. Lorsque X est lisse, l'application $K_T^0(X)\to K_0^T(X)$ est un isomorphisme. La démonstration non équivariante s'adapte aisément, car X est recouverte par des ouverts affines stables par T; de plus, si U est un tel ouvert, alors $D:=X\setminus U$ est un diviseur, et le faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D)$ admet une T-linéarisation.

Notons M le groupe des caractères de T. Pour tout $m\in M$, notons $[m]$ le faisceau inversible trivial sur X, dans lequel T opère par le poids m. Le produit tensoriel avec les $[m]$ définit une action du groupe M dans $K_0^T(X)$ et $K_T^0(X)$.

PROPOSITION.— *Soit X une variété lisse dans laquelle opère un tore T.*

(i) *L'application naturelle* $K^T(X) \to K(X)$ *est surjective, et elle identifie* $K(X)$ *aux co-invariants de* M *dans* $K^T(X)$.

(ii) *Si de plus* X *est projective et ne contient qu'un nombre fini* n *de points fixes de* T, *alors le* $\mathbf{Z}[M]$*-module* $K^T(X)$ *est libre de rang* n, *et les groupes abéliens* $K(X)$ *et* $A_*(X)$ *sont libres de rang* n.

(iii) *Notons* $i : X^T \to X$ *l'inclusion des points fixes de* T. *Sous les hypothèses de (ii), l'application* $i^* : K^T(X) \to K^T(X^T) \simeq \mathbf{Z}[M]^n$ *est injective; de plus,* i^* *est surjective après localisation en l'idéal d'augmentation de* $\mathbf{Z}[M]$.

Démonstration.— (i) Choisissons une base $(m_1, \ldots, m_d)$ du groupe abélien libre M, et faisons opérer linéairement T dans $\mathbf{C}^n$ avec les poids $m_1, \ldots, m_d$. Notons $\alpha : \mathbf{C}^{d-1} \to \mathbf{C}^d$ l'application $x \to (x, 0)$. Posons $U = \mathbf{C}^{d-1} \times \mathbf{C}^*$ et notons β l'inclusion de U dans $\mathbf{C}^d$. On a une suite exacte de M-modules

$$K^T(X \times \mathbf{C}^{d-1}) \to K^T(X \times \mathbf{C}^d) \to K^T(X \times U) \to 0$$

où la première flèche est $(\mathrm{id}, \alpha)_*$ et la seconde est $(\mathrm{id}, \beta)^*$. Grâce à l'isomorphisme de Thom, on en déduit une suite exacte de M-modules

$$K^T(X) \to K^T(X) \to K^T(X \times \mathbf{C}^*) \to 0$$

où la première flèche est la multiplication par $1 - [m_d]$. De plus, en notant S le noyau du caractère m_d, on peut identifier $K^T(X \times \mathbf{C}^*) = K^T(X \times T/S)$ avec $K^S(X)$. On conclut par récurrence sur d.

(ii) On peut trouver un sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbf{C}^* \to T$ tel que les points fixes de l'image de λ soient exactement $x_1, \ldots, x_n$. Pour $1 \leq i \leq n$, on définit la cellule de x_i par

$$C_i := \{x \in X \mid \lim_{t \to 0} \lambda(t)x = x_i\} .$$

Chaque C_i est un espace affine; de plus, on peut ordonner les points fixes de façon que $\cup_{j=1}^i C_j$ soit ouvert pour $1 \leq i \leq n$ (voir [Bi1], [Bi2]). Il en résulte que le groupe abélien $A_*(X)$ est libre, avec pour base les $[\overline{C_i}]$; voir [Fu1] 19.1.11. Par suite, les $[\mathcal{O}_{\overline{C_i}}]$ engendrent librement le groupe $K(X)$ (cela résulte de [Fu1] 15.1.5 et 15.2.16).

Posons $X_i := \cup_{j=1}^{i} C_j$. Montrons par récurrence sur i que le $\mathbf{Z}[M]$-module $K^T(X_i)$ est libre, avec pour base les $[\mathcal{O}_{\overline{C_j}}]$ pour $1 \leq j \leq i$. En effet, la restriction au point fixe x_i induit un isomorphisme de $K^T(C_i)$ sur $K^T(\{x_i\}) = \mathbf{Z}[M]$. De plus, on a un isomorphisme de $\mathbf{Z}[M]$-modules:

$$K^T(X_i)/\alpha_* K^T(C_i) \simeq K^T(X_{i-1}),$$

où $\alpha : C_i \to X_i$ désigne l'inclusion. Enfin, la composition $\alpha^* \circ \alpha_* : K^T(C_i) \to K^T(C_i)$ est la multiplication par la classe d'Euler du fibré normal à C_i dans X_i. Celle-ci est non nulle dans $\mathbf{Z}[M]$; donc α_* est injective, ce qui termine la récurrence. La preuve de (iii) est analogue.

4.4. K-théorie équivariante des variétés toriques (voir [Kl], [M3]).

Soit Δ un éventail complet régulier de dimension d. De l'existence d'une subdivision projective régulière de Δ, il suit facilement que la proposition 4.3 s'étend à la variété torique complète X_Δ, avec $n = \mathrm{card}\Delta(d)$. On va préciser ce résultat, et décrire le λ-anneau $K^T(X_\Delta)$ en termes combinatoires.

Notons $L_\Delta(M)$ l'ensemble des familles $(f_\sigma)_{\sigma\in\Delta}$ où $f_\sigma \in \mathbf{Z}[M/\sigma^\perp]$ et $f_\sigma|\tau = f_\tau$ chaque fois que $\tau \subset \sigma$. On peut voir une telle famille comme une application "continue" de $\Delta(d)$ vers $\mathbf{Z}[M]$, où d désigne la dimension de Δ. Pour les opérations évidentes, $L_\Delta(M)$ est un anneau qui contient $\mathbf{Z}[M]$ (les applications constantes). Puisque $\mathbf{Z}[M]$ est l'anneau des représentations du tore T, c'est un λ-anneau pour les opérations de puissance extérieure. On étend cette structure à $L_\Delta(M)$, en posant: $\lambda^n((f_\sigma)_{\sigma\in\Delta}) = (\lambda^n(f_\sigma))_{\sigma\in\Delta}$.

PROPOSITION.— *Pour tout éventail Δ complet et régulier, on a un isomorphisme canonique (de λ-anneaux augmentés et de $\mathbf{Z}[M]$-modules) $\varphi : K^T(X_\Delta) \to L_\Delta(M)$.*

Démonstration.— Soit E un fibré vectoriel T-linéarisé sur X_Δ. Pour tout $\sigma \in \Delta(d)$, on note E_σ la restriction de E au point fixe de T dans X_σ. Chaque E_σ est un T-module rationnel de dimension finie, dont on note $\varphi_\sigma(E) \in \mathbf{Z}[M]$ le caractère. On vérifie que la famille $(\varphi_\sigma(E))_{\sigma\in\Delta(d)}$ s'étend en un (unique) $\varphi(E) \in L_\Delta(M)$. Il est clair que φ définit un homomorphisme de λ-anneaux $\varphi : K^T(X_\Delta) \to L_\Delta(M)$. Pour tout $x \in K^T(X_\Delta)$, la donnée de $\varphi(x)$ équivaut à celle de $i^*(x)$ où $i : X^T \to X$ désigne l'inclusion des points fixes de T. Ainsi, φ est injective. Pour tout

$f = (f_\sigma)_{\sigma\in\Delta} \in L_\Delta(M)$, on peut trouver $g \in \mathbf{Z}[M]$ tel que chaque $f_\sigma + g$ soit le caractère d'une représentation de T. D'où un T-module E_σ pour chaque $\sigma \in \Delta(d)$. Les faisceaux $\mathcal{O}_{X_\sigma} \otimes_{\mathbf{C}} E_\sigma$ se recollent en un faisceau $\mathcal{E}$, localement libre et T-linéarisé. De plus, on a: $\varphi(\mathcal{E}) = f + g$. Par suite, φ est surjective.

Puisque deux éventails quelconques ont une subdivision commune, la limite inductive des $L_\Delta(M)$ a un sens. En fait, $\varinjlim L_\Delta(M)$ *est isomorphe à l'anneau* $L(M)$ *engendré par les fonctions caractéristiques des polytopes entiers.*

En effet, pour tout élément $f = \sum_P a_P \mathbf{1}_P$ de $L(M)$, on peut trouver un éventail complet régulier Δ qui subdivise tous les Δ_P. Les fonctions d'appui H_P sont alors linéaires sur chaque cône de Δ: pour un tel cône σ, on a un $H_{P,\sigma} \in M/\sigma^\perp$. On peut alors définir $u(f) \in L_\Delta(M)$ par: $u(f)_\sigma = \sum a_P x^{H_{P,\sigma}}$ où (x^m) est la base canonique de $\mathbf{Z}[M/\sigma^\perp]$. On vérifie que u est bien défini et que c'est un isomorphisme; voir [M1], [PK1].

Observons que $(\varphi^{-1} \circ u)(\mathbf{1}_P)$ est l'image du fibré en droites T-linéarisé L_P. Via l'isomorphisme de $\tilde{\Pi}(M)$ sur $L(M)$ (voir [M1]), on en déduit le :

THÉORÈME.— *L'application* $[P] \to [L_P]$ *définit un isomorphisme de* λ*-anneaux augmentés et de* $\mathbf{Z}[M]$*-modules:* $\tilde{\Pi}(M) \to \varinjlim K^T(X_\Delta)$. *Cette application passe au quotient en un isomorphisme de* λ*-anneaux augmentés:* $\Pi(M) \to \varinjlim K(X_\Delta)$.

La seconde partie de l'énoncé résulte de la première en passant aux co-invariants de M, et en se souvenant de la proposition 4.3. Ce lien entre l'anneau des polytopes entiers et la K-théorie des variétés toriques, conduit par exemple à une preuve facile du résultat suivant, dû à Pukhlikov et Khovanskii (voir aussi [Mc2]).

Notons I l'idéal de $\tilde{\Pi}(M)$ formé des éléments de degré nul; notons J l'idéal de $\tilde{\Pi}(M)$ engendré par les $[P] - [P+m]$ où $P \in \mathcal{P}(M)$ et $m \in M$. Alors $I^{d+k} \subset J^k$ pour tout entier $k \geq 1$.

En effet, il suffit de montrer le même énoncé pour l'idéal d'augmentation I_Δ de $K^T(X_\Delta)$, et son idéal J_Δ engendré par les $1 - x^m$ $(m \in M)$. Pour tout $\sigma \in \Delta$, notons $F_\sigma \in K^T(X_\Delta)$ la classe du faisceau structural de V_σ. D'après 4.3, les F_σ engendrent le $\mathbf{Z}[M]$-module $K^T(X_\Delta)$. On en déduit que le groupe abélien I_Δ est engendré par J_Δ et par les F_σ où σ n'est pas vide. Mais puisque V_σ est intersection transverse des V_τ pour $\tau \in \sigma(1)$, on a: $F_\sigma = \prod_{\tau\in\sigma(1)} F_\tau$. Il suffit donc de montrer que pour tous éléments distincts $\tau_1, \ldots, \tau_p$ de $\Delta(1)$, et pour tous $a_1 \ldots, a_p$ entiers positifs de somme $d+k$, on a: $F_{\tau_1}^{a_1}\cdots F_{\tau_p}^{a_p}\in J^k$. Mais le produit $F_{\tau_1}\cdots F_{\tau_p}$ vaut F_τ si $\tau_1,\ldots,\tau_p$ engendrent un cône τ de Δ, et 0 sinon. Dans le premier cas, écrivons: $F_{\tau_1}^{a_1}\cdots F_{\tau_p}^{a_p}=F_\tau\cdot x$ et observons que $x\in K^T(V_\tau)$ est dans la puissance $(d-p+k)$-ième de l'idéal d'augmentation. Comme $\dim(V_\tau)=d-p$, on conclut par récurrence sur d.

Ce résultat peut se reformuler de la façon suivante (voir [KK1]). Soit $v:\mathcal{P}(M)\to\Gamma$ une valuation polynomiale de degré au plus k (c'est-à-dire: l'unique extension de v à $\tilde{\Pi}(M)$ est nulle sur les puissances $(k+1)$-ièmes des éléments de degré nul). Alors l'application

$$n\in\mathbf{Z}\to v(\Psi^n[P])=\begin{cases} v(nP) & \text{si } n\geq 0\\ (-1)^{\dim(P)}v(nP^0) & \text{si } n<0\end{cases}$$

est polynomiale, de degré au plus $d+k$.

4.5. Mise à jour du dictionnaire entre éventails et variétés toriques (voir [M1]).

On résume et on complète les résultats de 4.2 et 4.4. On désigne par X la “variété torique universelle” limite projective des variétés toriques complètes de dimension d.

polytope entier P	fibré en droites linéarisé L_P engendré par ses sections globales
nombre de points entiers dans P	caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(X,L_P)$
polynôme d'Ehrhart i_P	polynôme de Snapper-Kleiman $\chi(X,L_P^{\otimes n})$
loi de réciprocité	dualité de Serre
relation dans $\Pi(M)$: $[P]+[Q]=[P\cup Q]+[P\cap Q]$	suite exacte de fibrés linéarisés: $0\to L_{P\cap Q}\to L_P\oplus L_Q\to L_{P\cup Q}\to 0$
somme de Minkowski $P+Q$	produit tensoriel $L_P\otimes L_Q$
$\tilde{\Pi}(M)$	K-théorie équivariante de X
λ-anneau des polytopes entiers $\Pi(M)$	λ-anneau de K-théorie de X
$\deg:\Pi(M)\to\mathbf{Z}$	$\mathrm{rg}:K(X)\to\mathbf{Z}$
homothéties Ψ^n	opérations d'Adams ψ^n
filtration de $\Pi(M)$ par la dimension	filtration de $K(X)$ par la dimension du support
filtration de $\Pi(M)$ par le poids	γ-filtration de $K(X)$

Faute de place et de compétence, on n'exposera pas les résultats de Morelli sur la classe de Todd des variétés toriques, ni ceux de Kantor-Khovanskii et Pukhlikov-Khovanskii sur le théorème de Riemann-Roch combinatoire; renvoyons le lecteur aux articles originaux ([KK1], [KK2], [M4], [PK2]).

BIBLIOGRAPHIE

[Bi1] A. Bialynicki-Birula: *Some theorems on actions of algebraic groups*, Ann. of Math. **98**, 480-497 (1973).

[Bi2] A. Bialynicki-Birula: *Some properties of the decomposition of algebraic varieties determined by actions of a torus*, Bull. Acad. Polo. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. **24**, 667-674 (1976).

[Bo-Se] A. Borel, J. P. Serre: *Le théorème de Riemann-Roch (d'après Grothendieck)*, Bull. Soc. Math. France **86**, 97-136, 1958.

[Ca] P. Cartier: *Décomposition des polyèdres: le point sur le troisième problème de Hilbert*, Sém. Bourbaki, exp. n° 646 (juin 1985), Astérisque **133-134**, 1986, 261-288.

[CaSh] S. E. Cappell, J. L. Shaneson: *Genera of algebraic varieties and counting of lattice points*, preprint 1993.

[Da] V. I. Danilov: *The geometry of toric varietes*, Russian Math. Surveys **33**, 97-154, 1978.

[Eh1] E. Ehrhart: *Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire I. Polyèdres et réseaux*, J. Reine Angew. Math. **226**, 1-29, 1967.

[Eh2] E. Ehrhart: *Nombre de points entiers d'un tétraèdre*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 258, Série I, 3945-3948, 1964.

[Eh3] E. Ehrhart: *Démonstration de la loi de réciprocité pour le polyèdre convexe entier*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 265, Série I, 5-7, 1967.

[Eh4] E. Ehrhart: *Polynômes arithmétiques et méthode des polyèdres en combinatoire*, International series of numerical mathematics **35**, Birkhäuser 1977.

[Fu1] W. Fulton: *Intersection theory*, Springer-Verlag 1984.

[Fu2] W. Fulton: *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematical Studies **131**, Princeton University Press 1993.

[Hi] T. Hibi: *Ehrhart polynomials of convex polytopes, h-vectors of simplicial* *complexes, and nonsingular projective toric varieties,* dans: Discrete and computational geometry, 165-177, Amer. Math. Soc., Providence 1991.

[Ka] J. M. Kantor: *Sur le polynôme associé à un polytope à sommets entiers dans* $\mathbf{R}^n$, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 314, Série I, 669-672, 1992.

[KK1] J. M. Kantor, A. V. Khovanskii: *Integral points in convex polyhedra, combinatorial Riemann-Roch theorem and generalized Euler-MacLaurin formula,* prépublication de l'I.H.E.S., juin 1992.

[KK2] J. M. Kantor, A. V. Khovanskii: *Une application du théorème de Riemann-Roch combinatoire au polynôme d'Ehrhart des polytopes entiers de* $\mathbf{R}^d$, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 317, Série I, 501-507, 1993.

[Kl] A. A. Klyachko: *Vector bundles on Demazure models,* Sel. Math. Sov. **3**, 41-44, 1983/84.

[La] R. Laterveer: *Weighted complete intersections and lattice points,* preprint 1993.

[Mc1] P. McMullen: *The polytope algebra,* Adv. in Math. **78**, 76-130, 1989.

[Mc2] P. McMullen: *Valuations and dissections,* dans: Handbook of Convex Geometry, Volume B, 933-988, North-Holland 1993.

[McSc] P. McMullen, R. Schneider: *Valuations on convex bodies,* dans: Convexity and its applications, édité par P. M. Gruber et J. M. Wills, Birkhuser 1983.

[Mord] L. J. Mordell: *Lattice points in a tetrahedron and generalized Dedekind sums,* J. Indian Math. Soc. **15**, 41-46, 1951.

[M1] R. Morelli: *A theory of polyhedra,* Adv. in Math. **97**, 1-73, 1993.

[M2] R. Morelli: *Translation scissors congruence,* Adv. in Math. **100**, 1-27, 1993.

[M3] R. Morelli: *The K-theory of a toric variety,* Adv. in Math. **100**, 154-182, 1993.

[M4] R. Morelli: *The Todd class of a toric variety,* Adv. in Math. **100**, 182-231, 1993.

[Od] T. Oda: *Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of torus embeddings,* Springer-Verlag 1988.

[Pi] G. Pick: *Geometrisches zur Zahlenlehre,* Naturwiss. Z. Logos, Prag. 311-319, 1899.

[Po] J. E. Pommersheim: *Toric varieties, lattice points and Dedekind sums,* Math. Ann. **295**, 1-24, 1993.

[PK1] A. V. Pukhlikov, A. G. Khovanskii: *Finitely additive measures of virtual polytopes*, St. Petersburg Math. J. **4**, 337-356, 1993.

[PK2] A. V. Pukhlikov, A. G. Khovanskii: *A Riemann-Roch theorem for integrals and sums of quasipolynomials over virtual polytopes*, St. Petersburg Math. J. **4**, 789-812, 1993.

[Ra] H. Rademacher: *Generalization of the reciprocity formula for the Dedekind sums*, Duke Math. J. **21**, 391-398, 1954.

[RaGr] H. Rademacher, E. Grosswald: *Dedekind sums*, Carus Math. Monogr. **16**, Washington, Mathematical Association of America 1972.

[Re] J. E. Reeve: *On the volume of lattice polyhedra*, Proc. London Math. Soc. (3) **7**, 378-395, 1957.

[St] R. P. Stanley: *On the Hilbert function of a graded Cohen-Macaulay domain*, J. Pure Appl. Alg. **73**, 307-314, 1991.

[Te] B. Teissier: *Variétés toriques et polytopes*, Sém. Bourbaki, exp. n° 565 (novembre 1980), Lect. Notes in Math. **901**, 1981, 71-84.

[Th] R. W. Thomason: *Algebraic K-theory of group scheme actions*, dans: Algebraic topology and algebraic K-theory, 539-563, Annals of Math. Studies **113**, 1987, Princeton Univ. Press.

Michel BRION

École Normale Supérieure
46, allée d'Italie
F–69364 LYON CEDEX 07