Astérisque

DANIEL BENNEQUIN

L'instanton gordien [d'après P.B. Kronheimer et T.S. Mrowka]

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki, exp. n° 770, p. 233-277

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__233_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 1993
45ème année, 1992-93, n° 770

L'INSTANTON GORDIEN
[d'après P.B. Kronheimer et T.S. Mrowka]

par **Daniel BENNEQUIN**

La voie royale qui mène à la topologie des variétés de dimension 4 est l'auto-dualité des connexions (unitaires) sur les fibrés vectoriels (complexes de rang 2) ; S.K. Donaldson, puis A. Floer, ont démontré qu'elle est au moins aussi efficace que la variable complexe en dimension 2 (Cauchy, Riemann) et la géométrie hyperbolique en dimension 3 (W. Thurston). Les nœuds des espaces à trois dimensions posent des questions qui se formulent naturellement avec quatre dimensions ; en empruntant la voie auto-duale, P.B. Kronheimer et T.S. Mrowka ont résolu quelques problèmes majeurs de théorie classique des nœuds : ils parviennent à cerner la forme des classes d'homologie de dimension 2 en dimension 4.

1. ANTI-DUALITÉ SINGULIÈRE

1.1. Anti-dualité et chirurgie

Soient X une variété sur $\mathbf{R}$ lisse orientée de dimension 4 et P un fibré principal de groupe G au-dessus de X, soient $\mathbf{g}$ une métrique riemannienne sur X et $*$ l'opérateur étoile de Hodge sur les formes extérieures ($\alpha \wedge *\beta = (\alpha,\beta)\mathrm{vol}_X$) ; une connexion ∇ sur P est *auto-duale* (resp. *anti-auto-duale*) si sa courbure F, forme de degré 2 à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, vérifie $*F = F$ (resp. $*F = -F$). Avec des coordonnées euclidiennes x_1, x_2, x_3, x_4 en un point de X, l'anti-auto-dualité (ou anti-dualité, surnommée ASD) s'écrit

$$F_{12} + F_{34} = 0 \quad , \quad F_{14} + F_{23} = 0 \quad , \quad F_{13} + F_{42} = 0,$$

sur les composantes de F. Un renversement de l'orientation de X échange SD et ASD. C'est à cause de l'interprétation holomorphe qu'on accorde la préférence à l'anti-dualité : supposons $G = U_r(\mathbf{C})$ et notons E le fibré vectoriel complexe de rang r associé à P ; quelle que soit la structure complexe $\mathbf{J}$, compatible avec $\mathbf{g}$, qu'on mette sur X, ∇ est ASD si et seulement si F est purement de type $(1,1)$ et primitive, c'est-à-dire perpendiculaire à la 2-forme ω définie par $\omega(u,v) = \mathbf{g}(\mathbf{J}u, v)$. Donc, si ∇ est anti-duale, sa "partie anti-linéaire" $\nabla^{0,1}$ donne à E une structure holomorphe ; et inversement si E possède une structure analytique complexe, la condition pour que l'unique connexion unitaire compatible ∇ (définie par $A = A'' - {}^t\bar{A}''$ en trivialisation locale) soit ASD est $F.\omega = 0$ (condition d'Hermite-Einstein) (*cf.* [H], [Ga]).

Seules comptent la structure conforme et l'orientation de X.

Nous appellerons *instanton* toute connexion anti-auto-duale. Les deux qualités primordiales de l'instanton sont l'action et la dimension.

L'*action* d'une connexion unitaire est $-\frac{1}{8\pi^2}\int_X Tr(F \wedge *F)$. Lorsque X est fermée (*i.e.* compacte sans bord), la théorie de Chern-Weil dit que $\frac{1}{2\pi i}\, Tr\, F$ représente la classe entière $c_1(E)$ et que $\frac{1}{8\pi^2}\, Tr(F \wedge F)$ représente la classe rationnelle $-\frac{1}{2}\, p_1(E) = c_2(E) - \frac{1}{2}\, c_1^2(E)$; l'action des connexions ASD sur E est minimale. (La courbure de la connexion projective associée à ∇ est $F^0 = F - \frac{1}{r} Tr\, F.id_E$, et la forme $\frac{1}{8\pi^2}\, Tr(F^0 \wedge F^0)$ représente $c_2 - (\frac{r-1}{2r})c_1^2 = \frac{1}{r} c_2(End\, E)$.)

Sur X fermée, de caractéristique d'Euler χ_X et de signature σ_X, l'ensemble $\mathcal{M}(X;P)$ des classes d'équivalence de jauges d'instantons possède une *dimension virtuelle*, notée $2d$ égale à $-p_1(\mathrm{Ad}_{\mathbf{C}} P) - \frac{1}{2}\dim G(\chi_X + \sigma_X)$ (*c.f.* [A.H.S]).

Dans cet exposé, nous ne rencontrerons que les groupes U_2, SU_2 et $PU_2 = SO_3$. Pour SO_3, on définira l'action en identifiant so_3 à su_2.

Lorsque X est fermée, la valeur de l'action, $k = -\frac{1}{4}\, p_1(\mathrm{Ad} P)$, est dans $\frac{1}{4}\,\mathbf{Z}$, elle est dans $\frac{1}{2}\,\mathbf{Z}$ si $G = U_2$ et dans $\mathbf{Z}$ si $G = SU_2$. On appelle k le *nombre d'instantons.* Supposons X connexe ; si b_1 désigne le premier nombre de Betti de X et b_2^+ (resp. b_2^-) le nombre de carrés positifs (resp. négatifs) d'une réduction de Gauss de la forme d'intersection sur $H_2(X, \mathbf{R})$, on a $\sigma_X = b_2^+ - b_2^-$, et $\chi_X = 2 - 2b_1 + b_2^+ + b_2^-$, donc pour $G = SU_2$ ou SO_3

$$2d = 8k - 3(1 + b_2^+ - b_1). \tag{1}$$

Pour une métrique $\mathbf{g}$ générique (C^2) (et pour k assez grand), l'ensemble $\mathcal{M}^*$ des instantons irréductibles est une variété de dimension $2d$ (*cf.* [F.U.], [D.K.]).

(Qu'avec suffisamment d'action, $\mathcal{M}$ soit non vide vient de Taubes, 1982.)

Donaldson eut l'idée de se servir de la cohomologie de $\mathcal{M}$ pour distinguer entre des variétés de dimension 4 que le type d'homotopie ne distinguait pas :

Notons $\mathcal{A}$ l'espace affine des connexions sur P, $\mathcal{G}$ le groupe de jauge et $\mathcal{B}$ le quotient $\mathcal{A}/\mathcal{G}$. Puisqu'il faut choisir un cadre fonctionnel, les régularités Sobolev $H^s = L^2_s$, $s \geq 2$ pour $\mathcal{A}$ et $s \geq 3$ pour $\mathcal{G}$ conviennent. Soient $\mathcal{A}^*$ les irréductibles (isotropie centrale) et $\mathcal{B}^* = \mathcal{A}^*/\mathcal{G}$. Le groupe $\mathcal{G}$ agit continûment sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$, l'espace $\mathcal{B}$ est séparé et $\mathcal{B}^*$ est une variété de Banach. Le fibré principal universel sur $\mathcal{A}^* \times X$ descend en un SO_3 fibré $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{B}^* \times X$ (dit "fibré adjoint universel") ; sa *classe fondamentale* est $\mu = -\frac{1}{4}\, p_1(\mathcal{P}) \in H^4(\mathcal{B}^* \times X, \mathbf{Q})$.

Supposons X connexe et simplement connexe, et $G = SU_2$. La cohomologie rationnelle de $\mathcal{B}^*$ est engendrée par les produits obliques μ/h (intégration dans les fibres ou "slant-produit") de μ avec les classes d'homologie de X ; c'est une algèbre symétrique $\mathbf{C}[u] \otimes S(H_2(X))$, où $u = \mu/\{x\}$, $x \in X$ (Thom, Borel, Serre, *cf.* [D.K.]). Un choix d'orientation β de $H^2_+(X, \mathbf{R})$ oriente $\mathcal{M}$ (Donaldson [D2]), mais $\mathcal{M}$ n'est pas compacte et on voit mal comment définir une classe d'homologie $[\mathcal{M}]$ dans $H_*(\mathcal{B})$. Cependant, dans [D4], pour b_2^+ impair ≥ 3 et pour les grandes valeurs de k, avec $h \in H_2(X)$, Donaldson donne un sens invariant aux expressions

$$q_{k,(\beta)}(h) = (\mu/h)^d \, . \, [\mathcal{M}_k]_\beta . \tag{2}$$

(On doit choisir b_2^+ impair pour que d soit entier ; le "domaine stable" des grands k est $4k > 3(1 + b_2^+)$; et invariant signifie indépendant de la métrique $\mathbf{g}$. Le § 3.2 donnera des précisions et des généralisations.

Donaldson définit aussi des invariants pour $G = SO_3$ dépendant d'un relèvement $\widetilde{P}$ de P à U_2 : $q_{k,w;(\beta),(c)}$, où $w = w_2(P)$, $c = c_1(\widetilde{P})$.)

Les $q_k \in S^d(H_2(X))$ s'appellent *polynômes de Donaldson* (pour SU_2) ; grâce à eux, la topologie de dimension 4 a déjà fait d'énormes progrès.

D'une part, il y a des propriétés d'*annulation* :

Si l'on peut décomposer X en somme connexe $X_1 \# X_2$ telle que $b_2^+(X_1) > 0$ et $b_2^+(X_2) > 0$, alors tous les q_k sont nuls.

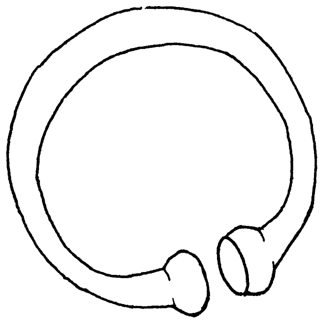
D'autre part, des propriétés de *positivité* :

Si X est une surface projective complexe connexe, simplement connexe et de genre géométrique $p_g = \frac{1}{2}(b_2^+ - 1)$ strictement positif, et si H est une section hyperplane de X, alors dès que k est assez grand (et avec le bon choix de β), $q_k(H) > 0$.

Par suite, quand une surface projective X (1-connexe, de genre géométrique > 0) se décompose en $X_1 \# X_2$, la forme d'intersection d'un des facteurs doit être définie négative (c'est donc une forme diagonale sur $\mathbf{Z}$, $\oplus_{\ell \leq b_2}(-1)_\ell$, d'après [D1]).

En appliquant ce résultat à des revêtements ramifiés, Donaldson obtient un théorème sur les courbes algébriques ([D5]) :

Soient X une surface projective simplement connexe et C une courbe algébrique lisse sur X, *ample* (*i.e.* les sections d'un fibré $\mathcal{O}_X(nC)$, $n > 0$ donnent un plongement projectif de X), alors il est impossible de trouver un disque plongé dans $X \backslash C$ qui simplifie C par chirurgie.



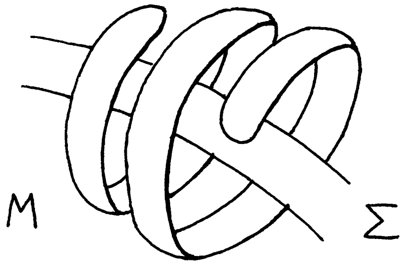
1.2. Genre et monodromie

Énoncé du problème : étant donnée une classe d'homologie entière h de degré deux de X, comprendre le plus petit genre possible g_h d'une surface orientée connexe plongée Σ dans la classe h.

Kronheimer ([K1], 1990) eut l'idée d'utiliser des connexions ∇' définies seulement sur $X' = X \backslash \Sigma$, d'actions finies et anti-auto-duales sur X'.

Pour de tels "instantons singuliers", L.M. et R.J. Sibner (*cf.* [S & S]) ont prouvé l'existence d'une holonomie limite M autour de Σ, constante (à conjugaison près) le long de Σ.

Supposons $G = SU_2$. Les valeurs propres de M sont $\exp(\pm 2\pi i \alpha)$ avec $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$. De plus, si la courbure F' de ∇' est L^p avec $p > 2$, la connexion ∇' induit un prolongement lisse E de E' sur X (unique à isomorphisme près) et une décomposition en $L \oplus \overline{L}$ le long de Σ, selon les directions propres asymptotiques de M (voir [S & S] et O. Biquard [B.1 & 2]). (F' se prolonge en une forme C^∞, F à valeur dans $\mathfrak{g}$, qui n'est pas en général une forme de courbure.) Il arrive donc, en plus de α, deux nombres entiers $k = c_2(E).X$ et $\ell = -c_1(L).\Sigma$, qui sont des invariants topologiques du paysage.



(Atiyah, [A.1], avait remarqué que les instantons singuliers à symétrie de révolution autour de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^4$, s'interprètent comme des "monopoles magnétiques", au sens de Prasad et Sommerfield, sur l'espace hyperbolique H^3 de courbure -1 ; la composante angulaire de ∇' est le "champ de Higgs", le nombre α est la masse, le nombre ℓ la charge magnétique et k la charge de Yang-Mills, donnée par l'action de la connexion induite sur H^3.)

Si n désigne l'auto-intersection $\Sigma.\Sigma$ de Σ en homologie, l'action de ∇' est

$$(3) \qquad -\frac{1}{8\pi^2}\int_X Tr(F' \wedge *F') = k + 2\alpha\ell - n\alpha^2.$$

Dans [K.M.1], P.B. Kronheimer et T.S. Mrowka mettent en place la théorie elliptique nécessaire (*cf.* § 1.3) :

la dimension formelle de l'espace $\mathcal{M}^{\alpha}_{k,\ell}(X,\Sigma)$ des SU_2-instantons singuliers de *masse* α, de *nombre d'instanton* k et de *nombre de monopole* ℓ est égale à

$$(4) \qquad 2d = 8k + 4\ell - (2g-2) - 3(1 + b_2^+ - b_1).$$

(Lorsque $G = SO_3$, le fibré vectoriel réel V' de rang 3 associé à P' se prolonge en V sur X avec une réduction le long de Σ du groupe structural à SO_2 :

$V_{|\Sigma} = \mathbf{1} \oplus K$. On définit alors $k = -\frac{1}{4}\,p_1(V) \in \frac{1}{4}\,\mathbf{Z}$, et $\ell = -\frac{1}{2}\,e(K) \in \frac{1}{2}\,\mathbf{Z}$. Les valeurs propres de $M_{\mathbf{C}}$ sont 1, et $\exp \pm 4\pi i\alpha$.

Rappelons que sur une variété de dimension 4, un SO_3-fibré est classifié par p_1 et w_2 soumis à la seule relation $w_2^2 \equiv p_1 \,\mathrm{mod}.4$ (Dold et Whitney, 1959). Si $w \in H^2(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est la deuxième classe de Stiefel-Whitney de V, on a dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, $k \equiv -\frac{1}{4}\,w^2$ et $\ell \equiv -\frac{1}{2}\,w.\Sigma$.

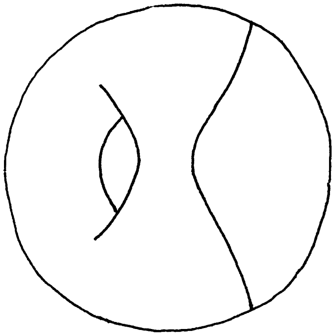
Les formules (3) et (4) marchent aussi pour $G = SO_3$ et pour l'espace $\mathcal{M}^{\alpha}_{k,\ell;w}(X, \Sigma; P)$.)

Dans [K.M.2], sont définis les polynômes $q_{k,\ell}$ dans $S^d(H_2(X\backslash\Sigma))$ et pour eux est établi un mécanisme analogue à celui de [D.4] d'annulation et de positivité qui entraîne :

THÉORÈME A (Kronheimer et Mrowka, [K.M.1 & 2]).—*Soit X une variété de dimension 4, lisse, compacte, orientée, connexe, simplement connexe, avec b_2^+ impair ≥ 3, telle que les polynômes de Donaldson, q_k, soient non nuls pour une infinité de valeurs de k ; soit Σ une surface orientée connexe plongée dans X d'auto-intersection n qui n'est ni une sphère homotope à zéro, ni une sphère exceptionnelle (i.e. d'auto-intersection -1) ; alors le genre de Σ est minoré par $1 + \frac{1}{2}\,n$. (Autrement dit : $\chi_\Sigma + \Sigma.\Sigma \leq 0$.)*

En passant par les courbes algébriques tracées sur une surface $K3$, Kronheimer et Mrowka en déduisent :

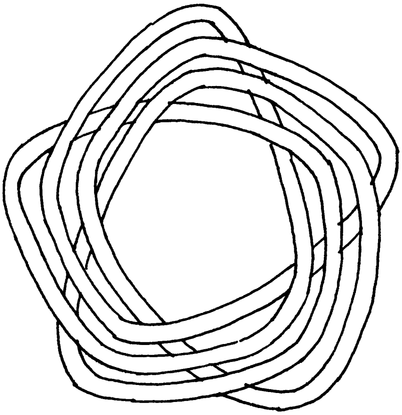
COROLLAIRE 1 (Conjecture du genre semi-locale).—*Soient C une courbe algébrique lisse dans $\mathbf{C}^2$ transverse à la sphère S^3 de rayon 1 et Γ l'entrelacs $S^3 \cap C$, alors toute surface orientée plongée V dans la boule B^4 s'appuyant sur Γ vérifie $\chi_V \leq \chi_{C \cap B}$.*



COROLLAIRE 2 (Conjecture de Milnor).—*Soient δ le nombre de points doubles ordinaires concentrés en une singularité isolée irréductible de courbe plane et u le nombre gordien du nœud qu'on obtient en coupant la courbe par une petite sphère autour du point singulier ; alors $u \geq \delta$.*

Donc $u = \delta$ d'après Pinkham.

Par exemple : le nombre gordien du nœud torique (p, q), avec p et q premiers entre eux, obtenu à partir de la singularité de $x^p = y^q$ en 0 dans $\mathbf{C}^2$, est égal à $\frac{1}{2}(p-1)(q-1)$. (Voir [B.W.] et [Mi].)



Conjecture (Folklore, *cf.* [Ki]).— Pour toute courbe algébrique lisse irréductible C dans une surface projective X et pour toute surface orientée plongée connexe S homologue à C, le genre de S est supérieur au genre de C.

Lorsque $X = \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, c'est une *conjecture de Thom.*

Le problème est encore ouvert, mais en faisant appel à des travaux récents de Friedman, Morgan et O'Grady, et en raffinant leur technique, Kronheimer et Mrowka s'approchent de la solution :

THÉORÈME B (Kronheimer, [K.3]).—*Soit X une surface projective connexe et simplement connexe, de type général, de genre géométrique impair (i.e.$b_2^+ \equiv 3 \bmod 4$), telle que le système linéaire canonique du modèle minimal de X contienne une courbe lisse ; alors toute courbe algébrique lisse connexe dans X d'auto-intersection strictement positive réalise le minimum du genre dans sa classe d'homologie.*

Au § 4, nous écrirons d'autres résultats dans cette direction, nous parlerons du genre minimal g_h pour X et h "quelconques" et nous verrons comment le problème se rattache aux calculs explicites des polynômes de Donaldson.

1.3. Instantons logarithmiques

En premier lieu, Kronheimer et Mrowka trouvent un bon cadre analytique (fonctionnel et géométrique) pour installer les espaces de modules d'instantons singuliers.

D'abord il apparaît nécessaire de considérer des métriques $\mathbf{g}$ sur X également singulières le long de Σ ;

en coordonnées locales, (u, v) euclidiennes le long de Σ et (r, θ) polaires transversalement à Σ, et pour un nombre réel $\nu \geq 1$, $\mathbf{g}$ sera une perturbation de classe C^2 du modèle "cônique"

$$du^2 + dv^2 + dr^2 + \frac{r^2}{\nu^2}\, d\theta^2.$$

(Ce modèle est conforme à $S^2 \times H^3_\nu$, produit d'un cercle par un espace hyperbolique de courbure $-\frac{1}{\nu}$. Les $\mathbf{g}^\nu$ furent introduites dans le sujet par S. Wang, à la suite de l'étude quasi-conforme de S. Donaldson et D. Sullivan ; [W] et [D.S.].)

Si ν est un nombre entier, $\mathbf{g}$ se remonte en une métrique lisse (C^2) sur une ***variété pliée*** $\widetilde{X}$ le long de Σ ; les cartes de $\widetilde{X}$ sont celles de X sur $X' = X \backslash \Sigma$, mais près de Σ, $(u, v, r, \frac{\theta}{\nu})$, $\theta \in [0, 2\pi\nu]$, servent de coordonnées (*cf.* § 2, n° 1).

Comme ces métriques sont à distance bornée des métriques lisses, les espaces L^p sont les mêmes pour elles et pour les lisses.

Pour définir les espaces affines de SU_2-connexions "logarithmiques", on se donne un fibré complexe de rang deux hermitien E sur X, décomposé en somme directe $L \oplus \overline{L}$ le long de Σ, un nombre $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ et un modèle ∇_0^α de SU_2-connexion, C^∞ hors de Σ, prenant la forme

$$i\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} d\theta + O(1)$$

au voisinage de tout point de Σ. Dès lors, $\mathcal{A}^{\alpha,p}$ désigne l'ensemble des SU_2-connexions ∇' sur $X \backslash \Sigma$, telles que $\nabla' - \nabla_0^\alpha$ soit L^p et à dérivée L^p selon ∇_0^α pour $p > 2$.

Cela entraîne que ∇' est d'action finie, à courbure L^p. La condition sur $A = \nabla' - \nabla_0^\alpha$ est du type "Sobolev à poids" : près d'un point de Σ, dans une trivialisation locale de E' où ∇_0^α est asymptotiquement diagonale, les coefficients diagonaux de A sont dans L_1^p (une dérivée dans L^p) et les coefficients hors de la diagonale sont L_1^p et rL^p. Pour le groupe de jauge $\mathcal{G}^{\alpha,p}$ (ou plutôt $\mathcal{G}^p$), on exige deux dérivées suivant ∇_0^α dans L^p (diagonale L_2^p et hors diagonale L_2^p, rL_1^p et r^2L^p). $\mathcal{B}^{\alpha,p}$ sera le quotient de $\mathcal{A}^{\alpha,p}$ par $\mathcal{G}^{\alpha,p}$.

En "jauge diagonale", la monodromie limite est $\exp 2\pi i \begin{pmatrix} -\alpha & \\ & \alpha \end{pmatrix}$. La direction propre de $\exp(-2\pi i\alpha)$ donne le fibré en droites complexes L sur Σ.

(Pour $G = SO_3$, on se donne un fibré en $\mathbf{R}^3$ orienté V, et une décomposition $\mathbf{1} \oplus K$ le long de Σ, avec orientation de K ; le modèle de la singularité est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha \\ 0 & -2\alpha & 0 \end{pmatrix} d\theta + O(1),$$

en jauge convenable le long de Σ.

Si V est fibré adjoint d'un fibré hermitien E, cassé en $L_1 \oplus L_2$ sur Σ ; en tant que O_2-fibré on a $K = L_1 \otimes L_2^{-1}$.

Dans la suite, on n'expose que le cas de $G = SU_2$.)

L'anti-auto-dualité est écrite par rapport à l'une des métriques $\mathbf{g}^\nu$; mais on désignera par $\mathcal{M}_{k,\ell}^\alpha(X,\Sigma)$ l'ensemble des instantons logarithmiques de nombres α, k, ℓ, en sous-entendant le choix de la métrique.

Les espaces $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{B}$ sont indépendants du choix de ∇_0^α (et de $\mathbf{g}$), à E, L, p et α donnés. L'action de $\mathcal{G}$ est lisse, $\mathcal{B}$ est séparé et $\mathcal{B}^*$, le complémentaire des classes réductibles (stabilisateur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$), est une variété banachique.

Pour $2 < p < 2+\varepsilon_1$, et $\alpha \in]\varepsilon_2, \frac{1}{2}-\varepsilon_2[$, ε_1, ε_2 petits > 0, $\mathcal{M}_{k,\ell}^\alpha$ est indépendant de p (et représenté par des connexions lisses sur X'). Au-dessus de $I_\varepsilon = [\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon]$, en faisant varier α, on a un cobordisme entre les modules logarithmiques $\mathcal{M}^\varepsilon$ et $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$.

Si b_2^+ est > 0 et si $\mathbf{g}$ est générique (en topologie C^2, une modification de $\mathbf{g}$ sur un petit ouvert de X suffit), il n'y a pas de connexions réductibles dans les $\mathcal{M}^\alpha$, sauf peut-être des connexions plates.

L'action est égale à $k + 2\alpha\ell - \alpha^2 n$ (où $n = \Sigma.\Sigma$). Et la dimension de $\mathcal{M}_{k,\ell}^\alpha(X,\Sigma)$, *si elle est non-vide*, est donnée par la formule (4). (Peut-être qu'une manière plus éclairante d'écrire l'indice est de faire intervenir le nombre $d_\Sigma^K = \frac{1}{2}(2g-2+1-b_1+b_2^+)$ qui est la dimension sur $\mathbf{C}$ des formes de troisième espèce à pôle simple sur une courbe lisse Σ lorsque X est une surface projective (Kodaira 1950) ; alors

$$(5) \qquad 2d = 8k + 4(\ell + g - 1) - 6\, d_\Sigma^K.)$$

Ce que recouvrent ces théorèmes : des estimées L_s^p à poids des multiplications par $d\theta$, les comparaisons des Sobolev définis par ∇_0^α et des Sobolev à poids, l'analyse de Wang [W] et Donaldson-Sullivan [D.S.] pour estimer les normes de $d_A^-.Q_A : \Omega_2^+(\mathfrak{g}) \to \Omega_2^-(\mathfrak{g})$ où Q_A inverse à droite $d_A^+ : \Omega^1(\mathfrak{g}) \to \Omega_+^2(\mathfrak{g})$ dans le cas local $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{R}^4$.

Il est également utile de disposer de l'alternative hilbertienne ; espaces H_α^s $(= L^2_{s,\nabla_0^\alpha})$ pour les connexions, avec $s \geq 2$ et H_α^{s+1} pour les changements de jauge ; ce qui donne d'autres espaces $\widehat{\mathcal{A}}^{\alpha;s}$, $\widehat{\mathcal{G}}^{\alpha;s}$, $\widehat{\mathcal{B}}^{\alpha;s}$. Et de travailler avec des valeurs rationnelles, $\nu \in \mathbf{N}$ et $\alpha = a/\nu$, $a \in \mathbf{N}$; car les éléments de $\mathcal{A}^\alpha$ deviennent d'authentiques connexions pliées sur des variétés pliées compactes et la théorie de Fredholm s'applique (par exemple pour obtenir l'indice). Si ν est assez grand, $(\nu > s/\varepsilon)$, des résultats analogues à ceux du cadre L^p $(p > 2)$ sont vrais dans le cadre H^s sur I_ε. Les L^p sont cependant nécessaires pour interpoller entre les valeurs rationnelles de α.

A part ces résultats de généricité, le point fondamental est un théorème de "compacité faible", à la Uhlenbeck :

$(X, \Sigma$ et E, L sont fixes), soient α_n une suite qui converge vers α dans $]0, \frac{1}{2}[$ et $\mathbf{g}_n^{\nu_n}$ une suite de métriques côniques qui converge vers $\mathbf{g}^\nu$, pour ν assez grand ; soit ∇_n' une suite de connexions ASD par rapport aux $\mathbf{g}_n$, de masses α_n ; il existe des nombres k', ℓ' et une connexion ∇' dans $\mathcal{M}^\alpha_{k',\ell'}$, des points x_i, $i \in I$, de $X\backslash\Sigma$ et z_j, $j \in J$, de Σ en nombres finis, une sous-suite ∇'_{n_m} et des transformations de jauges g_m, tels que $g_m \nabla'_{n_m} g_m^{-1}$ converge vers ∇' sur tout compact de X' qui exclut les x_i et z_j, et il existe des entiers k_i, $i \in I$, k_j, ℓ_j, $j \in J$ tels que la suite de densités $|F'_{n_m}|^2$ converge sur X vers $|F'|^2 + 8\pi^2 \sum_i k_i\, \delta_{x_i} + 8\pi^2 \sum_j (k_j + 2\alpha\ell_j)\, \delta_{z_j}$. Et *surtout*, le plus important est qu'on peut assurer (pour ν grand)

$$\forall i \in I,\ k_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall j \in J,\ k_j \geq 0 \quad \text{et} \quad k_j + \ell_j \geq 0.$$

Car, vue la formule (4), cela implique que toute perte d'action $k'' + 2\alpha\ell''$ dans une "bulle", fait baisser la dimension des modules de $8k'' + 4\ell'' \geq 0$.

(Lorsque α s'approche de 0 ou de $\frac{1}{2}$, le contrôle des k_j, ℓ_j réclame des ν de plus en plus grands ; et c'est là le principal avantage des métriques côniques.)

1.4. Plan de démonstration du Théorème A

L'observation qui est au départ de la preuve :

Supposons g impair et prenons $\ell = \frac{g-1}{2}$; quand $\alpha = \frac{1}{2} - \varepsilon$ est voisin de $\frac{1}{2}$, l'action d'un instanton singulier est $\kappa = k + \frac{1}{4}(2g - 2 - n) + O(\varepsilon)$; par conséquent, si $2g - 2 < n$, on a $\kappa < k$ lorsque α s'approche de $\frac{1}{2}$.

De plus, si $2\ell = g - 1$, quel que soit α entre 0 et $\frac{1}{2}$, la dimension virtuelle de $\mathcal{M}^{\alpha}_{k,\ell}(X, \Sigma)$, donnée par (4), est indépendante de g et de ℓ et vaut le $2d$ de la formule (1).

D'où le mécanisme de la preuve : si $2\ell = g - 1$,

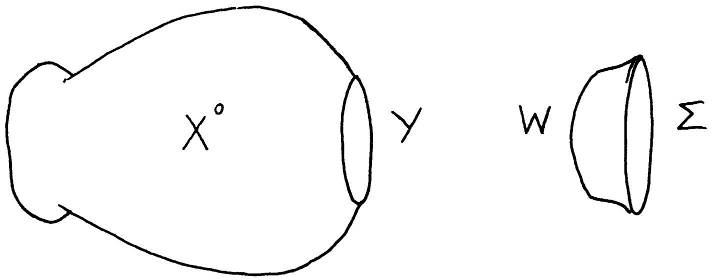
1) quand α est voisin de 0 et que q_k n'est pas identiquement nul, il existe des instantons singuliers ;

2) quand α est voisin de $\frac{1}{2}$, sous l'hypothèse absurde $2g - 2 < n$, il n'y a plus d'instanton singulier ;

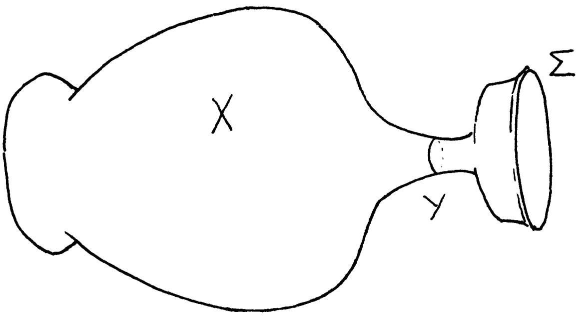
3) entre 0 et $\frac{1}{2}$, les instantons singuliers ne peuvent pas se sauver.

Comme les espaces $\mathcal{M}^{\alpha}_{k,\ell}$ sont non-compacts, dépendent de α, de $\mathbf{g}^{\nu}$, etc., le point 3 réclame un bon *instrument de mesure* : ce sera le polynôme de Donaldson "logarithmique" $q_{k,\ell}$.

Pour les points 1 et 2, la stratégie est l'*excision* : on découpe X en deux morceaux, X^0 et W^0, le long d'une hypersurface Y au bord d'un voisinage tubulaire de Σ ; W^0 contenant Σ.



On définit des espaces de modules d'instantons d'actions finies convenables $\mathcal{M}(X^0)$ et $\mathcal{M}(W^0, \Sigma)$ (*cf.* § 3.1) et on cherche à décrire $\mathcal{M}(X, \Sigma)$ avec une partie du produit $\mathcal{M}(X^0) \times \mathcal{M}(W^0, \Sigma)$. La relation sera seulement "asymptotique" : quand la métrique sur X étrangle Y assez fort. Mais les invariants de Donaldson, adaptés comme il faut, permettent de la prolonger à toutes les métriques.



Le point 1 est le théorème d'existence (ou de positivité) : Kronheimer et Mrowka considèrent la surface réglée W qui compactifie W^0 (*cf.* § 2.3) et, pour α proche de 0, identifient un point de $\mathcal{M}^{\alpha}_{0,\ell}(W, \Sigma)$ avec une classe de drapeau holomorphe sur Σ. C'est la partie "géométrie algébrique" (§ 2), elle donne l'allure des instantons logarithmiques au voisinage de Σ (fibrés pliés ou structures paraboliques) : quand $\ell = \frac{1}{2}(g-1)$, il y a 2^g fois plus d'instantons logarithmiques locaux que d'instantons ordinaires sur W.

Sous certaines hypothèses ($n = \Sigma.\Sigma > 0$, $4g > n+8$, $2d > 4k, \cdots$), il est possible de préciser le rapport entre $\mathcal{M}(X)$ et $\mathcal{M}(X^0)$, ou entre $\mathcal{M}(W, \Sigma)$ et $\mathcal{M}(W^0, \Sigma)$. Par exemple, $q_k = q_k^0$ sur l'image de $H_2(X \backslash \Sigma)$ dans $H_2(X)$.

Avec d'autres restrictions encore ($\alpha \sim 0$, $n \not\equiv 0$ $mod.4$, $\pi_1(X \backslash \Sigma) = 0 \cdots$), Kronheimer et Mrowka font l'analyse du recollement des instantons : c'est le "Mayer-Vietoris fort" du § 3.4. De là vient l'égalité $q_{k,\ell} = 2^g q_k^0$. Un autre contrôle de convergence forte démontre le point 2 (théorème d'annulation).

En mettant bout à bout, on obtient des cas particuliers du théorème A ; des arguments topologiques en déduisent le cas général (§ 3.4).

Dans ce plan, les étapes sont très techniques, les principaux écueils sont des théories entières à développer, et il faut admirer Kronheimer et Mrowka pour avoir si bien navigué entre les difficultés.

2. UNE SURFACE RÉGLÉE PLIÉE

2.1. Variétés et fibrés pliés ("orbifolds")

L'unique modèle de *variété pliée* qui intervient est $(w,z) \overset{p_\nu}{\mapsto} (w,z^\nu)$, $\nu \in \mathbf{N}$, $\nu \geq 1$, de $\mathbf{C}^2$ dans $\mathbf{C}^2$; on note H le groupe $\mathbf{Z}/\nu\mathbf{Z}$.

Une structure pliée sur un ensemble X est un atlas de *cartes pliées compatibles*. Une carte est un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U} & \xrightarrow{\quad\widetilde{\varphi}\quad} & \widetilde{U}' \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ X \supset U & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & U' \end{array}$$

où U est un sous-ensemble de X, $\widetilde{U}'$ un ouvert de $\mathbf{C}^2$ saturé pour l'action de H, p' la restriction de p_ν, $U' = p'(\widetilde{U}')$, φ et $\widetilde{\varphi}$ des bijections ; donc H agit sur $\widetilde{U}$ et $U = \widetilde{U}/H$. La compatibilité est l'existence de diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U}'_{ij} & \xrightarrow{\quad\widetilde{\varphi}_{ji}\quad} & \widetilde{U}'_{ji} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi_i(U_i \cap U_j) = U'_{ij} & \xrightarrow{\quad\varphi_j\,\varphi_i^{-1}\quad} & U'_{ji} = \varphi_j(U_i \cap U_j) \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont des isomorphismes (on a le choix entre isomorphismes holomorphes, ou C^∞ sur $\mathbf{R}$, ou continus, ou etc.).

Les morphismes se définissent comme pour les variétés ; on a aussi des *faisceaux pliés* (à la Grothendieck : par exactitude de suites d'ensembles). Le passage aux invariants sous H fait un foncteur oubli vers les variétés et les faisceaux dessus.

Les *fibrés vectoriels* (ou principaux) *pliés* sont définis par des *cocycles pliés* : des fonctions de transition $\widetilde{g}_{ij} : \widetilde{U}_{ij} \times_{U_{ij}} \widetilde{U}_{ji} \to GL$, ($C^\omega_{\mathbf{C}}$, $C^\infty_{\mathbf{R}}$ ou C^0 selon) satisfaisant à $\widetilde{g}_{ij}(x_i,x_j)\widetilde{g}_{jk}(x_j,x_k) = \widetilde{g}_{ik}(x_i,x_k)$, $\forall i,j,k$, lorsque x_i, x_j, x_k ont même image dans X, et $\widetilde{g}_{ii}(x,x) = 1$, $\forall i$, $\forall x \in \widetilde{U}_i$. Les *diviseurs* $\widetilde{f}_i$ vérifient $\widetilde{g}_{ij}(x,y) = \widetilde{f}_i(x)\widetilde{f}_j^{-1}(y)$; en particulier, $\widetilde{f}_i(x) = \widetilde{g}_{ii}(x,x^\gamma)\widetilde{f}_i(x^\gamma)$, $\forall \gamma \in H$.

Les fibrés s'identifient aux faisceaux localement libres.

Dans notre cas, le lieu du pli est la surface Σ^2 dans la variété X^4, et l'on notera $\widetilde{X}$ la variété pliée.

Supposons $\widetilde{X}$ analytique complexe ; si $\widetilde{E}$ est un fibré vectoriel holomorphe plié de rang r sur $\widetilde{X}$, il existe des nombres entiers ≥ 0 et $< \nu$, $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_r$ et un diviseur matriciel pour $\widetilde{E}$ qui s'écrit localement $\begin{pmatrix} z^{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & z^{a_r} \end{pmatrix} F_i(w, z^\nu)$; les nombres a_i sont des invariants *locaux* de $\widetilde{E}$ le long de Σ.

Exemple.— A tout entier a est associé le fibré en droites plié $\widetilde{\mathcal{O}}(a\Sigma)$ dont les sections locales $\widetilde{s}$ sont les fonctions sur $\widetilde{U}$ telles que $div(\widetilde{s}) + a\Sigma \geq 0$. Le faisceau des invariants de $\widetilde{\mathcal{O}}(a\Sigma)$ sur X est $\mathcal{O}(m\Sigma)$ si $m \leq \frac{a}{\nu} < m+1$. Et $\widetilde{\mathcal{O}}(a\Sigma)$ est localement isomorphe à $\widetilde{\mathcal{O}}(a'\Sigma)$ si et seulement si a est congru à a' modulo ν. Un isomorphisme global entraîne $a = a'$ dans $\mathbf{Z}$.

En choisissant une métrique kählérienne pliée $\widetilde{\omega}$ sur $\widetilde{X}$, on peut définir le *degré* des fibrés en droite pliés $\widetilde{L}$:

à l'aide d'une connexion (pliée unitaire) de courbure $\widetilde{F}$

$$\deg_{\widetilde{X},\widetilde{\omega}} \widetilde{L} = \frac{1}{2\pi i} \int_X \widetilde{F} \wedge \widetilde{\omega}$$

(la convention d'intégration est $\frac{1}{\nu} \int_{\widetilde{U}}$ sur les cartes ramifiées).

Avec cette notion, on définit la *stabilité* (resp. *semi-stabilité*) des fibrés holomorphes ; par exemple, pour un SL_2-fibré $\widetilde{E}$, cela signifie qu'il n'y a pas de morphisme analytique plié non nul d'un fibré en droites holomorphe plié de degré ≥ 0 (resp. > 0) dans $\widetilde{E}$.

D'autre part, quel que soit $a \in \mathbf{N}$, entre 0 et $\frac{\nu}{2}$, pour $\alpha = a/\nu$, on peut voir $\mathcal{M}^\alpha_{k,\ell}(X, \Sigma)$ comme un ensemble de classes de connexions pliées anti-auto-duales sur $\widetilde{X}$. Ainsi à chaque instanton logarithmique (de masse a/ν), on associe une structure de fibré holomorphe plié sur $\widetilde{E}$ (un relèvement de E dépendant de L).

B.F. Steer et A.J. Wren, étendant un célèbre résultat de Donaldson (*cf.* [D6], [Ma]), démontrent que cette correspondance établit une équivalence entre SL_2-fibrés stables pliés d'invariants (k, ℓ, a) et instantons irréductibles sur (X, Σ) de nombres (k, ℓ, α). (De plus, comme dans le cas lisse, un instanton réductible correspond à un fibré semi-stable, sous sa forme décomposée.)

(Si on travaillait avec des SO_3-instantons dont la classe w_2 est réduction d'une classe c de type $(1,1)$, on trouverait des fibrés holomorphes avec $c_1 = c$.)

2.2. Fibrés paraboliques

Continuons avec une courbe lisse dans une surface complexe. Le pas suivant est d'identifier $\mathcal{M}^{\alpha}_{k,\ell}(X,\Sigma)$ à un ensemble de fibrés holomorphes sur X munis de structures paraboliques sur Σ.

La définition des *structures paraboliques* généralise celle qu'ont donnée Mehta et Seshadri en dimension 1 sur $\mathbf{C}$ (*cf.* [L]) :

Soit E un fibré holomorphe sur X ; une structure parabolique sur E au-dessus de Σ est la donnée d'une filtration de $E_{|\Sigma}$ par des sous-fibrés holomorphes

$$E_{|\Sigma} = F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_p \supset 0,$$

et d'une suite de poids entre deux nombres réels qui diffèrent de 1 :

$$\rho \leq \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_p < \rho + 1.$$

Les morphismes $u : E \to E'$ demandent que $\mu'_j \leq \mu_i$ force $u_{|\Sigma}(F_i) \subset F'_j$.

O. Biquard ([Bi.2]) vient de démontrer l'existence d'une équivalence de catégories entre :

(i) la catégorie des fibrés holomorphes hermitiens sur $X\backslash\Sigma$, à courbure L^p, pour un $p > 2$, avec pour morphismes les applications holomorphes bornées ;

(ii) celle des fibrés holomorphes sur X, avec structure parabolique sur Σ.

(La correspondance est donnée par la croissance des sections : les sections analytiques locales à valeur dans F_i le long de Σ vérifient $|s(z)| = O(r^{\mu_i})$.)

Ici nous n'aurons affaire qu'à des SL_2-fibrés E (déterminant trivialisé) et à des fibrés en droites. La filtration des SL_2-fibrés sera du type $E_{|\Sigma} \supset L \supset 0$ et les poids seront $-\alpha < \alpha$ (avec $\rho = -\frac{1}{2}$).

Lorsque X est munie d'une métrique kählérienne ω (même à singularité cônique), on peut définir le *degré parabolique* des fibrés en droites paraboliques (L',β') :

il suffit de choisir une connexion unitaire de L' qui définit une première forme de Chern c'_1 et de poser

$$\deg \operatorname{par}(L',\beta') = (c'_1 + \beta'\Sigma).\omega.$$

On dit qu'un SL_2-fibré parabolique E est *stable* (paraboliquement) si pour tout morphisme parabolique $L' \to E$ non nul, le degré parabolique de L' est < 0. (De même semi-stable, avec ≤ 0.)

Si ω est lisse ($\nu = 1$) et que Σ est un diviseur ample, O. Biquard ([Bi.2]) déduit de son équivalence de catégories un résultat conjecturé par Kronheimer ([K.1]) : il y a une bijection naturelle entre l'espace des instantons irréductibles $\mathcal{M}^{\alpha}_{k,\ell}{}^{*}$ et l'espace des fibrés holomorphes stables (E, L, α) modulo équivalence parabolique tels que $c_2(E).X = k$, et $c_1(L).\Sigma = -\ell$.

Pour les métriques côniques avec $\nu \in \mathbf{N}^{\times}$ et pour $\alpha = a/\nu$, $a \in \mathbf{N}$, $0 < a < \nu/2$, Kronheimer et Mrowka, s'inspirant de Furuta & Steer, et de Steer & Wren, construisent une bijection "naturelle" entre SL_2-fibrés paraboliques (E, L, α) sur (X, Σ) et SL_2-fibrés holomorphes pliés d'invariants (ℓ, a) sur $\widetilde{X}$. Cette bijection est compatible avec une correspondance naturelle entre fibrés en droites paraboliques (L, β), où $\beta = b/\nu$, $b \in \mathbf{N}$, $-\frac{1}{2} < \beta < \frac{1}{2}$, et fibrés en droites pliés de poids b, *qui respecte les degrés.* (Attention à un décalage de $[\frac{\nu}{2}]$, partie entière de $\frac{\nu}{2}$; le fibré parabolique concerné est $(\widetilde{L} \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}\ ([\frac{\nu}{2}]\Sigma))^{H}$.)

En raccordant avec le n° 1, on obtient une équivalence entre :

(i) les instantons logarithmiques irréductibles de (X, Σ), pour une métrique ω cônique avec angle d'ouverture $2\pi/\nu$, et nombres (k, ℓ, α), où $\alpha = a/\nu$, $a \in \mathbf{N}$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$;

(ii) les SL_2-fibrés paraboliques stables (E, L, α) sur (X, Σ) (pour la même métrique ω), avec $c_2(E).X = k$, $c_1(L).\Sigma = -\ell$.

De plus, Kronheimer et Mrowka démontrent que les structures différentiables sur les modules se correspondent bien, y compris aux points singuliers : quasi-isomorphismes entre les complexes définissant les espaces tangents (d'un côté la $\frac{1}{2}$-signature tordue de Atiyah, Hirzebruch, de l'autre Kodaira-Spencer, Kuranishi).

2.3. Les espaces Σ-logarithmiques locaux : $\mathcal{M}^{\alpha}_{0,\ell,(g,n,\nu)}$

Les données sont : une surface de Riemann lisse compacte Σ de genre g (≥ 2) et trois entiers $n > 0$, $\ell > 0$, $\nu > 0$. Le premier entier est le degré d'un fibré en droite complexe N sur Σ, le second est aussi le degré d'un fibré en droite L^{-1}, mais ici s'arrête la symétrie : N est le voisinage de Σ dans la complétion projective $W = \mathbf{P}(\mathbf{1} \oplus N)$ et L^{-1}, donc L, reste un fibré le long de Σ.

W est une surface réglée au-dessus de Σ ; on note Σ' la section à l'infini et C la fibre de $W \to \Sigma$. En homologie, $\Sigma' \sim \Sigma - nC$, $\Sigma.\Sigma = n$, $\Sigma'.\Sigma' = -n$, $\Sigma.C = 1$, $C.C = 0$. On a $b_1 = 2g$ et $b_2^+ = 1$.

On ne va pas considérer sur W des métriques génériques mais des métriques de *variété kählérienne pliée* ; c'est ici que ν intervient. Par exemple, soit f C^∞ sur W, constante près de Σ', valant $r^{2/\nu}$ près de Σ, et soit ω_0 la 2-forme d'une métrique de Kähler lisse sur W ; on peut prendre $\omega = \omega_0 + \varepsilon i d' d'' f$. Cette forme définit une classe de cohomologie dans $H^2(W, \mathbf{R})$, la même que celle de ω_0. Si ε est petit > 0, ω est $(1,1)$-strictement-positive.

On suppose que les relevées $\widetilde{\omega}$ sur les voisinages ramifiés ($\widetilde{U} \xrightarrow{p_\nu} U$) le long de Σ sont lisses. Et on note $[\omega] = \beta(\Sigma + tC)$ dans $H^2(W)$ en sous-entendant la dualité de Poincaré ; alors $\beta > 0$ et $n + 2t > 0$ (car $\omega.\omega > 0$).

L'objet de nos attentions est $\mathcal{M}^\alpha_{0,\ell'}(W, \Sigma)$ avec $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ et $\ell' \in \mathbf{Z}$, $\ell' \leq \ell$ (connexions ASD, SU_2, de masse α et charge ℓ' sur le fibré topologiquement trivial).

Comme l'action vaut $2\alpha\ell' - \alpha^2 n$, $\mathcal{M}^\alpha_{0,\ell'}(W, \Sigma)$ est vide dès que $\ell' \leq 0$.

De plus, un petit lacet autour de Σ étant toujours homotope à zéro dans W, il n'y a pas de connexions plates avec $\alpha \neq 0$.

Pour qu'il y ait une connexion réductible dans $\mathcal{M}$, il faut (et il suffit) que l'on trouve une connexion d'holonomie $\exp(-2\pi i\alpha)$ sur un fibré L', avec $c_1.\Sigma = -\ell'$ et courbure harmonique (ASD) (co-) homologue à $c_1 + \alpha\Sigma$. L'annulation de k dit que $c_1^2 = 0$. En écrivant tout ça pour $c_1 = \lambda\Sigma + \mu C$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{Z}$), on découvre que, soit $\lambda \neq 0$ et alors $\mu = \ell'$ et $n\lambda + 2\ell' = 0$, soit $\lambda = 0$ et alors $\mu = -\ell' = -\alpha(n+t)$. On élimine la première éventualité avec $n > 2\ell$ et la seconde avec $\alpha < \frac{1}{n+t}$. Sous ces deux hypothèses, on a donc $\mathcal{M}^\alpha_{k,\ell'} = (\mathcal{M}^\alpha_{k,\ell'})^*$.

Pour ce qui est de la compacité, on suppose α suffisamment petit pour que $\frac{1}{n} > 2\alpha\ell - \alpha^2 n$ (par exemple $\alpha < \frac{1}{2n\ell}$) ; il y a alors tellement peu d'actions disponibles que la proposition de la fin du n° 3, §1 (valable si ν est assez grand) interdit tout accident du nombre d'instantons : dans une suite d'éléments de $\mathcal{M}^\alpha_{0,\ell'}$ les seuls accidents sont des explosions le long de Σ perdant $2\alpha\ell_i$ ($0 \leq \ell_i \leq \ell'$) quantité d'action. En tout cas, la suite de connexions converge sur un voisinage N' de Σ'.

Enfin, quitte à restreindre encore plus la quantité d'action, on assure que les réductions le long de Σ' sont de degré 0. Comme ℓ' est supposé > 0, on n'aura aucune possibilité de réduction. D'où une application de restriction r' bien définie de $\mathcal{M}^{\alpha}_{0,\ell'}(X,\Sigma)$ dans $\mathcal{B}^*_{\Sigma'}$, espace des classes de connexions irréductibles sur $E_{|\Sigma'}$.

Tout ceci se fait en fixant une fois pour toutes la métrique lisse sur un voisinage de Σ'.

2.4. Fonctions Théta d'ordre 2

Donnons-nous sur (W_n,Σ_g) un fibré parabolique (E,L,α), avec $c_2(E)=0$, $c_1(L).\Sigma=-\ell$, $\alpha=a/\nu$, $a\in\mathbf{N}$.

La proposition suivante de [KM.2] est décisive :

Si $\alpha>0$ est assez petit ($<\frac{1}{n}$ et $<\frac{1}{n+t}$), (E,L,α) est paraboliquement stable si et seulement si E est semi-stable ; et alors E provient d'un fibré semi-stable sur Σ.

(Ici la semi-stabilité de E est à prendre au sens classique de Narasimhan et Seshadri, *cf.* [D6]. La démonstration est surtout faite d'arithmétique élémentaire.)

Ainsi Kronheimer et Mrowka ramènent le calcul de $\mathcal{M}^{\alpha}_{0,\ell}$ à un problème de géométrie algébrique pure : trouver les sous-fibrés holomorphes L de degré $-\ell$ de $E_{|\Sigma}$.

Notons $\overline{\mathcal{M}}^{\alpha}_{0,\ell}=\cup_{\ell'\leq\ell}\mathcal{M}^{\alpha}_{0,\ell'}$ le quotient de la compactification d'Uhlenbeck de $\mathcal{M}^{\alpha}_{0,\ell}$ par oubli des bulles. K. & M. prouvent d'abord que $\mathcal{M}^{\alpha}_{0,\ell'}$ est lisse, quel que soit $\ell'\leq\ell$. Puis que l'opération r' de restriction à Σ' envoie $\overline{\mathcal{M}}^{\alpha}_{0,\ell}$ dans $\mathcal{SU}_g$, espace des modules de SL_2-fibrés semi-stables sur Σ'.

Enfin, supposons g impair ; lorsque $\ell=\dfrac{g-1}{2}$, les deux espaces de modules $\overline{\mathcal{M}}^{\alpha}_{0,\ell}$ et $\mathcal{SU}_g$ ont la même dimension : $6g-6$ sur $\mathbf{R}$, et :

THÉORÈME.— *Le degré de* $r':\overline{\mathcal{M}}^{\alpha}_{0,\ell}\to\mathcal{SU}_g$ *est* 2^g.

(*Remarque* : r' est holomorphe, le degré compte le nombre de points au-dessus d'un point générique.)

(La raison du 2^g : laissons L parcourir la jacobienne $J_{-\ell}(\Sigma')$ des fibrés en droite de degré $-\ell$; le théorème des familles d'Atiyah-Singer donne

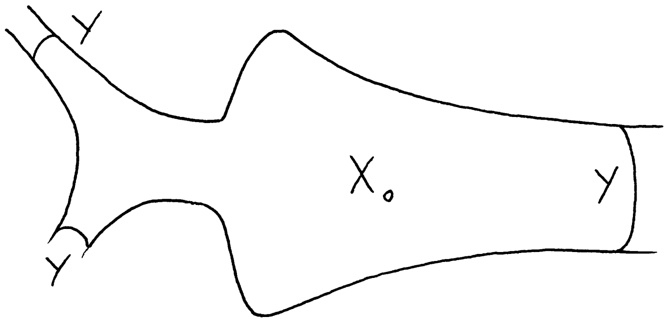
$$ch(-\mathrm{Ind}(d''_{L^{-1}\otimes E}))=2(g-1-\ell)+2\Theta,$$

donc la g-ième classe de Chern de $-\mathrm{Ind}(d''_{L^{-1}\otimes E})$, évaluée sur $[J_{-\ell}]$ vaut 2^g. Et, lorsque $\ell = (g-1)/2$, cela s'interprète comme l'existence, génériquement, de 2^g sous-fibrés L de degré $-\ell$ de E.)

3. SUITES DE MAYER-VIETORIS

3.1. Bouts cylindriques

Soit X^0 une variété de dimension 4 sur $\mathbf{R}$ lisse et orientée mais non-compacte ; on suppose qu'il existe une pièce compacte X_0 dans X^0 de bord Y (variété fermée lisse orientée de dimension 3) et un difféomorphisme de X^0 sur $X_0 \cup_Y (Y \times [0, \infty[)$. On munit X^0 d'une métrique complète $\mathbf{g}$ qui induit sur $Y \times [0, \infty[$ le produit d'une métrique sur Y par la métrique de la demi-droite réelle.



C. Taubes, A. Floer, J.W. Morgan, T.S. Mrowka et T. Ruberman... (*cf.* [T] et [M.M.R.]) ont analysé les connexions ASD *d'action finie* ∇^0 au-dessus de X^0 sur un fibré principal P pour $G = SU_2$ ou SO_3 ; la première information est que la restriction de ∇^0 aux $Y_R = Y \times \{R\}$, modulo équivalence de jauge, converge vers une connexion plate C^∞ au-dessus de Y lorsque R tend vers l'infini (*cf.* l'exposé de J.-C. Sikorav [Si]).

Si $G = SU_2$, P est trivial. Si $G = SO_3$, il se peut que P_Y ne soit pas trivial. Toutefois, si le groupe structural de P se relève à U_2 sur $Y \times [0, \infty[$, l'hypothèse d'action finie entraîne $w_2(P_Y) = 0$ et par conséquent P_Y trivial.

Pour simplifier l'exposé, on supposera donc $w_2(P_Y) = 0$, et on choisira une trivialisation $P_Y = Y \times G$.

Notons $\mathcal{M}(Y;G)$ l'espace des modules de G-connexions plates modulo transformations de jauges sur $Y \times G$. C'est le quotient de l'espace des représentations de $\pi_1(Y)$ dans G par l'action adjointe de G.

Les connexions sur le fibré trivial $Y \times G$ peuvent s'identifier à des formes différentielles A à valeurs dans $\mathfrak{g}$; elles ont un invariant de jauge, défini modulo $\mathbf{Z}$, l'intégrale de Chern-Simons :

$$CS(A) = \frac{1}{8\pi^2} \int_Y Tr(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A).$$

Si κ est l'action de ∇^0 sur X^0 et A la limite de ∇^0 à l'infini, la différence $\kappa - CS(A)$ est un nombre entier. L'ensemble $\mathcal{M}(Y)$ est le lieu critique de CS dans $\mathcal{B}_Y = \Omega^1(Y,\mathfrak{g})/C^\infty(Y,G)$, donc la fonction CS est localement constante sur $\mathcal{M}(Y)$. Nous écrirons $CS_{\mathcal{R}}$ sa valeur sur une composante connexe $\mathcal{R}$ et $\mathcal{M}_{\kappa,\mathcal{R}}(X^0;G)$ désignera l'ensemble des classes d'instantons sur X^0 d'action κ dont la limite est dans $\mathcal{R}$. Quand on ne fixe pas $\mathcal{R}$ ou κ, on l'enlève des indices.

Au-dessus de Y, soit B_Y l'opérateur $\begin{pmatrix} 0 & \overrightarrow{\mathrm{div}} \\ \overrightarrow{\mathrm{grad}} & \overrightarrow{\mathrm{rot}} \end{pmatrix}$ de $\Omega^0_Y \oplus \Omega^2_Y$ dans lui-même ; à chaque connexion plate A sur $Y \times G$ sont associés les systèmes locaux $\mathrm{ad}\, A$ et $\mathrm{ad}_{\mathbf{C}}\, A$ sur $Y \times \mathfrak{g}$ et $Y \times (\mathfrak{g} \otimes \mathbf{C})$ et les opérateurs $B_Y(\mathrm{ad}\, A)$ et $B_Y(\mathrm{ad}_{\mathbf{C}}\, A)$ sur les formes tordues. La dualité $*_Y$ identifie l'espace tangent (de Zariski) en A à $\mathcal{M}(Y)$ avec le noyau de la restriction de $B_Y(\mathrm{ad}\, A)$ à $\Omega^2_Y(\mathfrak{g})$.

Dans [A.P.S.], Atiyah, Patodi et Singer ont défini les invariants η d'asymétrie spectrale de B_Y et de ses versions tordues ; ils ont démontré entre autres que la quantité

$$\rho_Y(\mathrm{ad}_{\mathbf{C}}\, A) = \eta_{B_Y(\mathrm{ad}_{\mathbf{C}}\, A)}(0) - 3\eta_{B_Y}(0)$$

est indépendante de la métrique sur Y. On peut voir ρ_Y comme la signature (renormalisée) du Hessien de la fonctionnelle de Chern-Simons au point $\mathrm{ad}_{\mathbf{C}}\, A$, une mesure de "l'asymétrie du rotationnel tordu".

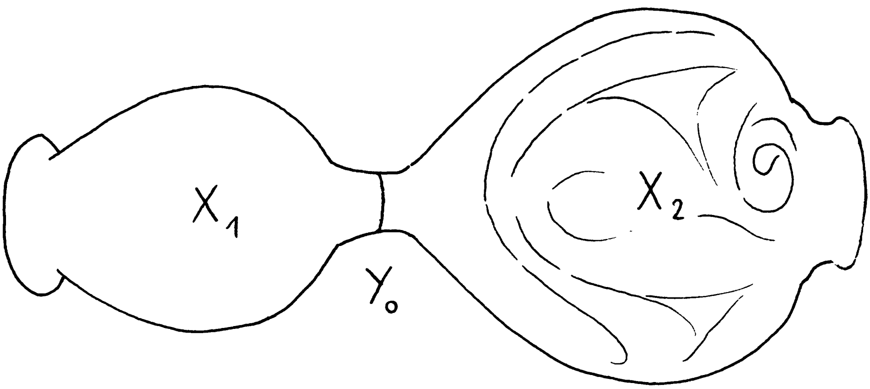
Notons $h_Y(\mathrm{ad}\, A)$ la dimension du noyau de $B_Y(\mathrm{ad}\, A)$, χ^0 la caractéristique d'Euler de X^0 et σ^0 la signature de X^0, c'est-à-dire la signature de la forme d'intersection sur l'image de $H^2_{\mathrm{comp}}(X^0)$ dans $H^2(X^0)$ (représentée par les formes harmoniques L^2). Comme on peut lire dans [T] et [M.M.R.], les théorèmes d'indices de [A.P.S.] calculent la dimension virtuelle de $\mathcal{M}_{\kappa,\mathcal{R}}(X^0)$ en un point ∇^0 de limite A :

$$(6) \qquad 2d_{\kappa,\mathcal{R}} = 8\kappa - \frac{3}{2}(\chi^0 + \sigma^0) + \frac{1}{2}h_Y(\operatorname{ad} A) + \frac{1}{2}\rho_Y(\operatorname{ad}_{\mathbf{C}} A).$$

(L'opérateur aux variations ASD de ∇ est $-(d^\nabla)^* + (d^\nabla)^+$ depuis le domaine des formes $\Omega^1_{X^0}(\mathfrak{g})$ qui convergent L^2_1 sur $Y \times [0,\infty[$ vers un élément du noyau de $B_Y(\operatorname{ad} A)$, à valeurs dans les formes L^2 de $\Omega^0_{X^0}(\mathfrak{g}) \oplus \Omega^{2,+}_{X^0}(\mathfrak{g})$; il est isomorphe à un opérateur de demi-signature tordu $d^\nabla + (d^\nabla)^* : \Omega^-_-(\mathfrak{g}) \to \Omega^+_+(\mathfrak{g})$, où Ω^-_- (resp. Ω^+_+) désigne l'espace des formes impaires (resp. paires) sur X^0 qui sont vecteurs propres pour -1 (resp. $+1$) de l'opérateur $\tau = i^{p(p-1)+\ell} *$ de Atiyah sur $\oplus_p \Omega^p(X^{2\ell})$.

Le long de $Y \times [0,\infty[$, en coordonnées (y,t), l'opérateur $-(d^\nabla)^* + (d^\nabla)^+$ prend la forme $\partial_t + B_Y(\operatorname{ad} A) + O(\frac{1}{t})$ dans une trivialisation convenable de P lorsque $t \to \infty$.)

Soient X une variété *fermée* orientée de dimension 4 et Y une sous-variété orientée de dimension 3 de X qui sépare X en deux sous-variétés compactes à bord X_1 et X_2 : $X = X_1 \cup_Y X_2$. Dans [M.M.R.], on trouve le comportement des instantons sur X lorsque la métrique $\mathbf{g}$ de X dégénère en rendant Y minuscule. Comme les équations d'anti-dualité sont invariantes conformes, on peut formuler l'hypothèse sur $\mathbf{g}$ en disant que Y devient la section centrale Y_0 d'un tube de plus en plus long $Y \times]-R, R[$, $R \to \infty$, et que les métriques sur les intérieurs X^0_1 et X^0_2 convergent vers des métriques complètes $\mathbf{g}^0_1$ et $\mathbf{g}^0_2$ “à bouts cylindriques”.



Les théorèmes sont analogues à ceux de Donaldson pour les sommes connexes :

Soit ∇_n une suite d'instantons sur X, de nombre d'instanton k, associés à une suite de métriques $\mathbf{g}_n$ du type décrit, il existe des points x_i, $i \in I$ en nombre fini, des nombres entiers positifs k_i et une sous-suite ∇_{n_m}, tels que, à transformations de jauges près,la suite ∇_{n_m} converge sur tout compact de X qui évite Y et les x_i vers un instanton ∇_1^0 sur X_1^0 et un autre ∇_2^0 sur X_2^0 ; de plus, sur $X \backslash Y$, $|F_{n_m}|^2$ tend vers $|F_1^0|^2 + |F_2^0|^2 + 8\pi^2 \, \Sigma \, k_i \, \delta x_i$.

Nous dirons que la convergence ∇_{n_m} est *forte sur* Y (ou forte à l'encolure) si le bilan d'action à la limite ne fait apparaître aucune perte en Y, c'est-à-dire si

$$k = \kappa_1^0 + \kappa_2^0 + \Sigma \, k_i.$$

Et qu'elle est *forte sur* X si elle est forte sur Y et que tous les k_i sont nuls.

Inversement, [M.M.R.], [T] montrent comment on peut "recoller" des instantons de X_1^0 et X_2^0 quand ils donnent la même limite dans $\mathcal{M}(Y)$, sous certaines hypothèses de transversalité.

La description précise de ces recollements faisait l'objet de la thèse de T. Mrowka en 1989 (*cf.* [M]).

On a des résultats complets lorsque Y est fibrée en cercles sur une surface de Riemann (Σ) ; ce qui est suffisant pour les plans de Kronheimer et Mrowka (*cf.* 1.4). La théorie générale réclame sans doute de comprendre l'homologie de Floer des variétés de dimension 3 quelconques (*cf.* § 3.3).

Kronheimer et Mrowka dans [K.M.2] étendent l'analyse au cas où, dans l'un des X_i, on place une singularité logarithmique Σ. Et dans [K.3], Kronheimer traite un cas particulier où Σ coupe transversalement Y ($Y = S^3$, $\alpha = \frac{1}{4}$; on peut alors interpréter avec des SO_3-instantons pliés).

3.2. Précisions sur les polynômes de Donaldson

Soient X une variété fermée orientée de dimension 4 et P un fibré principal en SU_2 sur X. La lettre E désigne le fibré vectoriel de rang 2 associé. Pour chaque foncteur contravariant, $\mathcal{C}$, naturel pour les isomorphismes de couples (X, P), et chaque sous-variété Z de X, on notera $\mathcal{C}_Z$ la restriction à Z (de $\mathcal{C}(X, P)$).

Soient $h \in H_2(X^4, \mathbf{Z})$ et S une surface de Riemann plongée dans la classe h ; la clé de la définition par Donaldson des invariants $q_k(h)$ est de localiser les classes $\mu/h \in H^2(\mathcal{B}_X^*)$ au voisinage de S (où $\mu = -\frac{1}{4} \, p_1(\mathcal{P}) \in H^4(\mathcal{B}^* \times X, \mathbf{Q})$).

Fixons une métrique riemannienne $\mathbf{g}$ sur X, choisissons un fibré en droite holomorphe L' de degré $g-1$ sur S, par exemple une "structure spin" $L' = \sqrt{K_S}$; et considérons la famille universelle d'opérateurs de Dirac tordus $\bar{\partial}_A : \Omega^0(E_S \otimes L') \to \Omega^1(E_S \otimes L')$, $A \in \mathcal{A}_S$. On en déduit un fibré-déterminant-dual $\widetilde{\mathcal{L}}_S = (\Lambda^{\max} \operatorname{Ker} \bar{\partial}_A)^{-1} \otimes (\Lambda^{\max} \operatorname{Coker} \bar{\partial}_A)$ sur $\mathcal{A}_S$ qui est $\mathcal{G}_S$-équivariant ; ce fibré descend en un fibré $\mathcal{L}_S$ sur $(\mathcal{B}_S)^*$ (classes d'irréductibles le long de S). Notons N un voisinage tubulaire de S dans X ; on peut rappeler $\mathcal{L}_S$ sur la partie $\mathcal{B}_N^{**}$ de $(\mathcal{B}_N)^*$ que la restriction envoie dans $(\mathcal{B}_S)^*$. Il se trouve que le fibré $\mathcal{L}_N$ ainsi obtenu se prolonge (de façon unique à isomorphisme près) sur $(\mathcal{B}_N)^*$ et même sur $\mathcal{B}_N^+$, ensemble des connexions sur N qui peuvent être réductibles, mais dont les facteurs irréductibles sont de degré 0. L'espace $\mathcal{B}_N^+$ contient un voisinage dans $\mathcal{B}_N$ de la connexion triviale. Notons que P_N est trivialisable, si bien qu'on peut supposer $\mathcal{B}_N^+$ et $\mathcal{L}_N$ indépendants de k. Depuis l'ouvert de $\mathcal{B}_X$ que la restriction $r_{X,N}$ envoie dans $\mathcal{B}_N^+$, on peut encore étendre $r_{X,N}^*(\mathcal{L}_N)$ en un fibré $r^*(\mathcal{L}_N)$ sur $\mathcal{B}_X^*$. D'après le théorème de l'indice des familles, la première classe de Chern $c_1(r^*\mathcal{L}_N)$ n'est autre que μ/h (*cf.* [D.3] et [D.K.]). En particulier μ/h est une classe entière.

Le fibré $\mathcal{L}_S$ arrive avec un diviseur de sauts Θ_S (une section C^∞ canonique), mais comme on tient à la transversalité, on le perturbe en choisissant une section générique (C^∞ hilbertienne) t_S. Faisons en sorte que le lieu des zéros $\mathcal{V}_N$ de la section rappelée sur $\mathcal{B}_N^+$ évite un voisinage de la connexion triviale. La sous-variété de codimension deux $r_{X,N}^*(\mathcal{V}_N)$ de $\mathcal{B}_X^*$ est duale de Poincaré de μ/h. On dit qu'elle constitue un ensemble de *connexions spéciales* sur S.

Supposons $b_2^+ - b_1$ impair afin que la dimension $2d = 8k - 3(1 + b_2^+ - b_1)$ de $\mathcal{M}_k(X)$ soit paire. Choisissons une orientation d'homologie $\beta \in \Lambda^{\max} H^1(X, \mathbf{R}) \otimes (\Lambda^{\max} H_+^2(X, \mathbf{R}))^{-1}$ de façon à ce que tous les $\mathcal{M}_k$, $k \in \mathbf{N}$ soient orientés en même temps ([D.2]).

Pour définir les $q_k(h)$, $k \in \mathbf{N}$, on choisit d représentants lisses $S_1, \cdots, S_d$ de h, en position générale, et des voisinages $N_1, \cdots, N_d$ et puis des sections $t_1, \cdots, t_d$ de $\mathcal{L}_1, \cdots, \mathcal{L}_d$. Soient $\mathcal{V}_1^k, \cdots, \mathcal{V}_d^k$ les images réciproques $r_{X,N_i}^{-1}(t_i^{-1}(0))$ dans $\mathcal{B}_{X,k}^*$. Comme les instantons réductibles sur un ouvert non-vide sont globalement réductibles (*cf.* [D.K.]), les intersections $\mathcal{K}_d = \mathcal{M}_k^* \cap \mathcal{V}_1^k \cap \cdots \cap \mathcal{V}_d^k$ sont bien définies et forment des ensembles discrets pour des t_i génériques.

Supposons $b_2^+ > 1$ et choisissons la métrique $\mathbf{g}$ en sorte que $\mathcal{M}_k$ soit égal à

$\mathcal{M}_k^*$ et soit lisse. Lorsque X est simplement connexe et que $4k \geq 1 + 3(1 + b_2^+)$, Donaldson démontre (dans [D.4]) que $\mathcal{K}_d$ est fini et que le compte algébrique ne dépend d'aucun choix ($\mathbf{g}$, S, etc.) ; c'est un invariant C^∞ de X, h, β noté $q_{k,(\beta)}(h)$.

La principale raison des restrictions sur X et k est la présence désagréable des connexions plates, où la dimension virtuelle est souvent moins grande que la vraie dimension. Déjà Donaldson ([D.4]) avait remarqué que les invariants définis avec $G = SO_3$ et des fibrés à deuxième classe de Stiefel-Whitney non-nulle sont plus maniables.

(La pratique des SO_3-instantons a été initiée par Fintushel et Stern en 1984, *cf.* [F.S.]. Voir aussi Kotschick [Ko].)

Morgan et Mrowka ont imaginé un stratagème pour élargir la définition des invariants : par éclatement de points dans X ([M.M]). L'opération s'avère non seulement pratique, mais aussi métaphysiquement correcte, car en "théorie topologique des champs", seules comptent les amplitudes (des nombres) associées aux opérateurs (des figures) et pas les représentations choisies (espaces de modules) qui les donnent, *cf.* [Wi].

Éloignons-nous un instant du cadre SU_2 : P_1 est un fibré en groupe U_2 sur une variété fermée orientée de dimension 4, X_1 ; et si E_1 est le fibré de rang 2 hermitien associé, on suppose qu'il existe une sphère S^2 dans X_1 avec $c_1(E_1).S^2$ *impair*. Comme espace $\mathcal{A}_1$, on prend les connexions *projectives* sur P_1, c'est-à-dire qu'on passe à PU_2 opérant sur $\mathbf{P}^1$. Il revient au même de considérer le fibré V_1 associé à la représentation adjointe de SU_2 sur su_2 ou bien la représentation ordinaire de SO_3 sur $\mathbf{R}^3$, en identifiant $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ à $\mathbf{P}^1$. (Ce qu'on perd est une phase dans chaque direction de E_1.) Le w_2 de V_1 est la réduction modulo 2 de c_1 et l'action des instantons est donnée par $k_1 = -\frac{1}{4}\, p_1(V_1)$. (On a $w_2^2 \equiv p_1(4)$.) Mais (petite subtilité), pour le groupe de jauge $\mathcal{G}_1$, on demande qu'il existe un relèvement aux automorphismes de E_1 de déterminant 1. Si bien que $\mathcal{B}_1^* = \mathcal{A}_1^*/\mathcal{G}_1$ est un revêtement fini du $\mathcal{B}^*$ qu'on aurait en gardant toutes les transformations de jauge SO_3.

Les espaces d'instantons $\mathcal{M}_{k_1,c_1}$ sont orientés par un choix β_1 d'orientation de l'homologie (Akbulut, Mrowka, Ruan) (car on a choisi un relèvement entier de w_2). Pour toute classe entière $c \in H^2(X, \mathbf{Z})$, on a $\mathcal{M}_{k_1,c_1} \approx \mathcal{M}_{k_1,c_1+2c}$. (Changer β en $(-1)^{c^2}\beta$ pour avoir l'orientation.)

La dimension $2d_1$ est encore donnée par la formule (1).

La nouvelle sympathique est que, si $b_2^+ > 1$, $\mathcal{M}_{k_1,c_1}$ se compactifie bien selon Uhlenbeck en une "variété stratifiée" $\overline{\mathcal{M}}_{k_1,c_1}$. Les dimensions des strates descendent de 4 en 4, donc l'évaluation sur $[\mathcal{M}_{k_1,c_1}]$ des classes de cohomologie de $\mathcal{B}_1^*$ de degré $2d_1$ ne pose pas de problème. (Le point important est que l'hypothèse sur $c_1(E_1)$ assure l'absence de connexions plates dans $\overline{\mathcal{M}}$.)

La cohomologie rationnelle de $\mathcal{B}_1^*$ est engendrée par les classes μ_1/v, produits obliques de $\mu_1 = -\frac{1}{4}\, p_1(\mathcal{P}_1)$, où $\mathcal{P}_1 = \mathcal{A}_1^* \times P_1/\mathcal{G}_1$, avec les classes d'homologie de X ; on peut définir des fonctions multilinéaires

$$q_{k_1,c_1}(v_1, v_2, \cdots) = (\mu_1/v_1)(\mu_1/v_2)\cdots[\mathcal{M}_{k_1,c_1}]$$

sur l'homologie rationnelle de X_1. En particulier, des polynômes de Donaldson généralisés sur $H_2(X_1;\mathbf{Q})$:

$$q_{k_1,c_1}(h_1) = (\mu_1/h_1)^{d_1}\,[\mathcal{M}_{k_1,c_1}]. \tag{7}$$

Pour passer au cas général, ou revenir à SU_2, juste on éclate un point dans X : $X_1 = X_1\#\overline{\mathbf{P}}^2$, $P_1 = P\#P_{(e)}$, où $P_{(e)}$ est le fibré sur le projectif retourné $\overline{\mathbf{P}}^2$ avec $c_2 = 0$ et c_1 duale de la sphère exceptionnelle $\overline{\mathbf{P}}^1 = -e$ (retournée aussi), et l'on *définit* :

$$q_k(h) = \frac{1}{2}\,(\mu_1/e)\,(\mu_1/h)^d\,[\mathcal{M}_{k+\frac{1}{4},c_1}]. \tag{8}$$

Il résulte d'un travail de Kotschick [Ko] que cela étend la définition des polynômes de Donaldson SU_2 à toute valeur de k et à toute variété X non nécessairement simplement connexe, de nombre $b_2^+ > 1$ (avec $b_2^+ - b_1$ impair).

Observons que q_k se prolonge en fonction multilinéaire sur toute l'homologie rationnelle de X, symétrique sur l'homologie paire et antisymétrique sur l'homologie impaire. Si $d = 4k - \frac{3}{2}(1 + b_2^+ - b_1)$, on écrira aussi φ_d pour q_k.

3.3. Cohomologie non-abélienne

Il existe de multiples voies d'extension des invariants polynomiaux.

D'abord, D. Kotschick a montré comment faire si $b_2^+ = 1$ (*cf.* [Ko]), les polynômes $\Phi_{d,C}^X$ dépendant de chambres dans $H^2(X,\mathbf{R})$).

Puis, comme la cohomologie *entière* de $\mathcal{B}_X^*$ est bien plus riche que sa cohomologie rationnelle, S. Donaldson s'est soucié des invariants de torsion (*cf.* [D.T.], invariants modulo 2).

Voilà déjà cinq ou six ans que Donaldson sait définir les polynômes pour certaines variétés ouvertes X^0 : lorsque X^0 est à bout cylindrique $Y\times]0,\infty[$ et que Y est réunion de sphères d'homologie entière ($H_1(Y,\mathbf{Z})=0$) (*cf.* [A2]) :

A. Floer a construit une théorie "d'homologie d'instantons" $HF_*(Y;G)$ (*cf.* [Fl], [Si]) en régularisant l'homologie de Morse de la fonction CS sur $\mathcal{B}_Y^*$. (On peut faire *comme si* $\mathcal{M}(Y;G)$ était un ensemble fini et que l'opérateur de bord était une matrice ∂_Y de type $(\mathcal{M}(Y)\times\mathcal{M}(Y))$ dont les coefficients comptent avec les bons signes les instantons d'action finie et "de dimension 1" sur $Y\times\mathbf{R}$.) Le changement de CS en $-CS$ identifie $HF(-Y)$ (orientation renversée de Y) au dual de $HF(Y)$. Lorsque $Y=Y_1\sqcup Y_2$ (réunion disjointe) $HF(Y)=HF(Y_1)\otimes HF(Y_2)$.

Pour $\mathcal{R}\in\mathcal{M}(Y)^*$ et $h\in H_2(X^0,\mathbf{Q})$, S. Donaldson donne un sens invariant C^∞ au nombre algébrique d'intersection $q_{\kappa,\mathcal{R}}(h)$ de $\mathcal{M}_{\kappa,\mathcal{R}}(X^0)$ avec des ensembles transverses de connexions spéciales pour h, à condition de supposer κ assez grand.

Il s'avère que $q_\kappa(h)$ définit une classe de cohomologie de Floer de Y (une fonction de $\mathcal{R}$ qui est un cocycle).

Cela généralise la construction des morphismes en homologie de Floer, $HF(Y_1)\to HF(Y_2)$, à partir des cobordismes orientés de dimension 4 entre Y_1 et Y_2 (*cf.* [Fl], [D.T.], [Si]).

Lorsque $X^0 = X_1^0\cup_{Y'}X_2^0$ est obtenue en recollant deux variétés à bouts cylindriques le long d'une partie Y' de leurs bouts (d'homologies sphériques), on a $S^d(H_2(X^0))=\oplus_{d_1+d_2=d}S^{d_1}(H_2(X_1^0))\otimes S^{d_2}(H_2(X_2^0))$, et, en contractant par la dualité $HF(Y')\otimes HF(-Y')\to\mathbf{Q}$, la formule suivante est vraie à coefficients dans $HF(\partial X^0)$:

$$\varphi_d^{X^0} = \sum_{d_1+d_2=d}\langle\varphi_{d_1}^{X_1^0},\varphi_{d_2}^{X_2^0}\rangle. \tag{9}$$

Ce résultat généralise le théorème du § 1.1 sur les sommes connexes ; il est à l'origine de l'invention par Atiyah, Segal et Witten des "théories topologiques des champs" (*cf.* [A2], [A3], [Wi]).

(L'intérêt de la décomposition suivant les sphères d'homologie vient d'une proposition de M. Freedmann et L. Taylor (1977) : si la forme d'intersection Q de

X^4 (fermée et simplement connexe) est une somme directe orthogonale $Q_1 \oplus Q_2$, il existe une sphère d'homologie Y découpant X en deux morceaux X_1 et X_2 dont les formes d'intersection sont équivalentes à Q_1 et Q_2. Ainsi on peut espérer calculer les q_k par découpages et collages.)

Les maîtres d'instantons, Donaldson, Braam, Fukaya, Furuta,Taubes, Mrowka et al. (*cf.* [B.D.]) sont en passe de définir l'homologie de Floer de toutes les variétés fermées, orientées de dimension 3.

Afin d'étendre la formule (9), l'idéal serait une théorie $HF(Y;G)$ formée à partir des classes de cohomologie de $\mathcal{M}(Y;G)$.

En tout cas, Kronheimer et Mrowka exposent dans [K.M.2] la construction de polynômes q_k^0 sur $H_2(X^0)$ associés à certaines composantes $\mathcal{R}$ de $\mathcal{M}(Y;SU_2)$, lorsque Y est fibrée en cercle sur une surface, avec toutefois des restrictions sur la topologie de Y et sur k (*cf.* § 3.4).

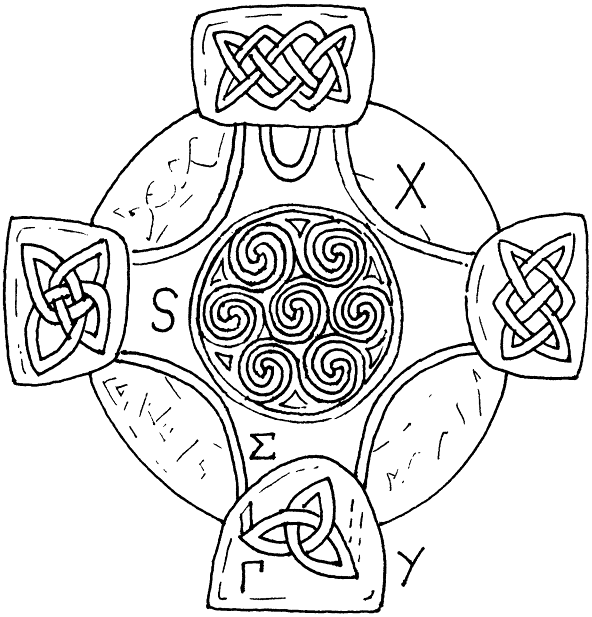
A présent, avec l'introduction des surfaces Σ dans X et des instantons singuliers s'offre une nouvelle direction :

Pour X fermée, [K.M.2] contient la définition de polynômes $q_{k,\ell}$ de degré $d_{k,\ell}$ sur $H_2(X\backslash\Sigma)$ (le d de la formule (4)). Cela passe par les modules logarithmiques $\mathcal{M}^{\alpha}_{k,\ell}(X,\Sigma;SU_2)$, pour des métriques $\mathbf{g}^{\nu}$ pointues (ν grand), et il faut supposer l'absence de connexions plates sur $X\backslash\Sigma$ pour $\alpha \neq 0, \frac{1}{2}$. Pour ν et k grands, Kronheimer et Mrowka démontrent que $q_{k,\ell}$ est indépendant de α et de $\mathbf{g}^{\nu}$.

Ensuite, suivant les idées de Kotschick et Morgan & Mrowka, ils peuvent enlever l'hypothèse ad-hoc sur les connexions plates ; dans [K2], on trouvera des $q^{X,\Sigma}_{k,\ell} \in S^d(H_2(X))$, pour Σ *immergée*, avec les seules hypothèses $b_2^+ > 1$ et $b_2^+ - b_1$ impair (*cf.* §4 2).

(Notons aussi la contrepartie du nombre de monopoles ℓ : il est possible d'enrichir $q_{k,\ell}$ en utilisant la classe d'Euler d'une réduction du fibré adjoint universel le long de $\mathcal{B}^{*,\alpha} \times \Sigma$, *cf.* § 4.3.)

Le pas suivant est trop tentant : introduire des entrelacs Γ dans les variétés de dimension 3 et définir une homologie de Floer "logarithmique" $HF_*(Y,\Gamma;G)$; en passant par les modules de connexions plates sur $Y\backslash\Gamma$ avec holonomie autour de Γ. Et pour toute paire (X^0,Σ^0) de bord (Y,Γ), définir un polynôme sur $H_2(X^0)$ à valeur dans $HF^*(Y,\Gamma;G)$, satisfaisant à des formules de recollements comme (9), et caetera.



Dans [K2], le début de ce programme est réalisé avec $G = SU_2$, $\alpha = \frac{1}{4}$, $Y = S^3$ et Γ réunion d'un ou deux cercles non noués. Kronheimer y souligne la nécessité de fixer une parallélisation du fibré normal à Γ dans Y. Bonjour Mr Jones. (Les nombres qui remplacent k et ℓ ne sont plus entiers. Ils dépendent de l'holonomie sur un parallèle de Γ et de la valeur de CS : si $n = \Sigma^0.\Sigma^0$, si $\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma^0}\omega$, ω courbure résiduelle sur Σ dans la direction L, on a $k = \kappa - 2\alpha\ell + n\alpha^2$ et $\ell = \lambda + n\alpha$.)

On peut décorer la figure avec des couleurs d'algèbre moderne. Et penser que derrière la réussite des instantons se profile une théorie nouvelle de cohomologie non-abélienne.

Le cadre serait celui de la cohomologie à valeurs dans des faisceaux de groupes, suivant la méthode de Čech, développée par J. Frenkel et P. Dedecker (*cf.* [F] et [De]), étendue aux topos de A. Grothendieck et J.-L. Verdier par J. Giraud (*cf.* [Gi]). Il ne s'agit plus d'anneaux de cohomologie mais d'objets pointés ; certains sont familiers en géométrie analytique, par exemple le H^1 peut décrire des classes d'isomorphisme de fibrés holomorphes.

En topologie, avec le faisceau des fonctions localement constantes de X dans

G, le H^1 est un espace de classes de systèmes locaux ; si X est une variété, on trouve les classes d'équivalence de représentations de $\pi_1(X)$ dans G. Pour les variétés de dimension 2 et 3, il est peu probable que l'on doive aller plus loin (Top $\iff C^\infty$ (Cerf et Moïse) et le π_1 détient tous les secrets (Poincaré, Stallings)). Mais pour les variétés de dimension 4, on peut attendre autre chose avec des coefficients déduits d'un fibré principal non trivial. Même pour X simplement connexe, la théorie devrait être intéressante.

La thèse, implicite dans les travaux de Donaldson, Kronheimer, Mrowka et al., est que les espaces $\mathcal{M}(X;P)$ de modules ASD jouent le rôle d'une *cohomologie "chirale" non-abélienne de degré* 1. Les seuls "défauts" sont le fixage de jauge ($\mathcal{M}$ dépend du choix d'une structure conforme) et les problèmes de domaines qui s'ensuivent (les flèches ne sont qu'asymptotiques, pour des métriques dégénérées).

Par exemple, le bord du § 3.1, $\mathcal{M}(X^0) \to \mathcal{M}(Y)$ vaut une application de restriction $H^1(X_0) \to H^1(Y)$.

T.S. Mrowka s'est penché sur l'inverse de la flèche du milieu dans une suite de Mayer-Vietoris pour les modules de connexions anti-duales, analogue à :

$$H^0(Y) \longrightarrow H^1(X) \longrightarrow H^1(X_1) \times H^1(X_2) \longrightarrow H^1(Y).$$

C'était le sujet du § 3.1. Lorsque P est trivial, la suite de Mayer-Vietoris non-abélienne corrrespond au théorème de Van Kampen.

Dans le cadre analytique complexe, la restriction des fibrés stables (resp. semi-stables) à une surface de Riemann plongée "générale" Σ dans une surface projective X donne une flèche $\mathcal{M}(X; SU_2) \to \mathcal{M}(\Sigma) = \mathcal{SU}_\Sigma$ (Mehta, Ramanathan).

Enfin, une partie du § 2 repose sur la comparaison de $\mathcal{M}(\mathbf{P}(\mathbf{1} \oplus N))$ avec $\mathcal{M}(\Sigma)$; on peut voir ça comme un isomorphisme de Thom ou un analogue de la périodicité de Bott en K-théorie comme la présente Atiyah dans [A.4].

Problème : Découvrir un *site* $\mathcal{S}_X$ et un *lien* $\mathcal{L}_P$ sur ce site (*cf.* [Gi] ou SGA4), naturellement associés à une variété X de dimension ≤ 4 et à un fibré principal P sur X, dont la cohomologie $H^*(\mathcal{S}_X; \mathcal{L}_P)$ notée $\mathcal{H}^*(X;P)$ corresponde par un analogue non-abélien de "Hodge-de Rham-Kodaira" aux modules ASD.

On peut essayer de formuler quelques axiomes pour la cohomologie $\mathcal{H}^*(X;P)$ et pour des objets de cohomologie relative $\mathcal{H}^*(X,Y;P)$:

(1) Naturalité pour les difféomorphismes.

(2) Fonctorialité pour les restrictions et suites exactes de paires.

(3) Avec P trivial et ($Y = \emptyset$), on souhaite rencontrer les représentations du groupe fondamental.

(4) Excision ; par exemple, une suite de Mayer-Vietoris de correspondances d'ensembles pointés : $\mathcal{H}^0(Y) \to \mathcal{H}^1(X) \to \mathcal{H}^1(X_1) \times \mathcal{H}^1(X_2) \rightrightarrows \mathcal{H}^1(Y)$.

(5) Des suites exactes longues associées aux suites exactes courtes de coefficients.

(6) Ce qui tient lieu d'axiome de la *dimension* :

Les $\mathcal{H}^i(X, Y)$ sont munis de topologies satisfaisant à une forme de dualité de Poincaré ; par exemple, si X^4 est fermée et $G = SU_2$, avec $k = -\frac{1}{4}p_1(\mathrm{Ad}\,P)$, l'homologie rationnelle de $\mathcal{H}^1(X; P)$ est nulle en degré $> 2d = 8k - \frac{3}{2}(\chi + \sigma)$, il y a une classe fondamentale $\mu_{\mathcal{H}} \in H_{2d}(\mathcal{H}^1(X; P))$, etc.

(7) Un axiome d'*action* ; en particulier, pour X^4 fermée et $G = SU_2$, on demande une classe $\mu_{\mathcal{P}} \in H^4(X \times \mathcal{H}^1(X; P))$. De manière à disposer de "plongements d'Abel" en cohomologie : $\alpha : H^*(X) \longrightarrow H^*(\mathcal{H}^1(X))$; définis par $\alpha(h) = \mu_{\mathcal{P}}/(h \cap \mu_X)$ (ici μ_X est la classe fondamentale de X dans $H_4(X)$).

Les classes $\alpha(h_1) \cup \cdots \cup \alpha(h_m) \cap \mu_{\mathcal{H}}$ sont censées reconnaître les polynômes de Donaldson.

Les exigences portent sur la cohomologie ordinaire de la cohomologie non-abélienne. La version à bord met en jeu la cohomologie de Floer qui est une cohomologie (au sens des instantons) de la cohomologie (ordinaire) de la cohomologie (au sens non-abélien).

Remarque.— On voit bien les propriétés de dualité en théorie ASD : considérons une surface S dans X^4 ; soient $X(k)$ un sous-ensemble de $\mathcal{M}_k$ constitué d'instantons concentrés près des k-uples de points $\{x_1, \cdots, x_k\}$ de X, "à la Taubes", et $S(k)$ le sous-ensemble de ceux dont un centre x_i au moins appartient à S ; Donaldson et Kronheimer [D.K.], prolongeant une remarque de Taubes, montrent que $S(k)$ est duale de Poincaré de l'image réciproque de μ/S dans $H^2(X(k); \mathbf{Z})$. Ainsi, l'intersection des surfaces dans X avec S se prolonge aux "surfaces d'instantons" quelconques.

Ce point de vue pose quelques questions sur les modules d'instantons :
par exemple, y a-t-il un transfert pour les revêtements finis ?
Ou encore, qu'est-ce qui correspond aux cocycles de degré 2 ?

Les travaux de Kronheimer et Mrowka montrent qu'il faudrait aussi définir des objets de cohomologie "logarithmiques" $\mathcal{H}(X,\Sigma;P)$, comme ceux de Hyodo, Kato, Fontaine et Illusie pour les structures logarithmiques en Géométrie Arithmétique (*cf.* [I]). A propos, est-ce qu'un problème répond à la conjecture du genre sur une surface arithmétique ?

Une dernière remarque : si l'on se demande pourquoi la cohomologie non-abélienne de degré 1 dit quelque chose sur le genre des classes d'homologie de degré 2, on peut se rappeler qu'en 1941 H. Hopf démontrait que le groupe de Poincaré détermine les classes dans H_2 qui n'ont pas de représentant sphérique. En se servant des fibrés non triviaux sur une variété de dimension 4, [M.M.R.] et [K.M.1 & 2] arrivent à déterminer des classes qui ne peuvent pas être représentées par des sphères C^∞ plongées.

3.4. Convergences fortes

Revenons, avec Kronheimer et Mrowka, aux $\mathcal{M}^{\alpha}_{k,\ell}(X,\Sigma)$, instantons logarithmiques pour SU_2, singuliers le long d'une surface connexe de genre $g \geq 2$ et d'auto-intersection $n > 0$.

L'idée pour évaluer les polynômes $q_{k,\ell}$ est d'extirper Σ de X en pinçant très fort sur le bord Y d'un voisinage tubulaire N de Σ dans X.

Comme au § 2.3, on notera $W = \mathbf{P}(\mathbf{1} \oplus N)$, Σ' la section à l'infini dans W, N' un voisinage tubulaire de Σ' dans W. Ainsi, $X = X\backslash N \cup_Y W\backslash N'$.

La variété Y est fibrée en cercles sur Σ (classe d'Euler n), et les composantes connexes de $\mathcal{M}(Y)$ sont de trois sortes :

d'abord une grosse $\mathcal{R}_+$, de dimension $6g-6$, qui s'identifie à $\mathcal{SU}_g$, vu comme espace des classes d'équivalence de représentations de $\pi_1(\Sigma)$ dans SU_2 ; elle vient des représentations de $\pi_1(Y)$ qui sont triviales sur la fibre S^1 de $Y \to \Sigma$;

une deuxième (aussi grosse) $\mathcal{R}_-$, qui vient des représentations de $\pi_1(Y)$ où la fibre S^1 va sur $-Id$; on peut aussi l'identifier à $\mathcal{SU}_g$ si n est pair ;

et puis des "petites" composantes $\mathcal{R}_m$ où S^1 se représente par un élément d'ordre n, de valeurs propres $\exp(\pm 2\pi_i \frac{m}{n})$, $0 < m < \frac{n}{2}$) ; elles correspondent à des représentations réductibles de $\pi_1(Y)$. Et l'on peut identifier chaque $\mathcal{R}_m$ à la jacobienne de Σ.

On a $CS(\mathcal{R}_+) \equiv 0$ mod.1, $CS(\mathcal{R}_-) \equiv \frac{n}{4}$ mod.1, $CS(\mathcal{R}_m) \equiv \frac{m^2}{n}$ mod.1.

Maintenant, le cheminement des arguments de Kronheimer et Mrowka :

a) la dimension de $\mathcal{M}_{\kappa,\mathcal{R}_\pm}(X\backslash N)$ est égale à $2d = 8k - 3(1 + b_2^+ - b_1)$. Mais si $4g > 6 + n$, la dimension des autres $\mathcal{M}_{\kappa,\mathcal{R}_m}(X\backslash N)$ est strictement inférieure. (Cela vient de (6).)

b) (Ceci est le point technique, "Mayer-Vietoris fort", le plus important.)

Lorsque $b_2^+ > 1$, que $X\backslash\Sigma$ est simplement connexe, que $\Sigma.\Sigma = n$ n'est pas congru à 0 modulo 4, que $4g > 6 + n$, et que k est dans le domaine stable ($2d > 4k$), alors pour α petit ($2\alpha\ell - n\alpha^2 < \frac{1}{n}$) et ν grand, la convergence d'une suite d'instantons de $\mathcal{M}^\alpha_{k,\ell}(X,\Sigma)$ quand Y s'écrase ne peut être que *forte sur tout* X, et les instantons limites ∇_1^0 sur $X\backslash N$ et ∇_2^0 sur $W\backslash N'$ appartiennent respectivement à $\mathcal{M}_{k,\mathcal{R}_+}(X\backslash N)$ et à $\mathcal{M}_{0,\ell}(W\backslash N', \Sigma)$.

($n \not\equiv 0 \,\mathrm{mod}.4$ est là pour éliminer les limites $\mathcal{R}_-$, et $\pi_1(X\backslash\Sigma) = 0$ pour éviter les connexions plates.)

c) Si $n > 0$, $4g > 8 + n$, et $2d > 4k$, on peut définir des polynômes de Donaldson q_k^0 sur $H_2(X\backslash\Sigma; \mathbf{Q})$, via les espaces $\mathcal{M}_{k,\mathcal{R}_+}(X\backslash N)$.

d) Sous les mêmes hypothèses, sur $H_2(X\backslash\Sigma; \mathbf{Q})$,

$$q_k = q_k^0.$$

En particulier, $q_k^0(h)$ ne dépend que de l'image de h dans $H_2(X; \mathbf{Q})$.

e) Lorsque $\ell = \dfrac{g-1}{2}$;

$$q_{k,\ell} = 2^g q_k^0.$$

(Comparaison de l'application de restriction $\mathcal{M}^\alpha_{0,\ell}(W,\Sigma) \to \mathcal{SU}_{\Sigma'}$, et de l'application de bord $\mathcal{M}^\alpha_{0,\ell;\mathcal{R}_+}(W\backslash\Sigma',\Sigma) \to \mathcal{R}_+$.)

Supposons $\ell = \dfrac{g-1}{2}$ (donc g impair) ;

lorsque α s'approche de $\frac{1}{2}$, si jamais on avait $2g - 2 < n$, on aurait $k + 2\alpha\ell - \alpha^2 n < k$.

Un nouveau contrôle de convergence forte (argument de comptage) montre que $q_{k,\ell}$ devrait s'annuler pour les grands k. D'où :

THÉORÈME [KM.2].— *Si X est simplement connexe, avec b_2^+ impair ≥ 3, que $X\backslash\Sigma$ est simplement connexe, que $n = \Sigma.\Sigma$ est strictement positif et non-congru* *à 0 modulo 4, que g, le genre de Σ, est impair ≥ 3 ; si de plus $\frac{1}{2}n + 2 < 2g - 2 < n$; alors, pour k grand, les polynômes de Donaldson (pour SU_2), q_k, s'annulent identiquement sur l'orthogonal de Σ dans $H_2(X; \mathbf{Z})$.*

De là, on déduit le théorème A :

Supposons d'abord que $n = \Sigma.\Sigma$, soit > 0 ; prenons λ exemplaires de Σ, $\lambda \in \mathbf{N}^{\times}$ et mettons-les en position générale avec uniquement des points doubles positifs, puis transformons chaque point double en une anse simple (modèle $xy = 0$ devient $xy = \varepsilon$ dans $\mathbf{C}^2$) ; on obtient ainsi une surface plongée Σ_λ homologue à $\lambda\Sigma$; notons g_λ son genre et n_λ son auto-intersection. On a $2-2g_\lambda = \lambda(2-2g)-\lambda(\lambda-1)n$ et $n_\lambda = \lambda^2 n$, donc $2g_\lambda - 2 - n_\lambda = \lambda(2g - 2 - n)$. Et si λ est assez grand, $2g_\lambda - 2 > \frac{1}{2}n_\lambda + 2$.

En éclatant un point de Σ_λ, on passe à Σ'_λ dans $X' = X \# \overline{\mathbf{P}}^2$, et $X' \backslash \Sigma'_\lambda$ est simplement connexe. Σ'_λ a le même genre que Σ_λ, et son auto-intersection est $n'_\lambda = n_\lambda - 1$. Si λ est pair, on a $n'_\lambda \not\equiv 0 \,\mathrm{mod}.4$. Si g_λ n'est pas impair, on ajoute une petite anse à Σ'_λ sans changer sa classe d'homologie. Le b_2^+ de X' est le même que celui de X et d'après [D4], pour toute classe $h \in H_2(X)$, on a $q_k^{X'}(h) = q_k^X(h)$. Supposons à présent $2g - 2 < n$, la différence $2g_\lambda - 2 - n_\lambda$ tend vers $-\infty$. Notons (e) le diviseur exceptionnel de $\overline{\mathbf{P}}^2$; d'après le théorème précédent, les polynômes $q_k^{X'}$ s'annulent pour toutes les valeurs de k assez grandes dans tous les hyperplans orthogonaux dans $H_2(X')$ aux classes $\lambda\Sigma - (e)$. On aura donc $q_k \equiv 0$.

Si jamais $n = 0$ et $g = 0$, mais Σ non homologue à zéro, on choisit une surface T orientée plongée qui coupe Σ en μ points d'intersection tous positifs et on remplace Σ par la somme de T et de λ exemplaires "parallèles" de Σ ; après chirurgie, on trouve S_λ avec $S_\lambda.S_\lambda = TT + 2\lambda\mu$ et genre $(S_\lambda) =$ genre $(T) + \lambda\mu - \lambda$. Pour λ grand, on a $2g_S - 2 < S.S$ et on est ramené au cas précédent.

Ces arguments rendent manifeste la nature asymptotique de l'inégalité $2g - 2 \geq n$.

4. LA FORME DE L'HOMOLOGIE

4.1. Problème du genre

Soit X une variété lisse orientée simplement connexe de dimension 4.

Soit h un élément de $H_2(X,\mathbf{Z})$; il existe toujours une surface Σ lisse, connexe et orientée représentant h ; on s'interroge beaucoup sur le genre minimum g_h que Σ peut avoir.

Il y a peu de temps, la meilleure estimation de g_h était celle de Rokhlin, Hsiang et Sczarba (1971 ; obtenue grâce au théorème de la signature équivariante) :

par exemple, si h est divisible par 2, en notant $n = h.h$, on a $g_h \geq \frac{1}{4}n - b_2^+$ (et en retournant l'orientation $g_h \geq -\frac{1}{4}n - b_2^-$).

(L'inégalité avec $2b_2^+$ à la place de b_2^+ s'obtient juste en écrivant $b_2(Z) \geq \sigma(Z)$ pour le revêtement double branché Z le long de Σ.)

Pour $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, si h est de degré $d = 2m$, cela donne $g_h \geq m^2 - 1$. La *conjecture de Thom* dans ce cas donnerait $g_h \geq 2m^2 - 3m + 1$. On voit qu'asymptotiquement il manque un facteur 2.

Plus généralement (*cf.* § 1.2), on conjecture que si X est une surface projective complexe, toute courbe algébrique lisse réalise le minimum du genre dans sa classe d'homologie.

D'après la formule d'adjonction, si K est la classe canonique de X, cela s'énonce :

pour les surfaces Σ dans les classes algébriquement réalisables

$$2g - 2 \geq \Sigma.\Sigma + K.\Sigma.$$

Le théorème A de Kronheimer et Mrowka dit seulement $2g - 2 \geq \Sigma.\Sigma$, mais il concerne toutes les surfaces Σ à l'exception des sphères homologues à 0 et des sphères d'auto-intersection -1.

Le théorème A est optimal lorsque X est une surface $K3$ puisqu'alors K est homologue à 0.

Notons que cela suffit pour démontrer la conjecture du genre semi-locale (corollaire 1, § 1.2). En effet, si C est une courbe algébrique lisse dans $\mathbf{C}^2$ transverse à la sphère S^3, on choisit une courbe algébrique lisse D dans $\mathbf{C}^2$ de degré 6, transverse à C évitant la boule B^4, et on regarde l'image réciproque C' de C dans le revêtement double ramifié X' le long de D. Comme X' est une surface $K3$, on ne peut trouver de surface orientée de genre inférieur à celui de C' qui lui soit homologue. Or, c'est ce qui arriverait si l'on pouvait trouver une surface orientée plongée V dans B^4 s'appuyant sur $C \cap S^3$ et vérifiant $\chi_V > \chi_{C \cap B}$.

Kronheimer et Mrowka ne sont pas les premiers à attaquer le problème du genre à l'aide des équations d'anti-dualité. Il y eut R. Friedman et J.W. Morgan ([F.M.1]) pour exclure des représentants sphériques dans les surfaces de Dolgachev. Ensuite, Morgan, Mrowka et Ruberman ([M.M.R.]) démontrèrent (en utilisant les instantons à bouts cylindriques) que sous les hypothèses du théorème A, toute sphère essentielle doit être d'auto-intersection strictement négative et tout tore plongé d'auto-intersection inférieure ou égale à 1. (P. Lisca [Li] a montré comment passer de 1 à 0 dans le cas du tore pour certaines surfaces X.)

En couplant les méthodes classiques de revêtements branchés avec des arguments de théorie de jauge, D. Kotschick et C. Matič ([Ko.Ma]) ont obtenu des résultats qui ne sont pas couverts par le théorème A. Par exemple : dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ pour h de degré $d = 2(2\ell+1)$, $\ell \geq 1$, on a $g_h \geq (2\ell+1)^2 + 1$. Cela confirme la conjecture de Thom jusqu'au degré 6.

Ils montrent aussi que les résultats de [D.5] subsistent si au lieu de supposer $C.C > 0$, on suppose la classe de C divisible dans $H_2(X; \mathbf{Z})$.

Mais c'est encore avec les instantons logarithmiques qu'on remporte les plus grands succès.

4.2. Croisements positifs

Pour démontrer le théorème B du § 1.2 (qui implique la conjecture du genre pour un grand nombre de surfaces projectives de topologies différentes), il faut comprendre la nature des invariants polynomiaux $q_{k,\ell}^{X,\Sigma}$ attachés aux surfaces dans X (*cf.* § 3.3).

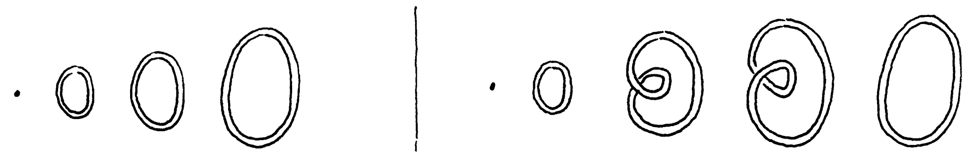
Ce que Kronheimer met en évidence dans [K.2], c'est qu'ils sont loin de détecter le type d'isotopie de Σ dans X ; ce sont en fait des invariants homotopiques de Σ :

Kronheimer commence par étendre la définition des $q_{k,\ell}^{X,\Sigma}$ sur $H_2(X)$ aux surfaces Σ *immergées* à points doubles ordinaires (pour cela, il passe par les SO_3-instantons sur des éclatements de X). Ensuite, il examine comment les $q_{k,\ell}^{X,\Sigma}$

changent à travers une homotopie de Σ.

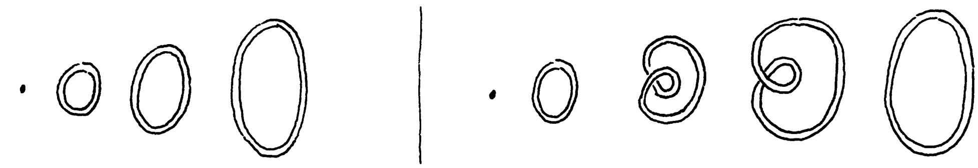
Il suffit de considérer les trois cas "élémentaires" :

(I) une *torsion positive*, introduisant un nouveau point double d'intersection positive

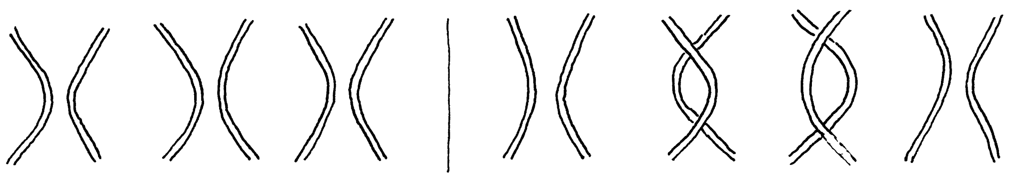


(Ce dessin représente le film local de Σ avant et après.)

(II) une *torsion négative*, introduisant un point double négatif



(III) une *traversée* ("finger move"), introduisant un point double positif et un négatif.



Posons $\varepsilon = -1$ dans les cas (I) et (III), $\varepsilon = 0$ dans le cas (II) ; la relation suivante est vraie entre les polynômes de (X, Σ) avant et après l'accident :

$$q_{k,\ell}^{\text{nouveau}} = q_{k,\ell}^{\text{ancien}} + \varepsilon\, q_{k-1,\ell+2}^{\text{ancien}}. \tag{10}$$

(Kronheimer la démontre par excision en découpant X par une petite sphère enfermant un ou deux disques sur Σ.)

Moralité : si l'on définit avec Kronheimer

$$R_d^{\Sigma}(s) = 2^{-g(\Sigma)} \sum_{d=d_{k,\ell}} s^{-\ell}\, q_{k,\ell}^{X,\Sigma}, \tag{11}$$

fonction génératrice des invariants, et si l'on note n_+ le nombre de croisements positifs de Σ, il vient :

THÉORÈME.— $(1-s^2)^{n_+} R_d(s)$ *est invariant par homotopie de* Σ.

(La série R_d est un polynôme de Laurent en s car les $q_{k,\ell}^{X,\Sigma}$ sont nuls si $k<0$ ou $k+\ell < \frac{1}{4}\,\Sigma.\Sigma$; généralisation du théorème d'annulation du § 3.4.)

Soit m_+ l'ordre d'annulation de R_d en $s=1$; du théorème on déduit que $n_+ - m_+$ est un invariant d'homotopie.

Supposons par exemple que Σ soit immergée avec $R_d(1) \neq 0$ (*i.e.* $m_+ = 0$) et avec un seul point double positif (*i.e.* $n_+ = 1$). Alors toute surface homotope à Σ présentera encore un point double positif au moins. En effet, si $\Sigma' \sim \Sigma$, on a $n'_+ = m'_+ + 1$ et $m'_+ \geq 0$.

Partant de là, dans [K2], Kronheimer indique un plan de positivité-annulation (utilisant [K.M.2]) pour aboutir au résultat suivant :

THÉORÈME.— *Soit X, surface projective complexe simplement connexe, telle qu'il existe une classe $\alpha \in H^2(X,\mathbf{C})$ de type $(2,0)$ vérifiant $q_k^X(\alpha+\overline{\alpha}) > 0$ pour une infinité de valeurs de k, soit C une courbe algébrique lisse connexe dans X telle que $C.C > 0$. Alors C réalise le minimum du genre dans sa classe d'homologie.*

Avec O'Grady [0'G1] (si les polynômes qu'il définit de façon algébrique sont stablement les mêmes que ceux de Donaldson), on obtient le théorème B.

4.3. Invariance homologique

L'espace des classes d'équivalence de jauge d'instantons logarithmiques irréductibles $\mathcal{B}_{X,\Sigma}^{\alpha,*}$ possède des classes de cohomologie associées aux points de X et à ceux de Σ :

Si μ est la classe fondamentale $-\frac{1}{4}\,p_1(\mathcal{P})$ dans $H^4(\mathcal{B}_{X,\Sigma}^{\alpha,*} \times X)$ (*cf.* § 1.1) et si $x \in X$, il y a la classe $\nu_x = \mu/\{x\}$;

Si Q est la réduction SO_2 de $\mathcal{P}$ le long de $\mathcal{B}_{X,\Sigma}^{\alpha,*} \times \Sigma$, et si $\varepsilon = -\frac{1}{2}\,e(Q)$ dans $H^2(\mathcal{B}_{X,\Sigma}^{\alpha,*} \times \Sigma)$ (classe d'Euler), pour $y \in \Sigma$, il y a aussi $\varepsilon_y = \varepsilon/\{y\}$. ($\varepsilon^2 = -\nu$.)

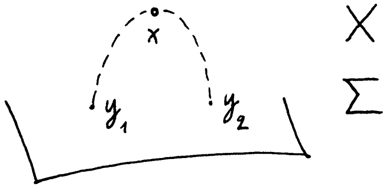
Étant donnés $x_1, \cdots, x_u$ des points de X, $y_1, \cdots, y_v$ des points de Σ, et des classes $h_1, \cdots, h_w$ dans $H_2(X, \mathbf{Z})$, on définit

$$q_{k,\ell}(x_1, \cdots, y_1, \cdots, h_1, \cdots) = \nu_{x_1} \cdots \varepsilon_{y_1} \cdots \mu/h_1 \cdots [\mathcal{M}^{\alpha}_{k,\ell}]. \tag{12}$$

On notera $i^X(x)$ (resp. $i^\Sigma(y)$) le produit intérieur par ν_x (resp. ε_y).

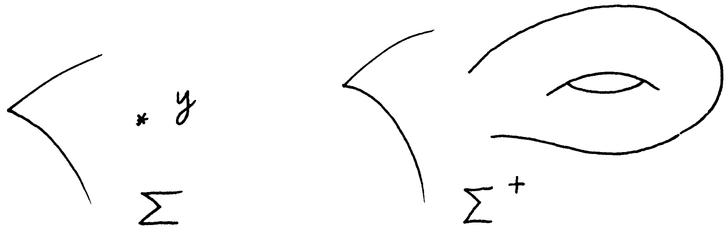
[K.2] établit des formules de récurrence entre les $q_{k,\ell}$; par exemple

$$i^X(x)\, q_{k,\ell} = q_{k,\ell-1} + q_{k-1,\ell+1} - i^\Sigma(y_1) i^\Sigma(y_2)\, q_{k,\ell}.$$



Ou bien, quand on ajoute une anse

$$q^{X,\Sigma^+}_{k,\ell} = -2\, i^\Sigma(y)\, q^{X,\Sigma}_{k,\ell}.$$



Kronheimer introduit alors une *hypothèse* sur l'ensemble des polynômes de Donaldson :

$$i^X(x_1) i^X(x_2)\, q_{k,\ell} = 4 q_{k-1,\ell}. \tag{13}$$

Il appelle *de type simple* toute variété X qui satisfait à (13) quels que soient $\Sigma, k, \ell, x_1, x_2$.

Les intersections complètes de grands degrés sont de type simple ; conjecturalement, *toute* variété (simplement connexe ?) de dimension 4 est de type simple.

La convention

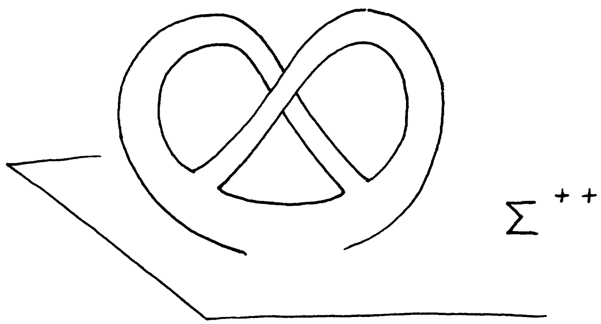
$$q_{k-\frac{1}{2},\ell} = \frac{1}{2}\, i^X(x)\, q_{k,\ell}, \tag{14}$$

$x \in X \setminus \Sigma$, permet de définir une série R modifiée :

$$S_d(s) = 2^{-g} \sum_{\substack{d_{k,\ell}=d \\ k\in\frac{1}{2}\mathbf{Z},\ell\in\mathbf{Z}}} s^{-\ell}\, q_{k,\ell}. \tag{15}$$

Si X est simple, $(1-s^2)^{n_+}\, S_d(s)$ est invariant par homotopie et se transforme facilement par addition d'une anse de genre 2 :

$$S_d^{++}(s) = (s^{-1} - 2 + s)\, S_d(s). \tag{16}$$



Notons ℓ_+ l'ordre d'annulation de S_d en $s=1$; le nombre $\gamma = g + n_+ - \ell_+$ est un invariant *homologique* de Σ (peut-être dépendant de d et de la parité de g). La proposition de Kronheimer est que : γ est une borne inférieure de g_h.

Avec des restrictions sur la parité de g, la divisibilité de Σ... Kronheimer annonce le théorème suivant :

si X est une intersection complète de genre géométrique impair et si C est une courbe algébrique lisse dans X d'auto-intersection strictement positive, le nombre γ est égal au genre de C.

Ainsi, la fonction sur $H_2(X,\mathbf{Z})$ définie par :

$$J(h) = 2\gamma(h) - 2 - h.h$$

apparaît comme un substitut de l'intersection avec la classe canonique sur toute variété de type simple.

4.4. Les classes "basiques"

Notons $Q \in S^2(H_2(X,\mathbf{Q}))$ la forme quadratique d'intersection et identifions toute classe $L \in H_2(X,\mathbf{Q})$ avec la forme linéaire $h \mapsto L.h$ sur $H_2(X,\mathbf{Q})$.

Lorsque X est une intersection complète ou bien une surface minimale elliptique simplement connexe, R. Friedman, B. Moishezon et J.W. Morgan avaient repéré en 1987 que les polynômes q_k^X sont fonctions de Q et de K (classe canonique de X) ([F.M.M.]). En particulier, la direction de K dans $H_2(X;\mathbf{R})$ est un invariant de la structure différentielle réelle de ces surfaces.

Les q_k^X ne sont connus que dans peu de cas. Cependant, Friedman et Morgan les ont calculés lorsque X est une surface $K3$ ([F.M.], [O'G2], [M.O'G]) :

$$q_{2i}^{(K3)} = (2i-1)!!\, Q^i.$$

Dans [K.M.3], Kronheimer et Mrowka annoncent d'autres calculs complets :

avec la convention $q_{k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\, i^X(x) q_k$, on définit $\varphi_d = q_k$ pour $d = d_k \equiv \frac{1}{2}(1+b_2^+)$ mod.2 (et l'on pose $\varphi_d = 0$ pour les autres valeurs de d).

Quel que soit $h \in H_2(X)$, on écrit :

$$\varphi(h) = \sum_d \frac{\varphi_d(h)}{d!}.$$

D'après Kronheimer et Mrowka, lorsque X est de type simple et simplement connexe, il existe des classes $K_1, \cdots, K_p$ dans $H_2(X,\mathbf{Z})$ et des nombres rationnels $a_1, \cdots, a_p$ (non nuls) tels que

$$\varphi = e^{\frac{1}{2}Q} \,\Sigma\, a_i\, e^{K_i}.$$

Exemples : pour une surface $K3$, on a $\varphi = e^{\frac{1}{2}Q}$;

pour une surface $K3$ éclatée en un point, $K3 \# \overline{\mathbf{P}}^2$, on a $\varphi = e^{\frac{1}{2}Q} \operatorname{ch} E$, où E est le diviseur exceptionnel dans $\overline{\mathbf{P}}^2$;

pour une surface elliptique minimale simplement connexe, sans fibre multiple,

$$\varphi = e^{\frac{1}{2}Q} (\operatorname{sh} F)^{p_g - 1},$$

où p_g est le genre géométrique (supposé ≥ 1) et F la classe d'une fibre elliptique générique. (Voir aussi [M.O'G].)

Enfin, la dernière annonce :

THÉORÈME C (Kronheimer et Mrowka, [K.M.3]).—*Si X est de type simple et simplement connexe, avec b_2^+ impair ≥ 3 ; pour toute surface connexe orientée plongée Σ de genre g, d'auto-intersection strictement positive, on a :*

$$2g - 2 \geq \Sigma.\Sigma + \max_i |K_i \,.\, \Sigma|.$$

La fonction $F(h) = \max_i |K_i \,.\, h|$ (certainement égale au J du § 4.3) apparaît dans le développement asymptotique de $\log \varphi(\lambda h)$ quand λ tend vers l'infini :

$$\log \varphi = \frac{1}{2} Q + F + O(1).$$

Il va de soi que les manques du texte ne tiennent qu'à moi. Je tiens quand même à remercier P.B. Kronheimer pour ses lettres et les participants du Séminaire de contact à Strasbourg où l'on a beaucoup parlé d'instantons. Et surtout je me rappelle tous les moments passés avec Marcus Slupinski et Manfred Preissendörfer autour de l'anti-dualité.

BIBLIOGRAPHIE

[A1] M.F. ATIYAH - *Magnetic monopoles in hyperbolic spaces, Vector bundles on algebraic varieties*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1984), 1-33.

[A2] M.F. ATIYAH - *New invariants of* 3 *and* 4*-dimensional manifolds*, in "Symposium on the mathematical heritage of Hermann-Weyl", University of North Carolina, Ed. R. Wells & al. (1987).

[A3] M.F. ATIYAH - *The Jones-Witten invariant of knots*, Sém. Bourbaki, exp. n° 715, novembre 1989, Astérisque **189-190** (1990), 7-16.

[A4] M.F. ATIYAH - *K-theory*, Benjamin, New York (1967).

[AHS] M.F. ATIYAH, N.J. HITCHIN and I.M. SINGER - *Self-duality in four dimensional Riemannian Geometry*, Proc. Royal Soc. London **362** (1978), 425-461.

[APS] M.F. ATIYAH, V.K. PATODI and I.M. SINGER - *Spectral asymmetry and Riemannian Geometry*, I, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **77** (1975), 43-69. II, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **78** (1975), 405-432. III, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **79** (1976), 71-99.

[B1] O. BIQUARD - *Fibrés holomorphes et connexions singulières sur une courbe ouverte*, Thèse, École Polytechnique (1991).

[B2] O. BIQUARD - *Sur les fibrés paraboliques sur une surface complexe*, preprint (février 1993).

[BD] P.J. BRAAM and S.K. DONALDSON - *Fukaya-Floer homology and gluing formulae for polynomial invariants*, Preprint.

[BW] M. BOILEAU et C. WEBER - *Le problème de J. Milnor sur le nombre gordien des nœuds algébriques*, Ens. Math. **30** (1984), 173-222.

[De] P. DEDECKER - *Sur la cohomologie non-abélienne*, I, Canad. J. Math. (1960), 231-251 ; II , Canad. J. Math. (1963), 84-93.

[D1] S.K. DONALDSON - *An application of gauge theory to four dimensional topology*, J. of Diff. Geometry **18** (1983), 279-315.

[D2] S.K. DONALDSON - *The orientation of Yang-Mills moduli spaces and 4-manifold topology*, J. of Diff. Geometry **26** (1987), 397-428.

[D3] S.K. DONALDSON - *Connexions, cohomology and the intersection forms of four-manifolds*, J. of Diff. Geometry **24** (1986), 275-341.

[D4] S.K. DONALDSON - *Polynomial invariants for smooth four-manifolds*, Topology **29** (1990), 257-315.

[D5] S.K. DONALDSON - *Complex curves and surgery*, Publ. Math. IHES **68** (1989), 91-97.

[D6] S.K. DONALDSON - *Anti-self-dual Yang-Mills connections on complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. London Math. Soc. **3** (1985), 1-26.

[DK] S.K. DONALDSON and P.B. KRONHEIMER - *The geometry of four-manifolds*, Oxford University Press (1990).

[DS] S.K. DONALDSON and D.P. SULLIVAN - *Quasiconformal four-manifolds*, Acta Math. **163** (1990), 181-252.

[DT] S.K. DONALDSON and C.B. THOMAS - *Geometry of low-dimensional manifolds*, I. *Gauge theory and algebraic surfaces*, London Math. Soc., Lecture Notes series **150**, Cambridge University Press (1990).

[Fℓ] A. FLOER - *An instanton-invariant for 3-manifolds*, Comm. Math. Phys. **118** (1980), 215-240.

[FM] R. FRIEDMAN and J.L. MORGAN - *Complex versus differentiable classification of algebraic surfaces*, Topology Appl. **32**, North Holland (1989), 135-139.

[FMM] R. FRIEDMAN, J.L. MORGAN and B. MOISHEZON- *On the C^∞ invariance of the canonical class of certain algebraic surfaces*, B.A.M.S. **17** (1987), 283-286.

[FS] R. FINTUSHEL and R. STERN - *$SO(3)$-connections on the topology of four-manifolds*, J. Diff. Geom. **20**, North Holland (1984), 523-539.

[FU] D.S. FREED and K.K. UHLENBECK - *Instantons and four-manifolds*, M.S.R.I. Publications, Vol. 1, Springer (1984).

[Fr] J. FRENKEL - *Cohomologie non-abélienne et espaces fibrés*, Bull. Soc. Math. France **85** (1957), 135-218.

[Ga] P. GAUDUCHON - *Variétés riemanniennes autoduales [d'après C.H. Taubes et al.]*, Sém. Bourbaki, exp. n° 767, mars 1993, Astérisque (à paraître).

[Gi] J. GIRAUD - *Cohomologie non-abélienne*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1971).

[H] N. HITCHIN - *The Yang-Mills equation and the topology of 4-manifolds [after Simon K. Donaldson]*, Sém. Bourbaki, exp. n° 606, février 1983, Astérisque **105-106** (1983),167-178.

[I] L. ILLUSIE - *Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique [d'après G. Faltings, J.-M. Fontaine et al.]*, Sém. Bourbaki, exp. n° 726, juin 1990, Astérisque **189-190** (1990), 325-374.

[Ki] R. KIRBY - *Problems in low-dimensional topology*, Proc. Symp. Pure Math. **32** (1978), 273-322.

[Ko] D. KOTSCHICK - *$SO(3)$-invariants for 4-manifolds with $b_2^+ = 1$*, Proc. London Math. Soc. **63** (1991), 426-448.

[KoMa] D. KOTSCHICK and G. MATIČ - *Embedded surfaces in four-manifolds, branched covers and $SO(3)$-invariants*, Preprint Bâle (1993).

[K1] P.B. KRONHEIMER - *Embedded surfaces in 4-manifolds*, Proc. Intern. Congr. Mathematicians, Kyoto 1990, Springer, Vol. I (1991), 527-539.

[K2] P.B. KRONHEIMER - *An obstruction to removing intersection points in immersed surfaces*, preprint Oxford (mars 1993).

[K3] P.B. KRONHEIMER - *The genus-minimizing property of algebraic curves*, preprint, à paraître au Bull. Amer. Math. Soc.

[KM1] P.B. KRONHEIMER and T.S. MROWKA - *Gauge theory for embedded surfaces*, I, preprint (novembre 1991), à paraître dans Topology.

[KM2] P.B. KRONHEIMER and T.S. MROWKA - *Gauge theory for embedded surfaces*, II, preprint (août 1992), à paraître dans Topology.

[KM3] P.B. KRONHEIMER and T.S. MROWKA - *Recurrence relations and asymptotics for four-manifold invariants*, preprint (mai 1993), à paraître au Bull. Amer. Math. Soc.

[L] J. LE POTIER - *Fibrés de Higgs et systèmes locaux*, Sém. Bourbaki, exp. n° 737, novembre 1990, Astérisque **201-202-203** (1991), 221-268.

[Li] P. LISCA - *On Tori embedded in four-manifolds*, J. Diff. Geometry **38** (1993), 13-37.

[Ma] C. MARGERIN - *Fibrés stables et métriques d'Hermite-Einstein* [*d'après S.K. Donaldson-K.K. Uhlenbeck-S.T. Yau*], Sém. Bourbaki, exp. n° 683 (juin 1987), Astérisque **152-153** (1987), 263-283.

[Mi] J. MILNOR - *Singular points on complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies **61**, Princeton University Press (1968).

[MM] J.W. MORGAN and T.S. MROWKA - *A note on Donaldson's polynomial invariants*, Int. Math. Research Notices **10** (1992), 223-230.

[MMR] J.W. MORGAN, T.S. MROWKA and D. RUBERMAN - *The L^2-moduli space and a vanishing theorem for Donaldson polynomial invariants*, preprint (1992).

[MO'G] J.W. MORGAN and K.G. O'GRADY - *Differential topology of complex surfaces* (*Elliptic surfaces with $p_g = 1$: smooth classification*), L.N. in Math. **1545**, Springer Verlag (1993).

[M] T.S. MROWKA - *A Mayer-Vietoris Principle for Yang-Mills Moduli Spaces*, Ph.D. thesis, Berkeley (1989).

[O'G1] K.G. O'GRADY - *Algebro-geometric analogues of Donaldson's polynomials*, Invent. Math. **107** (1992), 351-395.

[O'G2] K.G. O'GRADY - *Donaldson's polynomials for $K3$-surfaces*, J. of Diff. Geom. **35** (1992), 415-427.

[SS] L.M. SIBNER and R.J. SIBNER - *Classification of Singular Sobolev Connections by Their Holonomy*, Commun. Math. Phys. **144** (1992), 337-350.

[H] J.-C. SIKORAV - *Homologie associée à une fonctionnelle [d'après A. Floer]*, Sém. Bourbaki, exp. n° 733, novembre 1990, Astérisque **201-202-203** (1991), 115-141.

[T] C.H. TAUBES - *L^2-moduli spaces on manifolds with cylindrical ends*, Preprint (1990).

[W] S. WANG - *Moduli spaces over manifolds with involutions*, Math. Annalen (1993), 119-138.

[Wi] E. WITTEN - *Topological Quantum Field Theory*, C.M.P. (1988), 353-386.

Daniel BENNEQUIN

Université Louis Pasteur
I.R.M.A.
7 rue René Descartes
F-67084 STRASBOURG CEDEX

et, à partir de septembre 1993,

Université de Paris VII
UFR de Mathématiques
Tour 45-55 - 5ème étage
2, place Jussieu
F-75251 PARIS CEDEX 05