PAUL-ANDRÉ MEYER

Progrès récents en calcul stochastique quantique

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki, exp. n^{o} 761, p. 35-47
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__35_0>

Séminaire BOURBAKI
45ème année, 1992-93, n° 761

Novembre 1992

PROGRÈS RÉCENTS EN CALCUL STOCHASTIQUE QUANTIQUE

par Paul-André MEYER

Introduction. Le calcul stochastique quantique (voir aussi l'exposé n° 672, Nov. 1986) devrait jouer en physique quantique le rôle que joue le calcul stochastique classique dans la modélisation de systèmes mécaniques perturbés par un bruit. L'objet du calcul stochastique quantique est, en un sens très général, la classification des "bruits quantiques", et l'étude de divers types d'équations d'évolution comportant un terme de bruit. La théorie, claire quant à ses idées principales depuis quelques années, a souffert au début d'insuffisances du côté de l'analyse : on ne savait traiter que le cas d'opérateurs bornés. C'est seulement depuis 1991 que la puissance des méthodes non commutatives a commencé à se comparer à celle des méthodes probabilistes classiques.

1. Calcul stochastique classique. Il s'agit d'une théorie ancienne (Ito, 1945) qui a connu encore de très grands progrès dans les années 80. Elle fournit une méthode pour construire, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ du mouvement brownien $B_t = (B_t^\alpha)$ (composantes indépendantes en nombre fini) un processus de diffusion $X_t = (X_t^i)$ au moyen d'une équation différentielle stochastique (é.d.s.) à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

$$X_t = X_0 + \sum_\alpha \int_0^t a_\alpha(X_s)\, dB_s^\alpha + \int_0^t b(X_s)\, ds \ . \tag{1.1}$$

Lorsque les termes aléatoires sont absents, ce qu'on écrit est une équation différentielle ordinaire, et il est remarquable que la condition d'existence et d'unicité des solutions de (1.1) soit la même hypothèse de Lipschitz que dans le cas déterministe. Sous des conditions de Lipschitz locales (en particulier lorsque les coefficients sont différentiables), la solution existe localement, mais peut exploser en temps fini. On suppose qu'elle n'est pas explosive.

On prend en général $X_0 = x$, d'où une fonction de trois variables, $X_t(x, \omega)$, la troisième desquelles est la courbe brownienne $B_\bullet(\omega)$. On peut préciser suffisamment les ensembles négligeables en construisant la solution pour obtenir, pour presque tout ω et tout t fixé, une application $x \longmapsto X_t(x,\omega)$. Cette application est $\mathcal{C}^\infty$ si les coefficients le sont, et définit (sous les hypothèses de Lipschitz globales) un difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$.

En prenant une espérance $\mathbb{E}$ (*i.e.* en intégrant) on obtient un semi-groupe sur les fonctions

$$P_t f(x) = \mathbb{E}[\, f \circ X_t(x,\omega)\,] \ , \tag{1.2}$$

dont le générateur est l'opérateur du second ordre

$$L = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha ij} a^i_\alpha a^j_\alpha \, D_{ij} + \sum_i b^i D_i \ . \tag{1.3}$$

Un même semi-groupe (P_t) (ou un même processus de Markov admettant ce semi-groupe de transition) peut être construit au moyen d'une infinité d'é.d.s. différentes : la notion de fonction de trois variables $X(x,t,\omega)$ ci-dessus est appelée un *flot stochastique*; d'où le nom de *flot quantique,* pour la notion non-commutative que l'on trouvera plus loin.

L'équation différentielle stochastique (1.1) a un sens dans une variété E, en interprétant les X^i comme des coordonnées locales, mais cela pose des problèmes de localisation et de recollement assez délicats. Il est plus intéressant d'appliquer à l'équation (1.1) une fonction $\mathcal{C}^\infty$ arbitraire f sur E. L'application de la formule d'Ito nous donne

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_\alpha \int_0^t L_\alpha f(X_s)\, dB^\alpha_s + \int_0^t Lf(X_s)\, ds \tag{1.4}$$

avec $L_\alpha f = \sum_i a^i_\alpha D_i f$ et L comme en (1.3) (le générateur).

Une notation utile consiste à poser $dB^0_t = dt$, $L_0 = L$, et à distinguer deux types d'indices grecs : $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ qui ne prennent pas la valeur 0, et $\rho, \sigma, \tau \ldots$ qui peuvent la prendre. On s'en servira plus loin.

On transcrit alors la construction en langage algébrique : on a deux "espaces": la variété E et l'espace probabilisé Ω, qui sont représentés par deux algèbres à unité, l'algèbre $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(E)$ et l'algèbre $\mathcal{B} = L^\infty(\Omega)$ — plus précisément, le rôle du temps est décrit par une famille croissante $(\mathcal{B}_t)$ d'algèbres sur Ω. L'inconnue est une famille d'homomorphismes de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}_t$, $f \longmapsto f \circ X_t$. La donnée initiale est un homomorphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}_0$, $f \longmapsto f(X_0)$ (par exemple, l'homomorphisme $f \longmapsto f(x)1$). On voit bien alors le rôle différent des v.a. browniennes B^α_t, qui sont "plates"par opposition aux v.a. X_t qui sont "courbes."Les coefficients L_α et L sont des applications de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ (noter la perte de généralité : cela ne s'applique plus qu'aux coefficients $\mathcal{C}^\infty$). En écrivant que les applications $f \longmapsto f \circ X_t$ sont des homomorphismes, on obtient des propriétés intéressantes

1) $L_\alpha(fg) - fL_\alpha g - (L_\alpha f)\, g = 0$ (les L_α sont des dérivations de $\mathcal{A}$);
2) $L(fg) - fLg - (Lf)\, g = \sum_\alpha L_\alpha f L_\alpha g$.

Ce formalisme algébrique a l'avantage de s'étendre au cas non-commutatif.

2. Opérateurs fondamentaux. Nous allons remplacer l'algèbre $\mathcal{A}$ par une algèbre complexe à unité, munie d'une involution (tous les homomorphismes considérés respectent ces deux éléments, sans autre spécification). On suppose $\mathcal{A}$ réalisée comme algèbre d'opérateurs (bornés pour simplifier, mais $\mathcal{A}$ n'est pas une C^*-algèbre en général) sur un espace (pré)hilbertien $\mathcal{J}$, l'*espace initial* $\mathcal{J}$. Dans la situation ci-dessus, $\mathcal{J}$ pourrait être l'espace L^2 d'une "mesure de Lebesgue" sur la variété, ou mieux, l'espace des demi–densités de carré intégrable, sur lequel l'algèbre $\mathcal{C}^\infty$ opère par multiplication.

La source de "bruit non commutatif" (l'espace plat) sera l'espace de Fock Φ construit sur $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$ — la présence de $\mathbb{R}_+$ donne à cet espace une structure temporelle. La dimension de $\mathcal{K}$ est appelée la *multiplicité* : l'utilisation systématique de la multiplicité infinie est une conquête récente (thèse de Mohari). Nous fixons une base orthonormale (e^α) de $\mathcal{K}$ — bien qu'il y ait aussi des avantages à travailler sans base, cela clarifiera les choses au début. Noter l'indice en haut, qui va renverser les conventions usuelles d'algèbre linéaire : on sait (depuis Segal, 1956) que Φ est naturellement isomorphe à l'espace L^2 d'une famille de mouvements browniens indépendants (B_t^α) en bijection avec les e^α, d'où la notation.

Le vecteur vide du Fock est noté $\mathbf{1}$. Pour tout t, Φ se décompose en un produit tensoriel $\Phi_t \otimes \Phi^t$, où Φ_t s'identifie au Fock sur $L^2([0,t], \mathcal{K})$. On peut aussi considérer Φ_t comme un sous-espace $\Phi_t \otimes \mathbf{1}$ de Φ. On pose $\Psi = \mathcal{J} \otimes \Phi$, $\Psi_t = \mathcal{J} \otimes \Phi_t$. L'algèbre $\mathcal{B}_t$ sera l'algèbre des opérateurs bornés sur Ψ qui opèrent sur le premier facteur Ψ_t. Notre "diffusion" consistera en une famille d'homomorphismes $X_t : \mathcal{A} \longmapsto \mathcal{B}_t$, et on se donnera un homomorphisme initial X_0, en général $f \longmapsto f \otimes I$.

Maintenant, qu'est-ce qui remplace le mouvement brownien ? Nous avons d'abord à notre disposition les *opérateurs de création et d'annihilation* sur l'espace de Fock : En physique les opérateurs de création (notés $a^*(u)$ par les physiciens) sont indexés par $u \in \mathcal{H}$ et les opérateurs d'annihilation (notés $a(v')$) par un élément de $\mathcal{H}'$; ici on identifie linéairement $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ par le produit scalaire bilinéaire, et l'on note le créateur $a^\alpha(t)$ pour le vecteur $u = I_{[0,t]} \otimes e^\alpha$, l'annihilateur $a_\alpha(t)$ pour le covecteur $u' = I_{[0,t]} \otimes e_\alpha$ (base duale). Si l'on identifie l'espace de Fock à l'espace L^2 du brownien, l'opérateur $a_\alpha(t) + a^\alpha(t)$ se lit comme l'opérateur Q_t^α de multiplication par B_t^α.

Mais cela ne suffit pas pour faire une théorie complète : un opérateur borné M sur $\mathcal{K}$ donne lieu à un opérateur $M_t = I_{[0,t]} \otimes M$ sur $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{K}$, et par seconde quantification différentielle à un opérateur sur l'espace de Fock. Le cas le plus important pour nous est celui où M est l'opérateur $e_\beta \otimes e^\alpha$ de rang 1 : alors l'opérateur de seconde quantification différentielle correspondant est noté $a_\beta^\alpha(t)$. D'un point de vue physique, la création et l'annihilation ayant leur sens usuel, les opérateurs a^α_β décrivent des changements d'état internes des particules (spin, isospin...).

On unifie toutes ces notations en introduisant l'indice supplémentaire 0, en notant $a^\alpha_0(t)$ et $a^0_\alpha(t)$ le créateur et l'annihilateur respectivement, et encore $a^0_0(t)$ l'opérateur de multiplication par la fonction scalaire $I_{[0,t]}$.

C'est l'ensemble de tous ces opérateurs qui vient se substituer ici au mouvement brownien. Cela peut sembler beaucoup! L'utilisation d'intégrales stochastiques faisant intervenir les opérateurs de nombre et d'échange permet déjà de s'épargner une théorie fermionique distincte de la théorie bosonique : une "transformation de Jordan–Wigner continue"permet de ramener l'une à l'autre.

3. Intégrales stochastiques. Revenons d'abord au cas classique. L'i. s. d'Ito prend la forme $\sum_\alpha \int_0^t h_\alpha(s)\, dB^\alpha_s$, où les v.a. $h_\alpha(s)$ forment un processus adapté de vecteurs ("adapté"signifie que $h_\alpha(t)$ est mesurable par rapport à la tribu du passé à l'instant t). La notation différentielle rappelle une intégrale de Stieltjes, et la règle fondamentale du calcul d'Ito est résumée dans la formule $dB^\alpha_t\, dB^\beta_t = \delta^{\alpha\beta} dt$. Si l'on ajoute l'indice 0, en convenant que $dB^0_t = dt$, la formule fondamentale ("table d'Ito") s'écrit

$$dB^\rho_t\, dB^\sigma_t = \widehat{\delta}^{\rho\sigma} dt \,, \tag{3.1}$$

où le "symbole d'Evans" $\widehat{\delta}^{\rho\sigma}$ diffère du symbole de Kronecker usuel par le fait que $\widehat{\delta}^{00} = 0$.

Ici nous allons définir l'intégrale stochastique pour une famille $\mathbf{H}$ d'opérateurs $H^\rho_\sigma(t)$ qui seront adaptés, *i.e.* $H^\rho_\sigma(t)$ agit seulement sur la partie antérieure à t de la décomposition $\Psi = \mathcal{J} \otimes \Phi = (\mathcal{J} \otimes \Phi_t) \otimes \Phi^t$,

$$I_t(\mathbf{H}) = \eta + \sum_{\rho\sigma} \int_0^t H^\rho_\sigma(s)\, da^\sigma_\rho(s) \,. \tag{3.2}$$

L'opérateur η n'agit que sur l'espace initial. Les éléments différentiels $da^\sigma_\rho(t)$ obéissent à la *table d'Evans*

$$da^\mu_\lambda(t)\, da^\sigma_\rho(t) = \widehat{\delta}^\sigma_\lambda\, da^\mu_\rho(t) \,, \tag{3.3}$$

qui implique pour les créateurs et les annihilateurs les relations de commutation canoniques.

Il faut fixer pour ces opérateurs un domaine (dense) : on choisit traditionnellement, dans les calculs sur l'espace de Fock, certaines *exponentielles* d'éléments du premier chaos, notées ici $\mathcal{E}(\mathbf{u})$; comme il y a un espace initial $\mathcal{J}$, il faut encore tensoriser avec des éléments de celui-ci : je me permettrai d'écrire $\mathcal{E}(j\mathbf{u})$ pour $j \otimes \mathcal{E}(\mathbf{u})$, afin d'économiser plusieurs parenthèses. On a donc

$$<\mathcal{E}(k\mathbf{v}), \mathcal{E}(j\mathbf{u})> = <k, j> e^{<\mathbf{v},\mathbf{u}>} \,. \tag{3.4}$$

Le vecteur $\mathbf{u}$ a des composantes u_α dans la base e^α, qui sont des éléments de $L^2(\mathbb{R}_+)$: nous exigerons, en multiplicité infinie, que l'ensemble $S(\mathbf{u})$ des indices des composantes non nulles (le "support"de $\mathbf{u}$) soit fini. Nous exigerons que chaque fonction $u_\alpha(t)$ soit bornée. Nous conviendrons encore que $u_0(t) \equiv 1$, et que $0 \in S(\mathbf{u})$. Nous associons à un tel vecteur exponentiel une mesure scalaire sur $\mathbb{R}_+$

$$\nu(\mathbf{u}, dt) = \| \mathbf{u}(t) \|^2 \, dt \tag{3.5}$$

(y compris la composante u_0). L'existence d'une intégrale exige deux conditions : une condition de mesurabilité et une limitation sur la taille. Nous supposons que le domaine de chaque $H^\rho_\sigma(t)$ contient les vecteurs exponentiels ci-dessus, et que les vecteurs

$$h^\rho_\sigma(t) = H^\rho_\sigma(t) \, \mathcal{E}(j\mathbf{u})$$

dépendent mesurablement de t. On pose aussi $a_0 = \eta \, \mathcal{E}(j\mathbf{u}) = \eta(j) \otimes \mathcal{E}(\mathbf{u})$. La condition la plus commode pour l'existence de l'intégrale stochastique est celle qu'ont dégagée Mohari et Sinha : *si la quantité*

$$C^2(t) = \| a_0 \|^2 + \sum_{\rho \in S(\mathbf{u}), \sigma} \int_0^t \| h^\rho_\sigma(s) \|^2 \, \nu(\mathbf{u}, ds) \tag{3.6}$$

est finie, l'intégrale stochastique $I_t(\mathbf{H}) \, \mathcal{E}(j\mathbf{u})$ existe, et l'on a

$$\| I_t(\mathbf{H}) \, \mathcal{E}(j\mathbf{u}) \|^2 \leq 2 e^{\nu(\mathbf{u}, t)} \, C^2(t) \ . \tag{3.7}$$

Cela tient lieu de la formule d'isométrie classique. Une autre formule utile est la suivante : étant donné un multiindice d'ordre n, $\mu = \binom{\rho_1, \ldots, \rho_n}{\sigma_1, \ldots, \sigma_n}$, on peut définir une intégrale stochastique multiple d'une fonction $H_\mu(s_1, \ldots, s_n)$ prenant ses valeurs dans l'espace des opérateurs *sur l'espace initial* — dans le cas classique, ce serait une fonction déterministe, à la manière des i.s. multiples de Wiener–Ito :

$$I_t(H_\mu) = \int_{t > s_1 > \ldots > s_n} H_\mu(s_1, \ldots, s_n) \, da^{\sigma_1}_{\rho_1}(s_1) \ldots \, da^{\sigma_n}_{\rho_n}(s_n) \ . \tag{3.8}$$

Une telle intégrale se définit comme intégrale itérée. Puis on définit une intégrale stochastique multiple générale $I_t(\mathbf{H}) = \sum_\mu I_t(H_\mu)$ d'une famille $\mathbf{H}$ d'opérateurs H_μ du type précédent, indexée par tous les multiindices. On a alors la majoration

$$\| I_t(\mathbf{H}) \, \mathcal{E}(j\mathbf{u}) \|^2 \leq \sum\nolimits_n (2 e^{\nu(t, \mathbf{u})})^n \tag{3.9}$$

$$\sum\nolimits_{|\mu| = n} \int_{t > s_1 \ldots > s_n} \| H_\mu(s_1, \ldots s_n) \, \mathcal{E}(j\mathbf{u}) \|^2 \, \nu(\mathbf{u}, ds_1) \ldots \nu(\mathbf{u}, ds_n) \ .$$

4. E.d.s. quantiques. Nous nous posons d'abord le problème des équations linéaires : il s'agit de construire des familles d'opérateurs adaptés U_t ou V_t sur l'espace de Fock $\Psi = \mathcal{J} \otimes \Phi$ (avec espace initial), contenant dans leur domaine les vecteurs exponentiels $\mathcal{E}(j\mathbf{u})$ et satisfaisant aux équations

$$U_t = I + \sum\nolimits_\varepsilon \int_0^t U_s\,(L_\varepsilon \otimes I)\,da_s^\varepsilon \ , \tag{4.1}$$

$$V_t = I + \sum\nolimits_\varepsilon \int_0^t (L_\varepsilon \otimes I)\,V_s\,da_s^\varepsilon \ , \tag{4.1'}$$

que l'on appelle respectivement l'équation gauche et l'équation droite. La notation ε abrège un indice double d'Evans : $L_\varepsilon = L_\sigma^\rho$ (et on pose $\overset{*}{L}{}_\rho^\sigma = (L_\sigma^\rho)^*$). Les coefficients L_ε sont des opérateurs sur $\mathcal{J}$ (non nécessairement bornés, si $\mathcal{J}$ est seulement préhilbertien) ; on n'écrira plus $L_\varepsilon \otimes I$ pour leur extension au Fock, mais seulement L_ε.

Il y a deux relations entre les équations gauche et droite. D'abord, le passage à l'adjoint échange la gauche et la droite (en prenant aussi les adjoints des coefficients). D'autre part le retournement du temps à l'instant t (qui est une opération unitaire sur l'espace de Fock) échange U_t et V_t en conservant les mêmes coefficients (th. dû à J.L. Journé). C'est très important, car les difficultés se partagent équitablement entre les deux équations.

On a une écriture abrégée pour l'élément différentiel : on regroupe les coefficients de création L_α^0 en une colonne λ d'opérateurs (malgré l'indice en haut !), les coefficients d'annihilation L_0^α en une ligne $\widetilde{\lambda}$, les coefficients des opérateurs de nombre et d'échange en une matrice Λ ; enfin on pose $L_0^0 = L$. Nous avons donc la matrice d'un opérateur sur $\mathcal{J} \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathcal{K})$

$$\begin{pmatrix} L & \widetilde{\lambda} \\ \lambda & \Lambda \end{pmatrix}$$

et l'élément différentiel s'écrit $L dt + da_t^+(\lambda) + da_t^\circ(\Lambda) + da_t^-(\widetilde{\lambda})$.

Le problème fondamental est d'abord celui de l'existence et unicité de la solution sur le domaine exponentiel, et surtout des propriétés analytiques de la solution : unitarité, ou encore contractivité. Il faut garder à l'esprit le cas particulier "déterministe" de l'équation (4.1), qui est

$$U_t = I + i \int_0^t U_s\,L\,ds \ ,$$

et pour lequel la condition d'unitarité est : L est autoadjoint, autrement dit symétrique, et admettant un ensemble dense de vecteurs analytiques, *i.e.* de vecteurs j pour lesquels $\| L^n j \|$ est $O(M^{-n} n!)$ pour tout M. On souhaiterait donc aboutir à un "théorème de Stone stochastique" se réduisant à celui-ci dans le cas déterministe.

Le problème a été posé, et les conditions formelles d'unitarité dégagées, dans un article fondamental de Hudson–Parthasarathy, qui l'ont aussi résolu en multiplicité finie avec coefficients bornés — ce cas ayant d'ailleurs une signification physique (évolution d'un atome dans un champ extérieur comportant du bruit). Ensuite, Applebaum, Vincent–Smith, Fagnola, ont traité la multiplicité finie avec coefficients non bornés, dans des conditions de généralité croissante, mais sans jamais atteindre le cas limite de l'équation "déterministe"(en gros, la croissance permise dans le cas stochastique serait en $\sqrt{n!}$ au lieu de $n!$). Une étape essentielle a été franchie dans la thèse de Mohari, quand celui–ci a traité le cas de la multiplicité infinie avec coefficients bornés, puis a indiqué une condition entièrement générale pour l'*unicité* d'une solution contractive. Le théorème d'existence correspondant a alors été élaboré indépendamment par Mohari et par Fagnola.

Voici d'abord les conditions formelles sur les coefficients assurant que la solution est isométrique, co-isométrique, ou simplement contractive (ce qui assure que les opérateurs s'étendent hors du domaine exponentiel. Voici la "condition d'isométrie"(formelle) de la solution (U_t) — par retournement du temps, c'est la même chose que de dire que (V_t) est isométrique

$$(4.2) \qquad L^\rho_\sigma + (L^\sigma_\rho)^* + \textstyle\sum_\alpha (L^\sigma_\alpha)^* L^\rho_\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \boxed{L^\rho_\sigma + \overset{*}{L}{}^\rho_\sigma + \textstyle\sum_\alpha \overset{*}{L}{}^\alpha_\sigma L^\rho_\alpha = 0}\ .$$

La "condition de co-isométrie"(formelle) s'obtient alors par passage à l'adjoint

$$(4.3) \qquad \boxed{L^\rho_\sigma + \overset{*}{L}{}^\rho_\sigma + \textstyle\sum_\alpha L^\alpha_\sigma \overset{*}{L}{}^\rho_\alpha = 0}\ ,$$

et ces deux conditions ensemble constituent la "condition (formelle) d'unitarité". Ecrivons ces conditions sans indices, en introduisant la matrice

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \overset{*}{L} + L + \widetilde{\lambda}^*\lambda & \lambda^* + \widetilde{\lambda} + \lambda^*\Lambda \\ \widetilde{\lambda}^* + \lambda + \Lambda^*\lambda & \Lambda^* + \Lambda + \Lambda^*\Lambda \end{pmatrix} ,$$

La condition formelle d'isométrie est $\mathbf{L} = 0$, la condition (rigoureuse) de contractivité (introduite par Mohari) est $\mathbf{L} \leq 0$. La condition de co-isométrie est $\widetilde{\mathbf{L}} = 0$, avec

$$\widetilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} \overset{*}{L} + L + \widetilde{\lambda}\lambda^* & \lambda^* + \widetilde{\lambda} + \widetilde{\lambda}\Lambda^* \\ \widetilde{\lambda}^* + \lambda + \Lambda\widetilde{\lambda} & \Lambda^* + \Lambda + \Lambda\Lambda^* \end{pmatrix} .$$

La condition d'unitarité $\mathbf{L} = 0 = \widetilde{\mathbf{L}}$ s'analyse ainsi. D'abord, le coin en bas à droite

$$\Lambda^* + \Lambda + \Lambda^*\Lambda = 0 = \Lambda^* + \Lambda + \Lambda\Lambda^*$$

exprime que $W = I + \Lambda$ *est unitaire.* En bas à gauche

$$\widetilde{\lambda}^* + \lambda + \Lambda^*\lambda = 0 = \widetilde{\lambda}^* + \lambda + \Lambda\widetilde{\lambda}$$

s'écrit

$$(4.4) \qquad \widetilde{\lambda}^* + W^*\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \widetilde{\lambda} = -\lambda^* W \quad ;$$

en haut à droite on obtient la même chose. Finalement, les équations

$$\overset{*}{L} + L + \widetilde{\lambda}^*\lambda = 0 = \overset{*}{L} + L + \widetilde{\lambda}\lambda^*$$

nous donnent

$$L = iH - \tfrac{1}{2}\lambda^*\lambda = iH - \tfrac{1}{2}\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}^* \ . \tag{4.5}$$

A quoi servent ces deux solutions? Supposons qu'elles soient contractives; elles permettent alors de définir des semi-groupes sur les vecteurs j de l'espace initial (point de vue de Schrödinger)

$$P_t j = E_0 U_t j \ , \tag{4.6}$$

où E_0 est l'opérateur de projection initial. De même, on a un semi-groupe sur les opérateurs (point de vue de Heisenberg)

$$\mathcal{P}_t(A) = E_0 U_t^*(A \otimes I)\, U_t \ , \tag{4.7}$$

(par passage à l'adjoint on aurait une définition analogue avec V_t). Cela correspond exactement à la construction classique d'un semi-groupe, rappelée en (1.2) au début, et les semi-groupes ainsi construits sont des exemples de semi-groupes (sous)-markoviens quantiques sur $\mathcal{B}(\mathcal{J})$: semi-groupes d'opérateurs normaux, complètement positifs, diminuant la trace. Voici la forme du générateur $\mathcal{L}$ de (4.7), cas particulier de (5.7) ci-dessous

$$\mathcal{L}(F) = \overset{*}{L}{}_0^0 F + F L_0^0 + \textstyle\sum_\alpha \overset{*}{L}{}_0^\alpha F L_\alpha^0 \ . \tag{4.8}$$

En particulier, dans le cas d'une évolution unitaire, en tenant compte de la structure des coefficients on obtient

$$\mathcal{L}(F) = -i\,[H, F] + \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_\alpha (L_\alpha^* L_\alpha F + F L_\alpha^* L_\alpha - 2 L_\alpha^* F L_\alpha) \tag{4.9}$$

qui est la "forme de Lindblad"des générateurs des semi-groupes complètement positifs sur l'espace des états d'un espace de Hilbert : un théorème célèbre de Lindblad-Gorini-Kossakowski-Sudarshan affirme que les générateurs des semi--groupes *uniformément continus* sont tous de cette forme, le cas fortement continu n'étant pas encore complètement clarifié. Même dans le cas uniformément continu, une infinité de coefficients L_α peuvent être nécessaires. Enfin, noter que l'opérateur unitaire W n'intervient pas dans le générateur.

5. Flots quantiques. Avant de donner des résultats analytiques, passons à l'autre problème, celui des *flots quantiques,* posé par R.L. Hudson, et étudié par celui–ci en collaboration avec M. Evans. Il s'agit d'une véritable généralisation des é.d.s. non linéaires d'Ito. On a ici une algèbre $\mathcal{A}$ d'opérateurs sur l'espace initial $\mathcal{J}$, qui joue le rôle de l'algèbre $\mathcal{C}^\infty$ d'une variété, et on se donne une famille d'applications $\mathbf{L}_\sigma^\rho$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$. On se donne une application X_0 de

$\mathcal{A}$ dans l'algèbre des opérateurs sur $\mathcal{J}$, identifiés à des opérateurs sur Ψ, et l'inconnue est une famille d'applications X_t de $\mathcal{A}$ dans les opérateurs sur Ψ qui n'agissent que jusqu'à l'instant t. Au lieu d'écrire $X_t(F)$ pour $F \in \mathcal{A}$, nous écrirons $F \circ X_t$ comme si X_t était une v.a. à valeurs dans E, et F une fonction sur E. L'équation du flot est alors

$$F \circ X_t = F \circ X_0 + \sum_{\rho\sigma} \int_0^t \mathbf{L}_\sigma^\rho F \circ X_s \, da_\rho^\sigma(s) \; . \tag{5.1}$$

On suppose que X_0 est un homomorphisme d'algèbre (à involution et unité, et diminuant la norme d'opérateurs : cela irait de soi si l'on travaillait sur des C^*-algèbres, mais ce n'est pas le cas en général), et on demande que les X_t en soient aussi. Comme dans le cas classiques, les coefficients $\mathbf{L}_\sigma^\rho$ doivent pour cela satisfaire à certaines conditions formelles, appelées *équations de structure*

$$\mathbf{L}_\sigma^\rho(I) = 0 \; , \tag{5.2}$$

$$(\mathbf{L}_\rho^\sigma(F))^* = \mathbf{L}_\sigma^\rho(F^*) \; , \tag{5.3}$$

$$\boxed{\mathbf{L}_\sigma^\rho(FG) - F\mathbf{L}_\sigma^\rho(G) - \mathbf{L}_\sigma^\rho(F)\,G = \textstyle\sum_\alpha \mathbf{L}_\sigma^\alpha(F)\,\mathbf{L}_\alpha^\rho(G)} \; . \tag{5.4}$$

Evans a donné le premier théorème d'existence de flots quantiques, dans le cas de coefficients bornés et en multiplicité finie. La vérification de la multiplicativité n'est absolument pas triviale, même dans ce cas simple!

Les problèmes d'é.d.s. et de flots sont étroitement liés. Considérons en effet une é.d.s. gauche admettant une solution unitaire (U_t). On définit alors une famille d'homomorphismes X_t de $\mathcal{L}(\mathcal{J})$ dans $\mathcal{L}(\Psi)$ en posant

$$F \circ X_t = U_t^* F U_t \; . \tag{5.5}$$

et par restriction à $\mathcal{A}$ on construit ainsi un flot. Plus généralement, étant donné un flot (X_t), on en définit un nouveau (Y_t) en posant

$$F \circ Y_t = U_t^*\,(F \circ X_t)\,U_t \; . \tag{5.6}$$

et cela amorce une classification des flots quantiques, qui fait intervenir des considérations de cohomologie non-commutative.

Dans le cas du flot (5.5), les coefficients du flot et ceux de l'é.d.s. sont liés par les relations

$$\boxed{\mathbf{L}_\sigma^\rho(F) = \overset{*}{L}{}_\sigma^\rho F + F\,L_\sigma^\rho + \textstyle\sum_\alpha \overset{*}{L}{}_\sigma^\alpha F\,L_\alpha^\rho} \quad \text{(en posant } \overset{*}{L}{}_\sigma^\rho = (L_\rho^\sigma)^* \text{)} \quad . \tag{5.7}$$

et l'équation de structure (5.3) est exactement la condition formelle exprimant que la solution de l'é.d.s. est *co-isométrique*.

Il est intéressant de noter que l'on n'a pas besoin de traiter toute la théorie des flots, ni des opérateurs de nombre et d'échange, pour faire entrer les équations d'Ito dans la théorie non-commutative. Considérons par exemple, sur une variété C^∞ compacte, une é.d.s. classique au sens de Stratonovitch

$$X_t = X_0 + \sum_\rho \int_0^t \xi_\rho(X_s) \star dB_s^\rho \ , \tag{5.8}$$

où les ξ_ρ sont des champs de vecteurs C^∞. Choisissons comme espace de Hilbert un espace $L^2(\mu)$ associé à une "mesure de Lebesgue"sur la variété, et associons à chaque ξ_ρ l'opérateur différentiel non homogène $K_\rho = \xi_\rho + k_\rho$ où la fonction k_ρ (dépendant de μ) fait de K_ρ un opérateur antiadjoint. Alors si l'é.d.s. à gauche

$$dU_t = U_t(\sum_\alpha K_\alpha dQ_t^\alpha - (K_0 + \frac{1}{2}\sum_\alpha K^\alpha K_\alpha)\, dt\ )$$

admet une solution unitaire (U_t), le flot intérieur $U_t^* f U_t$ préserve les opérateurs de multiplication et coïncide sur ceux-ci avec le flot de l'é.d.s. classique.

6. Conditions analytiques. Nous considérons d'abord l'équation droite avec des coefficients L_σ^ρ bornés. Alors une condition simple pour l'existence et l'unicité de la solution (V_t) sur le domaine exponentiel a été donnée par Mohari–Sinha sous la forme

$$\boxed{\forall j \in \mathcal{J} \quad \Sigma_\sigma \| L_\sigma^\rho j \|^2 \leq C_\rho^2 \| j \|^2} \ . \tag{6.1}$$

Pour traiter l'équation gauche, qui est un peu plus délicate, il faut imposer que cette condition *et* la condition duale (sommation sur ρ au lieu de σ) soient satisfaites tous deux. Mohari–Sinha montrent alors que les conditions formelles de contractivité, d'isométrie, de co-isométrie, d'unitarité entraînent bien les propriétés demandées.

Noter que ces conditions ne sont pas "intrinsèques" : elles dépendent du choix de la base orthonormale de $\mathcal{K}$; on peut interpréter (6.1) comme exprimant qu'une certaine application L^ρ de $\mathcal{J}$ dans $\mathcal{J} \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathcal{K})$ est bornée pour tout ρ, et si on veut rendre cela intrinsèque, on écrira (mais en perdant un peu de généralité) qu'une certaine application de $\mathcal{J} \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathcal{K})$ dans lui-même est bornée.

La méthode de démonstration n'est pas surprenante : c'est la série de Picard combinée avec les bonnes estimations d'intégrales multiples d'opérateurs, et avec la bonne définition du domaine exponentiel pour traiter la multiplicité infinie. On obtient une formule du type suivant

$$V(t) = \sum_n \sum_{|\mu|=n} L_\mu I^\mu(t) \tag{6.2}$$

avec les notations suivantes : μ est un multiindice formé de n indices d'Evans; L_μ est un produit $L_{\rho_1}^{\sigma_1} \ldots L_{\rho_n}^{\sigma_n}$ et $I^\mu(t)$ un opérateur sur le Fock donné par une intégrale multiple

$$\int_{s_1 < \ldots < s_n < t} da_{\rho_n}^{\sigma_n} \ldots da_{\rho_1}^{\sigma_1} \ .$$

La solution de l'équation gauche est en principe du même type, mais le produit L_μ est renversé. Si l'on a unicité, la solution de l'équation droite (gauche) est un cocycle à droite (à gauche), c'est à dire satisfait à une relation

$$V_{t+s} = \Theta_t(V_s)\,V_t \quad , \quad U_{t+s} = U_t\Theta_t(U_s) \ , \tag{6.3}$$

où Θ_t est une certaine opération de décalage sur les opérateurs (introduite par Journé), qu'il est inutile de détailler ici.

On peut noter que la formule (6.2) comporte une infinité d'intégrales multiples d'opérateurs qui sont du même type, par suite des intégrations en dt : en particulier le terme le plus bas est la série exponentielle pour $P_t = e^{tL_0^0}$. On sait bien que cette série ne doit pas être traitée naïvement.

Maintenant, nous passons à des conditions sur des opérateurs non bornés. Le résultat suivant est le théorème d'unicité de Mohari : considérons l'équation gauche (U_t) avec des coefficients L_σ^ρ définis sur un domaine dense $\mathcal{D}$; supposons que la solution soit définie sur $\mathcal{D} \otimes \mathcal{E}$, soit contractive et fortement continue. Alors elle est unique sous la condition suivante : *le coefficient* $L = L_0^0$ *est, après fermeture, le générateur d'un semi-groupe fortement continu* (P_t) *de contractions.*

Le théorème d'existence correspondant est dû à Fagnola. On va faire l'hypothèse ci-dessus entraînant l'unicité, et introduire la résolvante (W_p) du semi-groupe. On va supposer aussi que la condition de contractivité formelle est satisfaite, ce qui déjà entraîne que Λ est borné. Sur les coefficients de création et d'annihilation, λ et $\widetilde{\lambda}^*$, on va supposer qu'ils sont relativement bornés : qu'ils sont prolongeables à tout le domaine du générateur L, donc que λW_p et $\widetilde{\lambda}^* W_p$ sont des opérateurs partout définis, que l'on suppose bornés. Alors on peut régulariser par la résolvante, appliquer le théorème de Mohari-Sinha dans le cas borné, et faire un passage à la limite faible en utilisant un argument de compacité.

Enfin, un autre remarquable théorème de Fagnola (complétant les résultats déjà anciens de Journé) montre que tout cocycle à gauche unitaire satisfaisant à une condition *nécessaire* de différentiabilité faible est solution d'une équation différentielle stochastique à coefficients non bornés du type ci-dessus.

En ce qui concerne la théorie des flots quantiques, les résultats sont encore incomplets : Mohari a donné un théorème intéressant du type "coefficients bornés, multiplicité infinie". Cependant, la théorie des é.d.s. conduit à la construction de flots associés à des opérateurs unitaires, et ceux-ci permettent d'atteindre des types très généraux d'équations d'Ito non linéaires.

BIBLIOGRAPHIE

Les références *QP* renvoient aux volumes "Quantum Probability and Applications" édités par L. Accardi et W. von Waldenfels, publiés d'abord dans les Lecture Notes in M., puis chez World Scientific. Quelques articles essentiels pour l'histoire du sujet (parfois dépassés par des travaux plus récents) sont marqués d'un *.

* ACCARDI (L.), FRIGERIO (A.) and LEWIS (J.). Quantum stochastic processes, *Publ. RIMS Kyoto*, **18**, 1982, p. 94–133.

* ACCARDI (L.), JOURNÉ (J.L.) et LINDSAY (J.M.). On multidimensional markovian cocycles, *QP.IV*, p. 59–66.

APPLEBAUM (D.). 1. Quantum stochastic parallel transport on non-commutative vector bundles, *QP.III*, p. 20–36. 2. Unitary evolutions and horizontal lifts in quantum stochastic calculus, *Comm. Math. Phys.*, **140**, 1991, p. 63–80. 3. Towards a quantum theory of classical diffusions on Riemannian manifolds, *QP.VI*, p. 93–111.

* BARNETT (C.), STREATER (R.F.) et WILDE (I.F.). 1. The Ito–Clifford integral I, *J. Funct. Anal.* 48, 1982, p. 172–212. 2. — II, *J. London Math. Soc.* 27, 1983, p. 373–384. 3. — III, Markov properties of solutions to s.d.e.'s, *Comm. Math. Phys.* 89, 1983, p. 13–17. 4 —IV, a Radon–Nikodym theorem and bracket processes, *J. Oper. Th.* **11**, 1984, p. 255–271. BELAVKIN (V.P.). A quantum non adapted Ito formula and stochastic analysis in Fock scale, *J. Funct. Anal.*, **102**, 1991, p. 414–447.

CHEBOTAREV (A.M.). The theory of conservative dynamical semigroups and its applications, à paraître.

CHEBOTAREV (A.M.) et FAGNOLA (F.). Sufficient conditions for conservativity of quantum dynamical semigroups. *J. Funct. Anal.*, à paraître.

DAVIES (E.B.). *Quantum Theory of Open Systems,* Academic Press, 1976.

EVANS (M.). Existence of quantum diffusions, *Prob. Th. Rel. Fields*, **81**, 1989, p. 473–483.

EVANS (M.) et HUDSON (R.L.). * 1. Multidimensional quantum diffusions, *QP.III*, p. 69–88. 2. Perturbation of quantum diffusions, *J. London Math. Soc.*, **41**, 1992, p. 373–384.

FAGNOLA (F.). 1. On quantum stochastic differential equations with unbounded coefficients, *Prob. Theory Rel. Fields,* **86**, 1990, p. 501–516. 2. Pure birth and death processes as quantum flows in Fock space, *Sankhya, ser. A*, **53**, 1991, p. 288–297. 3. Unitarity of solutions to quantum stochastic differential equations and conservativity of the associated quantum dynamical semigroup, *QP. VII*, à paraître. 4. Chebotarev's sufficient conditions for conservativity of quantum dynamical semigroups, à paraître. 5. Diffusion processes in Fock space, à paraître. 6. Characterization of isometric and unitary weakly differentiable cocycles in Fock space, à paraître *QP. VIII*.

FAGNOLA (F.) et SINHA (K.B.). Quantum flows with unbounded structure maps and finite degrees of freedom, *J. London M. Soc.*, à paraître.

* GORINI (V.), KOSSAKOWSKI (A.) et SUDARSHAN (E.). Completely positive dynamical semigroups of n–level systems, *J. Math. Phys.*, **17**, 1976, p. 821–825.

* HUDSON (R.L.), KARANDIKAR (R.L.) et PARTHASARATHY (K.R.). Towards a theory of non commutative semimartingales adapted to brownian motion and a quantum Ito's formula, *Theory and Applications of Random Fields, Bangalore 1982,* LNCI **49**, 1983, p. 96–110.

HUDSON (R.L.) et PARTHASARATHY (K.R.). * 1. Quantum Ito's formula and stochastic evolutions, *Comm. Math. Phys.*, **93**, 1984, p. 301–303. * 2. Stochastic dilations of uniformly continuous completely positive semigroups, *Acta Appl. Math.*, **2**, 1988, p. 353–398. * 3. Unification of fermion and boson stochastic calculus, *Comm. Math. Phys.*, **104**, 1986, p. 457–470.

HUDSON (R.L.) et ROBINSON (P.). Quantum diffusions and the noncommutative torus, *Lett. Math. Phys.*, **15**, 1988, p. 47–53.

* JOURNÉ (J.L.). Structure des cocycles markoviens sur l'espace de Fock. *Prob. Theory Rel. Fields,* **75**, 1987, p. 291–316.

* LINDBLAD (G.). On the generators of quantum dynamical semigroups. *Comm. Math. Phys.*, **48**, 1976, p. 119–130.

MEYER (P.A.). *Quantum Probability for probabilists,* à paraître aux LNM, 1993.

MOHARI (A.). 1. Quantum stochastic calculus with infinite degrees of freedom and its applications. PhD thesis, ISI Delhi 1992. 2. Quantum stochastic differential equations with unbounded coefficients and dilations of Feller's minimal solution. *Sankhya, ser. A*, **53**, 1991, p. 255–287.

MOHARI (A.) et PARTHASARATHY (K.R.). 1. On a class of generalized Evans–Hudson flows related to classical Markov processes. 2. A quantum probabilistic analogue of Feller's condition for the existence of unitary Markovian cocycles in Fock space, preprint.

MOHARI (A.) et SINHA (K.B.). 1. Quantum stochastic flows with infinite degrees of freedom and countable state Markov processes. *Sankhya, ser. A*, **52**, 1990, p. 43–57.

PARTHASARATHY (K.R.). 1. *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus,* Birkhäuser, Basel 1992.

PARTHASARATHY (K.R.) et SINHA (K.B.). Boson–Fermion transformations in several dimensions, *Pramana J. Phys.*, **27**, 1986, p. 105–116. 2. Markov chains as Evans–Hudson diffusions in Fock space. *Sém. Prob. XXIV*, LNM **1426**, 1990, p. 362–369. 3. Unification of quantum noise processes in Fock space, *QP. VI*, p. 371–384.

VINCENT–SMITH (G.F.). 1. Unitary quantum stochastic evolutions, *Proc. London Math. Soc.*, **63**, 1991, p. 1–25 2. Quantum stochastic evolutions with unbounded generators, *QP. VI*, p. 465–472.

Paul-André MEYER
IRMA
Université Louis Pasteur
(Laboratoire associé au CNRS)
7 rue René Descartes
F-67084 STRASBOURG CEDEX