Astérisque

CLAUDE ZUILY

Solutions en grand temps d'équations d'ondes non linéaires

Astérisque, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 779, p. 107-144
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__107_0>

Séminaire BOURBAKI
46ème année, 1993-94, n° 779
Novembre 1993

SOLUTIONS EN GRAND TEMPS D'ÉQUATIONS D'ONDES NON LINÉAIRES

par **Claude ZUILY**

L'équation des ondes est sans conteste l'une des plus importantes équations aux dérivées partielles. Elle sert de modèle à la théorie générale des équations hyperboliques et ses applications en physique théorique sont multiples. De très nombreux travaux lui ont été consacrés depuis plus de deux siècles et encore aujourd'hui elle est l'objet de recherches très actives dans ses versions linéaire et non linéaire.

La question de l'existence de solutions pour le problème de Cauchy est centrale dans sa théorie. Dans le cas non linéaire, l'existence d'une solution pour des temps petits est en principe acquise (au moins pour des données assez régulières). Dès lors se pose le problème de l'évolution de cette solution. Existe-elle pour tout temps? Sinon peut-on déterminer son temps de vie, décrire l'ensemble de ses singularités, connaître son comportement au voisinage de cet ensemble? etc ... Autant de questions qui dans la plupart des cas sont encore largement ouvertes. Cependant il est au moins deux cas où des réponses profondes à certaines de ces questions ont été données. Le premier est celui où les données sont petites, le second celui des équations d'ondes semi-linéaires dispersives. L'objet de cet exposé est de rendre compte des progrès récents dans ces deux domaines. En particulier nous détaillerons la preuve d'un résultat de J. Shatah et M. Struwe qui traite des équations dispersives avec puissance critique.

Pour la rédaction de la première partie de ce texte nous avons bénéficié des excellentes notes de L. Hörmander [Ho4] auxquelles le lecteur intéressé est vivement invité à se référer. Concernant les équations dispersives nous renvoyons aux récents survols de W. Strauss [St4] et M. Struwe [Stru2] pour les résultats antérieurs.

0. PRELIMINAIRES

0.1. Notations

On notera dans ce qui suit x_0 et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ les variables de temps et d'espace ; on supposera $x_0 \geq 0$, le cas des temps négatifs étant ici analogue. Pour $u \in C^1$ on notera $u' = (\partial_j u)_{j=0,\dots,n}$ où $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

L'opérateur des ondes $\square$ est défini par

$$\square = \partial_0^2 - \Delta \quad \text{avec} \quad \Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 . \tag{0.1}$$

C'est le modèle des opérateurs différentiels du second ordre strictement hyperboliques par rapport aux surfaces x_0 =constante.

Il sera commode, pour des raisons qui apparaîtront plus loin, de supposer que toutes les fonctions considérées ici — coefficients, données, solutions ... — sont à valeurs réelles.

Nous étudierons le problème de Cauchy pour des équations du second ordre strictement hyperboliques quasi-linéaires. Les éventuelles extensions à des cas complètement non linéaires seront discutées dans les commentaires. Il s'agira de résoudre le problème :

$$\partial_0^2 u - \sum_{j,k=0}^{n} a_{jk}(u, u') \partial_j \partial_k u = f(u, u') \tag{0.2}$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_0 u(0, x) = u_1(x). \tag{0.3}$$

Les fonctions a_{jk}, f, u_0, u_1 sont des données. On supposera que les a_{jk} et f sont C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$. La régularité des données initiales u_0, u_1 sera, quant à elle, précisée dans les énoncés. On supposera d'autre part

$$a_{00} \equiv 0, \quad f(0,0) = 0 \tag{0.4}$$

et, ce qui ne restreint pas la généralité du problème,

$$\square = \partial_0^2 - \sum_{j,k=0}^{n} a_{jk}(0,0) \partial_j \partial_k . \tag{0.5}$$

L'hyperbolicité de l'équation (0.2) se traduira dans le fait que les solutions éventuelles se devront de vérifier, sur leur domaine de définition D la condition

$$(0.6) \quad E^{\times} C_0 > 0 \quad \text{tq} \quad \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(u, u')\xi_j \xi_k \geq C_0|\xi|^2, \quad \forall (x_0, x) \in D, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Les solutions de classe C^2 du problème (0.2), (0.3) sont appelées solutions classiques. Dans certains cas il peut exister des solutions à régularité plus faible, cependant, à part quelques allusions au § 2, nous n'aborderons pas ici ce problème.

Nous aurons à utiliser les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$. Rappelons que si $s > \frac{n}{2} + k$, où $k \in \mathbb{N}$, cet espace s'injecte dans celui des fonctions k fois différentiables dont les dérivées d'ordre au plus k tendent vers zéro à l'infini.

0.2. Existence en temps petit de solutions classiques

Le résultat suivant, qui assure, sous des conditions assez générales, l'existence locale en temps, est classique (cf. [Ka1], [Ho4]).

Théorème 0.1. – *Soient s un entier, $s > \frac{n}{2} + 2$, et $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$. Posons $v_0 = (u_1, u_0')$ et supposons*

(0.7)

$$E^{\times} C_0 > 0 \quad \textit{tel que} \quad \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(u_0, v_0)\xi_j \xi_k \geq C_0|\xi|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Il existe alors $T > 0$ et une unique solution classique u sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ du problème (0.2), (0.3) telle que $\partial_0^j u \in C^0([0, T], H^{s-j}(\mathbb{R}^n))$, $0 \leq j \leq 2$.

Schéma de la preuve

On utilise un procédé itératif d'approximation. L'existence à chaque étape d'une solution approchée utilise la *théorie hyperbolique linéaire*, la convergence est montrée à l'aide de *l'inégalité d'énergie* et des *estimations des fonctions non linéaires* dans les espaces de Sobolev.

L'inégalité d'énergie

Elle concerne les solutions d'équations hyperboliques linéaires. Plus précisément soit u une solution classique de l'équation linéaire

$$(0.8)\qquad \partial_0^2 u - \sum_{j,k=0}^{n} \gamma_{jk}\partial_j\partial_k u = g\,, \quad 0 \le x_0 \le T\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,,$$

où $\gamma_{0,0} \equiv 0$, $\partial^\alpha \gamma_{jk} \in C^0([0,T] \times \mathbb{R}^n) \cap L^\infty$ pour $|\alpha| \le 1$ et $j,k = 0,\dots,n$, $f \in L^\infty([0,T], L^2)$ et
(0.9)

$$E^\times\, \alpha > 0, \beta > 0 : \alpha|\xi|^2 \le \sum_{j,k=1}^{n} \gamma_{jk}\xi_j\xi_k \le \beta|\xi|^2, \quad \forall (x_0,x,\xi) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\,.$$

Supposons que pour $x_0 \in [0,T]$, $u(x_0,x) = 0$ pour $|x|$ assez grand. Alors
(0.10)

$$\begin{cases} \text{Il existe } C_1 > 0, C_2 > 0 \text{ ne dépendant que de } n,\alpha,\beta \text{ telles que} \\ ||u'(x_0,\cdot)||_{L^2} \le C_1\Big(||u'(0,\cdot)||_{L^2} + \displaystyle\int_0^{x_0} ||g(\tau,\cdot)||_{L^2}\, d\tau\Big) \exp\Big(C_2 \displaystyle\int_0^{x_0} |\gamma'(\tau)| d\tau\Big) \end{cases}$$

où

$$(0.11)\qquad |\gamma'(\tau)| = \sum_{i,j,k=0}^{n} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial_i \gamma_{jk}(\tau,x)|\,.$$

Estimation des fonctions non linéaires

Soient $U \in (H^s(\mathbb{R}^n))^N$, $N \ge 1$, $s \in \mathbb{N}$, $s > \frac{n}{2}$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $f(0) = 0$. Alors $f(U) \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et

$$(0.12)\qquad ||f(U)||_s \le C(f, ||U||_{L^\infty})||U||_s$$

où $C(f, ||U||_{L^\infty}) = \sup\limits_{\substack{1\le j\le s \\ |t|\le ||U||_{L^\infty}}} |\partial^j f(t)|||U||_{L^\infty}^{j-1}$.

Le point capital ici est que le membre de droite de l'inégalité (0.12) croît linéairement avec $||U||_s$.

Commentaires 0.2.

(i) La solution u du théorème 0.1 vérifie en fait $\partial^\alpha u \in L^\infty([0,T], L^2(\mathbb{R}^n))$ pour $|\alpha| \leq s$. En particulier elle est C^∞ si les données initiales sont dans $\bigcap_{s>0} H^s(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Il existe bien sûr des versions du Théorème 0.1 plus générales où l'équation (0.2) est remplacée par une équation hyperbolique de la forme

$$\partial_0^2 u + F(x_0, x; u, u', u'') = 0.$$

(iii) Dans le cas des équations semi-linéaires c'est-à-dire lorsque le membre de gauche de (0.2) est égal à $\Box u$, la condition sur s peut être affaiblie en $s > \frac{n}{2} + 1$. Le fait de savoir si on peut améliorer cette borne inférieure a fait l'objet d'études récentes. On renvoie aux travaux de Klainerman-Machedon [KlM] et Ponce-Sideris [PoS] qui traitent du cas semi-linéaire en trois dimensions d'espace.

(iv) Une conséquence de la preuve du Théorème 0.1 est la suivante. Un réel $T > 0$ étant donné, on peut résoudre le problème (0.2), (0.3) jusqu'au temps T pourvu que la quantité $||u_0||_s + ||u_1||_{s-1}$ soit assez petite. Plus précisément si par exemple les fonctions a_{jk} et f sont bornées dans $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1})$ le temps d'existence T fourni par la preuve vérifie

$$T \geq \frac{\text{const.}}{||u_0||_s + ||u_1||_{s-1}}. \tag{0.13}$$

En l'absence d'hypothèse supplémentaire l'ordre de grandeur donné dans (0.13) est le meilleur.

(v) Si T_* désigne le sup des T fournis par le Théorème 0.1, on peut montrer que, soit $T_* = +\infty$, soit $T_* < +\infty$ et

$$\overline{\lim}_{t \to T_*} \sum_{|\alpha| \leq k} ||\partial^\alpha u(t, \cdot)||_{L^\infty} = +\infty \tag{0.14}$$

où $k = 2$ dans le cas quasi-linéaire, $k = 1$ si l'équation est semi-linéaire et $k = 0$ pour l'équation $\Box u = f(u)$.

(vi) Cependant la taille des données peut influencer de manière plus significative le temps de vie. Ce fait est illustré sur l'exemple simple suivant.

Considérons en trois dimensions d'espace le problème

$$\Box u = \sum_{j=1}^{3} (\partial_j u)^2 - (\partial_0 u)^2 ; \quad u = 0, \quad \partial_0 u = u_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \text{ si } x_0 = 0. \tag{0.15}$$

Il est facile de voir que la fonction $v = e^u$ est solution du problème linéaire : $\Box v = 0$, $v = 1$, $\partial_0 v = u_1$ si $x_0 = 0$. Par conséquent,

$$v(x_0, x) = 1 + w \quad \text{où } w(x_0, x) = \frac{x_0}{4\pi} \int_{|\omega|=1} u_1(x + x_0\omega)\, d\omega. \tag{0.16}$$

Cette formule montre que u existe tant que $x_0 ||u_1||_{L^\infty} < 1$. Mais d'autre part, puisque u_1 s'annule à l'infini, on peut écrire :

$$w = \frac{x_0}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \int_{x_0}^{+\infty} -\frac{d}{ds}[u_1(x + s\omega)]\, ds\, d\omega =$$

$$= \frac{x_0}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \int_{x_0}^{+\infty} - \sum_{i=1}^{3} \omega_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i}(x + s\omega)\, ds\, d\omega$$

$$|w| \leq \frac{x_0}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{s^2} \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_i}(x + s\omega) \right| s^2\, ds\, d\omega$$

$$\leq \frac{1}{4\pi x_0} \int_{|y| \geq x_0} \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_i}(x + y) \right| dy$$

et donc

$$|w(x_0, x)| \leq \frac{1}{4\pi x_0} ||u_1'||_{L^1}.$$

En résumé :

$$\begin{cases} \text{si} \quad x_0 ||u_1||_{L^\infty} < 1 \quad \text{on a} \quad |w(x_0, x)| < 1 \\ \text{si} \quad x_0 ||u_1||_{L^\infty} \geq 1 \quad \text{on a} \quad |w(x_0, x)| \leq \dfrac{||u_1||_{L^\infty} \cdot ||u_1'||_{L^1}}{4\pi}. \end{cases}$$

Par conséquent si $\frac{1}{4\pi} ||u_1||_{L^\infty} \cdot ||u_1'||_{L^1} < 1$ on a $v = 1 + w > 0$ pour tout $(x_0, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ et donc le problème (0.15) admet une solution classique globale i.e. $T_* = +\infty$. Il est facile de voir que cette condition est en général nécessaire et que si elle n'est pas satisfaite, T_* est de l'ordre de $\frac{1}{||u_1||_{L^\infty}}$.

Nous allons voir que dans le cas où les données sont petites on peut effectivement améliorer le temps de vie des solutions.

1. LE CAS DES DONNEES INITIALES PETITES

1.1. L'amélioration du temps de vie

On supposera dans la suite que les données initiales sont de la forme

$$u_j(x) = \varepsilon\varphi_j(x)\,, \quad \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\ j = 1,2\,, \quad \varepsilon > 0 \text{ petit.} \tag{1.1}$$

La condition de support compact pourrait être affaiblie mais une décroissance suffisante à l'infini est indispensable pour la validité des résultats à venir. Les équations étudiées sont des perturbations quasi-linéaires au moins quadratiques de l'équation des ondes. Afin de ne pas alourdir le texte nous supposerons que ces perturbations ne dépendent que de u' (cf. commentaires). Il s'agit donc d'étudier le problème

$$\sum_{j,k=0}^{n} g_{jk}(u')\partial_j\partial_k u = f(u') \tag{1.2}$$

$$u(0,x) = \varepsilon\varphi_0(x)\,, \quad \partial_0 u(0,x) = \varepsilon\varphi_1(x) \tag{1.3}$$

$$g_{00} \equiv 1\,, \quad \sum_{j,k=0}^{n} g_{jk}(0)\partial_j\partial_k = \square \tag{1.4}$$

$$f(0) = f'(0) = 0\,. \tag{1.5}$$

Nous poserons

$$T_\varepsilon = \sup\Big\{T > 0 \text{ tq } E^\times u \in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n) \text{ solution de (1.2), (1.3)}\Big\}. \tag{1.6}$$

T_ε sera appelé le temps de vie de la solution. Il est bien défini compte tenu du Théorème 0.1 et de l'unicité. On a $0 < T_\varepsilon \leq +\infty$.

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

Théorème 1.1. – *Sous les conditions (1.4), (1.5) il existe des constantes $C > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ telles que pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0[$ on ait :*

(i) Si $n = 1$ $\quad T_\varepsilon \geq \frac{C}{\varepsilon}$

(ii) Si $n = 2$ $\quad T_\varepsilon \geq \frac{C}{\varepsilon^2}$

(iii) Si $n = 3$ $\quad T_\varepsilon \geq \exp\frac{C}{\varepsilon}$

(iv) Si $n \geq 4$ $\quad T_\varepsilon = +\infty$.

L'énoncé ci-dessus est l'aboutissement de nombreux travaux qui commencent en 1963 avec ceux de Segal [Se1]. Il doit beaucoup aux travaux successifs de John [Jo1,4,6,8] et à ceux de Klainerman [Kl1-4] qui avaient préalablement obtenus des versions plus faibles. Sous la forme présente il est dû à Klainerman [Kl4] et John-Klainerman [JoK].

Esquisse de la preuve

Illustrons la démarche sur l'équation $\Box u = (\partial_0 u)^2$. Les précisions sur le temps de vie proviennent du fait que l'on tiendra compte de la décroissance asymptotique des solutions. En effet rappelons que la solution v de $\Box v = 0$, v et $\partial_0 v$ dans C_0^∞ si $x_0 = 0$ vérifie

$$\|v(x_0,\cdot)\|_{L^\infty} = O((1+x_0)^{\frac{1-n}{2}}), \quad x_0 > 0. \tag{1.8}$$

Soit T_ε le temps de vie d'une solution de (1.2), (1.3). Supposons que l'on puisse montrer une inégalité de type Sobolev qui tienne compte de la décroissance à l'infini. Plus précisément supposons que l'on ait :

$$\|u'(x_0,\cdot)\|_{L^\infty} \le C(1+x_0)^{\frac{1-n}{2}}\|u'(x_0,\cdot)\|_{s_0}, \quad s_0 > \frac{n}{2}, \quad 0 \le x_0 < T_\varepsilon, \tag{1.9}$$

où $\|\cdot\|_{s_0}$ est une norme pour laquelle :

a) Les fonctions non linéaires s'estiment comme en (0.12).

b) On a une estimation d'énergie analogue à (0.10), i.e.

(1.10)
$$\|u'(x_0,\cdot)\|_{s_0} \le C_1\Big(\|u'(0,\cdot)\|_{s_0} + \int_0^{x_0}\|(\partial_0 u)^2(\tau,\cdot)\|_{s_0}\,d\tau\Big) \qquad 0 \le x_0 < T_\varepsilon.$$

On aura donc, d'après (0.12),

$$\|(\partial_0 u)^2(\tau,\cdot)\|_{s_0} \le C_2\|(\partial_0 u)(\tau,\cdot)\|_{L^\infty}\cdot\|(\partial_0 u)(\tau,\cdot)\|_{s_0} \tag{1.11}$$

de sorte qu'en combinant (1.9), (1.10), (1.11) on obtient

(1.12)
$$\|u'(x_0,\cdot)\|_{s_0} \le C_3\Big(\|u'(0,\cdot)\|_{s_0} + \int_0^{x_0}(1+\tau)^{\frac{1-n}{2}}\|u'(\tau,\cdot)\|_{s_0}^2\,d\tau\Big), \quad 0 \le x_0 < T_\varepsilon.$$

Soit alors z la solution du problème

$$(1.13) \qquad \begin{cases} z'(x_0) = C_3(1+x_0)^{\frac{1-n}{2}}\, z^2(x_0)\,, & x_0 > 0 \\ z(0) = C_3||u'(0,\cdot)||_{s_0} = C_3\varepsilon(||\varphi_0||_{s_0+1} + ||\varphi_1||_{s_0}) \end{cases}$$

alors z est certainement définie sur $[0,\tilde{T}_\varepsilon[$ où $0 < \tilde{T}_\varepsilon \leq +\infty$ et

$$(1.14) \qquad C_3\, z(0) \int_0^{\tilde{T}_\varepsilon} (1+\tau)^{\frac{1-n}{2}}\, d\tau \leq \frac{1}{2}$$

et on a

$$(1.15) \qquad z(x_0) = \frac{z(0)}{1 - C_3\, z(0) \int_0^{x_0} (1+\tau)^{\frac{1-n}{2}}\, d\tau}\,, \qquad 0 \leq x_0 < \tilde{T}_\varepsilon\,.$$

Supposons $T_\varepsilon < \tilde{T}_\varepsilon$ alors (1.12)...(1.15) montrent que

$$(1.16) \qquad ||u'(x_0,\cdot)||_{s_0} \leq z(x_0) \leq \frac{1}{2}\, z(0)\,, \qquad 0 \leq x_0 < T_\varepsilon$$

ce qui entraîne une estimation du type

$$(1.17) \qquad ||u(x_0,\cdot)||_{L^\infty} + ||u'(x_0,\cdot)||_{L^\infty} \leq C(\varepsilon,\varphi_0,\varphi_1)\,, \qquad 0 \leq x_0 < T_\varepsilon$$

et contredit (0.14). Enfin, la condition (1.14) donne les bornes inférieures (i) ... (iv) du Théorème.

S. Klainerman a rempli le programme décrit en (1.9), (1.10) en utilisant les propriétés d'invariance de l'équation des ondes par le groupe de Lorentz et par les dilatations. Les générateurs infinitésimaux de ces transformations sont :

$$(1.18) \qquad \begin{cases} Z_j = \partial_j & \\ Z_{jk} = x_j\, \partial_k - x_k \partial_j & 1 \leq j < k \leq n \\ Z_{0k} = x_0\, \partial_k + x_k \partial_0 & 1 \leq k \leq n \\ \rho = \sum_{j=0}^{n} x_j\, \partial_j\,. & \end{cases}$$

L'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ engendré par ces champs de vecteurs est une algèbre de Lie. En outre on a les relations de commutation suivantes :

$$(1.19)\qquad \begin{cases} [Z_j,\Box] = [Z_{jk},\Box] = [Z_{0k},\Box] = 0 \\ [\Box,\rho] = 2\Box. \end{cases}$$

Si I est un multi-indice de longueur $|I| = k$ on notera Z_I un composé de k champs de vecteurs du type (1.18). On a alors le :

Théorème 1.2. Inégalité de Klainerman [Kl6]. – *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $T > 0$, tout $u \in C^\infty([0,T],\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ et tout $(x_0,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$,*

$$(1.20)\quad (1+x_0+|x|)^{\frac{n-1}{2}}(1+|x_0-|x||)^{1/2}|u(x_0,x)| \le C \sum_{|I|\le\left[\frac{n}{2}\right]+1} ||Z_I u(x_0,\cdot)||_{L^2}$$

On prend alors pour $s \in \mathbb{N}$: $||u||_s = \Big(\sum_{|I|\le s} ||Z_I u||^2_{L^2}\Big)^{1/2}$.

L'inégalité (1.9) résulte du Théorème 1.2 et pour démontrer (1.10) on dérive Z_I fois l'équation, les propriétés de commutation (1.19) permettant d'utiliser la technique standard d'inégalité d'énergie.

Voici une petite idée de la preuve. Si $x_0+|x| \le 1$, (1.20) résulte de l'inégalité de Sobolev usuelle. Si $x_0+|x| > 1$ on localise coniquement. Supposons u supportée dans $|x| \ge \frac{1}{2}x_0$. L'inégalité de Sobolev usuelle dans $]0,+\infty[\times S^{n-1}$ donne

$$(1.21)\qquad ||u(x_0,\cdot)||^2_{L^\infty} \le C \sum_{|\alpha|+k\le s_0} ||\partial^\alpha_\omega \partial^k_r u(x_0,\cdot)||^2_{L^2}$$

en notant (r,ω) les coordonnées polaires et $s_0 = \left[\frac{n}{2}\right]+1$. On utilise alors les faits suivants :

a) $\sum_{i=1}^{n} |\partial_{\omega_i} u|^2 = \sum_{1\le j<k\le n} |Z_{jk}u|^2$,

b) $[\partial_{\omega_i}, Z_{jk}]$ est une combinaisons linéaire à coefficients réels de Z_{pq}, $1 \le p < q \le n$,

c) $\partial_r = \frac{1}{r}\rho - \frac{x_0}{r}\partial_0$ et $\partial^k_r = \sum_{i+j\le k} a_{kij}\,\rho^i\,\partial^j_0$ où les a_{kij} sont des fonctions bornées dans la région $r \ge \frac{1}{2}x_0$.

On déduit alors de (1.21)

$$
\begin{aligned}
x_0^{n-1}|u(x_0,x)|^2 &\leq C \sum_{|I|\leq s_0} \int_{x_0\leq 2r} |(Z_I u)(x_0,r\omega)|^2 x_0^{n-1}\, dr\, d\omega \\
&\leq C' \sum_{|I|\leq s_0} ||Z_I u(x_0,\cdot)||_{L^2}^2
\end{aligned}
$$

ce qui montre en partie (1.20).

Dans les autres régions la preuve est plus délicate et il faut utiliser tous les champs de vecteurs (1.18) ; nous renvoyons à [Kl6], [Ho4] ou à [Jo9] pour les détails.

Commentaires 1.3.

(i) Les bornes inférieures du temps de vie données au Théorème 1.1 sont liées au caractère quadratique des perturbations. La preuve montre aisément que ces bornes croissent avec l'ordre d'annulation des perturbations. Par exemple si les $g_{jk}-\delta_{jk}$ et f s'annulent respectivement à l'ordre p et $p+1$ en zéro, $(p\geq 1)$, les solutions existent globalement si $p(n-1)>2$; si $p(n-1)\leq 2$ elles existent au moins jusqu'au temps T tel que $\varepsilon^p\int_0^T(1+\tau)^{p\cdot\frac{1-n}{2}}\,d\tau\leq C$. En particulier si $p=2$ on a $T_\varepsilon=+\infty$ dès que $n\geq 3$ et $T_\varepsilon\geq \exp\frac{C}{\varepsilon}$ si $n=2$.
(ii) L'inégalité d'énergie (0.10) ne fournit d'estimation que pour $||u'(x_0,\cdot)||_{L^2}$; une estimation pour $||u(x_0,\cdot)||_{L^2}$ exigerait de perdre un facteur x_0 au membre de droite; ceci explique pourquoi les termes en u et u' ne peuvent être traités de manière symétrique. De fait, les perturbations quadratiques en u ne donnent pas lieu à des temps de vie aussi longs que ceux décrits au Théorème 1.1. Il existe des résultats analogues pour des perturbations non linéaires dépendant aussi de u (voir [Kl4], [LiY1,2,3], [Lin2]). Par exemple H. Linblad [Lin2] a montré qu'en trois dimensions d'espace, pour une équation du type

$$\Box u + G(u,u',u'') = 0$$

où $G(0,0,0)=G'(0,0,0)=0$ on a :

a) Si $G''_{uu}(0,0,0)=0 \quad T_\varepsilon\geq \exp\frac{C}{\varepsilon}$

b) Si $G''_{uu}(0,0,0)\neq 0 \quad T_\varepsilon\geq \frac{C}{\varepsilon^2}$.

On peut montrer que ces ordres de grandeur sont en général optimaux.

(iv) Il y a une théorie analogue pour les perturbations non linéaires de l'équation de Klein-Gordon i.e. $\Box u + u + G(u, u', u'') = 0$. Dans ce cas l'inégalité d'énergie fournit aussi une estimation de $||u(x_0, \cdot)||_{L^2}$ de sorte que les rôles de u et u' sont symétriques. D'autre part la décroissance à l'infini est meilleure que dans le cas des ondes. Elle est de l'ordre de $(1+x_0)^{\frac{-n}{2}}$, [W1], [B]. La méthode de Klainerman est applicable; il faut utiliser les champs (1.18) excepté le champ radial ρ. Pour ce type d'équations Klainerman [Kl7] et Shatah [Sh1,2] par une méthode différente ont montré que dans le cas des perturbations quadratiques on a $T_\varepsilon = +\infty$ dès que $n \geq 3$. Les cas $n = 1$ et 2 ont été examinés par Hörmander [Ho4]. Pour $n = 1$ on a $\varepsilon\sqrt{T_\varepsilon} \to +\infty$ et pour $n = 2$ $\varepsilon \mathrm{Log} T_\varepsilon \to +\infty$ sans que ces résultats apparaissent comme optimaux.

(v) Le cas de l'équation des ondes amortie, $\Box u + \alpha u_t + G(u, u', u'') = 0$,où $\alpha > 0$, est plus facile. On a $T_\varepsilon = +\infty$ dès que $n \geq 1$, [Mat].

La dualité classique en e.d.p. — méthode d'inégalités, construction de solutions approchées — est aussi présente dans ce domaine. Nous allons voir que cette dernière méthode permet de démontrer des résultats plus précis.

1.2. Précisions sur les bornes inférieures du temps de vie lorsque $n \leq 3$

Compte tenu de la structure des données il est naturel de chercher une solution approchée du problème (1.2), (1.3) de la forme $u = u^0 + \varepsilon u^1 + \ldots$ Il est facile de voir que $u^0 \equiv 0$ et que u^1 est solution du problème homogène

$$\Box u^1 = 0, \quad u^1 = \varphi_0 \quad \partial_0 u^1 = \varphi_1 \text{ si } x_0 = 0.$$

Si les données φ_j sont à support dans $\{|x| \leq M\}$ il résulte de la propagation à vitesse finie et du principe de Huygens que la contribution principale de u^1 se trouve dans la région où $\frac{x_0}{2} \leq |x| \leq x_0 + M$.

Friedlander [F1] a montré que u^1 est de la forme

$$u^1(x_0, x) = r^{\frac{1-n}{2}} F\Big(\omega, \frac{1}{r}, r - x_0\Big), \text{ si } r \geq 2M, \tag{1.22}$$

où $x = r\omega$, F étant une fonction C^∞ sur $S^{n-1} \times \left[0, \frac{1}{2M}\right] \times \mathbb{R}$ dont la partie principale $F_0(\omega, r - x_0) = F(\omega, 0, r - x_0)$ est appelé le champ de Friedlander. Celui-ci s'exprime aisément à l'aide de la transformée de Radon des données. En effet rappelons que si $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, sa transformée de Radon, $R(\omega, s; v)$ est la fonction C^∞ à support compact sur $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ définie par :

$$R(\omega, s; v) = \int_{\langle \omega, y \rangle = s} v(y)\, d\sigma .$$

On a alors

$$F_0(\omega, q) = \frac{1}{2}(2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \chi_+^{\frac{1-n}{2}} * \left[R(\omega, \cdot; \varphi_1) - \frac{\partial R}{\partial s}(\omega, \cdot; \varphi_0) \right] \tag{1.23}$$

où $\chi_+^a(s) = \begin{cases} s^a/\Gamma(a+1) & s > 0 \\ 0 & s \leq 0 \end{cases}$ si $\Re a > -1$ et $\frac{d}{ds}\chi_+^a = \chi_+^{a-1}$ si $a \in \mathbb{C}$. En particulier si $n = 3$, $\chi_+^{-1} = \delta_0$ et si $n = 2$, $\chi_+^{-\frac{1}{2}}(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} s^{-1/2} & s > 0 \\ 0 & s \leq 0 \end{cases}$. Ensuite, avec les notations de (1.2) à (1.5) on écrit :

$$\begin{cases} g_{jk}(u') = g_{jk}(0) + \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} g_{jk\ell}\, \partial_\ell u + O(|u'|^2), & |u'| \leq 1 \\ f(u') = \displaystyle\sum_{j,k=0}^{n} f_{jk}\, \partial_j u \cdot \partial_k u + O(|u'|^3), & |u'| \leq 1 \end{cases} \tag{1.24}$$

puis on pose

$$\begin{cases} G(\omega) = \displaystyle\sum_{j,k,\ell=0}^{n} g_{jk\ell}\, \hat{\omega}_j \hat{\omega}_k \hat{\omega}_\ell \\ F(\omega) = \displaystyle\sum_{j,k=1}^{n} f_{jk}\, \hat{\omega}_j \hat{\omega}_k \end{cases} \quad \text{où } \hat{\omega} = (-1, \omega), \quad \omega \in S^{n-1}. \tag{1.25}$$

Le résultat suivant est dû à John [Jo6-9] et Hörmander [Ho3-4].

Théorème 1.3. – *Supposons $n = 3$. Posons*

$$A = \left[\max_{(\omega,q) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial q^2}(\omega, q) G(\omega) - \frac{\partial F_0}{\partial q}(\omega, q) F(\omega) \right) \right]^{-1} \tag{1.26}$$

alors

$$\varliminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \operatorname{Log} T_\varepsilon \geq A . \tag{1.27}$$

Dans le cas de la dimension $n = 2$, lorsque $f \equiv 0$, Hörmander [Ho4] a montré que

$$\underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \, \varepsilon \sqrt{T_\varepsilon} \geq \Big[\max_{(\omega,q)} G(\omega) \frac{\partial^2 F_0}{\partial q^2}(\omega, q) \Big]^{-1} \tag{1.28}$$

et pour les équations semi-linéaires $\Box u = f(u')$ Godin [Go] a prouvé

$$\underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \, \varepsilon \sqrt{T_\varepsilon} \geq \Big[\max_{(\omega,q)} \Big(- \frac{\partial F_0}{\partial q}(\omega, q) F(\omega) \Big) \Big]^{-1}. \tag{1.29}$$

Remarque 1.4. – Il n'est pas difficile de voir que la quantité A définie en (1.26) est strictement positive et finie sauf si $F \equiv G \equiv 0$ ou $(u_0, u_1) = (0, 0)$.

Esquisse de la preuve du Théorème 1.3

Pour montrer le Théorème 1.3 on construit pour tout $B < A$ et tout $\varepsilon \leq \varepsilon_B$ une solution u qui vivra jusqu'au temps $\exp \frac{B}{\varepsilon}$. Cette solution sera de la forme $u = u_a + \dot{u}$ où u_a est une solution approchée, au sens où la quantité $\sum_{j,k=0}^{3} g_{jk}(u'_a) \partial_j \partial_k u_a - f(u'_a)$ sera petite, qui vivra jusqu'au temps $\exp \frac{A}{\varepsilon}$. Une fois u_a construite il faut montrer qu'il existe $\dot{u}$ tel que $u_a + \dot{u}$ soit une solution exacte. La solution approchée u_a est construite en deux étapes : jusqu'à un temps de l'ordre de $\frac{C}{\varepsilon}$ les effets non linéaires ne se font pas encore sentir de sorte qu'il n'est pas déraisonnable de prendre pour u_a la solution de l'équation linéaire avec les données (1.3). Par contre dans une zone de temps comprise entre $\frac{C'}{\varepsilon}$ et $\exp \frac{A}{\varepsilon}$ les interactions non linéaires interviennent, et c'est la quantité $\varepsilon \operatorname{Log} x_0$ (le temps lent) qui va devenir le paramètre pertinent. Compte tenu de la forme (1.22) des solutions libres il est naturel alors de chercher u_a sous la forme

$$u_a = \frac{\varepsilon}{r} U(\omega, \varepsilon \operatorname{Log} x_0, r - x_0). \tag{1.30}$$

Lorsque x_0 est grand mais $\varepsilon \operatorname{Log} x_0$ encore petit il est naturel de prendre

$$U(\omega, 0, r - x_0) = F_0(\omega, r - x_0). \tag{1.31}$$

Dans la zone intermédiaire $\frac{C}{\varepsilon} \leq x_0 \leq \frac{C'}{\varepsilon}$ on recollera ces deux solutions à l'aide d'une troncature.

Compte tenu de la vitesse finie de propagation et du principe de Huygens, dans la zone $\varepsilon x_0 \geq C'$ on aura $x_0 - M \leq |x| \leq x_0 + M$ de sorte que $|x_0 - r| \leq M$ et $\frac{C'}{2\varepsilon} \leq \frac{x_0}{2} \leq r \leq x_0 + M$. On pose $R = \sum_{j,k=0}^{3} g_{jk}(u_a')\partial_j \partial_k u_a - f(u_a')$. Le terme principal de R s'écrit $\frac{\varepsilon^2}{r x_0}\Big(-2\frac{\partial^2 U}{\partial s \partial q} + G(\omega)\frac{\partial U}{\partial q}\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} - F(\omega)\big(\frac{\partial U}{\partial q}\big)^2\Big)$ où $U = U(\omega, s, q)$. On prendra pour U la solution du problème

(1.32)

$$\begin{cases} -2\dfrac{\partial^2 U}{\partial s \partial q} + G(\omega)\dfrac{\partial U}{\partial q} \cdot \dfrac{\partial U^2}{\partial q^2} - F(\omega)\Big(\dfrac{\partial U}{\partial q}\Big)^2 = 0, \quad \omega \in S^2,\ |q| \leq M,\ s > 0 \\ U(\omega, 0, q) = F_0(\omega, q). \end{cases}$$

On commence par résoudre le problème :

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial v}{\partial s} = G(\omega) v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial q} - F(\omega) v^2, \quad \omega \in S^2,\ |q| \leq M,\ s > 0, \\ v|_{s=0} = \dfrac{\partial F_0}{\partial q}(\omega, q) \end{cases} \tag{1.33}$$

dont on montre qu'il conduit à une solution de (1.32).

L'équation apparaissant dans (1.33) est une équation de Burger modifiée dont on sait calculer le temps de vie. La solution existe pour $0 \leq s < A$ où A est défini en (1.26).

Il faut ensuite montrer des estimations précises sur u_a et sur R pour ensuite passer à la preuve de l'existence d'une solution exacte vivant jusqu'au temps $\exp \frac{B}{\varepsilon}$. L'extrême technicité de la preuve ne permettant pas d'en dire ici beaucoup plus, on renvoie à [Ho4] pour les détails. Le cas de la dimension deux est compliqué par le fait que l'on ne dispose que du principe de Huygens faible et que le champ de Friedlander n'est pas à support compact par rapport à la variable q. Cependant ce fait est compensé par des estimations précises du type symbole sur ce champ.

La quantité A définie en (1.36) cesse d'avoir un sens si $F(\omega) \equiv G(\omega) \equiv 0$. Cependant dans ce cas le Théorème 1.3 suggère que l'on peut améliorer le temps de vie de la solution. Cette question a été résolue par S. Klainerman [Kl8] et par Christodolou [Chr] dans le cas de la dimension trois d'espace.

La condition nulle

L'équation (1.2) satisfait la condition nulle si, avec les notations de (1.24) on a :

$$\sum_{j,k,\ell=0}^{n} g_{jk\ell}\xi_j\xi_k\xi_\ell = \sum_{j,k=0}^{n} f_{jk}\xi_j\xi_k = 0 \quad \text{lorsque} \quad \xi_0^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2, \tag{1.34}$$

(voir aussi [HJ] pour une condition similaire).

D'après (1.25) cette condition entraîne que $F(\omega) = G(\omega) = 0\ \forall \omega \in S^{n-1}$. Dans ce cas Klainerman [Kl8] et Christodolou [Chr] ont démontré le :

Théorème 1.5. – *Supposons $n = 3$. Si l'équation (1.2) satisfait la condition nulle on a pour ε assez petit $T_\varepsilon = +\infty$.*

En dimension $n = 2$, dans le cas des équations semi-linéaires $\Box u = f(u')$ Godin [Go] a montré que la condition nulle (1.34) n'était pas suffisante pour avoir existence globale d'une solution. Plus précisément notant $F_j(z) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(0) z^\alpha$ la partie homogène d'ordre j et $\mathcal{F}(\omega, q)$ le champ de Friedlander, Godin montre que

a) Si $F_2(\omega) \equiv 0$ on a $\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\ \varepsilon^2 \mathrm{Log} T_\varepsilon \geq \left[\max_{(\omega,q)} \left\{ - F_3(\omega)\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial q}(\omega, q)\right)^2\right\}\right]^{-1}$

b) Si $F_2(\omega) \equiv F_3(\omega) \equiv 0$ on a $T_\varepsilon = +\infty$ pour ε assez petit.

Il montre ensuite sur un modèle que $T_\varepsilon \leq \exp \frac{C}{\varepsilon^2}$ dans le cas a).

1.3. Bornes supérieures du temps de vie

Compte tenu de la précision avec laquelle la solution approchée a été construite au cours de la preuve du Théorème 1.3, il est difficile de douter, comme le dit Hörmander [Ho4], de l'optimalité de la borne inférieure du temps de vie décrite en (1.26), (1.27). Cependant dans le cas général des équations (1.2) cette question est encore largement ouverte. Le seul cas où la réponse est connue est celui étudié par John [Jo5] en dimension $n = 3$ (voir aussi Godin [Go] dans le cas semi-linéaire et $n = 2$). Il considère le problème

$$\begin{cases} \partial_0^2 u - c^2(\partial_0 u)\Delta u = 0, \ \text{où}\ \Delta = \sum_{j=1}^{3} \partial_j^2, \\ \\ u = \varepsilon u_0,\ \partial_0 u = \varepsilon u_1 \ \text{si}\ x_0 = 0. \end{cases} \tag{1.35}$$

Ici c est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$c(0) = 1\,, \quad c'(0) \neq 0\,. \tag{1.36}$$

La condition $c'(0) \neq 0$ exprime le fait que la condition nulle n'est pas satisfaite, (et que les valeurs propres du système associé à (1.35) sont vraiment non linéaires).

L'hypothèse suivante sur les données est cruciale.

(1.37) Les données u_j sont dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ et radiales.

Dans ce cadre John a montré le

Théorème 1.6. – *Pour le problème (1.35), (1.36), (1.37) on a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \operatorname{Log} T_\varepsilon = A$$

où A est défini en (1.26).

Remarquons que dans ce cas particulier on a $A = \frac{1}{aK}$ où $a = c'(0)$ est supposé positif et $K = \sup\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} \frac{1}{2}(2\phi'(\lambda) + \lambda\phi''(\lambda) - \psi(\lambda) - \lambda\psi'(\lambda))$ où $u_0 = \phi(r)$, $u_1 = \psi(r)$.

Expliquons pourquoi la radialité des données est ici essentielle. Dans ce cas la solution u est aussi radiale et le problème (1.35) est ramené au problème en une variable d'espace

$$\partial_0^2(ru) - c^2(\partial_0 u)\,\partial_r^2(ru) = 0\,. \tag{1.39}$$

Compte tenu de (0.14) on s'attend bien sûr à ce que des dérivées d'ordre ≤ 2 de u "explosent" lorsque $t \to T_*$ (mais il n'est pas clair que toutes les dérivées explosent). L'équation (1.39) se ramène à un système hyperbolique du premier ordre en une variable d'espace qui est l'un des rares cas où l'on connaisse de manière un peu générale des quantités pertinentes susceptibles d'exploser (en T_* et non pas après) (voir [Jo9], [Ho3]). Si on écrit le système $\partial_0 U + a(U)\,\partial_r U = 0$, ces quantités sont les composantes de $\partial_r U$ dans une base de vecteurs propres normalisés de la matrice $a(U)$.

Dans le cas de l'équation (1.39) ces quantités s'écrivent

$$w_1 = \frac{1}{2c}(-\partial_0\,\partial_r v + c\partial_r^2 v), \quad w_2 = \frac{1}{2c}(\partial_0\,\partial_r v + c\partial_r^2 v) \text{ où } v = ru\,. \tag{1.40}$$

D'autre part l'équation (1.39) a deux familles de caractéristiques

$$(1.41)\qquad \Gamma^1_\lambda : \frac{dr}{dx_0} = c(\partial_0 u),\ r(0) = \lambda, \qquad \Gamma^2_\mu : \frac{dr}{dx_0} = -c(\partial_0 u),\ r(0) = \mu.$$

D'après le Théorème 1.3 on sait que le problème (1.35) admet une solution u de classe C^∞ dans $[0, \exp\frac{B}{\varepsilon}] \times \mathbb{R}^3$ où $B < A$, qui vérifie $||\partial_0 u||_{L^\infty} \leq C\varepsilon$. Alors $|c(\partial_0 u)| \leq M\varepsilon$ et les caractéristiques existent jusqu'au temps $\exp\frac{B}{\varepsilon}$. On montre que :

a) Sur Γ^1_λ $\quad \frac{d}{dx_0} w_1 = \frac{cc'}{r} w_1(w_1 - w_2) + \frac{c'}{2r} u_t(3w_1 + w_2)$

b) Sur Γ^2_λ $\quad \frac{d}{dx_0} w_2 = \frac{cc'}{r} w_2(w_2 - w_1) + \frac{c'}{2r} u_t(3w_2 + w_1)$.

Puisque $v = ru = \varepsilon F_0(r - x_0) + O(\varepsilon^2), x_0 > M$, on a $w_1 = \varepsilon F_0''(r - x_0) + O(\varepsilon^2)$ pour $x_0 > M$. D'autre part comme $F_0(\lambda)$ est à support compact et non identiquement nul F_0'' prend des valeurs strictement positives. Soit λ_0 tel que $F_0''(\lambda_0) = \max F''(\lambda) > 0$. On a $|\lambda_0| < M$ si le support des données est contenu dans $\{|x| \leq M\}$. Considérons la caractéristique $\Gamma^1_{\lambda_0}$, on a $r(x_0) \approx x_0 + \lambda_0$ de sorte que $w_1(2M, r(2M)) = \varepsilon F_0''(\lambda_0) + O(\varepsilon^2)$. Ce que John démontre, par une très subtile et délicate récurrence continue qui utilise les deux équations a), b) ci-dessus c'est que le long de $\Gamma^1_{\lambda_0}$, w_2 et u_t restent bornés de sorte que le terme dominant dans le membre de droite de l'équation que vérifie w_1 est le terme $\frac{cc'}{r^2} w_1^2$. On a donc le long de $\Gamma^1_{\lambda_0}$, $\frac{dw_1}{dx_0} \approx \frac{c'(0)}{x_0 + \lambda_0} w_1^2$, $w_1(2M, r(2M)) \approx \varepsilon F_0''(\lambda_0)$. Le temps de vie d'une telle solution vérifie $\varepsilon \mathrm{Log} T_\varepsilon \leq \frac{1}{c'(0) F_0''(\lambda_0)}$, ce qui est précisément la borne supérieure cherchée. On renvoie à [Jo5], [Ho3] pour les détails.

Commentaires 1.7.

(i) En dimension deux d'espace, pour les équations $\sum_{j,k=0}^{2} g_{jk}(u')\partial_j \partial_k u = 0$, Alinhac [A1,2,3], en construisant une solution approchée beaucoup plus précise, a montré que $T_\varepsilon \geq \tilde{T}_\varepsilon = \frac{A}{\varepsilon^2} + \frac{B}{\varepsilon} - o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ avec égalité dans le cas invariant par rotation de John (cf. (1.35)). Il montre en outre une dégradation effective des dérivées secondes à l'approche de $\tilde{T}_\varepsilon$. Plus précisément

$$||\nabla^2 u(x_0, \cdot)||_{L^\infty} \geq \frac{C}{\frac{A}{\varepsilon^2} + \frac{B}{\varepsilon} - x_0}, \quad x_0 \leq \tilde{T}_\varepsilon.$$

(ii) Dans [Ho6] Hörmander donne une version complètement non linéaire du Théorème 1.3.

(iii) L'équation $\Box u = |u|^p$ a fait l'objet de nombreux travaux que faute de place nous n'aurons pas la possibilité de décrire; voir [Gl1-4], [Jo9], [Si1-3], [Ka2], [S1], [As1], [Ts], [Ku] et dans le cas des variétés hyperboliques [CaC], [Cho1,2]. Nous ferons cependant une exception pour les travaux de Caffarelli-Friedman [CF1,2] car ce sont les seuls travaux qui étudient l'ensemble d'explosion i.e. la frontière de $\{(x_0, x) : |u(x_0, x)| < +\infty\}$. Pour des équations du type $\Box u = F(u)$ où $F(u) \sim Au^p$, $u \to +\infty$, $p > 1$, ils montrents sous des hypothèses convenables sur les données de Cauchy et en dimension $n \leq 3$, que l'ensemble d'explosion est une surface de type espace : $t = \phi(x)$ avec $\phi \in C^1$ et $|\nabla \phi| < 1$.

2. EQUATIONS SEMI-LINEAIRES DISPERSIVES

Lorsque les données sont quelconques, le comportement en grand temps des solutions du problème de Cauchy est beaucoup moins bien compris. Le seul cas où l'étude a dépassé le stade de l'exemple est celui des équations d'ondes dispersives. Il s'agit du problème

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \Box u + f(u) = 0, x_0 > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u = u_0, \partial_0 u = u_1 \text{ si } x_0 = 0 \end{cases}$$

$$(2.2) \qquad F(u) = \int_0^u f(t)\,dt \geq 0 \qquad \forall u \in \mathbb{R}.$$

L'étude mathématique de ce problème a été commencée dans les années soixante avec les travaux de Jorgens [Jor], Segal [Se1], Strauss [St2], Lions [Lio] etc ... Il est malheureusement impossible, faute de place, de rendre compte dans le détail de l'ensemble des travaux qui, depuis trente ans, ont été consacrés à ce problème. Le lecteur intéressé pourra consulter les récents survols de Strauss [St4] et Struwe [Stru2]. Je me bornerai ici à résumer brièvement l'état du sujet avant la contribution de Shatah-Struwe qui sera détaillée par la suite.

1. Il est possible dans des situations assez générales ($uf(u) \geq 0$ $\forall u$ ou bien (2.2) et $\frac{F(u)}{|f(u)|} \to +\infty$ $|u| \to +\infty$) d'obtenir des solutions faibles globales en temps (i.e. faiblement continues à valeurs dans l'espace d'énergie X_0 qui est relié à $H^1 \times L^2$, cf. [Se1], [St2], [Lio]). Les méthodes basées sur la compacité ne donnent ni l'unicité ni la régularité qui sont encore des questions ouvertes.

2. Une des difficultés étant de mesurer la croissance à l'infini de $f(u)$, l'essentiel des travaux a porté sur le cas où f croît polynomialement. L'exemple majeur est $f(u) = u|u|^{p-1}$; apparaît alors une valeur critique pour p : $p_* = \frac{n+2}{n-2}$. Lorsque $1 < p < p_*$, à la suite de nombreux travaux, Ginibre et Velo [GV1] ont montré l'unicité et l'existence d'une solution fortement continue à valeurs dans l'espace d'énergie. Ils utilisent pour cela une résolution locale du problème par contraction puis une globalisation. La valeur critique apparaît dans le fait que le temps de vie de la solution locale peut être minoré par $C||(u_0, u_1)||_{X_0}^{-\frac{c}{p_*-p}}$.

3. En poursuivant dans cette voie, Brenner-Von Wahl [BrW] et Pecher [P3] ont obtenu une solution classique globale pour $1 < p < p_*$ et $n \leq 9$.

4. Dans le cas critique $p = p_*$ les méthodes précédentes atteignent leurs limites (voir cependant le récent article de Ginibre-Soffer-Velo [GSV] dans le cas radial). Une autre approche initiée par Jorgens [Jor] qui consiste à obtenir des estimations L^∞ sur les solutions locales du Théorème 0.1, a permis à Grillakis [GR1], à la suite de travaux de Rauch [Ra] et Struwe [Stru1], de résoudre le cas de l'équation $\square u + u^5 = 0$ en trois dimensions d'espace. Ce même auteur a étendu son résultat aux dimensions $n \leq 5$, [GR2], avant que Shatah et Struwe [ShS] ne prouvent le :

Théorème 2.1. – *Supposons* $3 \leq n \leq 7$. *Soient* $u_0 \in C_0^3(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^2(\mathbb{R})$. *Supposons*

$$f(u) = u|u|^{p_*-1}, \quad |u| \geq C, \quad p_* = \frac{n+2}{n-2}. \tag{2.3}$$

Le problème (2.1) admet alors une solution classique globale $u \in C^2([0, +\infty[\times\mathbb{R}^n)$ *(et* $u \in C^\infty$ *si toutes les données sont* C^∞*).*

Commentaires 2.2.

(i) Il est bien entendu naturel de s'interroger sur la pertinence des bornes imposées à la dimension et à l'exposant p. Force est de constater qu'elles apparaissent aujourd'hui comme des contraintes techniques. Les calculs numériques effectués par Strauss-Vasquez [StV] et par Linblad pour l'équation $\square u + u^7 = 0$ en dimension trois ne font pas apparaître de dégradation de la solution mais une accélération des oscillations, ce qui rend le pronostic délicat. Cependant sans qu'une conjecture étayée ait été formulée, on pense généralement que le cas surcritique en dimension

quelconque ne devrait pas faire apparaître de différence majeure.
(ii) On renvoie aux travaux de Kapitanski [K1,2], Ginibre-Soffer-Velo [GSV] pour d'autres résultats dans le cas critique.

2.1. Preuve du Théorème 2.1.

Le problème (2.1) admet une solution classique locale et si T_* est le temps de vie de cette solution on a soit $T_* = +\infty$ soit $T_* < +\infty$ et $\overline{\lim_{t\to T_*}} ||u(t,\cdot)||_{L^\infty} = +\infty$. Il existe alors un point (T_*, x_*) et une suite (x_{0n}, x_n) tendant vers ce point telle que $\lim_{n\to+\infty} |u(x_{0n}, x_n)| = +\infty$. L'objectif est de contredire ce fait en démontrant des estimations L^∞ sur u dans des cônes rétrogrades de sommet $(T_*, x_*) = z_*$.

Voici un résumé (inversé) de la preuve. Pour montrer que u est L^∞ dans le cône il suffit, d'après les inégalités de Sobolev, et puisque $n \leq 7$, d'avoir $\partial^\alpha u \in L^\infty([0, T_*[; L^2)$ pour $|\alpha| \leq 4$. Ceci peut s'obtenir à l'aide de l'inégalité d'énergie usuelle si $\Box u = -f(u) \in H^2$. En dimension $n \leq 7$, compte tenu de la forme de $f(u)$, ce fait est impliqué par : $u \in W^{2,q}$ (pour un certaint q). Pour montrer que u est dans $W^{2,q}$ on dérive deux fois l'équation, on applique les estimations $L^p - L^q$ pour l'équation des ondes linéaire et une estimation nouvelle due à Shatah-Struwe.

Introduisons d'abord quelques notations. Dans ce qui suit on notera t (au lieu de x_0) la variable de temps. Si $z_0 = (t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ on introduit
(2.5)

$$\begin{cases} K(z_0) = \Big\{z = (t,x) \in [0,t_0] \times \mathbb{R}^n \, : \, |x - x_0| \leq t_0 - t\Big\}, & \text{le cône rétrograde} \\ M(z_0) = \Big\{z = (t,x) \in [0,t_0] \times \mathbb{R}^n \, : \, |x - x_0| = t_0 - t\Big\}, & \text{le manteau} \\ D(t,z_0) = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \, : \, |x - x_0| \leq t_0 - t\Big\}, & \text{la section du cône au temps } t. \end{cases}$$

Si $Q \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ on pose

$$Q_S^T = \{(t,x) \in Q \, : \, S \leq t \leq T\}. \tag{2.6}$$

On introduit également

$$e(u) = \frac{1}{2}(u_t^2 + |\nabla_x u|^2) + F(u), \quad \text{la densité d'énergie} \tag{2.7}$$

$$E(u, D(t, z_0)) = \int_{D(t,z_0)} e(u)\,dx\,, \text{ l'énergie locale au temps } t \tag{2.8}$$

$$d_{z_0}(u) = \frac{1}{2}\left|\frac{x - x_0}{|x - x_0|}u_t - \nabla_x u\right|^2 + F(u)\,, \text{ la densité de flux} \tag{2.9}$$

$$\mathrm{Flux}\,(u, M_S^T(z_0)) = \int_{M_S^T(z_0)} d_{z_0}(u)\,d\sigma\,, \text{ le flux.} \tag{2.10}$$

A. L'estimation d'énergie

Proposition 2.3. – *Soit $z_0 \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$. Soit u une solution classique de l'équation (2.1) dans $K(z_0) \setminus \{z_0\}$. Alors pour $0 \le S < T < t_0$ on a :*

$$E(u, D(T, z_0)) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathit{Flux}(u, M_S^T(z_0)) = E(u, D(S, z_0))\,. \tag{2.11}$$

Preuve. – On a :

$$0 = u_t(\square u + f(u)) = \frac{\partial}{\partial t}e(u) - \mathrm{div}\,(u_t \cdot \nabla_x u) = \mathrm{div}\vec{p}$$

d'où

$$0 = \int_{K_S^T(z_0)} \mathrm{div}\vec{p} = \int_{\partial K_S^T(z_0)} \langle \vec{p}, \vec{n}\rangle\,d\sigma$$

où $\vec{n}$ est la normale extérieure à $K_S^T(z_0)$. Cela fournit (2.11) par un calcul simple.

Conséquences 2.4.

(i) La quantité $E(u, D(S, z_0))$ est décroissante en S et admet donc une limite lorsque S tend vers t_0.

(ii) (2.12) $\quad \lim_{S\to t_0} \mathrm{Flux}\,(u, M_S^{t_0}(z_0)) = 0$.

B. Les estimations $L^p - L^q$

Il y a une vaste littérature consacrée à ce type d'estimations (voir [Str1,2], [Lit], [MSW], [BS], [GV1]). La version utilisée ici est celle de Strichartz.

Théorème 2.4. – *Soit w une solution classique d'un problème de Cauchy*

$$\square w = f \quad \textit{pour } t > 0\,, \quad w = u_0\,, \quad \partial_0 w = u_1 \quad \textit{pour } t = 0\,.$$

On a alors

$$(2.13)\qquad ||w||_{L^q(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C\Big(||f||_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} + ||u_0||_{\dot{H}^{1/2}} + ||u_1||_{\dot{H}^{-1/2}}\Big)$$

où C ne dépend que de la dimension et

$$(2.14)\qquad p = \frac{2(n+1)}{n+3} \qquad q = \frac{2(n+1)}{n-1}.$$

On a noté ici $||u||_{\dot{H}^s} = |||\xi|^s\hat{u}||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Remarquons que le couple (p,q) décrit en (2.14) est entièrement déterminé par l'homogé-
néité de l'estimation (2.13).

Nous aurons besoin d'introduire les espaces de Besov et de Sobolev homogènes (voir [T]). Pour $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q < +\infty$ on pose

$$\dot{B}^s_{pq}(\mathbb{R}^n) = \Big\{u \in \mathcal{S}'/\mathcal{P} : ||u||_{\dot{B}^s_{pq}} \equiv \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsq}||u_j||^q_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/q} < +\infty\Big\}$$

où $u = \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j$ est une décomposition de Littlewood-Paley de u et $\mathcal{P}$ l'espace des polynômes. On pose aussi

$$\dot{H}^s_p(\mathbb{R}^n) = \Big\{u \in \mathcal{S}'/\mathcal{P} : (-\Delta)^{s/2}u \in L^p(\mathbb{R}^n)\Big\}$$

que l'on munit de la norme évidente.

On a alors les inclusions suivantes :

$$(2.16)\qquad \begin{cases} \dot{B}^s_{\alpha\alpha} \hookrightarrow \dot{H}^s_\alpha & \text{si } \alpha \leq 2 \\ \dot{H}^s_\beta \hookrightarrow \dot{B}^s_{\beta\beta} & \text{si } \beta \geq 2 \\ \dot{H}^s_r \hookrightarrow \dot{H}^\sigma_{r_*} & \text{si } s \geq \sigma \text{ avec } \dfrac{1}{r_*} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{s-\sigma}{n} > 0. \end{cases}$$

On posera dans ce qui suit :

$$(2.17)\qquad \dot{B}^{1/2}_q = \dot{B}^{1/2}_{qq} \cap L^{q_*} \quad \text{où } \frac{1}{q_*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{2n}$$

que l'on munit de la norme de $\dot{B}^{1/2}_{qq}$.
Comme $\dot{B}^{1/2}_{qq} = [\dot{H}^1_q, L^{q_*}]_{\frac{1}{2},q}$, il résulte de (2.16) que

(2.18) $\quad \dot{B}^{1/2}_q \hookrightarrow L^{q_*}.$

D'autre part les fonction non linéaires s'estiment aisément dans ces espaces.

Proposition 2.5. – *Soit $f \in C^1(\mathbb{C},\mathbb{C})$ telle que $|f'(z)| \leq C|z|^{p_*-1}$ pour un $p_* \in [1,+\infty[$. Soient $1 \leq \alpha,\beta \leq +\infty$, $1 \leq r \leq +\infty$ et $\frac{1}{s} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}$. Il existe alors $C' > 0$ t.q. :*

$$\|f(\varphi)\|_{\dot{B}^{1/2}_{\alpha r}} \leq C'\|\varphi\|_{\dot{B}^{1/2}_{\beta r}} \cdot \||\varphi|^{p_*-1}\|_{L^s} \tag{2.19}$$

pour toute $\varphi \in L^\gamma$ pour un γ dans $[1,+\infty[$ telle que le membre de droite de (2.19) ait un sens.

Ensuite si V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ on pose

$$\|u\|_{\dot{B}^s_q(\mathsf{V})} = \inf\Big\{\|v\|_{\dot{B}^s_q(\mathbb{R}^n)} : v|_{\mathsf{V}} = u, v \in \dot{B}^s_q(\mathbb{R}^n)\Big\}.$$

Il résulte de (2.18) que

$$\dot{B}^{1/2}_q(\mathsf{V}) \hookrightarrow L^{q_*}(\mathsf{V}), \qquad \frac{1}{q_*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{2n} > 0 \tag{2.20}$$

En appliquant (2.13) à $(-\Delta)^{1/2}w$ (ce qui a un sens par propagation à vitesse finie si les données sont à support compact), on obtient en utilisant (2.16)

$$\|w\|_{L^q(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{1/2}_q(\mathbb{R}^n))} \leq C\Big(\|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{1/2}_p(\mathbb{R}^n))} + \|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\Big). \tag{2.21}$$

Un argument d'unicité précisée dans les cônes $K^T_S(z_*)$ permet de localiser cette estimation dans ces cônes. Avec les notations de (2.5), (2.6) on pose

$$\|u\|_{q,S,\tau} = \|u\|_{L^q([S,\tau];\dot{B}^{1/2}_q(D(t,z_*)))}, \quad 0 \leq S < \tau < T_*.$$

On démontre à partir de (2.21) :

$$\|w\|_{q,S,\tau} \leq C\Big(\|f\|_{p,S,\tau} + E(w(S,\cdot), D(S,z_*))\Big) \tag{2.22}$$

C. Le Lemme fondamental

Lemme 2.5. – *Soit u une solution classique de (2.1) dans $K(z^*) \setminus \{z^*\}$. Alors*

$$\lim_{S\to T_*} \int_{D(S,z_*)} |u|^{p_*+1}\, dx = 0 \tag{2.23}$$

Preuve. – On peut supposer que $z_* = 0$. Multiplions l'équation (2.1) par $tu_t + x\cdot\nabla u + \frac{n-1}{2}\, u$. On obtient l'identité :

$$0 = \partial_t\Big(tQ_0 + \frac{n-1}{2}\, u_t u\Big) - \operatorname{div}(tP_0) + R_0 \qquad \text{où} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}
Q_0 &= e + u_t\Big(\frac{x}{t}\cdot\nabla u\Big)\\
P_0 &= \frac{x}{t}\Big(\frac{|u_t|^2 - |\nabla u|^2}{2} - \frac{|u|^{p_*+1}}{p_*+1}\Big) + \nabla u\Big(u_t + \frac{x}{t}\cdot\nabla u + \frac{n-1}{2}\,\frac{u}{t}\Big)\\
R_0 &= \frac{1}{n}\,|u|^{p_*+1}.
\end{aligned}$$

On intègre (2.25) sur le cône K_S^T et on fait tendre T vers zéro. On obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_{D(S)} \Big\{SQ_0 + \frac{n-1}{2}\, u_t u\Big\}\, dx + \int_{K_S^0} R_0\, dx\, dt\\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{M_S^0}\Big\{tQ_0 + \frac{n-1}{2}\, u_t u + x\cdot P_0\Big\}\, d\sigma = I + II + III = 0.
\end{aligned}$$

Sur M_S^0 on a $|x| = -t$ ce qui permet d'écrire

$$III = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{M_S^0}\Big\{-|x|\Big|u_t - \frac{x\cdot\nabla u}{|x|}\Big|^2 + \frac{n-1}{2}\Big(u_t - \frac{x\cdot\nabla u}{|x|}\Big)\Big\}\, d\sigma$$

paramétrant M_S^0 par $y\mapsto(y,-|y|)$ et posant $v(y) = u(y,-|y|)$ il vient

$$\begin{aligned}
III = &-\int_{D(S,0)} \frac{1}{|y|}\Big\{\Big|y\cdot\nabla v + \frac{n-1}{2}\Big|^2 - \Big(\frac{n-1}{2}\Big)^2 v^2\Big\}\, dy\\
&+ \int_{D(S,0)} \frac{n-1}{4}\,\frac{y\cdot\nabla(v^2)}{|y|}\, dy.
\end{aligned}$$

Intégrant par parties et revenant aux coordonnées originales on obtient

$$III = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{M_S^0} \frac{1}{t} \Big| t u_t + x \cdot \nabla u + \frac{n-1}{2} u \Big|^2 d\sigma + \frac{n-1}{4} \int_{\partial D(S,0)} u^2 \, d\sigma$$

$$III \geq \frac{n-1}{4} \int_{\partial D(S,0)} u^2 \, d\sigma + S o(1)$$

où $o(1) \to 0$ lorsque $S \to 0$, en vertu de (2.12).
Ensuite

$$I = -\int_{D(S,0)} \Big\{ S \Big[\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} \Big| \nabla u + \frac{n-1}{2} \frac{x}{|x|^2} u \Big|^2 - \frac{n-1}{2} \frac{x \cdot \nabla u}{|x|^2} u - \\ - \frac{1}{2} \Big(\frac{n-1}{2} \Big)^2 \frac{u^2}{|x|^2} + \frac{|u|^{p_*+1}}{p_*+1} \Big] + u_t \Big(x \cdot \nabla u + \frac{n-1}{2} u \Big) \Big\} dx$$

$$I = -\int_{D(S,0)} \Big\{ S \Big[\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} \Big| \nabla u + \frac{n-1}{2} \frac{x}{|x|^2} u \Big|^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{8} \frac{u^2}{|x|^2} + \frac{|u|^{p_*+1}}{p_*+1} \Big] \\ + u_t \Big(x \cdot \nabla u + \frac{n-1}{2} u \Big) \Big\} dx + \int_{D(S,0)} \Big\{ S \frac{n-1}{4} \frac{u^2}{|x|} \Big\} d\sigma$$

$$I \geq -\int_{D(S,0)} S \frac{|u|^{p_*+1}}{p_*+1} dx - \frac{n-1}{4} \int_{\partial D(S,0)} u^2 \, d\sigma .$$

Comme $II \geq 0$ on obtient $-S \int_{D(S,0)} |u|^{p_*+1} dx + S o(1) \leq 0$ et $-S = |S|$. ◇

Proposition 2.6. – *Soit u une solution classique de (2.1) sur $K(z_*) \setminus \{z_*\}$. Alors u est bornée dans $L^q([0, T_*[, \dot{B}_q^{1/2}(D(t, z_*)))$ et*

$$||u||_{q,0,T_*} \leq C(z_*, E(u, D(0, z_*))) .$$

Preuve. – Pour s assez proche de T_* et $\tau \in]S, T_*[$ il résulte de (2.22) que

$$||u||_{q,S,\tau} \leq C\Big(|||u|^{p_*}||_{p,S,\tau} + E(u, D(S, z_*)) \Big) . \tag{2.25}$$

D'après (2.19) $|||u|^{p_*}||_{p,S,\tau} \leq C ||u||_{q,S,\tau} |||u|^{p_*-1}||_{L^{p_1}}$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ et $|||u|^{p_*-1}||_{L^{p_1}} = ||u||_{L^{p_2}}^{p_*-1}$, où $p_2 = (p_*-1)p_1 = \frac{2n+2}{n-2}$, $p_1 = \frac{n+1}{2}$, d'où

$$||u||_{q,S,\tau} \leq C\Big(||u||_{q,S,\tau} ||u||_{L^{p_2}}^{p_*-1} + E(u, D(S, z_*)) \Big) . \tag{2.26}$$

Ensuite $\dot{B}_q^{1/2} \subset L^r$ où $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{2n}$. On a $p_* + 1 < p_2 < r$ et $L^{p_2} = [L^r, L^{p_*+1}]_\theta$ où $\theta = \frac{n-2}{n-1}$. On déduit que sur $D(t, z_*)$ on a :

$$||u(t,\cdot)||_{L^{p_2}} \leq ||u(t,\cdot)||^{\theta}_{L^r} \cdot ||u(t,\cdot)||^{1-\theta}_{L^{p_*+1}} \leq ||u(t,\cdot)||^{\theta}_{\dot{B}_q^{1/2}} ||u(t,\cdot)||^{1-\theta}_{L^{p_*+1}}$$

d'où

$$||u||_{L^{p_2}(K_S^\tau(z_*))} \leq \Big(\sup_{S\leq t\leq \tau} ||u(t,\cdot)|| \Big)^{1-\theta}_{L^{p_*+1}} \cdot ||u||^{\theta}_{q,S,\tau}.$$

En utilisant (2.26) il vient

$$||u||_{q,S,\tau} \leq C(E(u, D(S, z_*)) + ||u||^{1+\theta(p_*-1)}_{q,S,\tau} \Big(\sup_{S\leq t\leq \tau} ||u(t,\cdot)||_{L^{p_*+1}} \Big)^{(1-\theta)(p_*+1)}$$

avec $\theta(p_* - 1) = \frac{4}{n-1}$ et $(1-\theta)(p_* - 1) = \frac{4}{(n-1)(n-2)}$.
Comme l'énergie est décroissante, $E(u, D(S, z_*)) \leq E(u, D(0, z_*))$. D'autre part d'après le Lemme 2.5 pour $S \geq S_0$ $\Big(\sup_{S\leq t\leq \tau} ||u(t,\cdot)||_{L^{p_*+1}} \Big)^{(1-\theta)(p_*-1)} \leq \dfrac{\varepsilon}{C}$ donc pour $S \geq S_0$

$$||u||_{q,S,\tau} \leq DE(u, D(0, z_*)) + \varepsilon ||u||^{\gamma}_{q,S,\tau} \quad \text{où } \gamma = \frac{n+3}{n-1} > 1.$$

On en déduit que pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ où ε_0 ne dépend que de $E(u, D(0, z_*))$ c'est-à-dire de l'énergie des données on a $||u||_{q,S,\tau} \leq 2C\, E(u, D(0, z_*))$. **QED**

Lemme 2.7. – *Sous les hypothèses de la Proposition 2.6 on a $Du \in L^q(K(z_*))$.*
Preuve. – On dérive l'équation (2.1) ce qui donne

$$\Box Du = -Du \cdot f'(u) \quad \text{où } |f'(u)| \leq C|u|^{p_*-1} \quad \text{pour } |u| \geq 1.$$

On applique l'inégalité (2.13) localisée dans le cône $K_S^\tau(z_*)$

$$||Du||_{L^q(K_S^\tau(Z_*))} \leq \Big(\underbrace{||Du \cdot f'(u)||_{L^p(K_S^\tau(z_*))}}_{(1)} + E(Du, D(S, z_0)) \Big).$$

On a $(1) \leq ||Du||_{L^q(K_S^\tau)} \cdot ||f'(u)||_{L^{p_1}(K_S^\tau)} \leq ||Du||_{L^q(K_S^\tau)} ||u||^{p_*-1}_{L^{p_2}}$ où $p_2 = \frac{2n+2}{n-2}$.
On a vu dans la preuve de la Proposition 2.6 que

$$||u||_{L^{p_2}(K_S^\tau)} \leq C \sup_{S\leq t\leq \tau} ||u(t,\cdot)||^{1-\theta}_{L^{p_*+1}} \cdot ||u||^{\theta}_{q,S,\tau}.$$

On déduit

$$||Du||_{L^q(K_S^\tau)} \leq C\Big(\sup_{S\leq t\leq \tau} ||u(t,\cdot)||_{L^{p_*+1}}\Big)^{(1-\theta)(p_*-1)} \cdot ||u||_{q,S,\tau}^{\theta(p_*-1)} \cdot ||Du||_{L^q(K_S^\tau)} + C_0 .$$

Si S est assez proche de T_* on déduit du Lemme 2.5 et de la Proposition 2.6 que $Du \in L^q(K(z_*))$.

Corollaire 2.8. – *Soit u une solution classique de (2.1) dans $K(z_*)\setminus\{z_*\}$. Alors*

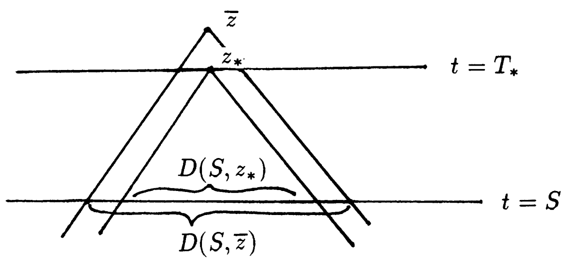
$$\lim_{S\to T_*} E(u, D(S,z_*)) = 0 .$$

Preuve. – Ce Corollaire renforce le lemme 2.5 et montre que toute l'énergie tend vers zéro. Il suffit de montrer que $\int_{D(S,z_*)} |Du|^2 dx$ tend vers zéro. D'après la conséquence 2.4 i) et le Lemme 2.5, cette quantité tend vers une limite ℓ. D'autre part

$$\begin{aligned}\int_{K_S^{T_*}(z_*)} |Du|^2 &\leq \Big(\int_{K_S^{T_*}} |Du|^{2\cdot\frac{n+1}{n-1}}\Big)^{\frac{n-1}{n+1}} \mu(K_S^{T_*}(z_*))^{\frac{2}{n+1}} \\ &\leq M\cdot \mu(K_S^{T_*}(z_*))^{\frac{2}{n+1}} \leq M(T_*-S)^2\end{aligned}$$

puisque $2\frac{n+1}{n-1} = q$. Donc $\int_S^{T_*}\big(\int_{D(t,z_*)} |Du|^2 dx\big)\, dt \leq M(T_*-S)^2$. Ceci montre que $\ell = 0$.

D'après le Corollaire 2.8 il existe S_0 tel que $E(u, D(S_0,z_*)) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ où ε_0 est défini dans la Proposition 2.6. Par décroissance on a $E(u,D(S,z_*)) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ pour $S_0 < S < T_*$. Par continuité puisque u est C^2 à l'intérieur du cône il existe $\delta > 0$ tel que $\int_{|x-x_0|\leq T_*-S_0+\delta} e(u)(S,x)dx < \varepsilon_0$. Considérons le point $\overline{z} \in (T_*+\delta, x_*)$.



Nous allons travailler dans le cône tronqué $K_S^{T_*}(\overline{z})$ pour $s \in [S_0, T_*[$. Comme $D(S,\overline{z}) = \{x : |x-x_*| \leq T_* + \delta - S\}$ on a $E(u, D(S,\overline{z})) < \varepsilon_0$ pour $S_0 \leq S < T_*$

car l'énergie est décroissante et donc :

$$\sup_{S_0 \leq S \leq \tau} ||u(S,\cdot)||_{L^{p_*+1}(D(S,\overline{z}))} < \varepsilon_0 , \quad S_0 < \tau < T_* .$$

Par conséquent on peut répéter la preuve de la Proposition 2.6 et du Lemme 2.7 dans les cônes tronqués $K_S^\tau(\overline{z})$ où $S_0 \leq S < \tau < T_*$ et on en déduit :

$$Du \in L^q(K_0^{T_*}(\overline{z})) \tag{2.27}$$

Fin de la preuve du Théorème

On travaille désormais sur les cônes tronqués $K_S^T(\overline{z})$, $0 < S < T < T_*$. L'objectif est de montrer que $D^2u \in L^q(K_0^{T_*}(\overline{z}))$. On dérive donc deux fois l'équation, on obtient :

$$\Box \partial_j \partial_k u + \partial_j \partial_k u \cdot f'(u) + (\partial_j u)(\partial_k u) f''(u) = 0 .$$

Par un raisonnement identique à celui de la preuve du Lemme 2.7 on obtient

$$\begin{aligned} &||f'(u)\, \partial_j \partial_k u||_{L^q(K_S^T)} \\ &\leq C\Big(\sup_{S \leq t \leq T} ||u(t,\cdot)||_{L^{p_*+1}}\Big)^{(1-\theta)(p_*-1)} ||u||_{q,s,T}^{\theta(p_*-1)} ||\partial_j \partial_k u||_{L^q(K_S^T)} + C_0 . \end{aligned} \tag{2.28}$$

Considérons le second terme. Deux cas se présentent :

a) Si $n \geq 6$: on a alors $f'' \in L^\infty$. En notant D une dérivée partielle on obtient $||f''(u)(Du)^2||_{L^p} \leq C||Du||_{L^{2p}}^2$. D'après l'inégalité de Sobolev, $W^{1,q} \hookrightarrow L^{r_1}$ où $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n+1}$ i.e. $r_1 = \frac{2(n+1)}{n-3}$. D'autre part $[L^q, L^{r_1}]_\theta = L^{2p}$ si $\theta = \frac{n-5}{4} \in]0,1[$. On en déduit

(2.29)

$$||f''(u)(Du)^2||_{L^p} \leq C||Du||_{L^q}^{\frac{9-n}{2}} \cdot ||D^2u||_{L^q}^{\frac{n-5}{2}} , \quad \text{avec } \frac{n-5}{2} \leq 1 \text{ puisque } n \leq 7 .$$

En utilisant (2.28), (2.29), le Lemme 2.5, le fait que $\lim_{S \to T_*} ||Du||_{L^q(K_S^{T_*})} = 0$ qui résulte de (2.27) et en utilisant les estimations $L^p - L^q$ on déduit que $D^2u \in L^q(K_S^{T_*}(\overline{z}))$ pour $S \geq S_1$.

b) Si $n < 6$: Dans ce cas $|f''(u)| \leq C|u|^{p_*-2}$ pour $|u| \geq C$ d'où

$$||f''(u)(Du)^2||_{L^p} \leq C|| |u|^{p_*-2} \cdot Du \cdot Du||_{L^p} \leq C|| |u|^{p_*-2}||_{L^\alpha} \cdot ||Du||_{L^q} \cdot ||Du||_{L^{r_1}}$$

où $\alpha = \frac{2n+2}{7-n}$. Comme $(p_* - 2)\alpha < p_* + 1$ il vient

$$||f''(u)(Du)^2||_{L^p} \leq C' ||u||^{p_*-2}_{L^{p_*+1}} \cdot ||Du||_{L^q} \cdot ||D^2 u||_{L^q}$$

et on conclut grâce au Lemme 2.5 et à (2.27).

On a donc montré que :

$$u \in W^{2,q}(K_0^{T_*}(\overline{z})). \tag{2.30}$$

Compte tenu de la forme de la non linéarité on montre facilement le

Lemme 2.9. – *Si $n \leq 7$ on a $f(u) \in W^{2,2}(K_0^{T_*}(\overline{z}))$.*

L'estimation d'énergie classique permet d'en déduire

$$\partial^\alpha u \in L^\infty\Big([0, T_*[, L^2(D(t,\overline{z}))\Big), \quad |\alpha| \leq 3. \tag{2.31}$$

Comme $W^{3,2}(D(t,\overline{z})) \subset L^\infty(D(t,\overline{z}))$ si $n < 6$ on déduit que $u \in L^\infty(K_0^{T_*}(\overline{z}))$ si $n < 6$. Pour traiter les dimensions $n = 6$ et 7 on doit avoir recours à la dérivée d'ordre quatre i.e. on montre :

$$\partial^\alpha u \in L^\infty\Big([0, T_*[, L^2(D(t,\overline{z}))\Big) \quad \text{si } |\alpha| \leq 4. \tag{2.32}$$

On utilise pour cela l'inégalité d'énergie ainsi que l'inégalité de Gronwall.

BIBLIOGRAPHIE

[A1] S. ALINHAC - *Temps de vie et comportement explosif des solutions d'équations d'ondes quasi linéaires en dimension deux I,* Ann. Sc. ENS (1993) (à paraître).

[A2] S. ALINHAC - *Temps de vie et comportement explosif des solutions d'équations d'ondes quasi linéaires en dimension deux II,* Duke Math. Journal (1993) (à paraître).

[A3] S. ALINHAC - *Approximation près du temps d'explosion des solutions d'équations d'ondes quasi-linéaires en dimension deux,* Siam J. Math. An. (1993) (à paraître).

[As] F. ASAKURA - *Existence of a global solution to a semi-linear wave equation with slowly decreasing initial data in three space dimension,* Comm. in P.D.E., 11 **(13)** (1986),1459-1487.

[BS] M. BEALS - W. STRAUSS - *L^p estimates for the wave equation with a potential,* Comm. in P.D.E., Vol. 18 (n° **7** and **8**), (1993),1365-1397.

[Br1] P. BRENNER - *On $L^p - L^q$ estimates for the wave equation,* Math. Z., **145** (1975), 251-254.

[Br2] P. BRENNER - *On the existence of global smooth solutions of certain hyperbolic equations,* Math. Z., **167** (1979), 99-135.

[BrW] P. BRENNER , V. VON WAHL - *Global classical solutions of non linear wave equation* Math. Z., **176** (1981), 87-121.

[CF1] L. CAFFARELLI , A. FRIEDMAN - *The blow up boundary for non linear wave equations,* Trans. Amer. Math. Soc., 297 **(1)** (1986), 233-241.

[CF2] L. CAFFARELLI , A. FRIEDMAN - *Differentiability of the blow up curve for one dimensional non linear wave equations,* Arch. Rational Mech. Anal., **91**, 1, (1985), 83-98.

[CaC] F. CAGNAC, Y. CHOQUET-BRUHAT - *Solution globale d'une équation d'ondes non linéaire sur une variété hyperbolique,* J. Math. Pures Appl., **63** (1984), 377-390.

[Ch] J. CHADAM - *Asymptotics for $\square u = m^2 u + G(t, x, u, u_x, u_t)$ I,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **26** (1972), 33-65.

[Cho1] Y. CHOQUET-BRUHAT - *Théorèmes de non existence de solutions d'une équation d'ondes non linéaire,* C.R. Acad. Sci. Paris, **305** (1987), 263-266.

[Cho2] Y. CHOQUET-BRUHAT - *Global existence for solutions of $\square u = A|u|^p$,* Journ. Diff. Equ., **82** (1989), 98-108.

[Chr] D. CHRISTODOLOU - *Global solutions of non linear hyperbolic equations for small initial data,* Comm. Pure Appl. Math., **39** (1986), 267-282.

[ChrK] D. CHRISTODOLOU, S. KLAINERMAN - *Asymptotic properties of linear field equations in Minkowski space,* Comm. Pure Appl. Math., **43** (1990), 137-199.

[F1] F.G. FRIEDLANDER - *On the radiation field of pulse solutions of the wave equation I, II,* Proc. Roy. Soc. A., **269** (1962), 53-65 et **279** (1964), 386-394.

[F2] F.G. FRIEDLANDER - *The wave equation on a curved space time,* Cambridge University Press 1975.

[GV1] J. GINIBRE, G. VELO - *The global Cauchy problem for the non linear Klein-Gordon equation,* Math. Z., **189** (1985), 487-505.

[GV2] J. GINIBRE, G. VELO - *Time decay of finite energy solutions of the non linear Klein-Gordon and Schrödinger equations,* Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **43** (1985), 399-442.

[GV3] J. GINIBRE, G. VELO - *Conformal invariance and time decay for non linear wave equations,* Ann. Inst. H. Poincaré Phy. Théor., **47** (1987), 221-276.

[GV4] J. GINIBRE, G. VELO - *The global Cauchy problem for the non linear Klein-Gordon equation II,* Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire, **6** (1989), 15-35.

[GV5] J. GINIBRE, G. VELO - *Smoothing properties and retarded estimates for some dispersive evolution equations,* Comm. Math. Phys., **144** (1992), 163-188.

[GV6] J. GINIBRE, G. VELO - *Regularity of solutions of critical and subcritical non linear wave equation,* Non Linear Analysis

[GSV] J. GINIBRE, A. SOFFER, G. VELO - *The global Cauchy problem for the critical non linear wave equation,* Journ. of Funct. Anal., 110 **(1)** (1992), 96-130.

[Gl1] R. GLASSEY - *On the asymptotic behavior of non linear wave equations,* Trans. Amer. Math. Soc., **182** (1973), 187-200.

[Gl2] R. GLASSEY - *Blow-up theorems for non linear wave equations,* Math. Z., **132** (1973), 183-203.

[Gl3] R. GLASSEY - *Finite time blow up for solutions of non linear wave equations,* Math. Z., **177** (1981), 323-340.

[Gl4] R. GLASSEY - *Existence in the large for* $\Box u = F(u)$ *in two space dimensions,* Math. Z., **178** (1981), 233-261.

[Go] P. GODIN - *Lifespan of solutions of semi linear wave equations in two space dimensions,* Comm. in P.D.E., 18 (**5** and **6**) (1993), 895-916.

[Gr1] M. GRILLAKIS - *Regularity and asymptotic behavior of the wave equation with a critical non linearity,* Annals of Math., **132** (1990), 485-509.

[Gr2] M. GRILLAKIS - *Regularity for the wave equation with a critical non linearity,* Comm. Pure Appl. Math., **XLV** (1992), 749-774.

[HJ] B. HANOUZET, J.L. JOLY - *Explosion pour des problèmes hyperboliques semi-linéaires avec second membres non compatibles,* C.R. Acad. Sc. Paris, **301** (1985), 581-584.

[Ho1] L. HÖRMANDER - *On global existence of solutions of non linear hyperbolic equations in* $\mathbb{R}^{1+3}$, Institut Mittag-Leffler, Report n° 9, (1985).

[Ho2] L. HÖRMANDER - *On Sobolev spaces associated with some Lie algebra,* Current topics in P.D.E. Kinokuniya Company Ltd Tokyo, (1985), 261-287.

[Ho3] L. HÖRMANDER - *The lifespan of classical solutions of non linear hyperbolic equations,* Springer Lectures Notes in Math., **1256** (1986), 214-280.

[Ho4] L. HÖRMANDER - *Non linear hyperbolic differential equations,* Lectures at University of Lund 1986-87.

[Ho5] L. HÖRMANDER - *$L^1 - L^\infty$ estimates for the wave operator,* Mittag-Leffler report 1 (1986), 1-29, and Analyse Math. et Appl. Gauthier-Villars Paris (1988), 211-234.

[Ho6] L. HÖRMANDER - *The fully non-linear Cauchy problem with small data,* Bol. Soc. Bras. Mat. Vol 20 , 1, 1-27, (1989).

[Jo1] F. JOHN - *Delayed singularity formation in solutions of non linear wave equations in higher dimensions,* Comm. Pure Appl. Math., **29** (1976), 649-682.

[Jo2] F. JOHN - *Blow-up of solutions of non linear wave equations in three space dimensions for small initial data,* Manuscripta Math., **28** (1979), 235-268.

[Jo3] F. JOHN - *Blow up for quasi-linear wave equations in three space dimensions,* Comm. Pure Appl. Math., **34** (1981), 29-51.

[Jo4] F. JOHN - *Lower bounds for the lifespan of solutions to non linear wave equations in three dimensions,* Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983), 1-35.

[Jo5] F. JOHN - *Blow-up of radial solutions of $u_{tt} = c^2(u_t)\Delta u$ in three space dimension,* Mat. Apl. Comput. V (1985), 3-18.

[Jo6] F. JOHN - *Existence for large times of strict solutions of non linear wave equations in three space dimensions,* Comm. Pure Appl. Math., **40** (1987), 79-109.

[Jo7] F. JOHN - *Almost global existence of elastic waves of finite amplitude arising from small initial disturbances,* Comm. Pure Appl. Math., **41** (1988), 615-666.

[Jo8] F. JOHN - *Solutions of quasi-linear wave equations with small initial data. The third phase,* Lecture Notes in Math., **1402** (1989), 155-173, (Springer Verlag).

[Jo9] F. JOHN - *Non linear wave equations. Formation of singularities,* Lehigh University, University Lecture Series, Amer. Math. Soc. Providence, (1990).

[JoK] F. JOHN, S. KLAINERMAN - *Almost global existence to non linear wave equations in three space dimension,* Comm. Pure Appl. Math., **37** (1984), 443-455.

[Jor] K. JÖRGENS - *Das Ang faugswertproblem in Grossen für ein Klasse nichtlinearer Wellengleichungen,* Math. Z., **77** (1961), 295-307.

[Kl] L.V. KAPITANSKII - *Some generalizations of the Strichartz-Brenner inequality,* Leningrad Math. Journ., **1** (1990), 693-726.
[K2] L.V. KAPITANSKII - *The Cauchy problem for a semi linear wave equation,* Zap. Nauchn. Sem. Leningrad Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI), **181** (1990), 24-64; **182** (190), 38-85.
[Kal] T. KATO - *Linear and quasi linear equations of evolution of hyperbolic type,* CIME II Ciclo, (1976).
[Ka2] T. KATO - *Blow up of solutions of some non linear hyperbolic equations,* Comm. Pure Appl. Math., **32** (1980), 501-505.
[Ke] KELLER - *On solutions of non linear wave equations,* Comm. Pure Appl. Math., **10** (1957), 523-530.
[KiL] S. KICHENASSAMY, W. LITTMAN - *Blow up surfaces for non linear wave equations I,* Comm. in P.D.E., 18 (**3** and **4**), (1993), 431-452.
[Kl1] S. KLAINERMAN - *Global existence of non linear wave equations,* Comm. Pure Appl. Math., **33** (1980), 43-101.
[Kl2] S. KLAINERMAN - *Long time behavior of solutions to non linear evolution equations,* Arch. Rat. Mech. Anal., **78** (1982),73-98.
[Kl3] S. KLAINERMAN - *On almost global existence to non linear wave equations in three space dimensions,* Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983), 325-344.
[Kl4] S. KLAINERMAN - *Long time behavior of solutions to non linear wave equations,* Proc. Int. Congr. Math. Warszawa, (1983), 1209-1215.
[Kl5] S. KLAINERMAN - *Weighted L^∞ and L^1 estimates for solutions to the classical wave equation in three space dimensions,* Comm. Pure Appl. Math., **37** (1984), 269-284.
[Kl6] S. KLAINERMAN - *Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the wave equation,* Comm. Pure Appl. Math., **38** (1985), 321-332.
[Kl7] S. KLAINERMAN - *Global existence of small amplitude solutions to non linear Klein-Gordon equations in four space time dimensions,* Comm. Pure Appl. Math., **38** (1985), 631-641.
[Kl8] S. KLAINERMAN - *The null condition and global existence to non linear wave equations,* Lectures in Applied Mathematics, **23** (1986), 293-326.
[Kl9] S. KLAINERMAN - *Remarks on the global Sobolev inequalities in the Minkowski space $\mathbb{R}^{n+1}$,* Comm. Pure Appl. Math., **40** (1987), 111-117.

[Kl10] S. KLAINERMAN - *Remark on the asymptotic behavior of the Klein-Gordon equation in* $\mathbb{R}^{n+1}$, Comm. Pure Appl. Math., **46** (1993), 137-144.

[KlM] S. KLAINERMAN, M. MACHEDON - *Space time estimates for null forms and the local existence theorem,* Comm. Pure Appl. Math., **46** (1993), 1221-1268.

[KlMa] S. KLAINERMAN, A. MAJDA - *Formation of singularities for wave equations including the non linear vibrating string,* Comm. Pure Appl. Math., **33** (1980), 241-263.

[KlP] S. KLAINERMAN, G. PONCE - *Global small amplitude solutions to non linear evolution equations,* Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983), 133-141.

[Le1] H. LEVINE - *Instability and non existence of global solutions to non linear wave equations of the form* $Pu_{tt} = -Au + F(u)$, Trans. Amer. Math. Soc., **192** (1974), 1-21.

[Le2] H. LEVINE - *The role of critical exponents in blow-up theorems,* SIAM Review, **32** (1990), 262-288.

[LiY1] LI T.T., YU XIN - *Lifespan of classical solutions to fully non linear wave equations.*

[LiY2] LI T.T., YU XIN - *Initial value problems for non linear wave equations,* Comm. in P.D.E., **13** (4) (1988), 383-422.

[LiY3] LI T.T., YU XIN - *Non linear stability for two space dimensional wave equations with higher order perturbations,* UMPA Prépublication **49**, E.N.S. Lyon, (1991).

[Lin1] H. LINBLAD - *Blow up of solutions of* $\Box u = |u|^p$ *with small initial data,* Comm. P.D.E., **15** (6) (1990), 757-821.

[Lin2] H. LINBLAD - *On the lifespan of solutions of non linear wave equations with small initial data,* Comm. Pure Appl. Math., **43** (1990), 445-472.

[Lin3] H. LINBLAD - *Global solutions of non linear wave equations,* Comm. Pure Appl. Math., **45** (1992), 1063-1096.

[Lio] J.L. LIONS - *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires,* Dunod et Gauthier Villars, Paris (1965).

[Lit] W. LITTMAN - $L^p - L^q$ *estimates for singular integral operators arising from hyperbolic equations,* Part. Diff. Equ. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Providence, R.I., A.M.S., **23** (1973), 479-481.

[MSW] B. MARSHALL, W. STRAUSS, S. WAINGER - *$L^p - L^q$ estimates for the Klein-Gordon equation,* Journ. Math. Pure et Appl., (9) **59** (1980), 417-440.

[Ma] K. MASUDA - *Blow-up of solutions for quasi linear wave equations in two space dimensions,* Lecture Notes in Num. Appl. Anal., **6** (1983), 87-91, North-Holland.

[Mat] A. MATSUMURA - *Global existence and asymptotics of the solutions ...,* Publ. RIMS Kyoto Univ., **13** (1977), 349-379.

[Mo] C. MORAWETZ - *Time decay for the non linear Klein-Gordon equation,* Proc. Roy. Soc., London Ser. A, **306** (1968), 291-296.

[MoS] C. MORAWETZ, W. STRAUSS - *Decay and scattering of solutions of a non linear relativistic wave equation,* Comm. Pure Appl. Math., **25** (1972), 1-31 and **26** (1973), 47-54.

[P1] H. PECHER - *L^p–Abschätzungen und Klassiche Lösungen für nichtlinear ... I,* Math. Z., **150** (1976), 159-183, *II* Manuscripta Math., **20** (1977), 227-244.

[P2] H. PECHER - *Ein nichtlinear Interpolationsatz und seine Anwading ...,* Math. Z., **161** (1978), 9-40.

[P3] H. PECHER - *Global smooth solutions to a class of semi linear wave equations with strong non linearity,* Manuscripta Math., **69** (1990), 71-92.

[Pe] I. PERAL-ALONSO - *Some remarks on semi linear wave equations in $\mathbb{R}^n$,* Contr. to Non linear PDE Pitman, (1986).

[Po1] G. PONCE - *Global existence of small solutions to a class of non linear evolution equations,* Non Linear Analysis, T.M.A. **9** (1985), 399-418.

[Po2] G. PONCE - *Regularity of solutions to non linear dispersive equations,* Journ. Diff. Equ., **78** (1989), 122-135.

[PoS] G. PONCE, T. SIDERIS - *Local regularity of non linear wave equations in three space dimensions,* Comm. in P.D.E., 18 (**1** and **2**) (1993), 169-177.

[R] R. RACKE - *Lectures on non linear evolution equations,* Aspects of Math., Vol E 19, Braunschweig Wiesbaden, Vieweg.

[Ra] J. RAUCH - *The u^5–Klein-Gordon equation,* Non linear PDE's and Applications, Pitman Research Notes in Math., **53**, 335-364.

[Re] M. REED - *Abstract non linear wave equations,* Lectures Notes in Math., Vol. 507, (1976).

[S1] J. SCHAEFFER - *The equation $\Box u = |u|^p$ for the critical value of p,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 101 A (1985), 31-44.

[S2] J. SCHAEFFER - *Finite time blow up for* $u_{tt} - \Delta u = H(u_r, u_t)$ *in two space dimensions,* Comm. P.D.E., 11 **(5)** (1986), 513-543.

[Se1] I.E. SEGAL - *The global Cauchy problem for a relativistic scalar field with power interaction,* Bull. Soc. Math. France, **91** (1963), 129-135.

[Se2] I.E. SEGAL - *Quantization and dispersion for non linear relativistic equation,* Proc. Conf. Math. Th. El. Particles, MIT Press (1966), 79-108.

[Se3] I.E. SEGAL - *Space time decay for solutions of wave equations,* Adv. Math., **22** (1976), 305-311.

[Sh1] J. SHATAH - *Global existence of small solutions to non linear evolution equations,* Journ. Diff. Equ., **46** (1982), 409-425.

[Sh2] J. SHATAH - *Normal forms and quadratic non linear Klein-Gordon equations,* Comm. Pure Appl. Math., **38** (1985), 685-696.

[Sh3] J. SHATAH - *Weak solutions and the development of singularities in the* $SU(2)$ σ*-model,* Comm. Pure Appl. Math., **41** (1988), 459-469.

[ShS] J. SHATAH, M. STRUWE - *Regularity results for non linear wave equation,* Annals of Math., (1993), (to appear).

[ShT] J. SHATAH, A. TAHVILDAR-ZADEH - *Regularity of harmonic maps from Minkowski space into rotationally symmetric manifolds.*

[Si1] T. SIDERIS - *Global behavior of solutions to non linear wave equations in three dimensions,* Comm. in P.D.E., **8** (1983), 1291-1323.

[Si2] T. SIDERIS - *Non existence of global solutions to semi linear wave equations in high dimensions,* Journ. Diff. Eq., **52** (1984), 378-406.

[Si3] T. SIDERIS - *Formation of singularities in solutions to non linear hyperbolic equations,* Arch. Rat. Mech. Anal., 86 **(4)** (1984), 369-381.

[Si4] T. SIDERIS - *Decay estimates for the three dimensional inhomogeneous Klein-Gordon equation and applications,* Comm. P.D.E., **14** (1989), 1421-1455.

[St1] W. STRAUSS - *Decay and asymptotics for* $\Box u = F(u)$, Journal of Funct. Anal., **2** (1968), 409-457.

[St2] W. STRAUSS - *On weak solutions of semi linear hyperbolic equations,* Anais Acad. Brasil Cienc., **42** (1970), 645-651.

[St3] W. STRAUSS - *Non linear invariant wave equations,* Lecture Notes in Phys. (Springer), Vol. 78, (1978), 197-249.

[St4] W. STRAUSS - *Non linear wave equations,* Conf. Board of the Math. Sciences, **73** (1989), Amer. Math. Soc.

[StV] W. STRAUSS, L. VASQUEZ - *Numerical solution of a non linear Klein-Gordon equation,* J. Comput. Phys., **28** (1978), 271-278.

[Str1] R. STRICHARTZ - *A priori estimates for the wave equation and some applications,* J. Funct. Analysis, **5** (1970), 218-235.

[Str2] R. STRICHARTZ - *Restrictions of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations,* Duke Math. Journ., **44** (1977), 705-714.

[Stru1] M. STRUWE - *Globally regular solutions to the u^5 Klein-Gordon equation,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci., (4) **15** (1988), 495-513.

[Stru2] M. STRUWE - *Semi linear wave equations,* Bull. Amer. Math. Soc., **26** (1992), 53-86.

[T] H. TRIEBEL - *Interpolation theory, function spaces, differential operators,* North Holland Math. Lib. **18**, (1978).

[Ts] K. TSUTAYA - *A global existence theorem for semi linear wave equations with data of non compact support in two space dimensions,* Comm. in P.D.E., 17 (**11** and **12**), (1992), 1925-1954.

[W1] W. VON WAHL - *L^p decay rates for homogeneous wave equations,* Math. Z., **120** (1971), 93-106.

[W2] W. VON WAHL - *Über nichtlineare Wellengleichungen mit zeitabhängigem elliptischen Hamptteil,* Math. Z., **142** (1975), 105-120.

[W3] W. VON WAHL - *Regular solutions of initial boundary value problems for linear and non linear wave equations II,* Math. Z., **142** (1975), 121-130.

[We] M. WEINSTEIN - *Solitary waves of non linear dispersive evolution equations with critical power non linearity,* J. Diff. Equ., **19** (1987), 192-203.

[Z] C. ZUILY - *Existence globale de solutions régulières pour l'équation des ondes non linéaire amortie sur le groupe de Heisenberg,* Indiana Univ. Math. Journ., Vol. 42, n° 2, (1993), 323-360.

Claude Zuily
Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
F - 91405 Orsay Cedex
URA 760 du CNRS