GEORGES SKANDALIS

Algèbres de von Neumann de groupes libres et probabilités non commutatives [d'après Voiculescu etc.]

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki, exp. n° 764, p. 87-102

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__87_0>

Séminaire BOURBAKI
45ème année, 1992 – 1993, n° 764

Novembre 1992

ALGÈBRES DE VON NEUMANN DE GROUPES LIBRES ET PROBABILITÉS NON COMMUTATIVES [d'après VOICULESCU *etc.*]

par Georges SKANDALIS

Le but de cet exposé est de présenter quelques outils de probabilités non commutatives introduits par Voiculescu et leur application à un problème d'algèbres de von Neumann.

Les objets de base dans la théorie des algèbres de von Neumann sont les *facteurs de type* II_1 . En 1943, Murray et von Neumann ont associé à tout facteur de type II_1 un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$ qu'ils ont appelé «*groupe fondamental*» de ce facteur (bien qu'il n'ait rien à voir avec le π_1 !). Ils ont montré que le groupe fondamental du facteur «hyperfini» de type II_1 est $\mathbf{R}_+^*$ ([9]). Les seuls résultats non triviaux obtenus depuis sur cet invariant sont très récents :

1. En 1980, Connes a exhibé des facteurs de type II_1 dont le groupe fondamental est dénombrable ([2]).

2. En 1991, Rădulescu, améliorant un résultat partiel de Voiculescu, a démontré que le groupe fondamental du facteur de type II_1 associé au groupe libre à une infinité de générateurs est $\mathbf{R}_+^*$ ([10]).

Le langage qui s'est avéré très utile pour l'étude de l'algèbre de von Neumann d'un groupe libre est celui des *probabilités non commutatives.* Dans ce cadre, Voiculescu a défini une notion de *liberté* de variables aléatoires, analogue non commutatif de l'indépendance. Il a donné des exemples de calculs pour des variables aléatoires libres. En particulier il a donné une formule de convolution libre calculant la distribution de la somme de deux variables aléatoires libres, basée sur un modèle d'«espace de

Fock libre», ainsi qu'un analogue «libre» du théorème de limite centrale.

Le pas décisif dans la résolution du problème du groupe fondamental de l'algèbre de von Neumann du groupe libre, est une généralisation d'un théorème de Wigner : on démontre qu'une famille de matrices hermitiennes $n \times n$ à coefficients Gaussiens indépendants, est asymptotiquement libre et fournit donc un modèle pour le groupe libre.

Nous commencerons cet exposé en rappelant certaines définitions de base de la théorie des algèbres de von Neumann ; en particulier nous rappelerons la définition d'un facteur de type II_1 , celle du «groupe fondamental» de Murray et von Neumann d'un facteur de type II_1 (§1) et celle du facteur de type II_1 associé à un groupe dénombrable (§2).

Au §3, nous donnerons la définition des variables aléatoires libres et discuterons la formule de convolution libre et le théorème de limite centrale. Ensuite, nous présenterons le modèle des matrices de grande taille à coefficients Gaussiens indépendants (§4) et son application au problème du groupe fondamental mentionné ci-dessus (§5). Enfin, nous citerons des résultats de Rădulescu et Dykema sur les algèbres de groupes libres à un nombre fini de générateurs (§6).

1. Facteurs de type II_1 et groupe fondamental de Murray et von Neumann

Soit H un espace hilbertien de genre dénombrable ; notons $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre involutive formée des opérateurs bornés de H (*i.e.* des applications linéaires continues de H dans H). Rappelons que l'*involution* de $\mathcal{L}(H)$ est l'application qui à un opérateur x associe son adjoint x^* . On appelle *commutant* d'un sous-ensemble S de $\mathcal{L}(H)$ et on note S' l'ensemble des opérateurs permutables aux éléments de S . Le commutant de S' s'appelle *bicommutant* de S et se note S'' .

On appelle *algèbre de von Neumann dans H* toute sous-algèbre involutive de $\mathcal{L}(H)$ égale à son bicommutant. L'étude des algèbres de von Neumann se réduit, par des techniques d'intégrales directes, à celle des algèbres de von Neumann dont le centre est réduit aux homothéties appelées *facteurs*. Grâce à la théorie de Tomita et aux travaux de Connes, on peut se ramener à l'étude des *facteurs de type* II_1 (et de leurs automorphismes) :

DÉFINITION. — *Soit* A *une algèbre de von Neumann dans* H . *On appelle trace (finie positive) sur* A *une forme linéaire* τ *sur* A *telle que, pour tout* $x \in A$ *on ait* $\tau(x^*x) = \tau(xx^*) \in \mathbf{R}_+$. *La trace* τ *est dite fidèle si la condition* $\tau(x^*x) = 0$ *implique* $x = 0$. *Une algèbre de von Neumann est dite finie si elle possède une trace (finie, positive) fidèle. Un facteur fini de dimension (en tant qu'espace vectoriel complexe) infinie s'appelle facteur de type* II_1 .

Si un facteur possède une trace non nulle, celle-ci est unique à normalisation près et fidèle ; en général on normalise la trace en posant $\tau(1) = 1$ où l'opérateur identité de H a été noté 1 .

Soit A une algèbre de von Neumann dans l'espace hilbertien H . Un projecteur de A est un élément $p \in A$ tel que $p^2 = p^* = p$. Si p est un projecteur (non nul) de A , l'algèbre $A_p = \{ pxp \ , \ x \in A \}$ est une algèbre de von Neumann dans l'espace hilbertien pH ; si l'algèbre A est finie ou si c'est un facteur, ou si c'est un facteur de type II_1 , il en va de même pour A_p .

Deux projecteurs p et q de A sont dits *équivalents* s'il existe un élément $u \in A$ tel que $p = u^*u$ et $q = uu^*$.

Les projecteurs p et q d'un facteur M de type II_1 sont équivalents si et seulement s'ils ont même trace. En particulier, si p et q ont même trace, les facteurs M_p et M_q sont isomorphes. En fait, il est facile de voir que les facteurs M_p et M_q sont isomorphes si et seulement si le rapport des traces de p et q appartient à un sous-groupe $\mathcal{F}_M$ de $\mathbf{R}_+^*$ ([1]) appelé «*groupe fondamental*» de M par Murray et von Neumann, qui ont montré que le groupe fondamental du facteur «hyperfini» de type II_1 est $\mathbf{R}_+^*$ ([9]).

Rappelons qu'un facteur de type II_1 est dit *hyperfini* s'il est le bicommutant d'une réunion croissante d'algèbres de matrices. L'unicité (à

([1]) Si la trace de M est normalisée, l'ensemble des traces des projecteurs de M est l'intervalle $[0, 1]$; ainsi le groupe fondamental est bien défini.

isomorphisme près) d'un tel facteur a été démontrée par Murray et von Neumann ([9]).

2. Le facteur de type II_1 associé à un groupe

Soit Γ un groupe dénombrable. Notons H l'espace hilbertien $l^2(\Gamma)$ des familles indexées par Γ de carré sommable et $(e_g)_{g\in\Gamma}$ sa base hilbertienne canonique. On note λ et ρ les représentations de Γ par opérateurs de translation à gauche et à droite dans l'espace hilbertien H . Si g et h sont deux éléments de Γ on a

$$\lambda(g)(e_h) = e_{gh} = \rho(h^{-1})(e_g)$$

Il est clair que pour toute paire (g,h) d'éléments de Γ les opérateurs $\lambda(g)$ et $\rho(h)$ commutent. On appelle algèbre de von Neumann de Γ et on notera ici $W(\Gamma)$ le commutant de $\rho(\Gamma)$, *i.e.* $W(\Gamma) = \rho(\Gamma)'$.

Notons 1 l'élément neutre de Γ . L'application $x \mapsto xe_1$ est injective. En effet, si xe_1 est nul, pour tout $g \in \Gamma$ on a $xe_g = x\rho(g^{-1})e_1 = \rho(g^{-1})xe_1 = 0$. Grâce à cette observation on vérifie sans peine les faits suivants :

a) L'application $x \mapsto \langle e_1, xe_1\rangle$ est une trace fidèle sur $W(\Gamma)$, appelée *trace canonique* de $W(\Gamma)$ ([2]).

b) L'algèbre $W(\Gamma)$ est le bicommutant de $\lambda(\Gamma)$.

c) Si C est une classe de conjugaison finie de Γ , $\sum_{g\in C}\lambda(g)$ est un élément du centre de $W(\Gamma)$. Inversement, si x est un élément du centre de $W(\Gamma)$, alors pour tout $g \in \Gamma$ on a

$$xe_1 = \lambda(g)x\lambda(g^{-1})e_1 = \lambda(g)x\rho(g)e_1 = \lambda(g)\rho(g)xe_1$$

de sorte que le vecteur xe_1 est invariant par l'action adjointe $g \mapsto \lambda(g)\rho(g)$ de Γ dans H, c'est à dire qu'il est constant sur les classes de conjugaison de Γ . Il en résulte que $W(\Gamma)$ est un facteur si et seulement si toute classe de conjugaison de Γ distincte de $\{1\}$ est infinie.

([2]) Dans nos conventions, le produit scalaire de H est linéaire en la deuxième variable et antilinéaire en la première.

On dit souvent que le groupe Γ possède la propriété CCI ou que c'est un groupe CCI, si toutes les classes de conjugaison de Γ distinctes de $\{1\}$ sont infinies. L'algèbre de von Neumann d'un tel groupe est donc un facteur de type II_1 .

La propriété CCI est très courante et facile à vérifier.

(a) Les groupes libres possèdent cette propriété.

(b) Tout réseau d'un groupe de Lie simple non compact de centre trivial possède cette propriété.

(c) «Beaucoup» de produits semi-directs et autres groupes moyennables possèdent cette propriété.

Connes a démontré (*cf.* [1]) :

THÉORÈME 2.1. — *Le facteur de type II_1 associé à tout groupe CCI moyennable est isomorphe au facteur hyperfini de type II_1 de Murray et von Neumann (donc son groupe fondamental est $\mathbf{R}_+^*$).*

Ce théorème est un cas particulier de l'équivalence entre l'hyperfinitude des algèbres de von Neumann et leur «injectivité», notion apparemment beaucoup plus faible qui est une traduction pour les algèbres de von Neumann de la moyennabilité des groupes ; il constitue un des résultats les plus profonds de la théorie des algèbres de von Neumann (*cf.* [1]).

Dans un sens, à l'autre extrémité des groupes moyennables se situent ceux qui possèdent la propriété T de Kazhdan (*cf.* [7], [3]). Nous ne rappelons pas ici la définition de cette propriété. Disons seulement que $Sl(3, \mathbf{Z})$ ainsi que tout réseau d'un groupe de Lie simple de rang réel supérieur ou égal à 2 possède cette propriété.

THÉORÈME 2.2. ([2]) — *Le groupe fondamental du facteur de type II_1 associé à un groupe CCI possédant la propriété T de Kazhdan est dénombrable.*

Esquissons très rapidement l'idée de la démonstration du théorème 2.2 :

Soit Γ un groupe possédant la propriété T de Kazhdan.

a) On démontre que le groupe des automorphismes (d'algèbre involutive) de $W(\Gamma)$ modulo les automorphismes intérieurs est dénombrable. Soit en effet α un automorphisme de $W(\Gamma)$; considérons la représentation $u_\alpha : g \mapsto \alpha(\lambda(g))\rho(g)$ de Γ dans H . Si α est suffisamment proche de l'identité, cette représentation contient la représentation triviale de Γ (par le propriété T) *i.e.* a un point fixe, d'où l'on déduit que α est intérieur.

b) Tout élément du groupe fondamental de $W(\Gamma)$ donne lieu à un automorphisme non intérieur de $W(\Gamma \times \Gamma)$, d'où le résultat, vu que $\Gamma \times \Gamma$ possède la propriété T .

Dans [8], cette même propriété T est utilisée pour construire, pour chaque $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$, un facteur M_λ de type II_1 dont le groupe fondamental est dénombrable et contient λ . En particulier, il existe un ensemble non dénombrable de facteurs M_λ deux à deux non isomorphes.

3. Probabilités non commutatives et variables aléatoires libres

L'objet de base en théorie des probabilités, est une algèbre unifère commutative (l'algèbre des variables aléatoires, *i.e.* des fonctions sur l'espace de probabilités) munie d'une forme linéaire (une mesure de probabilités).

Appelons «*espace non commutatif de probabilités*» une paire consistant d'une algèbre A unifère mais non nécessairement commutative et d'une forme linéaire $\varphi : A \to \mathbf{C}$ telle que $\varphi(1) = 1$. Les éléments de A s'appellent encore des variables aléatoires. La *distribution* d'un élément $x \in A$ est l'application qui à un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ associe $\varphi(P(x))$. Dans les exemples qui nous intéressent, l'algèbre A est une algèbre de von Neumann et φ une trace sur A . La distribution d'un élément hermitien $x \in A$ (*i.e.* $x = x^*$) est une mesure de probabilités portée par $\mathbf{R}$.

L'*indépendance* de deux sous-algèbres unifères A_1 et A_2 de l'algèbre A des variables aléatoires signifie qu'on est dans une situation de produit tensoriel. Dans un cadre non commutatif, il est naturel de considérer aussi la notion de *liberté* qui correspond au produit libre de sous-algèbres. Voiculescu a donné la définition suivante :

DÉFINITION. — *Soit* (A, φ) *un «espace non commutatif de probabilités». La famille* $(A_\iota)_{\iota \in I}$ *de sous-algèbres de* A *est dite libre si pour toute suite finie,* $a_1 \in A_{\iota_1}, \ldots, a_k \in A_{\iota_k}$ *satisfaisant* $\varphi(a_j) = 0$ *(pour tout* j *) et* $\iota_j \neq \iota_{j+1}$ *(pour* $j \neq k$*) on a* $\varphi(a_1 \ldots a_k) = 0$ *.*
La famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$ *d'éléments de* A *est dite libre si la famille d'algèbres de polynômes* $(\mathbf{C}[x_\iota])_{\iota \in I}$ *est libre.*

Bien sûr un exemple de sous-algèbres libres est donné par les produits libres de groupes. Soit $(\Gamma_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de groupes dénombrables indexée par l'ensemble (dénombrable) I et notons Γ le produit libre de la famille Γ_ι . Pour $\iota \in I$ l'algèbre $W(\Gamma_\iota)$ s'identifie à une sous-algèbre de $W(\Gamma)$. La famille $(W(\Gamma_\iota))_{\iota \in I}$ est une famille libre dans $(W(\Gamma), \tau)$ où τ désigne la trace canonique de $W(\Gamma)$.

Un deuxième modèle de variables aléatoires libres est le modèle de l'espace de Fock libre : soit H un espace hilbertien. L'algèbre tensorielle $E = T(H)$ est un espace préhilbertien : c'est la somme directe orthogonale $\mathbf{C} \oplus H \oplus (H \otimes H) \oplus \ldots$ Notons $\Omega \in E$ le vecteur du «vide» de E *i.e.* le vecteur correspondant à l'unité $1 \in \mathbf{C}$ de l'algèbre E . Pour $x \in H$ notons ℓ_x l'application $y \mapsto x \otimes y$ de E dans E ; si $||x|| = 1$ l'application ℓ_x est isométrique. Notons $A(H)$ l'algèbre agissant dans E engendrée par les opérateurs de la forme ℓ_x et leur adjoint ℓ_x^* ([3]). Sur $A(H)$ considérons la forme linéaire $\varphi : T \mapsto \langle \Omega, T\Omega \rangle$. Si K est un sous-espace vectoriel de H , notons $A(K)$ la sous-algèbre de $A(H)$ engendrée par les opérateurs ℓ_x et ℓ_x^* pour $x \in K$. Si K_ι sont des sous-espaces deux à deux orthogonaux de H , la famille $A(K_\iota)$ est une famille libre dans $(A(H), \varphi)$.

Nous verrons dans les paragraphes suivants l'application des variables aléatoires libres aux problèmes d'isomorphisme des algèbres de von Neumann de groupes. Cependant, les variables aléatoires libres valent la peine d'être étudiées pour elles-mêmes comme l'a montré Voiculescu :

Il est clair que la distribution de la somme $x + y$ de deux variables aléatoires libres x et y ne dépend que de la distribution de x et y . Cela permet de définir la *convolée libre* de deux distributions μ et μ' comme la

([3]) Cet adjoint est défini sur le complété de E et laisse E invariant.

distribution de $x+y$ pour toute paire (x,y) de variables aléatoires libres de distributions respectives μ et μ' . Voiculescu a démontré :

THÉORÈME 3.1. ([14]) — *À une distribution μ associons la série formelle $G_\mu \in \mathbf{C}[[z]]$ en posant*

$$G_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(X^n)\, z^{n+1}$$

Notons $H_\mu \in \mathbf{C}[[z]]$ la série réciproque pour la composition des séries (i.e. telle que $G_\mu(H_\mu(z)) = z$) et $\mathcal{R}_\mu \in \mathbf{C}[[z]]$ la série formelle telle que

$$H_\mu(z)(1 + z\mathcal{R}_\mu(z)) = z$$

Notons μ_3 la convolée libre de deux distributions μ_1 et μ_2 . On a

$$\mathcal{R}_{\mu_1} + \mathcal{R}_{\mu_2} = \mathcal{R}_{\mu_3}$$

La démonstration de ce théorème est basée sur le modèle de l'espace de Fock libre : soient x et y deux vecteurs orthogonaux de norme 1 dans H . Soient $P, Q \in \mathbf{C}[X]$ deux polynômes ([4]). Alors les variables aléatoires $\ell_x + P(\ell_x^*)$ et $\ell_y + Q(\ell_y^*)$ sont libres. Comme $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux, on montre facilement que $\ell_{x+y} + P(\ell_x^*) + Q(\ell_y^*)$ et $\ell_{x+y} + (P+Q)(\ell_x^*)$ ont même distribution ; or, il est clair que $\ell_{x+y} + (P+Q)(\ell_x^*)$ et $\ell_x + (P+Q)(\ell_x^*)$ ont même distribution. Pour établir ce théorème on montre que si la distribution de $\ell_x + P(\ell_x^*)$ est μ alors $P = \mathcal{R}_\mu$.

Voiculescu a obtenu une méthode de calcul analogue pour la distribution du produit xy de deux variables aléatoires libres x et y en fonction de celles de x et y (*cf.* [15]).

Le rôle de la loi Gaussienne est ici joué par la loi «semi-circulaire» de Wigner : c'est la distribution μ donnée par la projection de la mesure de

([4]) On peut sans rien changer dans ce calcul supposer que P et Q sont des séries formelles.

Lebesgue normalisée sur le demi-disque de rayon 1. Autrement dit, si f est une fonction sur $\mathbf{R}$ on a

$$\mu(f) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} f(t)\sqrt{1-t^2}\, dt$$

Pour tout nombre complexe α convenons d'appeler loi semi-circulaire d'ordre α l'image de la loi semi-circulaire par la multiplication par α .

Le théorème suivant est un analogue «libre» du théorème de limite centrale.

THÉORÈME 3.2. ([13]) — *Soient (A,φ) un «espace non commutatif de probabilités» et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille libre de variables aléatoires de A centrées (i.e. telles que $\varphi(a_n) = 0$). Supposons que pour tout entier k , la suite $n \mapsto \varphi(a_n^k)$ est bornée et que les moyennes de Cesaro de la suite $\varphi(a_n^2)$ convergent vers un nombre non nul α . Posons*

$$S_N = N^{-1/2} \sum_{1\leq n\leq N} a_n$$

La distribution de S_N converge vers la loi semi-circulaire d'ordre $\sqrt{\alpha}/2$.

Autrement dit, pour tout $k \in \mathbf{N}$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(S_N^k) = \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\right)^k \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} t^k \sqrt{1-t^2}\, dt$$

Le théorème 3.2 se déduit facilement de la formule de convolution libre (théorème 3.1 ([5])). Remarquons que si μ est une distribution semi-circulaire, alors $\mathcal{R}_\mu(z) = cz$ où c est un nombre complexe.

4. Matrices à coefficients indépendants

L'étape clé pour l'application des probabilités libres au calcul du groupe fondamental des facteurs de type II_1 est le modèle de matrices aléatoires. Voiculescu a démontré qu'une approximation d'une famille libre est donnée

([5]) Sa démonstration est cependant antérieure à celle du théorème 3.1

par toute famille $(M_\iota)_{\iota\in I}$ de matrices à coefficients (normalisés) gaussiens indépendants.

Pour donner un énoncé précis de ce résultat, introduisons quelques notations.

Soit (A,φ) un «espace non commutatif de probabilités». On suppose que A est une algèbre de von Neumann et φ un *état i.e.* une forme linéaire satisfaisant $\varphi(x^*x)\in\mathbf{R}_+$ pour tout $x\in A$. Nous dirons qu'un élément $x\in A$ est *circulaire* si $\mathrm{Re}\,x=\dfrac{x+x^*}{2}$ et $\mathrm{Im}\,x=\dfrac{x-x*}{2i}$ sont libres, ont une distribution semi-circulaire de même ordre.

Une famille $(x_\iota)_{\iota\in I}$ d'éléments de A est dite *semi-circulaire*, si elle est libre et que, pour tout $\iota\in I$, la distribution de x_ι est semi-circulaire. Une famille $(y_\iota)_{\iota\in I}$ d'éléments de A est *circulaire* si la famille $(\mathrm{Re}\,y_\iota)_{\iota\in I}$, $(\mathrm{Im}\,y_\iota)_{\iota\in I}$ est libre et que pour tout $\iota\in I$, y_ι est circulaire.

Soient (B_n,φ_n) et (A,φ) des «espaces non commutatifs de probabilités». Donnons-nous, pour tout $n\in\mathbf{N}$, une famille $\xi_n=(x_{(n,\iota)})_{\iota\in I}$ de variables aléatoires dans B_n . Nous dirons que la suite ξ_n converge *en distribution* vers la famille $(y_\iota)_{\iota\in I}$ de variables aléatoires dans A si pour tout élément P de l'algèbre libre $\mathbf{C}\langle(X_\iota)_{\iota\in I}\rangle$ (l'algèbre de polynômes non commutatifs en les variables $(X_\iota)_{\iota\in I}$) on a

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n\big(P((x_{(n,\iota)})_{\iota\in I})\big)=\varphi\big(P((y_\iota)_{\iota\in I})\big)$$

Fixons un espace (commutatif) de probabilités (Ω,μ) . Pour tout $n\in\mathbf{N}$, notons (B_n,φ_n) l'espace non commutatif de probabilités formé de l'algèbre B_n des fonctions mesurables bornées sur Ω à valeurs dans l'algèbre des matrices $n\times n$ complexes et de la forme

$$\varphi_n : f\mapsto\int\tau_n(f(\omega))d\mu(\omega)$$

où τ_n est la trace normalisée de l'algèbre des matrices $n\times n$ complexes.

THÉORÈME 4.1. ([17]) — *Donnons-nous un ensemble I et, pour tout $\iota\in I$, tout nombre entier $n\in\mathbf{N}$ et tout couple (i,j) de nombres entiers compris entre 1 et n , une variable aléatoire (commutative)*

$a(i,j;n,\iota)$ sur Ω . *Supposons que les parties réelles et les parties imaginaires des variables aléatoires* $a(i,j;n,\iota)$ *sont Gaussiennes centrées, de variance* $1/n$ *et que, pour tout* $n \in N$ *la famille de variables aléatoires* $\{\mathrm{Re}\,a(i,j;n,\iota)\ ,\ \mathrm{Im}\,a(i,j;n,\iota)\ ,\ 1 \leq i \leq n\ ,\ 1 \leq j \leq n\ ,\ \iota \in I\}$ *est indépendante. Pour* $n \in \mathbf{N}$ *et* $\iota \in I$ *, notons* $Y(n,\iota) \in B_n$ *la fonction qui à* $\omega \in \Omega$ *associe la matrice de coefficients* $(a(i,j;n,\iota)(\omega))$ *. Notons aussi* $D_n \in B_n$ *la matrice diagonale de coefficients diagonaux* j/n $(1 \leq j \leq n)$*. Alors la suite* $\mathrm{Re}Y(n,\iota)_{\iota\in I}$, $\mathrm{Im}Y(n,\iota)_{\iota\in I}$, D_n *converge en distribution vers une famille libre. De plus, pour tout* $\iota \in I$ *, la distribution limite des parties réelles et imaginaires de* $Y(n,\iota)$ *est semi-circulaire.*

Le dernier énoncé dans le théorème 4.1 est le théorème de Wigner [19,20]. On le retrouve ici comme conséquence immédiate de la liberté asymptotique de la famille $\mathrm{Re}Y(n,\iota)_{\iota\in I}$ et du théorème de limite centrale (théorème 3.2).

La démonstration de ce théorème est assez technique. Signalons que Dykema a généralisé ce théorème pour des des distributions non Gaussiennes des coefficients $a(i,j;n,\iota)$ (*cf.* [4]).

Dans un sens facile à préciser, la famille $Y(n,\iota)_{\iota\in I}$ est asymptotiquement circulaire.

Fixons un nombre entier $k \geq 1$. Appliquant le théorème 4.1 à une famille de variables aléatoires gaussiennes indépendantes $\{a(i,j;n,\iota), 1 \leq i \leq j \leq kn, \iota \in I\}$, on en déduit :

COROLLAIRE. — *Donnons-nous un état* ψ *sur une algèbre de von Neumann* B *, une sous-algèbre de von Neumann commutative* D *de* B *, un ensemble* I *et une famille* $\mathcal{F} = \{c(i,j;\iota)\ ,\ 1 \leq i \leq k\ ,\ 1 \leq j \leq k\ ,\ \iota \in I\}$ *de variables aléatoires de* (B,ψ) *; supposons que la famille* $\mathcal{F}$ *est circulaire et libre avec* D *et que, pour tout* $\iota \in I$, $\psi(c(i,j;\iota)^* c(i,j;\iota))$ *est indépendant de* i *et* j *. Munissons l'algèbre de von Neumann* $A = M_k(B)$ *de l'état* φ *donné par la formule* $\varphi((a_{i,j})) = 1/k \sum \psi(a_{i,i})$ *. Alors les matrices* $(C_\iota)_{\iota\in I}$ *de coefficients* $c(i,j;\iota)$ *forment un système circulaire, libre avec la sous-algèbre* Δ *de* A *formée des matrices diagonales à coefficients dans* D *.*

5. Le groupe fondamental du facteur du groupe libre à une infinité de générateurs

Rappelons qu'il y a à isomorphisme près un unique espace mesuré standard sans atomes, donc une unique algèbre de von Neumann commutative sans atomes (à prédual séparable).

Reprenons les notations du corollaire du théorème 4.1 ci-dessus. Supposons que l'algèbre D n'a pas d'atomes, que l'ensemble I est dénombrable et notons N son cardinal. Il résulte du corollaire ci-dessus que la sous-algèbre M de A engendrée par les $\mathrm{Re}\,C_\iota$ et la sous-algèbre Δ , est un modèle du facteur $W(\mathbb{F}_{N+1})$ où $\mathbb{F}_{N+1}$ désigne le groupe libre à $N+1$ générateurs. Notons p le projecteur de coefficient $1,1$ égal à 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls. Alors $p \in \Delta \subset M$; on vérifie que l'algèbre réduite M_p est une algèbre engendrée par des variables aléatoires (hermitiennes) libres et on compte leur nombre. On en déduit :

THÉORÈME 5.1. ([18]) — *Soit p un projecteur de trace $1/k$ de $W(\mathbb{F}_{N+1})$. L'algèbre réduite $W(\mathbb{F}_{N+1})_p$ est isomorphe à $W(\mathbb{F}_{Nk^2+1})$.*

REMARQUE. — On voit ici une ressemblance évidente, encore assez peu comprise avec le théorème de Nielsen-Schreier, vu que $W(\mathbb{F}_{N+1})_p$ a (du moins intuitivement) un indice k^2 dans $W(\mathbb{F}_{N+1})$.

Si N est infini, il est égal à Nk^2+1 de sorte que $1/k$ appartient au groupe fondamental de $W(\mathbb{F}_N)$.

COROLLAIRE. ([18]) — *Le groupe fondamental du facteur associé au groupe libre à une infinité de générateurs contient tous les nombres positifs rationnels.*

Rădulescu a amélioré ce corollaire en démontrant :

THÉORÈME 5.2. ([10]) — *Le groupe fondamental du facteur associé au groupe libre à une infinité de générateurs est $\mathbf{R}_+^*$.*

Pour démontrer ce théorème, Rădulescu utilise la construction suivante (*cf.* [11]) :

Soit A une algèbre de von Neumann munie d'une trace ***non bornée*** τ ; on suppose que A engendrée par une sous-algèbre B isomorphe à l'algèbre $L^\infty(\mathbf{R})$ des fonctions mesurables bornées sur $\mathbf{R}$ et par un élément non borné X tels que :

– La restriction de la trace τ à B est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

– Pour tout projecteur p de B correspondant à la fonction caractéristique χ_T d'une partie intégrable T de $\mathbf{R}$, $\tau(p)^{-1/2}pXp$ est un élément hermitien (borné) de A_p , sa distribution est semi-circulaire relativement à la trace normalisée $\tau(p)^{-1}\tau$ de A_p ; de plus, pXp et l'algèbre B_p sont libres pour cette trace.

Pour construire une telle algèbre, on utilise le modèle de matrices Gaussiennes ci-dessus.

Soit alors t un nombre réel strictement positif. Notons p le projecteur de B correspondant à la fonction caractéristique $\chi_{[0,t]}$ de l'intervalle $[0,t]$. Pour $n \in \mathbf{N}$, notons P_n le projecteur de B correspondant à la fonction caractéristique $\chi_{[-nt,nt]}$ de l'intervalle $[-nt,nt]$. Par définition, la sous-algèbre de von Neumann A_n de A_{P_n} engendrée par B_{P_n} et P_nXP_n est isomorphe à l'algèbre $W(\mathbb{F}_2)$ du groupe libre à deux générateurs, de sorte que $(A_n)_p$ est isomorphe à $W(\mathbb{F}_{4n^2+1})$ par le théorème 5.1 ci-dessus. De plus, le système de générateurs de $(A_{n+1})_p$ contient celui de $(A_n)_p$. En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que A_p est isomorphe à l'algèbre du groupe libre à une infinité de générateurs. Remplaçant p par le projecteur q de B correspondant à la fonction caractéristique $\chi_{[0,s]}$, (où s est un autre nombre strictement positif) on trouve que A_q est isomorphe à A_p , de sorte que s/t appartient au groupe fondamental de ce facteur.

6. Facteurs des groupes libres à un nombre fini de générateurs

Le théorème 5.1 montre que, étant donnés deux nombres entiers m et n supérieurs ou égaux à 2 tels que $\frac{n-1}{m-1}$ est le carré d'un nombre rationnel, les facteurs $W(\mathbb{F}_n)$ et $W(\mathbb{F}_m)$ ont des réduites isomorphes. Rădulescu a démontré que la condition de rationnalité de $\sqrt{\frac{n-1}{m-1}}$ est superflue. Plus précisément, supposons que $n \leq m$; alors $W(\mathbb{F}_m)$ est isomorphe à $W(\mathbb{F}_n)_p$

pour tout projecteur p de $W(\mathbb{F}_n)$ de trace $\sqrt{\frac{n-1}{m-1}}$.

L'énoncé le plus satisfaisant dans cette direction (obtenu indépendamment par Dykema et Rădulescu) est le suivant :

THÉORÈME 6.1. (*cf.* [5] et [12]) — *Il existe une famille* $(A_s)_{s\in]1,+\infty[}$ *de facteurs de type* II_1 *telle que :*
a) Si s *est entier,* A_s *est isomorphe à* $W(\mathbb{F}_s)$.
b) Si s *et* t *sont deux nombres réels tels que* $1 < s \leq t$ *et* p *un projecteur de* A_s *de trace* $\sqrt{\frac{s-1}{t-1}}$ *, alors* A_t *est isomorphe à* $(A_s)_p$.
c) Le produit libre des facteurs A_s *et* A_t *est isomorphe à* A_{s+t} .

Il est clair que le groupe fondamental de A_s ne dépend pas de s . En fait ou bien ce groupe fondamental est $\{1\}$ et les A_s sont deux à deux non isomorphes, ou ce groupe fondamental est $\mathbf{R}_+^*$ et tous les A_s sont isomorphes. En effet, s'il existe deux nombres réels s et t tels que $1 < s < t$ et que A_s soit isomorphe à A_t , alors A_{s+u} serait isomorphe à A_{t+u} pour tout nombre $u > 1$ (th. 6.1.c) donc $\sqrt{\frac{s+u-1}{t+u-1}}$ appartiendrait au groupe fondamental des facteurs A_s ; ce groupe fondamental contiendrait alors $\{\sqrt{\frac{s+u-1}{t+u-1}}, u \in]1, +\infty[\} =]\sqrt{\frac{s}{t}}, 1[$ et, comme c'est un sous-groupe de $\mathbf{R}_+^*$, il serait égal à $\mathbf{R}_+^*$.

De plus, Dykema a calculé le produit libre de deux algèbres de von Neumann finies «injectives» en termes de ces A_s (*cf.* [6]). En particulier, il prouve que le facteur de type II_1 associé au produit libre de deux groupes moyennables Γ_1 et Γ_2 est isomorphe à A_s où $s = 2 - n_1^{-1} - n_2^{-1}$ où n_1 et n_2 désignent les cardinaux respectifs de Γ_1 et Γ_2 ([6]). Par exemple :

1. Le produit libre du facteur hyperfini de type II_1 par lui même est isomorphe à $A_2 = W(\mathbb{F}_2)$.

2. Le facteur de type II_1 associé au groupe $PSL(2, \mathbf{Z})$ est isomorphe à $A_{7/6}$.

([6]) On suppose, bien sûr, que n_1 et n_2 sont strictement supérieurs à 1 et qu'ils ne sont pas tous deux égaux à 2 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. CONNES : *Classification of injective factors*, Annals of Math. **104** (1976) 73-115.

[2] A. CONNES : *A factor of type II_1 with countable fundamental group.* J. Operator Theory **4** (1980) 151-153.

[3] C. DELAROCHE et A.A. KIRILLOV : *Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés.* Sém. Bourbaki 343 (1968).

[4] K. DYKEMA : *Free products of free group factors with matrix algebras and the hyperfinite II_1 factor; asymptotic freeness of non gaussian random matrices.* preprint.

[5] K. DYKEMA : *Interpolated free group factors.* preprint.

[6] K. DYKEMA : *Free products of hyperfinite von Neumann algebras and free dimension.* preprint.

[7] V.Ya GOLODETS and N.I. NESSONOV : T-property and nonisomorphic full factors of types II and III. J. Funct. Anal. **70** (1987) 80-89.

[8] D.A. KAZHDAN : *Connection of the dual space of a group and the structure of its closed subgroups.* Funct. Anal. Appl. **1** (1967) 63-65.

[9] F.J. MURRAY et J. von NEUMANN : *On rings of operators IV.* Annals of Math. **44** (1943) 716-808.

[10] F. RĂDULESCU : *The fundamental group of the von Neuman algebra of a free group with infinitely many generators is* $\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$. J.A.M.S. à paraître

[11] F. RĂDULESCU : *A one parameter group of automorphisms of* $\mathcal{L}(F_\infty) \otimes B(H)$ *scaling the trace.* C.R.A.S. **314** Sér. I (1992) 1027-1032.

[12] F. RĂDULESCU : *Random matrices, amalgamated free products and subfactors of the von Neuman algebra of a free group.* preprint I.H.E.S. (1991).

[13] D.V. VOICULESCU : *Symmetries of some reduced free product C^*-algebras.* In "Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory". Lecture Notes in Math. **1132** Springer-Verlag (1985) 556-588.

[14] D.V. VOICULESCU : *Addition of certain non-commuting random variables.* J.F.A. **66** (1986) 323-346.

[15] D.V. VOICULESCU : *Multiplication of certain non-commuting random variables.* J. Operator Theory **18** (1987) 223-235.

[16] D.V. VOICULESCU : *Dual algebraic structures on operator algebras related to free products.* J. Operator Theory **17** (1987) 85-98.

[17] D.V. VOICULESCU : *Limit laws for random matrices and free products.* Invent. Math **104** (1991) 201-220.

[18] D.V. VOICULESCU : *Circular and semicircular systems and free product factors.* Operator Algebras, Unitary Representations, Enveloping Algebras and Invariant Theory, Progress in Mathematics **92**, Birkhäuser, Boston 1990.

[19] E. WIGNER : *Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimension.* Ann. of Math. **62** (1955) 548-564.

[20] E. WIGNER : *On the distribution of the roots of certain symmetric matrices.* Ann. of Math. **67** (1958) 325-327.

Georges SKANDALIS
Université Paris 7
UFR de Mathématiques
UA 212 du CNRS
Tour 45-55-5e étage
2, pl. Jussieu
F - 75251 Paris Cedex 05