Astérisque

LAURENT CLOZEL

Nombre de points des variétés de Shimura sur un corps fini [d'après R. Kottwitz]

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 766, p. 121-149
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__121_0>

Séminaire BOURBAKI
45ème année, 1992-93, n° 766

Mars 1993

NOMBRE DE POINTS DES VARIÉTÉS DE SHIMURA SUR UN CORPS FINI
[d'après R. Kottwitz]

par **Laurent CLOZEL**

0. — Introduction

Il y a quelque vingt ans, Langlands [19] a esquissé un programme visant à exprimer les fonctions zêta de Hasse–Weil des variétés de Shimura en termes de fonctions L automorphes. Langlands développa ses idées dans une correspondance avec Rapoport, et les vérifia pour une famille de variétés associées à des formes de $GL(2)$ sur des corps totalement réels [21, 22]. En collaboration avec Rapoport, il formula ensuite une conjecture précise [25], qui était démontrée modulo une partie des "conjectures standard" de la géométrie algébrique.

L'objet de cet exposé est le travail de Kottwitz [17] qui démontre inconditionnellement, pour les variétés de Shimura qui décrivent des problèmes de modules de variétés abéliennes munies de quelques structures (cf. § 6), une reformulation de la conjecture de Langlands–Rapoport. Vu la définition locale de la fonction zêta de Hasse–Weil, il s'agit de décrire, en termes adaptés à la comparaison avec les facteurs locaux de fonctions L automorphes **via** la formule des traces de Selberg, les nombres de points à valeurs dans des corps finis des variétés de Shimura.

Nous avons cherché à motiver la conjecture en décrivant, dans les cas les plus simples, les idées géométriques et combinatoires qui y amènent. Une variété de Shimura est associée à un groupe réductif $G/\mathbb{Q}$. Dans le § 3, nous traitons le cas de $G = GL(2)$: les variétés sont alors les courbes modulaires. Nous avons esquissé la démonstration dans ce cas : sous forme accessible, elle ne se trouve nulle part dans la littérature. Nous redonnons donc la démonstration "d'Ihara–Langlands" du théorème d'Eichler–Shimura.

Nous tentons ensuite de décrire les difficultés qui apparaissent pour étendre cette démonstration au cas des variétés de modules de variétés abéliennes associées à $G = GSp(g)$ (§ 4). Cela amène à la formulation de Kottwitz pour la Conjecture (§ 5, (51)). Pour ceci, on doit introduire un peu de machinerie (cohomologie galoisienne dans le groupe dual) : cette théorie a été développée par Langlands et Kottwitz depuis quinze ans, et a fait déjà l'objet d'un exposé partiel à Bourbaki [7]. Nous espérons que le problème étudié ici – et qui a motivé son développement – rend cette théorie plus naturelle.

Dans le § 6, on formule le théorème de Kottwitz. Nous n'avons pas donné la démonstration, mais nous avons indiqué rapidement la signification du théorème dans le cas du groupe symplectique.

Dans le § 7, nous discutons brièvement les questions laissées ouvertes : le problème ultime d'exprimer la fonction zêta d'une variété de Shimura à l'aide de fonctions L automorphes est loin d'être résolu. Nous décrivons les cas où la solution est complète ($\cdots$ aux bonnes places : cf. § 7). Nous n'avons pas décrit l'expression conjecturale précise (aussi due à Kottwitz) de la fonction zêta dans le cas général, car nous avons préféré expliquer le problème géométrique. Nous renvoyons à Kottwitz [16] et à l'exposé de Blasius et Rogawski [1].

Il est difficile de recenser tous les apports partiels à la solution d'un problème vieux de vingt ans. Nous avons déjà mentionné ceux de Langlands et Rapoport ; pour les groupes liés à $GL(2)$, les contributions sont nombreuses. Shimura [34] a traité le cas des courbes associées à des algèbres de quaternions sur $\mathbb{Q}$, et celui de certaines surfaces. J. Milne a reformulé les démonstrations de Langlands (pour ces groupes) à l'aide de la théorie de Honda–Tate [27, 3] ; Zink [37] a obtenu des résultats concernant les variétés de type PEL (§ 6) considérées par Kottwitz ; enfin, pour $GSp(g)$, le résultat–clé (fin du § 7) a été démontré indépendamment par Reimann–Zink [32]. Après la démonstration de Kottwitz, Milne a annoncé [28] une démonstration de la conjecture originale de Langlands–Rapoport, puis donné une démonstration pour $GSp(g)$ [29].

Le rédacteur n'est qualifié ni pour donner un exposé historique, ni pour décrire toutes les formulations du problème. Il s'excuse d'avance des omissions inévitables. Par ailleurs, les questions parallèles concernant les corps de fonctions ne sont pas mentionnées dans cet article : elles sont traitées dans l'exposé récent de Carayol [6][0]

NOTATIONS : Si G est un groupe linéaire algébrique sur $\mathbb{Q}$, G_{der} est son groupe dérivé, Z ou Z_G son centre. On désigne par $\widehat{G}$ la composante neutre de son groupe dual – c'est ${}^LG^0$ dans une notation plus ancienne, e.g. Borel [2] – par ${}^LG = \widehat{G} \rtimes \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ son L-groupe (cf. [2]).

$\mathbb{A}$, $\mathbb{A}_E$ désigne l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$, d'un corps de nombres E.

1. — La conjecture de Hasse–Weil

Soit X une variété projective lisse de dimension d définie sur $\mathbb{Q}$. On peut choisir N tel que X s'étende en un schéma projectif et lisse sur $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{N}\right]$. Si p est premier à N, on peut alors considérer la réduction X_p de X modulo p, variété lisse et projective sur $\mathbb{F}_p$.

Sa fonction zêta (locale) est définie par

$$\log Z_p(T) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{N\alpha}{\alpha} T^\alpha\,, \quad N_\alpha = |X_p(\mathbb{F}_{p^\alpha})|\,. \tag{1}$$

On sait, d'après Dwork, Grothendieck et Deligne, que Z_p est une fraction rationnelle :

$$Z_p(T) = \prod_{i=0}^{2d} Z_{p,i}(T)^{(-1)^{i+1}} \tag{2}$$

où $Z_{p,i}(T) = (1-\alpha_1 T)\cdots(1-\alpha_{b_i}T) \in \mathbb{Z}[T]$, $|\alpha_i| = p^{1/2}$, et b_i est le i–ième nombre de Betti de $X(\mathbb{C})$.

[0] Pour la préparation de cet exposé, j'ai utilisé les notes d'un cours de Kottwitz à Orsay en 1986 (§ 3) et les notes de Laumon pour un cours que nous avons donné en commun en 1992. Je les remercie chaleureusement.

On peut alors former le produit eulérien

$$Z^N(s) = \prod_{p \nmid N} Z_p(p^{-s})\,. \tag{3}$$

Il est convergent, d'après l'estimée de Deligne, pour $Re\ s > d+1$. Hasse et Weil ont conjecturé que cette fonction de $s \in \mathbb{C}$ admettait une extension méromorphe au plan tout entier. On conjecture aussi (avec la définition correcte des facteurs locaux pour les $p|N$ et à la place archimédienne) que la fonction zêta totale $Z(s)$ admet une équation fonctionnelle reliant

$$Z(s) \quad \text{et} \quad Z(d+1-s)\,. \tag{4}$$

En général on ne sait rien dire de cette conjecture. Les seuls cas où elle a pu être démontrée est celui où les représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur les espaces de cohomologie $H^i_{\text{ét}}(X \times \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)$ sont abéliennes(1) [35], et les exemples "modulaires" qui vont être décrits(2).

2. — Le cas modulaire : variétés de Shimura

Le premier progrès au-delà du cas abélien est dû à Eichler et Shimura [11, 34], qui ont considéré les courbes modulaires. Soit $N \geq 3$,

$$\Gamma_0(N) = \{\gamma \in SL(2,\mathbb{Z}) : \gamma \equiv \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \pmod N\}\,. \tag{5}$$

La courbe complexe $Y_0(N) = \Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{h}$, où $\mathfrak{h}$ est le demi-plan de Poincaré, classifie alors les courbes elliptiques $E/\mathbb{C}$ munies d'un sous-groupe cyclique d'ordre N. Cette courbe a naturellement un modèle affine et lisse $\mathcal{Y}$ sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$. On peut la compactifier en un schéma projectif et lisse $\mathcal{X}$ sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$.

---

(1) ou "potentiellement abéliennes : cf. Deligne [10].

(2) ajouté lors de la révision finale. — En juin 1993 A. Wiles a annoncé la démonstration de la conjecture de Taniyama–Weil pour les courbes elliptiques à réduction semi-stable. Joint à la théorie d'Eichler–Shimura ceci implique la conjecture de Hasse–Weil pour ces courbes elliptiques.

Soit $S_2(\Gamma_0(N))$ l'espace des formes paraboliques de poids 2, qui s'identifie à l'espace des différentielles holomorphes sur $\mathcal{X}(\mathbb{C})$. On peut en prendre une base $\{f_i\}_{i=1,\ldots,g}$ constituée de forme propres des opérateurs de Hecke $T(p)$ pour $p\nmid N$. Considérons alors la fonction $Z_{(1)}(s) = \prod\limits_{p\nmid N} Z_{p,1}(p^{-s})^{-1}$. Eichler et Shimura démontrèrent essentiellement l'égalité

$$Z_{(1)}^N(s) = \prod_{i=1}^{g} L^N(s, f_i) \tag{6}$$

où $L(s, f_i)$ est une fonction L de Hecke (produit eulérien de degré 2) associée à f_i et $L^N(s, f_i)$ est sa partie hors $\{N, \infty\}$. (En fait Eichler et Shimura démontraient (6) seulement pour presque tous les facteurs en $p\nmid N$; l'identité exacte (6) est due à Igusa, et l'on sait maintenant, d'après Ihara, Deligne, Langlands et Carayol, démontrer l'identité pour tous les facteurs premiers.) Comme les fonctions L de Hecke ont les propriétés usuelles (méromorphie et équation fonctionnelle) ceci démontre la Conjecture de Hasse–Weil.

Nous n'expliquons pas la démonstration d'Eichler et Shimura : voir [34]. Dans le paragraphe suivant, nous esquisserons une autre démonstration.

Les courbes modulaires sont naturellement associées au groupe $GL(2)/\mathbb{Q}$, et la généralisation naturelle de cet exemple consiste à considérer les **variétés de Shimura** associées à des groupes réductifs $G/\mathbb{Q}$.

On les définit d'abord comme variétés complexes, uniformisées par des espaces hermitiens symétriques. Soit G un groupe réductif connexe sur $\mathbb{Q}$, X l'espace symétrique de $G_{ad}(\mathbb{R})$, où G_{ad} est le groupe adjoint, $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ un sous–groupe des congruences. On **suppose** que X est hermitien symétrique, i.e., admet une structure kählérienne invariante par $G(\mathbb{R})$. On sait qu'alors $\Gamma\backslash X$ est une variété algébrique complexe, lisse pour Γ assez petit. La théorie des modèles canoniques fournit des modèles naturels des quotients $\Gamma\backslash X$ sur des corps de nombres.

Rappelons–en la formulation, d'après Deligne [8, 9], cf. aussi Milne [30]. Soit $\mathbb{S} = Res_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_m)$: c'est un tore sur $\mathbb{R}$ tel que $\mathbb{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^\times$, $\mathbb{S}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$. Rappelons qu'une représentation de $\mathbb{S}$ sur un espace vectoriel réel V équivaut à la donnée d'une structure de Hodge réelle sur V, $z \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$ opérant par $z^{-p}(\bar{z})^{-q}$ sur V_{pq}.

On suppose donné un homomorphisme $h : \mathbb{C} \to G/\mathbb{R}$. En composant, avec la représentation adjointe, on obtient alors $h \circ Ad : \mathbb{S} \to GL(\mathfrak{g})$ où $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, donc une **structure de Hodge** sur $\mathfrak{g}$. On suppose
(7i) cette structure de Hodge est de type $(-1,0)$, $(0,0)$, $(0,-1)$.
(7ii) $Ad \circ h(i)$ est une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ ($i = \sqrt{-1}$).
Il y a d'autres conditions moins essentielles [9, 30].

Soit K_∞ le centralisateur de h dans $G(\mathbb{R})$. On vérifie que K_∞ contient un sous-groupe compact maximal du groupe dérivé de $G(\mathbb{R})$. Soit $X = G(\mathbb{R})/K_\infty$ l'orbite de h par conjugaison; X est alors une réunion finie de composantes connexes qui sont des espaces hermitiens symétriques.

Soit $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe compact ouvert, et soit

$$S_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K = G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K_\infty K\,. \tag{8}$$

C'est donc une réunion finie de quotients de l'espace symétrique de $G(\mathbb{R})$.

On définit alors le **corps reflex** $E(G,h)$ de la façon suivante : étendant les scalaires à $\mathbb{C}$, on déduit de h un homomorphisme $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \to G/\mathbb{C}$; soit μ_h sa première composante. A conjugaison près, μ_h est défini sur $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$. Le corps reflex $E = E(G,h) \subset \overline{\mathbb{Q}}$ est alors le corps de définition de la classe de conjugaison de μ_h. On vérifie que c'est un corps de nombres; par construction $E \subset \mathbb{C}$.

La théorie des modèles canoniques affirme alors que S_K admet un modèle (quasi-projectif, lisse pour K assez petit), canoniquement défini, sur E. Nous ne pouvons décrire ici ni le sens précis de cette assertion, ni les étapes de sa démonstration : les résultats sont dus à Shimura, Deligne, Milne, Shih et Borovoi. Cf. [30] pour un exposé détaillé.

Après que certains exemples ont été établis par Shimura, Langlands, dans les années 70, a étudié systématiquement la question suivante : exprimer la fonction zêta $Z_E(S_K)$ à l'aide de fonctions L de formes automorphes associées au groupe G. Il s'agit en général, bien sûr, d'un produit eulérien sur le corps reflex E; d'après l'analogue de (1), la question se ramène à exprimer, pour de bonnes places $\mathfrak{p}$ de E, le cardinal $N_\alpha = |S_K(k_\alpha)|$, où k_α est l'extension de degré α de $k = \mathfrak{o}_E/\mathfrak{p}$, et S_K désigne, par abus de langage, la réduction en $\mathfrak{p}$

d'un modèle convenable de S_K/E[2]. Dans le paragraphe suivant, on décrit la méthode d'Ihara et Langlands, revue par Milne et Kottwitz, pour résoudre cette question dans le cas "classique" de GL_2.

3. — Retour à $GL(2)$

Rappelons que $Y_0(N)$ classifie les courbes elliptiques sur $\mathbb{C}$ réunies d'un sous-groupe cyclique d'ordre N. Ce problème de modules garde un sens (correctement défini) sur une base (i.e., un schéma S) arbitraire. Il est représentable par un schéma $\mathcal{Y}$ affine et lisse au-dessus de $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$. En particulier, si k est un corps de caractéristique $p \nmid N$, $\mathcal{Y}(k)$ classifie les courbes elliptiques sur k munies d'un sous-groupe cyclique d'ordre N[3].

Soit en particulier k un corps fini de cardinal p^α, avec $p \nmid N$. On cherche à calculer $|\mathcal{Y}(k)|$.

Rappelons quelques faits sur les courbes elliptiques sur un corps fini k. Soit E une courbe elliptique sur k. Pour $\ell \neq p$, on peut considérer le dual du module de Tate, $H^1_{\text{ét}}(E, \mathbb{Z}_\ell) = H_\ell E$. Soit $\operatorname{End}(E)$ l'anneau des endomorphismes de E définis sur k, $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(E) = \operatorname{End}(E) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}$. On dispose de l'endomorphisme de Frobenius $\pi_E \in \operatorname{End}(E)$. Pour $\ell \neq p$, l'application naturelle $\mathbb{Z}_\ell \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \operatorname{End}(E) \to \operatorname{End}(H_\ell E)^{\pi_E}$ est un isomorphisme d'après Deuring et Tate. On dira que E et **ordinaire** si $\operatorname{End}(E)$ est commutatif; $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}} E$ est alors un corps quadratique imaginaire, que l'on notera M[4].

Le calcul de $|\mathcal{Y}(k)|$ se fait en deux étapes :

(a) On classifie les **classes d'isogénie**.

Supposons E ordinaire. Alors π_E peut être assimilé à un entier quadratique,

---

(2) La question de savoir quels premiers $\mathfrak{p}$ sont des places de bonne réduction pour un modèle convenable de S_K fait partie du problème.

(3) Pour la définition et la solution précises du problème de modules voir Katz–Mazur [13].

(4) E est ordinaire si $E \underset{k}{\times} \overline{k}$ est ordinaire (non supersingulière) ou si $E \underset{k}{\times} \overline{k}$ est supersingulière, mais $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(E) \neq \operatorname{End}_{\overline{k}} E \otimes \mathbb{Q}$.

qui a les propriétés suivantes :

(9)
(i) π_E engendre un corps quadratique imaginaire M

(ii) $\pi_E \, \overline{\pi}_E = p^\alpha$

(iii) $\pi_E \in \mathfrak{o}_{E,\ell}^\times \quad (\ell \neq p)$

(iv) Si p est décomposé en deux places $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ dans M, alors $|\pi_E|_{\mathfrak{p}} = p^\alpha$ et $|\pi_E|_{\mathfrak{p}'} = 1$ pour un choix convenable de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$.

On associe alors à la classe d'isogénie de E la classe de conjugaison elliptique dans $GL(2,\mathbb{Q})$ obtenue en plongeant M, et donc π_E, dans $M_2(\mathbb{Q})$. Les classes d'isogénie ordinaires sont alors en bijection avec les classes de conjugaison γ de $GL(2,\mathbb{Q})$ vérifiant les conditions (déduites de) (9). (Les classes d'isogénie non ordinaires correspondent à des éléments centraux).

(b) On doit ensuite compter les courbes dans une classe d'isogénie, à isomorphisme près.

Soit L l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel k, $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$ l'endomorphisme de Frobenius, $W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k, i.e. l'anneau des entiers $\mathfrak{o}_L$ de L. La cohomologie cristalline $H^1_{cris}(E,W(k))$ est un $W(k)$–module libre de rang 2 muni d'un endomorphisme σ–linéaire F tel que $F^\alpha = \pi_E$. Posons

$$(10) \qquad H^1(E,\widehat{\mathbb{Z}}) = \prod_{\ell \neq p} H^1_{\text{ét}}(E,\mathbb{Z}_\ell) \times H^1_{cris}(E,W(k))$$

$$(11) \qquad H^1(E,\mathbb{A}_f) = {\prod_{\ell}}' H^1_{\text{ét}}(E,\mathbb{Q}_\ell) \times H^1_{cris}(E,L)$$

où $H^1_{cris}(E,L) = H^1_{cris}(E,W(k)) \otimes L$, et le produit est un produit restreint par rappport aux réseaux (10). Le groupe $M^\times = (\mathrm{End}_{\mathbb{Q}} E)^\times$ opère diagonalement sur $H^1(E,\mathbb{A}_f)$ par transport de structure. Le fait fondamental est alors :

(12) *Il y a bijection entre l'ensemble des courbes E'/k, isogènes à E, modulo isomorphisme et l'ensemble*

$$M^\times \backslash \{(\Lambda^p, \Lambda_p)\}$$

où Λ^p est un réseau de $\prod_\ell' H^1_{ét}(E,\mathbb{Q}_\ell)$, stable par π_E, Λ_p est un réseau de $H^1_{cris}(E,L)$ stable par F et pF^{-1}, et où l'on quotiente par l'action diagonale de $M^\times$.

A l'aide d'un choix de bases, ceci se reformule de la façon suivante : Λ^p est un réseau dans $(\mathbb{A}_f^p)^2 = \prod_{\ell\neq p}' \mathbb{Q}_\ell^2$; Λ_p est un réseau dans L^2. Notons G le groupe $GL(2)$. On a une action de $G(\mathbb{A}_f^p)\times G(L)$ sur $(\mathbb{A}_f^p)^2\times L^2$. Le Frobenius π_E opère diagonalement comme $\gamma\in G(\mathbb{Q})$.

L'endomorphisme F transporté à L^2 s'écrit sous la forme $\delta\sigma$, où $\delta\in GL(2,L)$. L'équation $F^\alpha = \pi_E$ devient

$$N(\delta) \underset{\text{def}}{=} \delta\sigma(\delta)\cdots\sigma^{\alpha-1}(\delta) = \gamma\,. \tag{13}$$

On compte donc modulo $M^\times \subset GL(2,\mathbb{Q})$ les réseaux (Λ^p,Λ_p) tels que $\gamma\Lambda^p = \Lambda^p$ et $p\Lambda_p \subset \delta\sigma\Lambda_p\subset\Lambda_p$.

Notons que nous avons pour l'instant compté les courbes E' dans la classe d'isogénie de E, en négligeant la donnée de niveau définissant $Y_0(N)$, i.e., le groupe cyclique d'ordre N. La donnée de niveau se traduit simplement par la donnée d'un sous–réseau d'indice N, à quotient cyclique, de Λ^p.

(c) On réinterprète (b) en termes de théorie des groupes. Soit :

- $dg\times dh$ = la mesure de Haar sur $G(\mathbb{A}_f^p)\times G(L)$ donnant la mesure 1 à $K_0(N)^p\times G(\mathfrak{o}_L)$, où
- $K_0(N)^p = \{g\in G(\widehat{\mathbb{Z}}^p) : g\equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\, N)\}$.
- φ = la fonction caractéristique de $G(\mathfrak{o}_L)\begin{pmatrix} p & \\ & 1\end{pmatrix}G(\mathfrak{o}_L)$.
- f^p = la fonction caractéristique de $K_0(N)^p$.

Enfin notons $\mathcal{Y}(k)(\gamma)$ le sous–ensemble de $\mathcal{Y}(k)$ formées des courbes dans la classe d'isogénie associée à γ. Un lemme facile (mais crucial) permet de réécrire le cardinal de l'ensemble des réseaux décrit en (12) :

$$|\mathcal{Y}(k)(\gamma)| = \int_{M^\times\backslash G(\mathbb{A}_f^p)\times G(L)} f^p(g^{-1}\gamma g)\varphi(h^{-1}\delta\sigma(h))dgdh \tag{14}$$

On réécrit enfin (1) de la façon suivante.

Si $f_\ell \in C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_\ell))$ et $\gamma \in G(\mathbb{Q}_\ell)$ est semi–simple soit

$$O_\gamma(f_\ell) = \int_{G_\gamma(\mathbb{Q}_\ell)\backslash G(\mathbb{Q}_\ell)} f_\ell(g^{-1}\gamma g)\frac{dg}{dg_\gamma} \tag{15}$$

où les mesures de Haar $dg = dg_\ell$, dg_γ doivent être spécifiées. Si $f_\infty \in C_c^\infty(G(\mathbb{R})/Z(\mathbb{R}))$, Z étant le centre de G, on définit $O_\gamma(f_\infty)$ de façon analogue. Enfin posons

$$TO_\delta(\varphi) = \int_{G_{\delta,\sigma}(\mathbb{Q}_p)\backslash G(L)} \varphi(g^{-1}\delta^\sigma g)\frac{dg}{dg_{\delta,\sigma}} \tag{16}$$

(intégrale orbitale **tordue** en δ), $G_{\delta,\sigma}$ étant le $\mathbb{Q}_p$–groupe défini par l'équation $g^{-1}\delta\sigma(g) = \delta$ $(g \in G(L))$. Si on groupe tous les termes (13) correspondant aux classes d'isogénie ordinaire, on vérifie alors que l'on a

$$|\mathcal{Y}(k)_{ord}| = \sum_{\substack{\gamma\in G(\mathbb{Q}) \\ \gamma \text{ semi-simple régulier} \\ \text{mod conj.} \\ \gamma_\infty \text{ elliptique}}} v(\gamma)O_\gamma(f^p)TO_\delta(\varphi) \tag{17}$$

où l'on a posé :

$$v(\gamma) = vol(G_\gamma(\mathbb{Q})\backslash G_\gamma(\mathbb{A}_f))\,;$$

le volume $v(\gamma)$ dépend du choix des mesures sur $G_\gamma(\mathbb{Q}_\ell)$, $G_{\delta,\sigma}(\mathbb{Q}_p)$ définissant les intégrales orbitales.

On n'est maintenant pas loin du côté géométrique de la formule des traces de Selberg pour $GL(2)$.

La dernière étape importante[5] consiste à remplacer l'intégrale orbitale tordue $TO_\delta(\varphi)$ par une intégrale orbitale $O_\gamma(f_\alpha)$, où $f_\alpha \in C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_p)//G(\mathbb{Z}_p))$. Rappelons (cf. Borel [2]) que l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_p = C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_p)//G(\mathbb{Z}_p))$ est naturellement isomorphe à une algèbre de séries de Laurent en deux variables :

$$\mathcal{H}_p \cong \mathbb{C}[Z,T,Z^{-1},T^{-1}]^{\mathfrak{S}_2}$$

[5] La démonstration donnée ici est celle de Kottwitz, esquissée dans [14] en général et exposée par lui à Orsay en 1986 pour $GL(2)$.

$\mathfrak{S}_2$ permutant (Z,T). La fonction f_α s'envoie par l'isomorphisme sur $\widehat{f_\alpha} = (Z\ p^{1/2})^\alpha + (T\ p^{1/2})^\alpha$. Le **Lemme fondamental** (Langlands [24], Saito) affirme alors que pour $\gamma \in G(\mathbb{Q}_p)$ semi-simple régulier,

$$O_\gamma(f_\alpha) = \begin{cases} TO_\delta(\varphi) & \text{s'il existe } \delta \in G(L) \text{ tel que } \gamma = N\delta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{18}$$

la relation $\gamma = N\delta$ étant définie en (13).

Soit enfin dg_∞ une mesure de Haar sur $G(\mathbb{R})$, f_∞ une fonction C^∞ à support compact sur $G(\mathbb{R})/Z(\mathbb{R})$ telle que – pour un choix convenable de mesures –

$$O_\gamma(f_\infty) = \begin{cases} 0 & \gamma \text{ semi-simple régulier non-elliptique} \\ 1 & \gamma \text{ régulier elliptique} \end{cases} \tag{19}$$

On peut enfin réécrire (17) sous la forme

$$|\mathcal{Y}(k)_{ord}| = \sum_{\substack{\gamma \in G(\mathbb{Q}) \\ \gamma \text{ ell. reg.}}} v(\gamma) O_\gamma(f_\infty f^p f_\alpha)\,. \tag{20}$$

On notera que les conditions (9) sur γ résultent alors de la non-nullité de l'intégrale orbitale O_γ. Pour la condition en p, (9iv), il faut utiliser le calcul, que l'on n'a pas fait, des intégrales orbitales de f_α en les éléments semi-simples déployés de $GL(2,\mathbb{Q}_p)$.

On voit que (20) est la partie elliptique régulière du terme géométrique de la formule des traces de Selberg pour $GL(2)$ [19]. En rajoutant les points non-ordinaires, puis les points à l'infini de $\mathcal{X}(k)$, et en utilisant l'expression (1) de la fonction zêta locale, on démontre alors à l'aide de la formule des traces :

$$Z_p(\mathcal{X}) = \prod_\pi L_p(\pi, s + \frac{1}{2})^{\varepsilon(\pi_\infty)m(\pi_f)} \tag{21}$$

où

- $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$ parcourt les représentations irréductibles de $G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{R}) \times G(\mathbb{A}_f)$ décomposant la partie discrète de $L^2(Z(\mathbb{R})G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$

- $\varepsilon(\pi_\infty) = tr\ \pi_\infty(f_\infty)$ est égal à

$$\begin{cases} 1 & \text{si } \pi_\infty \text{ est un caractère abélien trivial sur } Z(\mathbb{R}) \\ -1 & \text{si } \pi_\infty \text{ est la représentation de la série discrète de } G(\mathbb{R})/Z(\mathbb{R}) \\ & \text{associée aux formes de poids 2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $m(\pi_f) = \dim \pi_f^{K_0(N)}$.
- $L_p(\pi, s)$ est le facteur en p de la fonction L "de Hecke" de π.

La formule (21) est équivalente à l'égalité (6) d'Eichler–Shimura : $\varepsilon(\pi_\infty) = -1$ si π est cuspidale, et donc associée à des formes modulaires paraboliques; si $\varepsilon(\pi_\infty) = 1$, π est triviale, et $L_p(\pi, s + \frac{1}{2}) = \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-s+1})}$ est le dénominateur de Z_p.

Cette démonstration est certes plus compliquée que celle d'Eichler et Shimura mais son mérite est d'être plus générale. Langlands [20, 21] l'a étendue à des groupes de la forme $G = Res_{F/\mathbb{Q}}H$, où $H = B^\times$, B étant une algèbre de quaternions sur F (y compris $M_2(F)$). Les démonstrations de Langlands ont été complétées par plusieurs auteurs. Si $B = M_2(F)$, la compactification naturelle de la variété quotient est en général singulière; si B est une algèbre à division, l'arithmétique du problème de modules est compliquée. Pour la solution de ces problèmes, on renvoie à [21, 22, 3, 27, 33].

4. — Le groupe symplectique : motivation

Nous essayons maintenant d'étendre les arguments du § 3 à des variétés plus générales. Considérons d'abord le cas où G est le groupe symplectique (en fait le groupe des similitudes symplectiques) et où la variété S_K est l'espace de modules de variétés abéliennes principalement polarisées munies d'une structure de niveau N. Plus précisément, soit

- $V =$ l'espace $\mathbb{Z}^{2g}$ muni de la forme symplectique de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- $G = GSp(V)$ le $\mathbb{Z}$–groupe tel que, pour toute $\mathbb{Z}$–algèbre commutative R,

$$(22) \qquad G(R) = \{g \in GL(V \otimes R) :< gv, gw >\equiv c(g) < v, w > \text{ où } c \in R^\times\}.$$

On note $c : G \to \mathbb{G}_m$ l'homomorphisme de $\mathbb{Z}$-groupes défini par l'équation (22).

- $h : \mathbb{S} \to G/\mathbb{R}$ donné sur $\mathbb{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^\times$ par $z = x + iy \longmapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$
- $N =$ un entier ≥ 3
- $K = K(N) = \{g \in G(\widehat{\mathbb{Z}}) : g \equiv 1\ [N]\}$.

On considère la variété $S_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K_\infty K$, où $K_\infty = \mathbb{R}^\times U(g) \subset GSp(g)$ centralise $h(i)$. Elle a un modèle (quasi-projectif, lisse) sur $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{N}\right]$. Pour S un schéma sur lequel N est inversible, $S_K(S)$ classifie modulo isomorphisme les triplets (A, λ, η) où

$$(23) \qquad \begin{aligned} A &= \text{variété abélienne de dimension } g \text{ sur } S \\ \lambda &= \text{polarisation principale de } A \\ \eta &= \text{structure de niveau } N \text{ sur } (A, \lambda) \end{aligned}$$

Si $S = \operatorname{Spec} k$ est le spectre d'un corps, une structure de niveau N sur (A, λ) est un isomorphisme

$$(24) \qquad \eta : V \otimes \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \longrightarrow A[N](k)$$

tel que

$$(25) \qquad < \eta v,\ \lambda(\eta w) >= \zeta < v, w >$$

pour une racine de l'unité $\zeta \in \boldsymbol{\mu}_N(k)$ indépendante de (v, w). Dans (25), l'accouplement de gauche est déduit de l'accouplement naturel à valeurs dans $\boldsymbol{\mu}_N$ sur $A[N] \times \widehat{A}[N]$ et de la polarisation $\lambda : A \to \widehat{A}$.

Cela étant, cherchons à imiter la méthode du § 3 pour compter les points de $S_K(k)$, k étant l'extension de degré α de $\mathbb{F}_p$ pour $p \nmid N$. Nous chercherons d'abord à paramétrer les classes d'isogénie. Pour ceci, on utilise l'extension, due à Honda et Tate, du théorème de Deuring–Tate pour les courbes elliptiques cité dans le § 3(9). Soit L l'extension non–ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ d'anneau d'entiers $\mathfrak{o}_L$, de corps résiduel k.

Si A est une variété abélienne de dimension g sur k, on lui associe un élément $\gamma_0 \in G(\mathbb{Q}) \subset GL(2g, \mathbb{Q})$ caractérisé par les conditions suivantes :

(26) (a) $c(\gamma_0) = p^\alpha$

(b) *Le polynôme caractéristique de* γ_0 *est égal à celui du Frobenius* Frob_{p^α} *opérant sur* $H^1(A \times \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell)$ *pour tout* $\ell \neq p$.

A la différence du cas $g = 1$, ces conditions ne définissent γ_0 qu'à conjugaison près dans $G(\overline{\mathbb{Q}})$. Rappelons qu'une classe de conjugaison sous $G(\overline{\mathbb{Q}})$ d'éléments de $G(\mathbb{Q})$ est appelée une **classe de conjugaison stable** (cf. [7]). La théorie de Honda–Tate caractérise les classes de conjugaison stable ainsi obtenues :

(27) THÉORÈME (Honda–Tate [12, 36]). — *Il y a bijection entre l'ensemble des classes d'isogénie de variétés abéliennes de dimension g sur k et l'ensemble des classes de conjugaison stable d'éléments semi–simples $\gamma_0 \in G(\mathbb{Q})$ telles que :*

(i) $c(\gamma_0) = p^\alpha$.

(ii) *Toute valeur propre complexe de* γ_0 *est de valeur absolue* $\sqrt{p^\alpha}$.

(iii) *Toute valeur propre de* γ_0 *est une unité* ℓ*–adique pour* $\ell \neq p$.

(iv) *L'image de* γ_0 *dans* $GL(V \otimes L)$ *est la norme d'un élément* $\delta \in GL(V \otimes L)$ *tel qu'il existe un réseau* $\Lambda \subset V \otimes L$ *avec* $\delta\sigma\Lambda \subset \Lambda$.

Dans la condition (iv) la norme est définie comme en (13) :

$$N\delta = \delta\sigma(\delta) \cdots \sigma^{\alpha-1}(\delta) \in GL(V \otimes L)\,. \tag{28}$$

On voit que l'étape (a) du problème, la classification des classes d'isogénie, diffère déjà du cas GL_2 : au lieu d'obtenir des classes de conjugaison, on n'obtient que des classes de conjugaison stable.

Pour l'étape (b), il faut maintenant introduire la polarisation. Rappelons que la catégorie des variétés abéliennes à isogénie près (on dira aussi : à $\mathbf{Q}$–isogénie près) sur k est la catégorie dont les objets sont les variétés abéliennes sur k et dont les morphismes sont définis par $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(A,B) = \mathrm{Hom}(A,B) \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Q}$.

Si $\widehat{A}$ est la variété duale, on a $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(\widehat{B},\widehat{A})$. Si $\lambda : A \to \widehat{A}$ est une polarisation et $f \in \mathrm{Hom}_0(A,B)$, soit $f^*\lambda = \widehat{f} \circ \lambda \circ f$. Une $\mathbf{Q}$–isogénie entre (A,λ) et (A',λ') est alors définie comme une $\mathbf{Q}$–isogénie $f : A \to A'$ telle que $f^*\lambda = c\lambda'$ pour un élément $c \in \mathbf{Q}^\times$.

Si R est une $\mathbf{Q}$–algèbre commutative arbitraire, on peut définir de même $\mathrm{Hom}_R(A,B) = \mathrm{Hom}(A,B) \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} R$. Procédant de façon analogue, on obtient les notions de **variété abélienne à R–isogénie près** et de **R–isogénie entre variété polarisées.**

L'analogue de l'étape (b) du § 3 compte alors les triplets (A',λ',η') tels que (A',λ') est $\mathbf{Q}$–isogène à (A,λ).

Soit $I = \mathrm{End}(A)^\times$; c'est un $\mathbf{Q}$–groupe défini par $I(R) = \mathrm{End}_R(A)^\times$ pour R une $\mathbf{Q}$–algèbre; il est affine et connexe. Par ailleurs, à partir de A et d'un choix de bases de la cohomologie ℓ–adique et cristalline, on obtient comme dans le § 3 un élément (γ,δ) avec

$$\gamma \in G(\mathbb{A}_f^p),\ \gamma = (\gamma_\ell)_{\ell \neq p} \tag{29}$$

$$\delta \in G(L) \tag{30}$$

Soit $\gamma_0 \in G(\mathbf{Q})$ l'élément associé à A par la théorie de Honda–Tate. Rappelons que γ_0 n'est défini que modulo $G(\overline{\mathbf{Q}})$. On a alors les relations suivantes :

(31) Si $\ell \neq p$, γ_ℓ est conjugué à γ_0 dans $G(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$

(32) $N\delta \in G(L)$ est conjugué à γ_0 dans $G(\overline{\mathbf{Q}}_p)$.

Soit enfin

$f^p =$ la fonction caractéristique de K_N^p dans $G(\mathbb{A}_f^p)$

$\varphi =$ la fonction caractéristique de $G(\mathfrak{o}_L)aG(\mathfrak{o}_L)$ dans $G(L)$, où

$$a = \begin{pmatrix} p & & & & & & \\ & p & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & p & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Le résultat est alors le suivant :

(33) *Le nombre d'éléments* $(A', \lambda', \eta') \in S_K(k)$ *dans la classe de* $\mathbb{Q}$*-isogénie de* (A, λ) *est égal à*

$$\int_{I(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f^p)\times G(L)} f^p(g^{-1}\gamma g)\varphi(h^{-1}\delta\sigma(h))dgdh\,.$$

(comme dans le § 3, le groupe $I(\mathbb{Q})$ se plonge naturellement dans $G(\mathbb{A}_f^p) \times G(L)$; les mesures dg et dh sont définies comme supra).

A la différence de $GL(2)$ – cas où les polarisation peuvent être laissées implicites – on ne peut conclure à l'aide de (27) et (33). Il nous reste à décrire l'ensemble des classes de $\mathbb{Q}$-isogénie de variétés **polarisées** (A, λ) appartenant à une classe d'isogénie de variétés, caractérisée par son nombre de Weil. C'est l'étape délicate de la démonstration, qui a été complétée par Kottwitz et Riemann–Zink, à la suite du travail de Langlands et Rapoport. La démonstration consiste à introduire un invariant cohomologique $\alpha(\gamma_0, \gamma, \delta)$.

5. — L'invariant de Kottwitz, et la conjecture

Nous allons maintenant décrire l'invariant $\alpha(\gamma_0, \gamma, \delta)$ dans le cas général. Revenons aux données du § 2 :

G = groupe réductif connexe sur $\mathbb{Q}$

$h : \mathbb{S} \to G\ /\mathbb{R}$

$K \subset G(\mathbb{A}_f)$

E = le corps reflex

S_K = la variété de Shimura associée, définie sur E

p = nombre premier tel que $G \underset{\mathbb{Q}}{\times} \mathbb{Q}_p$ soit non ramifié.

$G \times \mathbb{Q}_p$ provient alors par changement de base d'un schéma en groupes réductifs et plat sur $\mathbb{Z}_p$; soit $K_p = G(\mathbb{Z}_p)$. On suppose aussi que $K = K_p \times K^p$, $K^p \subset G(\mathbb{A}_f^p)$. Le corps reflex $E/\mathbb{Q}$ est alors non ramifié en p [14]. Soit $\mathfrak{p}|p$ une place de E ; il paraît naturel de supposer que $S_K \underset{E}{\times} E_\mathfrak{p}$ a un modèle projectif et lisse sur $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$[6]. Si $k = k_\alpha$ est l'extension de degré α de $k_1 = \mathfrak{o}_E/\mathfrak{p}$, on cherche une expression pour le nombre de points de $S_K(k)$. Soit $L = \text{Fract } W(k)$, $\mathfrak{o}_L = W(k)$. Nous noterons $\mathbb{Q}_p^c = \text{Fract } W(\overline{k})$ le corps valué **complet** dont le corps résiduel $\overline{k}$ est la clôture algébrique de k.

Nous ferons sur G les hypothèses simplificatrices suivantes :

(34) (i) *G_{der} est simplement connexe.*

(ii) *Soit $D = G/G_{der}$. Alors D est un tore induit : $D = \prod_i Res_{M_i/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m)$, les M_i étant des corps de nombres.*

(iii) *Les tores déployés maximaux du centre Z_G sur $\mathbb{Q}$ et sur $\mathbb{R}$ coïncident.*

Nous choisissons dorénavant une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ contenant E (par exemple la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$), une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_v$ de $\mathbb{Q}_v$ pour toute place v (pour $v = p$ nous supposons $E_\mathfrak{p} \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$; pour $v = \infty$ $\overline{\mathbb{Q}}_\infty = \mathbb{C}$) et pour tout v un plongement $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_v$ (étendant $E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_v$ si $v = p, \infty$). Pour tout v, $\Gamma_v = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_v/\mathbb{Q}_v)$ est alors un sous-groupe de $\Gamma = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Nous aurons besoin de deux résultats de cohomologie galoisienne. Le premier (voir [7]) est une reformulation de la théorie de Poitou–Tate. Soit F un corps local de caractéristique 0, T un tore sur F, $\widehat{T}$ son tore dual : $\widehat{T}$ est un tore complexe et $X_*\widehat{T} = X^*T$. Alors $\Gamma_F = Gal(\overline{F}/F)$ opère sur $\widehat{T}$, et l'on a les isomorphismes

$$H^1(F, T) = H^1(F, X^*T)^D = \pi_0(\widehat{T}^{\Gamma_F})^D \tag{35}$$

où D désigne la dualité des groupes abéliens finis et π_0 le groupe des composantes connexes.

---

(6) C'est vrai dans la cas décrit en 4.1 ; en général le lecteur sceptique se contentera, comme au bon vieux temps, de considérer presque tous les $\mathfrak{p}$.

Par ailleurs, notons pour un instant G un groupe réductif connexe arbitraire sur $\mathbb{Q}_p$, de groupe dérivé G_{der} simplement connexe. Soit $\widehat{G}$ son groupe dual, $D = G/G_{der}$ son cocentre : le centre $Z(\widehat{G})$ s'identifie alors à $\widehat{D}$. Soit $B(G/\mathbb{Q}_p)$ l'ensemble des classes de σ–conjugaison d'éléments de $G(\mathbb{Q}_p^c)$. Le groupe Γ_p opère naturellement sur $Z(\widehat{G})$ et l'on a :

(36) *Il existe une application naturelle*

$$v : B(G/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow X^*(Z(\widehat{G})^{\Gamma_p}) .$$

C'est un isomorphisme si G est un tore.

On renvoie à Kottwitz [15], [16, § 6] pour la construction de l'application (36) et la démonstration. Explicitons le cas où $G = GSp(g)$. Dans ce cas $D = \mathbb{G}_m$, l'application $G \to \mathbb{G}_m$ étant l'homomorphisme c. On a donc $X^*(Z(\widehat{G})) = \mathbb{Z}$ et l'application v se déduit de

$$\begin{aligned} G(\mathbb{Q}_p^c) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ g &\longmapsto val\ c(g) . \end{aligned} \tag{37}$$

Nous considérons des triplets $(\gamma_0, \gamma, \delta) \in G(\mathbb{Q}) \times G(\mathbb{A}_f^p) \times G(L)$ soumis aux restrictions suivantes :

(38 i) $\gamma_0 \in G(\mathbb{Q})$ *est semi–simple et* $\mathbb{R}$*–elliptique.*

Un élément de $G(\mathbb{R})$ est $\mathbb{R}$–elliptique s'il est contenu dans un sous–groupe de Cartan compact modulo $Z_G(\mathbb{R})$: cf. la condition (27 (ii))

(38 ii) $\gamma = (\gamma_\ell)_{\ell \neq p}$, $\gamma_\ell \in G(\mathbb{Q}_\ell)$ *stablement conjugué à* $\gamma_0 \in G(\mathbb{Q}_\ell)$ *pour tout* ℓ.

(38 iii) $\delta \in G(L)$ *est tel que* $N\delta \in G(L)$ *est stablement conjugué à* $\gamma_0 \in G(\mathbb{Q}_p)$.

La norme est le norme absolue :

$$N\delta = \delta\sigma(\delta) \cdots \sigma^{\beta-1}(\delta), \quad \beta = \deg(L/\mathbb{Q}_p), \quad \sigma = \mathrm{Frob}_{L/\mathbb{Q}_p} . \tag{39}$$

On impose enfin à δ la condition supplémentaire suivante. Soit $\mu_h : \mathbb{G}_m \to G$ défini dans le § 2. Soit $T \subset G$ un tore maximal contenant l'image de μ_h. Par dualité μ_h définit un caractère μ_* de $\widehat{T}$. On peut plonger $\widehat{T}$ dans $\widehat{G}$ et l'on définit μ_1 comme la restriction de μ_* à $Z(\widehat{G})^{\Gamma_p}$; on vérifie que μ_1 ne dépend alors d'aucun choix. On suppose alors

(38 iv) *L'image de δ par l'application $v : B(G/\mathbb{Q}_p) \to X^*(Z(\widehat{G})^{\Gamma_p})$ est égale à $-\mu_1$.*

Dans le cas de $GSp(g)$, le lecteur remarquera que (38 iv) résulte des conditions (32)=(38 iii) et (27 i), compte tenu de (37).

Il nous reste à définir le groupe où prendra ses valeurs l'invariant α. Nous ne le ferons que pour γ_0 **régulier** – le cas "ordinaire" du § 2.

Supposons donc γ_0 régulier. Soit $I = G_{\gamma_0}$ le centralisateur de γ_0 ; c'est un tore défini sur $\mathbb{Q}$. Si on change γ_0 à l'intérieur de sa classe de conjugaison stable, on remplace I par un groupe I' canoniquement isomorphe à I sur $\mathbb{Q}$: I est donc défini à isomorphisme unique près. Soit $D = G/G_{der}$.

(39) DÉFINITION (Langlands, Kottwitz). —

$$\mathcal{K}(I/\mathbb{Q}) = \widehat{I}^{\Gamma}\widehat{D}/\widehat{D} \subset (\widehat{I}/\widehat{D})^{\Gamma}.$$

Le groupe $\mathcal{K}(I/\mathbb{Q})$ est **fini** : en effet γ_0 est $\mathbb{R}$–elliptique donc a fortiori $\mathbb{Q}$–elliptique, ce qui veut dire que le tore I/Z_G est anisotrope. On en déduit que le tore $\mathrm{Ker}(I \to D)$ l'est aussi. Son tore dual est $\widehat{I}/\widehat{D}$, et $(\widehat{I}/\widehat{D})^{\Gamma}$ est donc fini.

Nous allons maintenant définir $\alpha(\gamma_0, \gamma, \delta)$ comme somme d'invariants locaux.

(a) **En** $\ell \neq p, \infty$. — Rappelons le fait fondamental de la conjugaison stable (Langlands). Soit $\gamma_0 \in G(\mathbb{Q}_\ell)$ semi–simple régulier. Alors

(40) LEMME (Langlands). — *Il y a bijection entre l'ensemble des éléments de $G(\mathbb{Q}_\ell)$ stablement conjugués à γ_0, modulo $G(\mathbb{Q}_\ell)$–conjugaison, et le groupe*

$$\mathrm{Ker}(H^1(\mathbb{Q}_\ell, I) \longrightarrow H^1(\mathbb{Q}_\ell, G))$$

où $I = G_{\gamma_0}$.

D'après notre hypothèse (34), on a $H^1(\mathbb{Q}_\ell, G) = \{1\}$. Le couple (γ_ℓ, γ_0) détermine donc un élément α_ℓ de $H^1(\mathbb{Q}_\ell, I) = \pi_0(\widehat{I}^{\Gamma_\ell})^D$ (cf. (35)). De plus, toujours d'après (34), $\widehat{D}^{\Gamma_\ell}$ est connexe : ceci résulte de (35) et du fait que la cohomologie d'un tore induit est triviale. Par conséquent α_ℓ est trivial sur $\widehat{D}^{\Gamma_\ell}$, donc

$$\alpha_\ell \in X^*(I^{\Gamma_\ell}\widehat{D}/\widehat{D}) \subset X^*(I^{\Gamma}\widehat{D}/\widehat{D})\,. \tag{41}$$

(b) **En** p. — Rappelons que $N\delta$ est conjugué à γ_0 dans $G(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. D'après une théorème de Steinberg il l'est alors dans $G(\mathbb{Q}_p^c)$. Soit $N\delta = c\gamma_0 c^{-1}$, $c \in G(\mathbb{Q}_p^c)$. On vérifie alors que $b = c\delta\sigma(c^{-1}) \in I(\mathbb{Q}_p^c)$. D'après (36) appliqué à I, b détermine un élément $\alpha_p \in X^*(\widehat{I}^{\Gamma_p})$. Sa restriction à $\widehat{D}^{\Gamma_p}$ est égale à $-\mu_1$ à cause de l'hypothèse (38 iv). On a donc

$$\alpha_p \in X^*(\widehat{I}^{\Gamma_p}), \quad \alpha_p|_{\widehat{D}^{\Gamma_p}} = -\mu_1 = -\mu^*|_{\widehat{D}^{\Gamma_p}} \tag{42}$$

(c) **En la place** ∞. — Puisque γ_0 est $\mathbb{R}$–elliptique, on peut supposer à conjugaison près que $h(\mathbb{S}) \subset I$. Alors μ_h est un sous–groupe à un paramètre de I, que l'on identifie à un caractère de $\widehat{I}$. Soit α_∞ sa restriction à $\widehat{I}^{\Gamma_\infty}$. On vérifie encore que α_∞ ne dépend d'aucun choix. On a par construction :

$$\alpha_\infty \in X^*(\widehat{I}^{\Gamma_\infty}), \quad \alpha_\infty|_{\widehat{D}^{\Gamma_\infty}} = \mu^*|_{\widehat{D}^{\Gamma_\infty}}\,. \tag{43}$$

On peut alors étendre les caractères α_v à $\widehat{I}^{\Gamma_v}\widehat{D}$ par

$$\alpha_v|_{\widehat{D}} = \begin{cases} 1 & v \neq p, \infty \\ -\mu^* & v = p \\ \mu^* & v = \infty\,. \end{cases} \tag{44}$$

Par ailleurs, le théorème de Čebotarev implique que

$$\mathcal{K}(I/\mathbb{Q}) = (\bigcap_v \widehat{I}^{\Gamma_v}\widehat{D})/\widehat{D} \tag{45}$$

D'après (44), on peut alors poser :

(46) DÉFINITION. — *L'invariant de Kottwitz* $\alpha(\gamma_0, \gamma, \delta)$ *est le caractère* $\alpha_\infty + \alpha_p + \sum_{\ell} \alpha_\ell$ *de* $\mathcal{K}(I/\mathbb{Q})$.

Ainsi construit, l'invariant semble dépendre de quelques choix : le choix de γ_0 dans sa classe de conjugaison stable, et celui des plongements $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_v$. On vérifie qu'il n'en est rien [16, § 2].

Nous pouvons maintenant exprimer la conjecture de Kottwitz, reformulant celles de Langlands et Langlands–Rapoport. Nous admettrons qu'une construction analogue du groupe $\mathcal{K}$ et de l'invariant α est possible même pour des données $(\gamma_0, \gamma, \delta)$ non régulières (cf. [16]). Nous définissons une fonction $\varphi = \varphi_\alpha$ sur $G(L)$ de la façon suivante : soit $S \subset G$ un tore déployé maximal défini sur L ; puisque G est non ramifié on peut supposer S défini sur $\mathfrak{o}_L$. On vérifie qu'à conjugaison près on peut supposer μ_h à image dans S. Posons

$$
(47)\qquad \begin{aligned} a &= \mu_h(\varpi_L^{-1}) \\ \varphi_\alpha &= \text{fonction caractéristique de } G(\mathfrak{o}_L)\ a\ G(\mathfrak{o}_L)\,. \end{aligned}
$$

Par ailleurs, soit f^p la fonction caractéristique de K^p. Fixons des mesures de Haar dg et dh sur $G(\mathbb{A}_f^p)$, $G(L)$ de façon à donner la mesure 1 à K^p, $G(\mathfrak{o}_L)$. Si $(\gamma, \delta) \in G(\mathbb{A}_f^p) \times G(L)$, les intégrales orbitales $O_\gamma(f^p)$ et $TO_\delta(\varphi_\alpha)$ définies par (15), (16) dépendent du choix d'une mesure de Haar sur $G_\gamma(\mathbb{A}_f^p)$ et $G_{\delta,\sigma}(\mathbb{Q}_p)$. Par construction, on a pour un triplet $(\gamma_0, \gamma, \delta)$ satisfaisant nos conditions :

$$
(48)\qquad I(\mathbb{A}_f) \cong G_\gamma(\mathbb{A}_f^p) \times G_{\delta,\sigma}(\mathbb{Q}_p)\,.
$$

L'hypothèse (34 iii) assure de plus que $I(\mathbb{Q})$ est discret à quotient compact dans $I(\mathbb{A}_f)$.

Enfin, si X est un $\mathbb{Q}$–groupe, on considère le groupe de Šafarevič :

$$
(49)\qquad \ker^1(\mathbb{Q}, X) = \ker(H^1(\mathbb{Q}, X) \longrightarrow \bigoplus_v H^1(\mathbb{Q}_v, X))
$$

Pour un triplet $(\gamma_0, \gamma, \delta)$ et un choix de mesures sur $G_\gamma(\mathbb{A}_f^p)$ et $G_{\delta,\sigma}(\mathbb{Q}_p)$, posons

$$
(50)\qquad c(\gamma_0, \gamma, \delta) = vol(I(\mathbb{Q})\backslash I(\mathbb{A}_f)) \times |\ker[\ker^1(\mathbb{Q}, I) \to \ker^1(\mathbb{Q}, G)]|
$$

On a alors :

(51) CONJECTURE (Kottwitz). —

$$|S_K(k_\alpha)| = \sum_{\substack{\gamma_0,\gamma,\delta \\ \alpha(\gamma_0,\gamma,\delta)=0}} c(\gamma_0,\gamma,\delta) O_\gamma(f^p) TO_\delta(\varphi_\alpha) .$$

La somme porte sur les triplets $(\gamma_0, \gamma, \delta)$ vérifiant (38); γ_0 est pris à $G(\overline{\mathbb{Q}})$–conjugaison près, γ, δ à conjugaison (resp. σ–conjugaison) près. Les coefficients $c(\gamma_0,\gamma,\delta)$ sont définis par (50) et les mesures dénominateurs des intégrales orbitales.

6. — Le théorème

Le théorème annoncé il y a cinq ans par Kottwitz (dans le cas de $Gsp(g)$, cf. [16]) et dont la démonstration a maintenant paru [17] affirme que la description conjecturale du § 5 pour le nombre de points est correcte pour certaines variétés de Shimura qui sont solutions de problèmes de modules de variétés abéliennes de type *"PEL"*, i.e., Polarisées, munies de quelques Endomorphismes et de structures de niveau (Level structures)[(7)].

Plus précisément, soit

B = une algèbre simple sur $\mathbb{Q}$, de centre F.

$*$ = une involution positive de B.

[Une involution est un anti–automorphisme d'ordre 2 : elle est positive si $tr_{B/\mathbb{Q}}(xx^*) > 0$ pour tout $x \in B$].

V = un B–module à gauche muni d'une forme alternée $<,>$ à valeurs dans $\mathbb{Q}$ telle que $< bv, w > = < v, b^* w >$ pour $b \in B$.

Soit C l'algèbre $\mathrm{End}_B(V)$: c'est une $\mathbb{Q}$–algèbre semisimple munie d'une involution $*$ telle que $< cv, w > = < v, c^* w >$. Soit

G = le groupe de similitudes de $(V, B, < >)$. C'est donc un $\mathbb{Q}$–groupe et $G(\mathbb{Q}) = \{ g \in C^\times = GL_B(V) : < gv, gw > \equiv c(g) < v, w > \text{ avec } c(g) \in \mathbb{Q}^\times \}$.

p = un nombre premier satisfaisant les conditions suivantes : $B \otimes \mathbb{Q}_p$ est un produit d'algèbre de matrices sur des extensions non ramifiées de $\mathbb{Q}_p$; il

(7) Laumon propose la traduction française *"de type PEN"*

existe un ordre maximal $\mathfrak{o}_{B,p}$ de $B_{\mathbb{Q}_p}$ est un réseau $\Lambda_p \subset V_{\mathbb{Q}_p}$ préservé par $\mathfrak{o}_{B,p}$ et autodual. Soit alors

$K_p = \{g \in G(\mathbb{Q}_p) : g\ \Lambda_p = \Lambda_p\}$
$K^p \subset G(\mathbb{A}_f^p)$ un sous–groupe compact ouvert.
$h_0 : \mathbb{C} \longrightarrow C \otimes \mathbb{R}$ un $*$–homomorphisme (l'involution $*$ sur $\mathbb{C}$ étant $z \longmapsto \overline{z}$).
$h = h_0^{-1} : \mathbb{S} \rightarrow G\ /\mathbb{R}$.

Nous avons maintenant toutes les données nécessaires pour définir $S_K = S_K(G, h)$. On vérifie que le corps reflex E est non–ramifié en p; soit $\mathfrak{p}|p$ une place de E. Kottwitz vérifie aussi que sous ces hypothèses S_K a bonne réduction en $\mathfrak{p}$ (= a un modèle lisse, que l'on notera aussi S_K, sur $\mathfrak{o}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$.).

L'algèbre C sur F est une algèbre semi–simple à involution, et $C \otimes \overline{F}$ peut être de trois types :

(A) $M_n \times M_n^{opp}$, $(x, y)^* = (y, x)$
(C) M_{2n}, l'involution étant définie par une forme symplectique non dégénérée
(D) M_{2n}, l'involution étant définie par une forme orthogonale non dégénérée.

Le résultat de Kottwitz n'est complet que dans les cas (A,C). Au centre près, G est alors un groupe unitaire (cas A) ou symplectique (cas C) sur un corps totalement réel.

(52) THÉORÈME (Kottwitz). — *Soit G le groupe de similitudes de $(V, B, < >)$, $K = K^p \times K_p$ comme ci–dessus. Alors, k_α étant l'extension de degré α de $k = \mathfrak{o}_E/\mathfrak{p}$,*

$$|S_k(k_\alpha)| = \sum_{\substack{\gamma_0, \gamma, \delta\ : \\ \alpha(\gamma_0, \gamma, \delta) = 0}} c(\gamma_0, \gamma, \delta) O_\gamma(f^p) TO_\delta(\varphi_\alpha)\,.$$

Il n'est pas question d'esquisser ici la démonstration, difficile, et pour laquelle on renvoie à Kottwitz [17]. L'étape la plus sérieuse est celle que nous avons mentionnée à la fin du § 4, et qui est résolue à l'aide de la théorie des représentations cristallines de Fontaine–Messing. Pour le groupe $GSp(g)$, elle se ramène à la question suivante. On a vu qu'une classe de $\mathbb{Q}$–isogénie (A, λ) de variétés **polarisées** déterminait un triplet $(\gamma_0, \gamma, \delta)$. On vérifie tout d'abord que toute classe de $\mathbf{Q}$–isogénie (A', λ') $\overline{\mathbf{Q}}$–isogène à (A_0, λ_0) détermine un élément (γ', δ'), unique à conjugaison près, compatible à γ_0 au sens de (38) ; la classe de $\overline{\mathbf{Q}}$–isogénie de (A, λ) est identique à la classe de $\mathbf{Q}$–isogénie de A, i.e., est paramétrée par $\gamma_0 \pmod{G(\overline{\mathbf{Q}})}$.

Cependant, il n'est pas vrai que tous les éléments (γ, δ) satisfaisant les conditions (38) proviennent d'une classe de $\mathbf{Q}$–isogénie (A', λ'). Le théorème principal dit que c'est vrai si et seulement si $\alpha(\gamma_0, \gamma, \delta) = 0$. C'est essentiellement le résultat de Reimann-Zink [32] ; cf. aussi Kottwitz [17, § 18].

7. — Perspectives

7.1. — Commençons par expliquer, sous une forme idéalisée, comment l'expression (51) devrait permettre d'exprimer la fonction zêta Z_{S_K} en termes de fonctions L automorphes. Soit $\widehat{G}$ le groupe dual de G [2], $\widehat{T} \subset \widehat{G}$ un tore maximal, $\Omega = \Omega(\widehat{G}, \widehat{T})$ le groupe de Weyl absolu. Soit μ_* le caractère de $\widehat{T}$ déterminé par μ_h (cf. § 5). Il est bien défini modulo Ω, et l'orbite de μ_*^{-1} détermine une représentation irréductible V de $\widehat{G}$.

Soit par ailleurs ${}^L(G/E) = \widehat{G} \rtimes \Gamma_E$, $\Gamma_E = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/E)$, le groupe dual de $G \underset{\mathbf{Q}}{\times} E$.

(5.3) LEMME (Langlands, Kottwitz). — *V s'étend en une représentation irréductible r de ${}^L(G/E) = \widehat{G} \rtimes \Gamma_E$.*

Soit π une représentation automorphe de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{Q}})$. Rappelons deux faits. D'abord, le changement de base [2] détermine alors une représentation π_E^N de $G(\mathbb{A}_E^N) = \prod_{\mathfrak{p} \nmid N}{}' G(E_{\mathfrak{p}})$, N étant assez grand pour éviter les mauvaises places. On conjecture que π_E^N se complète en une représentation automorphe π_E. Par ailleurs, donnée π_E^N et la représentation r, on peut définir une fonction L automorphe $L(\pi_E^N, r, s)$. Si π_E existe, la fonction L complète $L(\pi_E, r, s)$ aura de *"bonnes"* propriétés.

La forme (51) du nombre de points suggère alors, modulo la formule des traces de Selberg[8] :

(8) L'ordre historique est inverse : (54) a suggéré les formes successives de (51) !

(54) CONJECTURE (Forme grossière !). —

$$Z_K^N(s) = \prod_{\pi} L(s, \pi_E^N, r)^{\varepsilon(\pi) \dim \pi_f^K} .$$

L'exposant $\varepsilon(\pi)$ devrait admettre une définition analogue du cas de $GL(2)$ (§ 3) ; π devrait parcourir les représentations automorphes (du spectre discret ?) de $G(\mathbb{A})$.

Langlands a vite remarqué que (54) ne pouvait être vrai sous cette forme idéale. Les problèmes sont de deux ordres.

7.2. — Tout d'abord, la formule (52) n'est pas une somme d'intégrales orbitales sur les éléments $\mathbb{R}$-elliptiques $\gamma_0 \in G(\mathbb{Q})$ modulo conjugaison (comme dans la formule des traces de Selberg), mais modulo conjugaison stable. Pour chaque γ_0 modulo $G(\overline{\mathbb{Q}})$, le terme correspondant ressemble à une intégrale orbitale stable (cf. [7]) mais en diffère à cause de la condition $\alpha(\gamma_0, \gamma, \delta) = 0$.

Pour comprendre le sens "automorphe" de la formule, il faut donc la stabiliser. Ceci est fait par Kottwitz dans [16, § 4] **modulo** des hypothèses d'analyse harmonique dues à Langlands, Shelstad et Kottwitz. Le résultat final est une formule conjecturale pour l'expression (52) à l'aide des (termes elliptiques des) formules des traces pour certains groupes naturellement associés à G, les "groupes endoscopiques".

Un problème aussi profond est dû au fait que la variété S_K n'est en général pas complète. Il est naturel d'en considérer la compactification minimale $\overline{S}_K$ de Baily–Borel. Celle-ci n'est pas lisse, et on considère alors les traces des opérateurs de Frobenius dans sa cohomologie d'intersection. On espère relier celles-ci aux traces des opérateurs de Hecke dans le spectre discret de $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$[9].

Kottwitz, à la suite de la description conjecturale donnée par Arthur de la décomposition de $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$, a formulé une conjecture précise dans ces termes. C'est l'objet du § 9 de [16]. On renvoie le lecteur à cet article, ainsi qu'à l'exposé qu'en ont fait Blasius et Rogawski [1].

[9] Le premier résultat de ce type est celui de Brylinski–Labesse [4].

Ces questions font l'objet de progrès rapides, mais sont loin d'être résolues. Citons deux cas importants où leur solution est complète.

Le premier est celui des variétés associées aux groupes unitaires anisotropes obtenus à partir d'involutions de seconde espèce. Plus précisément, soit

$F =$ un corps CM, de sous-corps totalement réel F_0

$D =$ une algèbre à division de degré n^2 sur F

$* =$ une involution de D induisant sur F l'automorphisme de Galois par rapport à F_0.

Soit G le groupe de points rationnels

$$G(\mathbf{Q}) = \{d \in D : dd^* \in \mathbf{Q}^\times\}.$$

Le théorème (52) s'applique à G, et l'on vérifie de plus que les groupes $\mathcal{K}$ de (39) – et donc les invariants α – sont triviaux. Par ailleurs G est anisotrope, et les variétés S_K complètes. Le théorème de Kottwitz implique alors que la fonction zêta de S_K (aux bonnes places) s'exprime comme produit de fonctions L automorphes. Dans certains cas (par exemple si $F_0/\mathbf{Q}$ est galoisien et si le groupe $G_1(\mathbf{R}) = \{d \in D \otimes \mathbf{R} : dd^* = 1\}$ est isomorphe à $U(n,1) \times U(n) \times \cdots \times U(n)$ – on peut en déduire une variante de la conjecture de Hasse–Weil pour ces variétés. (Ce qui manque est l'expression correcte de la fonction zêta aux mauvaises places). Voir Kottwitz [18].

Le second cas est celui des groupes unitaires à trois variables sur $\mathbf{Q}$. Il est traité en détail dans l'ouvrage collectif [25]. Dans ce cas, les problèmes combinatoires et ceux liés à la compactification peuvent être résolus (l'étude à l'infini est due à Kottwitz et Rapoport). On obtient un résultat complet, toujours aux places de bonne réduction : les traces de Frobenius dans la cohomologie d'intersection s'expriment à l'aide de la formule de Selberg, comme traces d'opérateurs de Hecke dans le spectre discret.

Terminons en remarquant que les problèmes liés à la mauvaise réduction semblent extrêmement difficiles. Ils ne sont résolus à toutes les places pour aucun groupe autre que $GL(2)$. Des résultats profonds ont été obtenus par Langlands, Zink, Rapoport. On renvoie à Rapoport [31] pour un exposé détaillé. Le but ultime, qui semble hors d'atteinte, serait d'obtenir en général un théorème aussi complet que celui de Carayol [5] pour GL_2.

BIBLIOGRAPHIE

[C] *Automorphic Forms, Representations, and L–functions,* Proceedings of the Corvallis Conference, A. Borel et W. Casselman eds, Proc. Symp. Pure Math. **33**, AMS, Providence, 1979, I, II.

[AA] *Automorphic Forms, Shimura Varieties, and L–functions*, Proceedings of the Ann Arbor Conference, L. Clozel et J.S. Milne eds, Academic Press., 1990, I, II.

[1] D. BLASIUS et J. ROGAWSKI. — *Zeta functions of Shimura varieties*, à paraître dans le volume de la conférence de Seattle (1991) sur les *"Motifs"*.

[2] A. BOREL. — *Automorphic L–functions*, in [C], II, 27–62.

[3] L. BREEN, J.–P. LABESSE eds. — *Variétés de Shimura et fonctions L*, Publ. Math. Univ. Paris VII, **6**, s.d.

[4] J.–L. BRYLINSKI et J.–P. LABESSE. — *Cohomologie d'intersection et fonctions L de certaines variétés de Shimura*, Ann. Sci. E.N.S. (IV) **17** (1984), 361–412.

[5] H. CARAYOL. — *Sur les représentations ℓ–adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sci. E.N.S. **19** (1986), 409–468.

[6] H. CARAYOL. — *Variétés de Drinfel'd compactes, d'après Laumon, Rapoport et Stuhler*, Sém. Bourbaki, 1991–92, Exposé 756.

[7] L. CLOZEL. — *Nombres de Tamagawa des groupes semi–simples (d'après Kottwitz)*, Sém. Bourbaki, 1988–89, Exposé 702.

[8] P. DELIGNE. — *Travaux de Shimura*, Sém. Bourbaki, fev. 1971, Exposé 389.

[9] P. DELIGNE. — *Variétés de Shimura*, in [C], II, 247–290.

[10] P. DELIGNE. — *Motifs et groupe de Taniyama*, in Deligne, Milne, Ogus, Shih, "Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties", Springer L.N. Math. **900**, 261–279.

[11] M. EICHLER. — *Quaternäre quadratische Formen and die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion*, Arch. Math. **5** (1954), 355–366.

[12] T. HONDA. — *Isogeny classes of abelian varieties over finite fields*, J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 83–95.

[13] N. KATZ et B. MAZUR. — *Arithmetic moduli of elliptic curves*, Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press., Princeton, 1985.

[14] R. KOTTWITZ. — *Shimura varieties and twisted orbital integrals*, Math. Ann. **269**, (1984), 287-300.

[15] R. KOTTWITZ. — *Isocrystals with additonal structure*, Compositio Math. **56**, (1985), 201–220.

[16] R. KOTTWITZ. — *Shimura varieties and λ-adic representations*, in [AA], I, 161–209.

[17] R. KOTTWITZ. — *Points on Shimura varieties over finite fields*, Journ. A.M.S. **5**, (1992), 373–444.

[18] R. KOTTWITZ. — *On the λ-adic representations associated to some simple Shimura varieties*, Inv. Math., **108**, (1992), 653–665.

[19] J.-P. LABESSE. — *La formule des traces d'Arthur–Selberg*, Sém. Bourbaki, 1986, Exposé 636.

[20] R.P. LANGLANDS. — *Some contemporary problems with origins in the Jugendtraum*, in "Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems", Proc. Sympos. Pure Math. **28**, (1976), 401–418.

[21] R.P. LANGLANDS. — *Shimura varieties and the Selberg trace formula*, Can. J. Math. **29** (1977), 1292–1299.

[22] R.P. LANGLANDS. — *On the zeta-functions of some simple Shimura varieties*, Can. J. Math. **31**, (1979), 1121–1216.

[23] R.P. LANGLANDS. — *Automorphic representations, Shimura varieties and motives*, in [C], II, 205–246.

[24] R.P. LANGLANDS. — *Base change for $GL(2)$*, Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press., Princeton, 1980.

[25] R.P. LANGLANDS, M. RAPOPORT. — *Shimuravarietäten und Gerben*, J. Reine Angew. Math. **378**, (1987), 113–220.

[26] R.P. LANGLANDS, D. RAMAKRISHNAN eds. — *The zêta functions of Picard Modular Surfaces*, Publ. du Centre de Recherches Mathématiques, Montréal, 1992.

[27] J.S. MILNE. — *Points on Shimura varieties* mod p, in [C], II, 165–184.

[28] J.S. MILNE. — *The conjecture of Langlands and Rapoport for Siegel modular varieties*, Bull. Amer. Math. Soc. **24**, (1991), 335–341.

[29] J.S. MILNE. — *The conjecture of Langlands and Rapoport for Siegel modular varieties*, preprint, 1990.

[30] J.S. MILNE. — *Canonical Models of (Mixed) Shimura Varieties and Automorphic Vector Bundles*, in [AA], I, 283–414.

[31] M. RAPOPORT. — *On the Bad Reduction of Shimura Varieties*, in [AA], II, 253–321.

[32] H. REIMANN, T. ZINK. — *Der Dieudonnémodul einer polarisierten abelschen Mannigfaltigkeit vom CM–typ*, Ann. of Math. **128**, (1988), 461–482.

[33] H. REIMANN, T. ZINK. — *The good reduction of Shimura varieties associated to quaternion algebras over a totally real number field*, preprint.

[34] G. SHIMURA. — *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press., 1971.

[35] Y. TANIYAMA. — *Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory*, Publ. Math. Soc. Japan, **6**, 1961.

[36] J. TATE. — *Classes d'isogénie des variétés abéliennes sur un corps fini (d'après T. Honda)*, Sém. Bourbaki, 1968, Exposé 352.

[37] T. ZINK. — *Isogenieklassen von Punkten von Shimuramannigfaltigkeiten mit Werten in einem endlichen Körper*, Math. Nachr. **112**, (1983), 103–124.

Laurent CLOZEL
Bâtiment 425, Mathématiques
Université Paris–Sud
F–91405 ORSAY