Astérisque

PATRICK GÉRARD

Résultats récents sur les fluides parfaits incompressibles bidimensionnels

Astérisque, tome 206 (1992), Séminaire Bourbaki, exp. nº 757, p. 411-444

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1991-1992__34__411_0>

Séminaire BOURBAKI — Juin 1992
44ème année, 1991-92, n° 757

RÉSULTATS RÉCENTS SUR LES FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLES BIDIMENSIONNELS

[d' après J.-Y. CHEMIN et J.-M. DELORT]

par **Patrick GÉRARD**

L'équation d'Euler pour les fluides parfaits incompressibles est l'une des plus importantes équations d'évolution non linéaires de la physique mathématique, et l'étude de ses solutions a suscité de nombreuses recherches, notamment dans les trente dernières années, parallèlement au développement de méthodes d'analyse non linéaire. Récemment, Chemin et Delort ont démontré deux résultats concernant les solutions singulières de cette équation en dimension 2 d'espace. Dans une première partie, nous rappelons le cadre mathématique et essayons de situer ces deux résultats dans l'approche générale du problème de Cauchy pour l'équation d'Euler bidimensionnelle. Dans la seconde partie, nous donnons une démonstration de deux résultats classiques importants, dûs respectivement à Wolibner et à Yudovitch, puis nous présentons plus en détail les travaux de Chemin et Delort.

Je remercie J.–B. Bost, J.–Y. Chemin, J.–M. Delort et X. Saint–Raymond pour l'aide qu'ils m'ont apportée dans la préparation de cet exposé.

0.1. Préliminaires

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte connexe orientée de dimension d.[1] Les notations suivantes de géométrie différentielle seront utilisées au cours de cet exposé :

[1] *La plupart des résultats discutés ici ont été obtenus dans l'espace* $\mathbf{R}^d$ *plutôt que sur une variété compacte. Nous avons préféré ce cadre car il évite une discussion délicate des conditions à l'infini, et permet de mieux montrer les aspects invariants des techniques utilisées.*

Si X est un champ de vecteurs sur M, on désigne par L_X la dérivée de Lie suivant X, et par ∇_X la dérivée covariante suivant X. On désigne par τ la forme volume positive sur M. La divergence du champ X est la fonction $\mathrm{div}X$ définie par

$$L_X\tau = (\mathrm{div}X)\tau.$$

La norme de X sera notée $|X| = g(X,X)^{1/2}$. La dérivée covariante induit un opérateur différentiel d'ordre 1 ∇ des champs de vecteurs dans les sections du fibré $\mathrm{End}(TM)$, ou champs de tenseurs. On a alors $\mathrm{div}X = \mathrm{tr}(\nabla X)$.

On note $u \mapsto \tilde{u}$ l'isomorphisme de TM dans T^*M induit par la métrique g. Le gradient ∇f d'une fonction f est le champ de vecteurs correspondant à df par cet isomorphisme, et le laplacien de f est défini par $\Delta f = \mathrm{div}\nabla f$. La divergence d'un champ de tenseurs T est le champ de vecteurs $\mathrm{div}T$ correspondant à $-{}^t\nabla T$ par cet isomorphisme, ${}^t\nabla$ désignant l'opérateur différentiel transposé de ∇ pour la densité τ. Si u est un champ de vecteurs à divergence nulle, on a $\mathrm{div}(u\otimes\tilde{u}) = \nabla_u u$.

Enfin, on désigne par $*$ l'opérateur de Hodge sur les formes.

Lorsque M est de dimension 2, on appelle J l'opérateur sur les champs de vecteurs défini par

$$(JX)\tilde{} = *\tilde{X}.$$

On a $J^2 = -1$. Le rotationnel d'un champ de vecteurs X est la fonction $\mathrm{rot}X$ définie par $d\tilde{X} = (\mathrm{rot}X)\tau$. On a aussi $\mathrm{rot}u = -\mathrm{tr}(J\nabla X)$. Enfin, si u est un champ de vecteurs à divergence nulle, on a $\mathrm{rot}\nabla_u u = L_u \mathrm{rot}u$.

0.2. L'équation d'Euler.

En 1755, pour décrire le mouvement d'un fluide parfait incompressible occupant M, Euler [E] introduit le système d'équations suivant. Si l'on désigne par $u(t,x)$ la vitesse à l'instant $t \in \mathbf{R}$ de la particule de fluide occupant la position $x \in M$, le principe fondamental de la dynamique et la condition d'incompressibilité s'écrivent successivement

$$(E_1) \qquad \partial_t u + \nabla_u u = -\nabla p,$$

$$(E_2) \qquad \mathrm{div}u = 0,$$

où p désigne le champ scalaire de pression. Dans la suite, nous désignerons par (E) le système ci–dessus. Notons que le gradient de pression n'est pas une donnée du problème, mais une inconnue supplémentaire, que l'on élimine en prenant la divergence de l'équation (E_1),

$$-\Delta p = \mathrm{div} \nabla_u u,$$

ce qui détermine ∇p en fonction du champ de vecteurs u.

On peut également voir (E) comme l'équation des géodésiques sur le groupe de Lie de dimension infinie des difféomorphismes de M préservant le volume, muni de la métrique définie par l'énergie cinétique

$$E_c = \int_M |u(t,x)|^2 \tau(x).$$

Dans ce cadre, p s'interprète comme un multiplicateur de Lagrange. Nous ne développerons pas ici ce point de vue et renvoyons à Arnold [Ar], Ebin–Marsden [EB], Shnirelman [Sh] et Brenier [Br] pour une étude détaillée. Retenons seulement de cette interprétation que, si u est solution de (E), l'énergie cinétique est constante au cours du temps—ce que l'on peut d'ailleurs aisément retrouver en prenant le produit scalaire L^2 des deux membres de (E_1) par u et en utilisant (E_2).

Un problème fondamental en mécanique des fluides est bien sûr le problème de Cauchy associé à (E), c'est-à-dire la détermination de u vérifiant (E) et la condition $u(0,x) = u^0(x)$, u^0 étant un champ de vecteurs donné sur M à divergence nulle. L'unicité et l'existence sur un petit intervalle de temps semblent avoir été démontrées pour la première fois par Lichtenstein [Li] en 1925. L'existence globale d'une telle solution est toujours un problème ouvert en dimension 3, mais a été démontrée en dimension 2 par Wolibner [W] en 1933 (*cf.* aussi Kato [Ka]). Néanmoins le résultat de Wolibner nous renseigne peu sur les propriétés qualitatives de la solution qu'il met en évidence ; les estimations obtenues laisseraient même présager un comportement très chaotique des lignes de courant lorsque t devient grand (*cf.* §1).

Pour obtenir des renseignements sur les propriétés qualitatives des solutions d'un tel problème, une approche couramment employée est d'essayer de résoudre le même problème avec des données singulières et de décrire comment évoluent les singularités. Ces solutions singulières (par exemple, un champ de vitesses discontinu) sont en général des modèles "limites" de phénomènes physiques mettant en présence des échelles de grandeur très différentes (par exemple, l'évolution d'une interface). Les deux résultats qui font l'objet de cet exposé se rattachent directement à cette problématique pour un fluide bidimensionnel. Avant de les présenter, il nous faut introduire une quantité fondamentale en mécanique des fluides : le tourbillon.

0.3. Le tourbillon.

Dans toute la suite de l'exposé, la variété M est supposée de dimension 2. On définit le tourbillon ω associé au champ de vitesses u par la formule

$$\omega = \mathrm{rot}\, u.$$

Notons que $\int_M \omega(x)\tau(x) = 0$. Outre son interprétation physique évidente, l'intérêt de cette notion est qu'elle permet une formulation équivalente de (E), de la façon suivante. En appliquant l'opérateur rot à (E_1), on obtient l'équation de transport

$$(T) \qquad \partial_t \omega + L_u \omega = 0,$$

traduisant que ω est une fonction constante le long des lignes de courant. Par ailleurs, on peut—presque— retrouver u à partir de ω. Pour cela, on utilise le fait que le laplacien est un automorphisme de l'espace vectoriel des fonctions C^∞ de moyenne nulle (*cf.* par exemple [R]); désignons par Δ^{-1} son inverse. Soit d'autre part $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel de dimension finie des champs de vecteurs harmoniques sur M, et soit H le projecteur orthogonal de l'espace des champs de vecteurs sur M à valeurs dans $\mathcal{H}$, pour le produit scalaire L^2 associé à τ. En tenant compte de (E_2), la décomposition de Hodge–de Rham [R] du champ u donne la "relation de Biot et Savart"

$$(B) \qquad u = B\omega + h,$$

où $B = J\nabla\Delta^{-1}$ est la restriction aux fonctions de moyenne nulle d'un opérateur pseudodifférentiel d'ordre -1, et $h = H(u)$. Enfin, l'évolution de h dans l'espace $\mathcal{H}$ est obtenue en appliquant H à l'équation (E_1),

$$(H) \qquad \partial_t h + Q(u, u) = 0,$$

où l'on a posé

$$Q(v, w) = -\sum_j \Big(\int_M g(\nabla_v X_j, w)\tau\Big) X_j,$$

(X_j) désignant une base orthonormale de $\mathcal{H}$. Puisque h varie dans un espace de dimension finie et que sa norme L^2 est majorée par celle de u donc bornée au cours du temps, on peut prévoir que l'évolution de h n'aura pas d'influence sur les propriétés qualitatives de la solution u. On notera que, dans deux cas simples, cette évolution est triviale : si M est une sphère, $\mathcal{H} = \{0\}$, tandis que si M est un tore plat, h est constant au cours du temps.

Il est aisé de vérifier que le système (T, B, H) est équivalent à (E).

0.4. Poches de tourbillon.

Venons en aux solutions singulières de (E). Le résultat de base est ici celui de Yudovitch [Y] en 1963, et s'applique notamment aux fluides à tourbillon discontinu. Plus précisément, Yudovitch montre que, si la donnée initiale a un tourbillon essentiellement borné, il existe une solution et une seule au problème de Cauchy dont le tourbillon soit essentiellement borné pour tout temps—les équations devant alors être comprises en un sens faible. Pour apprécier ce résultat, remarquons que la relation de Biot et Savart (B) ne permet pas de conclure que le champ des vitesses est lipschitzien; en effet, un opérateur pseudodifférentiel d'ordre -1 n'envoie pas L^∞ dans les fonctions lipschitziennes, mais dans un espace de fonctions légèrement moins régulières. Yudovitch montre néanmoins qu'un champ ayant cette régularité admet un flot, et que le tourbillon à l'instant t se déduit du tourbillon à l'instant initial par l'action de ce flot, conformément à l'équation (T). Hélas la régularité de ce flot se dégrade exponentiellement au cours du temps, ce qui rend délicat un contrôle de l'évolution des singularités (*cf.* §2).

Dans son excellent article de survol consacré à la fonction de tourbillon en mécanique des fluides [M1], Majda pose en 1985 le problème suivant, dit des "poches de tourbillon". Supposons que le tourbillon à l'instant initial ne prenne que deux valeurs, l'ensemble de discontinuité étant une courbe de Jordan γ^0 de classe C^∞. D'après le résultat de Yudovitch, le tourbillon à l'instant t ne prendra que ces deux valeurs, l'ensemble de discontinuité γ^t se déduisant de γ^0 par le flot peu régulier ci-dessus. Que peut-on dire de la régularité de γ^t?

Dans le même article, après avoir décrit l'équation intégrodifférentielle que doit vérifier une paramétrisation régulière de γ^t, Majda annonce que, pour un petit intervalle de temps, le contour restera régulier; de plus, en se basant sur des simulations numériques [Z], il conjecture l'apparition de cusps et la non–rectifiabilité de γ^t au bout d'un temps fini.

Dès lors, plusieurs travaux se succèdent dans le but de confirmer cette conjecture ; outre des travaux numériques [D], [DI], signalons l'approche proposée par Constantin et Titi [CT], qui étudient la perturbation d'une poche de tourbillon stationnaire (par exemple, un disque dans le plan). Dans ce contexte, Alinhac [A1] démontre ensuite que l'approximation quadratique de l'équation des poches de tourbillon développe effectivement des singularités.

Toutes ces contributions rendent d'autant plus remarquable le résultat suivant, démontré par Chemin en 1991 :

THÉORÈME A. (Chemin [C4]). *Le contour d'une poche de tourbillon reste C^∞ pour tout temps.*

La démonstration de Chemin repose sur deux idées principales.

La première consiste à remarquer que, si l'on désigne par X^0 un champ de vecteurs C^∞ sur M tangent non nul à la courbe γ^0, et si X^t est le champ — singulier— transporté de X^0 par le flot du fluide à l'instant t, la régularité de γ^t découlera du fait que, bien que X^t ne soit pas C^∞, X^t et toutes les dérivées covariantes $\nabla^k_{X^t} X^t$ appartiendront à un même espace de Hölder C^α. Ce type de régularité, dite "conormale" ou "deux–microlocale", est au centre des travaux sur la propagation des singularités dans les équations hyperboliques non linéaires développés par Bony et son école dans les dix dernières années. Pour une introduction à ces résultats, nous renvoyons le lecteur à l'article de survol de Bony [B2] et à l'exposé de Lebeau [L] dans ce séminaire. En utilisant les méthodes utilisées dans ces travaux, et auxquelles il a lui–même contribué [C5], Chemin démontre en 1989 [C1,3] le résultat de régularité locale en temps du contour de la poche de tourbillon, tel qu'il avait été annoncé par Majda. Mentionnons aussi que, par les mêmes méthodes, Chemin montre le remarquable résultat suivant, qui, lui, concerne l'équation d'Euler en toute dimension: "*Toute solution C^r $(r > 1)$ de l'équation d'Euler sur $[0,T] \times M$ possède des lignes de courant C^∞.*" [C2]

La deuxième idée est le pas décisif vers la régularité globale en temps et fait l'objet de l'article [C4]. Elle réside dans une estimation de la norme Lipschitz du champ des vitesses en fonction de la norme de ω dans L^∞ et de quantités "conormales" mesurant la régularité de la géométrie, le point essentiel étant que ces quantités apparaissent comme argument d'un logarithme (*cf.* §3, proposition 8).

Remarquons que ces estimations sont en fait très générales, et que le résultat de Chemin s'étend à des situations géométriques beaucoup plus compliquées que la simple poche de tourbillon (*cf.* §3).

Signalons que les travaux de Chemin mentionnés ci–dessus ont donné lieu à diverses améliorations ou reformulations : ainsi, la régularité locale des poches de tourbillon a été prouvée indépendamment par Serfati [S], qui a travaillé directement sur l'équation intégrodifférentielle du contour, et a prouvé de plus une régularité analytique en temps de ce contour. Une approche directe de la régularité locale a également été développée récemment par Bertozzi [Be] dans sa thèse. Enfin, il y a trois mois, Constantin et Bertozzi [BC] ont donné une démonstration un peu plus courte du théorème A, également basée sur une estimée logarithmique, mais dépendant plus fortement de la structure géométrique particulière d'une poche de tourbillon.

Pour conclure l'introduction à ce problème, indiquons que les estimations sur la géométrie du contour obtenues par Chemin sont doublement exponentielles par rapport au temps ; il serait intéressant de savoir si ces estimations sont optimales ; si tel est le cas, cela pourrait expliquer les prédictions d'apparition de singularités découlant des simulations numériques. Un autre problème ouvert est l'évolution de contours présentant au départ des singularités (coins, cusps, etc...).

0.5. Nappes de tourbillon.

Passons maintenant à des solutions plus singulières encore. Supposons donné un champ de vitesses initial u^0 discontinu à travers une courbe régulière de M; le tourbillon est alors une mesure de Radon dont la partie singulière est une densité sur cette courbe. Peut–on encore résoudre le problème de Cauchy pour (E) dans ce cas (on notera que le théorème de Yudovitch ne s'applique plus)?

Plus encore que le précédent, ce problème modélise un grand nombre de situations physiques, par exemple l'écoulement près d'une aile d'avion, et a donné lieu à une abondante littérature physique et numérique ; nous renvoyons à l'article de Saffman et Baker [SB] pour une introduction détaillée. Contentons–nous ici de dire qu'il s'agit d'un problème très instable, comme l'avaient déjà remarqué

Helmholtz [H], Kelvin [Ke] et Taylor [T]. Contrairement au cas des poches de tourbillon, l'équation intégrodifférentielle censée décrire l'évolution de l'interface est mal posée en temps petit, en ce sens que le problème *linéarisé* associé n'a pas de solutions dans C^∞ (*cf.* Birkhoff [Bi]). On dispose néanmoins de résultats d'existence locale pour ce problème lorsque l'interface et la restriction de u^0 à son complémentaire sont analytiques, les méthodes étant alors basées sur des formes abstraites du théorème de Cauchy–Kowaleska (*cf.* [BF], [DR], [CO]). Mais les simulations numériques (*cf.* notamment Krasny [Kr]) laissent présager un comportement beaucoup plus complexe au bout d'un temps fini.

Plus généralement, on peut se poser la question suivante : étant donné un champ de vitesses initial dans L^2 dont le tourbillon est une mesure bornée, existe–t–il une solution au problème de Cauchy? Les méthodes de recherche de solutions faibles pour des équations aux dérivées partielles non linéaires suggèrent la stratégie suivante : en régularisant la donnée de Cauchy et en utilisant le théorème de Wolibner, on obtient une suite (u_n) de solutions régulières dont les énergies cinétiques sont bornées, ainsi que les normes L^1 des tourbillons correspondants. Une sous–suite $(u_{n'})$ convergera donc faiblement vers un champ de vitesses u de carré intégrable dont le tourbillon est une mesure. Le problème est de savoir si u est solution de l'équation d'Euler

$$(E') \qquad \partial_t u + \mathrm{div}(u \otimes \tilde{u}) = -\nabla p, \quad \mathrm{div} u = 0,$$

(E_1) étant écrite ici sous sa forme conservative pour garder un sens lorsque u est seulement de carré intégrable. La difficulté est que l'on ignore si la convergence de $u_{n'}$ vers u est forte, et que l'on ne peut donc pas passer à la limite dans le terme $u_{n'} \otimes \tilde{u}_{n'}$. Dans leurs trois articles [DM1,2,3], DiPerna et Majda sont les premiers à aborder ce problème. Ils montrent en particulier que la suite converge fortement en dehors d'un ensemble de dimension de Hausdorff plus petite ou égale à 1 ; un peu plus tard, Greengard et Thomann [GT] montrent que, si cette dimension est < 1, la convergence est forte. DiPerna et Majda suggèrent également la possibilité d'un phénomène de "concentration évanescente" selon lequel, bien que la convergence ne soit pas forte, u serait solution de l'équation d'Euler ; Alinhac [A2] montre ensuite que ce phénomène a lieu si les valeurs d'adhérence de la suite $(|u_{n'} - u|^2)$ pour la topologie vague sont concentrées sur des ensembles "suffisamment petits".

Ce n'est qu'en 1990 qu'une réponse positive est donnée à ce problème, dans un cas particulier important :

THÉORÈME B. (Delort [D1,2]). *Soit (u_n) une suite de solutions régulières de (E) dont la suite des données initiales (u_n^0) converge en moyenne quadratique vers (u^0) ; on suppose que $\omega^0 = \mathrm{rot} u^0$ est une mesure de Radon dont la partie singulière est positive (resp. négative), et que la suite $(\mathrm{rot} u_n^0)$ converge vers ω_0 pour la topologie vague. Alors toute valeur d'adhérence de (u_n) est solution de (E'). En particulier, le problème de Cauchy pour (E') avec la donnée (u^0) admet une solution.*

Mentionnons que le théorème de Delort contient en fait aussi un résultat de stabilité par passage à la limite faible pour les solutions de (E') qu'il met en évidence, à savoir les solutions d'énergie finie dont le tourbillon est à tout instant une mesure de Radon à partie singulière positive (resp. négative). En revanche, l'unicité pour de telles solutions n'est pas connue ; de même, la conservation de l'énergie cinétique au cours du temps est un problème ouvert — on dispose simplement d'une inégalité, et l'égalité équivaudrait à la convergence forte des suites de solutions introduites plus haut.

La démonstration du théorème B repose sur deux arguments. Tout d'abord, en éliminant la fonction de pression, Delort établit une forme équivalente de (E), qui lui permet de constater qu'il suffit de passer à la limite dans *certaines* expressions quadratiques en u_n. Ce dernier fait avait d'ailleurs été préalablement constaté par les auteurs cités plus haut, en lien avec la "concentration évanescente." Il se trouve alors que l'hypothèse de positivité sur la partie singulière de ω^0 induit un remarquable phénomène de compensation dans les expressions quadratiques pseudodifférentielles en $\omega_n = \mathrm{rot} u_n$, qui permet de passer effectivement à la limite (*cf.* §4). Indiquons enfin que ce phénomène de compensation a été interprété plus récemment par Evans et Müller [EM] en termes d'espace de Hardy, dans l'esprit des résultats de Coifman–Lions–Meyer–Semmes [CL].

0.6. Rappels sur les espaces fonctionnels utilisés.

Si E est un fibré vectoriel sur M et $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, on désigne par $C^k(M, E)$ l'espace des sections de classe C^k de E. Pour chaque fibré E utilisé dans la suite, et pour tout $k \neq \infty$, on fait le choix d'une norme sur $C^k(M, E)$ qui définit la topologie de la convergence C^k; on désignera cette norme par $[\ \ ]_k$.

Si $\alpha\in]0,1[$, on désigne par $C^\alpha(\mathbf{R}^n)$ l'espace des fonctions f bornées sur $\mathbf{R}^n$ telles qu'il existe $C>0$ satisfaisant à

$$|f(x)-f(y)|\leq C|x-y|^\alpha.$$

Si α est un réel positif non entier, $C^\alpha(\mathbf{R}^n)$ désigne l'espace des fonctions bornées de classe $C^{[\alpha]}$ dont les dérivées d'ordre $[\alpha]$ appartiennent à $C^{\alpha-[\alpha]}(\mathbf{R}^n)$. On munit chacun de ces espaces de sa structure naturelle d'espace de Banach.

Si $\alpha-m$ est positif non entier, un opérateur pseudodifférentiel d'ordre m est borné de $C^\alpha(\mathbf{R}^n)$ dans $C^{\alpha-m}(\mathbf{R}^n)$. On définit alors les espaces de Hölder pour les autres valeurs de α de telle sorte que cette propriété reste vraie pour tous réels α et m. On note encore $C^\alpha(\mathbf{R}^n)$ ces espaces, sauf dans le cas où $\alpha=k$ est un entier naturel, où l'on préfère noter $C^k_*(\mathbf{R}^n)$, pour distinguer cet espace de celui des fonctions de classe C^k bornées à dérivées bornées, qu'il contient strictement. Là encore, ces espaces sont munis d'une structure naturelle d'espace de Banach, et on notera $\|\ \ \|_\alpha$ une norme définissant cette structure. Par exemple, $C^1_*(\mathbf{R}^n)$ est la "classe de Zygmund", c'est–à–dire l'espace des fonctions bornées satisfaisant à

$$|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)|\leq C|h|.$$

On décrit aisément les espaces de Hölder ainsi définis en utilisant la décomposition dyadique dans l'espace de Fourier comme suit (*cf.* par exemple Coifman–Meyer [CM]). Soit $\varphi=\varphi(\xi)$ une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}^n$, à support compact dans $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$, telle que

$$\chi(\xi)=1-\sum_{p=0}^{\infty}\varphi(2^{-p}\xi)$$

soit supportée dans un compact de $\mathbf{R}^n$. Si f est une distribution tempérée sur $\mathbf{R}^n$, on pose, pour $p\geq 0$,

$$\Delta_p f(x)=\varphi(2^{-p}D)f(x),\quad S_p f(x)=\chi(2^{-p}D)f(x)$$

et $\Delta_{-1}f(x)=\chi(D)f(x)$, de sorte que

$$S_p f=\sum_{-1\leq q\leq p-1}\Delta_q f,\quad f=\sum_{-1\leq q}\Delta_q f.$$

On notera que $S_p f$ est une fonction de classe C^∞, et que, en désignant par $[\ \ ]_k$ la norme C^k sur $\mathbf{R}^n$, on a

$$[S_p f]_k \leq C_k 2^{kp} [S_p f]_0,$$

où C_k ne dépend que de k. La distribution tempérée f appartient alors à $C^\alpha(\mathbf{R}^n)$ pour $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$ (resp. $C^\alpha_*(\mathbf{R}^n)$ pour $\alpha \in \mathbf{N}$) si et seulement si il existe une constante C telle que, pour tout $p \geq -1$, on ait

$$[\Delta_p f]_0 \leq C 2^{-p\alpha},$$

la meilleure constante C définissant alors une norme sur l'espace de Hölder d'ordre α qui induit sa structure d'espace de Banach.

Les espaces de Hölder ainsi définis sont stables par multiplication par une fonction C^∞ à support compact, et localement invariants par difféomorphisme. Si E est un fibré vectoriel sur la variété compacte M, on peut donc définir l'espace des sections hölderiennes d'ordre α de E au-dessus de M, que l'on note $C^\alpha(M, E)$ si α n'est pas un entier naturel et $C^\alpha_*(M, E)$ sinon; on note en outre $\|\ \ \|_\alpha$ une norme définissant la topologie naturelle de cet espace.

Si Ω est un ouvert de M et si f est une fonction hölderienne d'ordre α dans Ω, on note

$$\|f\|_{\alpha,\Omega} = \inf\{\|g\|_\alpha, \quad g \in C^\alpha(M), \quad g_{|\Omega} = f\}.$$

Enfin, on désigne par $L^2(M, E)$ l'espace des sections L^2 du fibré E au-dessus de M.

1. SOLUTIONS RÉGULIÈRES.

Théorème 1. (Wolibner [W],1933 ; Kato [Ka],1967). *Soit u^0 un champ de vecteurs de classe C^∞ sur M, à divergence nulle. Il existe une solution unique $u \in C^\infty(\mathbf{R} \times M, TM)$ à l'équation (E), telle que $u(0, x) = u^0(x)$.*

Démonstration. Elle s'effectue en trois temps: on montre d'abord l'existence et l'unicité d'une solution sur un petit intervalle de temps; puis on montre que, si la solution ne peut être prolongée au-delà d'un temps $T > 0$, on a nécessairement

$$\limsup_{t \to T^-} [u(t)]_1 = +\infty.$$

On conclut alors en estimant $[u(t)]_1$sur tout intervalle de temps borné. Si les deux premiers arguments sont généralisables à tous les systèmes hyperboliques non linéaires d'ordre 1, le troisième argument utilise la forme particulière de l'équation (E) et le fait que M est de dimension 2 ; rappelons que le problème analogue est ouvert en dimension 3.

1.1. Existence et unicité à temps petit.

On se contente de résoudre le problème pour $t \geq 0$, le cas $t \leq 0$ étant analogue. Si u et v sont des solutions régulières de (E) sur l'intervalle de temps $[0, T]$ avec la même donnée initiale et des pressions respectives p et q, on a

$$\partial_t(u-v) + \nabla_u(u-v) = -\nabla(p-q) + \nabla_{v-u}v.$$

En égalant le produit scalaire dans $L^2(M, TM)$ des deux membres de cette équation et en utilisant que $\operatorname{div} u = \operatorname{div} v = 0$, il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)-v(t)\|_{L^2}^2 = \left(\nabla_{v(t)-u(t)}v(t), u(t)-v(t)\right).$$

Puisque $[v(t)]_1 \leq C$, on en déduit

$$\frac{d}{dt}\|u(t)-v(t)\|_{L^2}^2 \leq C\|u(t)-v(t)\|_{L^2}^2,$$

et le lemme de Gronwall permet de conclure que $u = v$.

Passons à l'existence locale. On utilise la formulation de (E) à l'aide du système $(T), (H), (B)$; on définit par récurrence trois suites $(u_n), (\omega_n), (h_n)$ de la façon suivante: $u_0(t,x) = u^0(x), \omega_0 = \operatorname{rot} u_0, h_0 = H(u_0)$, et, pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} \partial_t \omega_{n+1} + L_{u_n}\omega_{n+1} = 0, &\quad \omega_{n+1}(0) = \operatorname{rot} u^0, \\ \partial_t h_{n+1} + Q(u_n, B\omega_{n+1} + h_{n+1}) = 0, &\quad h^{n+1}(0) = H(u^0), \\ u_{n+1} = B\omega_{n+1} + h_{n+1}. \end{aligned}$$

Notons que la première équation est une équation de transport linéaire, et que la seconde équation est un système différentiel linéaire dans l'espace de dimension finie $\mathcal{H}$ des champs harmoniques ; de plus, $Q(h_n, h_{n+1}) = 0$ car h_n et h_{n+1} sont harmoniques. De l'équation de transport, on déduit

$$[\omega_n(t)]_0 = [\operatorname{rot} u^0]_0$$

pour tous t et n, et, en utilisant cette estimation et la seconde équation, on obtient que $h_n(t)$ est bornée dans l'espace de dimension finie $\mathcal{H}$. On montre alors facilement qu'il suffit que $[\omega_n(t)]_1$ soit uniformément bornée sur $[0,T]$ pour que les suites (ω_n) (resp. (h_n)) soient de Cauchy dans l'espace $C^0([0,T]\times M)$ (resp. $C^0([0,T],\mathcal{H})$). L'opérateur pseudodifférentiel B étant d'ordre -1, il est borné de C^ϵ dans C^1 pour tout $\epsilon>0$, a fortiori de C^1 dans C^1. Comme par ailleurs h_n est bornée, il existe une constante C_1 telle que, pour tous n et t, on ait

$$[u_n(t)]_1 \leq C_1\big([\omega_n(t)]_1+1\big).$$

On estime alors $[\omega_n(t)]_1$ en intégrant par la méthode des caractéristiques l'équation de transport définissant ω_n. Il vient

$$\frac{d}{dt}[\omega_n(t)]_1 \leq C_2[\omega_n(t)]_1[u_{n-1}(t)]_1.$$

De cette dernière équation, on déduit que, si $[u_{n-1}(t)]_1 \leq M$ pour $t\in[0,T]$, on a

$$[\omega_n(t)]_1 \leq [\mathrm{rot} u^0]_1\, e^{C_2MT},$$

d'où

$$[u_n(t)]_1 \leq C_1\big(1+[\mathrm{rot} u^0]_1\, e^{C_2MT}\big),$$

et il suffit de choisir T et M tels que

$$C_1\big(1+[\mathrm{rot} u^0]_1\, e^{C_2MT}\big) \leq M,$$

pour conclure par récurrence que $[u_n(t)]_1$ est bornée sur $[0,T]$, donc aussi $[\omega_n(t)]_1$. On estime enfin les dérivées d'ordre k de $\omega_n(t)$ à l'aide de l'équation de transport,

$$\frac{d}{dt}[\omega_n(t)]_k \leq C_k\big([u_{n-1}(t)]_1[\omega_n(t)]_k+[u_{n-1}(t)]_k[\omega_n(t)]_1\big).$$

En tenant compte de l'estimée

$$[u_{n-1}(t)]_k \leq C_k(\|\omega_{n-1}(t)\|_{k-1/2}+1) \leq C_k([\omega_{n-1}(t)]_k^{1/2}[\omega_{n-1}(t)]_{k-1}^{1/2}+1),$$

on conclut aisément par récurrence sur n et k que $[\omega_n(t)]_k \leq M_k$ pour tout $t\in[0,T]$, ce qui assure que (u_n) converge dans C^∞ vers une solution de (E). Notons en outre que le temps d'existence T ainsi obtenu ne dépend que d'un majorant de $[u_0]_2$.

1.2. Existence globale.

Supposons que u soit une solution de (E) sur l'intervalle $[0,T[$. A partir des estimées fournies par l'équation de transport (T),

$$\frac{d}{dt}[\omega(t)]_k \leq C_k\big([u(t)]_1[\omega(t)]_k + [u(t)]_k[\omega(t)]_1\big), \tag{1}$$

et par la relation de Biot et Savart,

$$[u(t)]_k \leq C_k\big([\omega(t)]_k + |h(t)|\big),$$

on constate que, si $[u(t)]_1$ est bornée sur $[0,T[$, alors il en est de même de $[u(t)]_k$, quel que soit k, et le résultat d'existence locale précédent permet de prolonger la solution u au–delà du temps T.

Il nous reste donc à montrer que $[u(t)]_1$ est bornée sur $[0,T[$. Pour cela, le point crucial est que, d'après (T),

$$[\omega(t)]_0 = [\mathrm{rot}\, u^0]_0$$

pour tout t. Hélas l'opérateur B n'agit pas de C^0 dans C^1, mais seulement de C^0 dans C^1_*. Pour remédier à cette imperfection, on utilise l'estimation non linéaire suivante:

Lemme 2. *Soit B un opérateur pseudodifférentiel d'ordre -1 sur une variété compacte M. Il existe $C>0$ tel que, pour toute fonction régulière f, on ait*

$$[Bf]_1 \leq C[f]_0 \log\Big(1+\frac{[f]_1}{[f]_0}\Big).$$

Ce type d'estimation étant également un des ingrédients principaux du résultat de Chemin, nous y reviendrons au paragraphe 3. Pour l'instant, voyons comment elle permet d'achever la démonstration du théorème 1. De l'équation (E), on déduit la conservation de l'énergie,

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u^0\|_{L^2}$$

qui entraîne en particulier que $h(t)$ est bornée dans $\mathcal{H}$. De la relation de Biot et Savart, on déduit donc

$$[u(t)]_1 \leq C \log(2 + [\omega(t)]_1),$$

tandis que la relation (1) pour $k = 1$ et le lemme de Gronwall donnent

$$[\omega(t)]_1 \leq [\omega(0)]_1 (1 + e^{\int_0^t [u(s)]_1 \, ds}).$$

En comparant ces deux estimées et en appliquant à nouveau le lemme de Gronwall, on conclut qu'il existe une constante A telle que

$$(2) \qquad [u(t)]_1 \leq A e^{At},$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1.

Remarques.

a) Il est frappant de comparer les croissances respectives par rapport à t des normes—apparemment très proches— C^1_* et C^1 du champ $u(t)$; alors que la première est bornée, les seules estimées dont on dispose sur la seconde sont exponentielles (*cf.* l'inégalité (2)). On ignore si cette croissance exponentielle a lieu effectivement ; notons qu'elle induirait une croissance doublement exponentielle pour la première dérivée du tourbillon ω. On ne connaît d'ailleurs à l'heure actuelle aucun exemple explicite de solution régulière non stationnaire de (E). Malgré le théorème 1, on peut donc dire que l'étude des solutions régulières de (E) reste un problème largement ouvert.

b) Lorsque M est de dimension 3, le tourbillon ω n'est plus une fonction mais une deux–forme différentielle sur M. L'équation de transport (B) ne permet donc plus d'estimer $[\omega(t)]_0$ sans faire apparaître la quantité $[u(t)]_1$, ce qui rend la démonstration ci–dessus inapplicable.

2. SOLUTIONS QUASILIPSCHITZIENNES.

2.1. Une fonction f sur $\mathbf{R}^n$ est dite *quasilipschitzienne* s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tous x, y,

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|\Big(1 + \log_+ \frac{1}{|x-y|}\Big),$$

où $\log_+ t$ désigne le plus grand des deux nombres 0 et $\log t$. Une telle fonction appartient donc à tous les espaces de Hölder d'ordre $\alpha < 1$. Un exemple non trivial de fonction quasilipschitzienne est donné par le lemme suivant :

Lemme 3. *Toute fonction appartenant à C^1_* est quasilipschitzienne.*

Démonstration. On écrit, pour tout entier N, .

$$f(x) - f(y) = \sum_{p \le N} (\Delta_p f(x) - \Delta_p f(y)) \quad + \sum_{p > N} (\Delta_p f(x) - \Delta_p f(y)).$$

On utilise alors l'estimation $[\Delta_p f]_k \le C 2^{(k-1)p}$ avec $k = 1$ dans la première somme et $k = 0$ dans la seconde somme. Il vient

$$|f(x) - f(y)| \le C(N|x - y| + 2^{-N}),$$

et le choix de la partie entière de $\log|x - y|/\log 2$ comme valeur de N donne l'estimation cherchée.

L'ensemble des fonctions localement quasilipschitziennes sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ étant stable par multiplication par les fonctions à support compact et par changement de variables, on peut parler de champ de vecteurs localement quasilipschitzien sur une variété différentiable. On a alors le théorème de Cauchy–(quasi)Lipschitz suivant:

Proposition 4. *Soit v un champ de vecteurs quasilipschitzien sur une variété compacte M. Pour tout $x_0 \in M$, il existe une unique courbe $\gamma \in C^1(\mathbf{R}, M)$ solution de l'équation différentielle*

$$\frac{d}{dt}\gamma = v(\gamma), \quad \gamma(0) = x_0.$$

De plus, il existe $k > 0$ tel que le flot (ϕ^t) ainsi défini vérifie

$$\forall t \in \mathbf{R}, \phi^t \in C^{e^{-k|t|}}(M, M).$$

Démonstration. Il suffit de raisonner localement, donc dans $\mathbf{R}^n$. Si, pour $j = 1, 2$, γ_j est une courbe intégrale de v sur un intervalle $[0, T]$ avec $\gamma_j(0) = x_j$, on a

$$\frac{d}{dt}|\gamma_1 - \gamma_2|^2 = 2(\gamma_1 - \gamma_2, v(\gamma_1) - v(\gamma_2)).$$

Posant $f(t) = |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|^2$, le fait que v soit quasilipschitzien entraîne alors

$$\frac{d}{dt} f \le C f\Big(1 + \log_+ \frac{1}{f}\Big).$$

On en déduit, pour tout $t \in [0,T]$, et si $f(0) \leq 1$,

$$f(t) \leq f(0)^{e^{-Ct}},$$

ce qui prouve l'unicité et la régularité du flot. L'existence découle classiquement d'une approximation de v par des champs réguliers et du théorème d'Ascoli.

On notera que le résultat ci–dessus est inchangé pour un champ $v = v(t,x)$ dépendant continûment du paramètre t .

2.2. On se propose maintenant d'étudier des solutions singulières de l'équation (E) dont la donnée de Cauchy vérifie $\mathrm{rot} u^0 \in L^\infty(M)$. Compte tenu de l'équation de transport (T), on s'attend à ce que, pour tout temps t, $\omega(t)$ soit dans $L^\infty(M)$, donc que le champ des vitesses soit quasilipschitzien. Les équations (E) et (T) doivent alors être réinterprétées au sens des distributions, de la façon suivante,

$$(E') \qquad \partial_t u + \mathrm{div}(u \otimes \tilde{u}) = -\nabla p, \quad \mathit{div} u = 0,$$

$$(T') \qquad \partial_t \omega + \mathrm{div}(u\omega) = 0,$$

la condition $\mathrm{div} u = 0$ assurant l'équivalence des deux formulations lorsque u est une solution régulière.

Théorème 5. (Yudovich [Y], 1963). *Soit u^0 un champ de vecteurs tel que* $\mathrm{rot} u^0 \in L^\infty, \mathrm{div} u^0 = 0$. *Alors il existe une unique solution u de l'équation (E') vérifiant $u \in C^0(\mathbf{R} \times M, TM)$,* $\quad \mathrm{rot} u \in L^\infty(\mathbf{R} \times M)$. *De plus, le champ u est quasilipschitzien par rapport à x, le flot ϕ^t de u à partir de $t = 0$ conserve le volume, et l'on a, pour tout réel t, pour presque tout $x \in M$,*

$$\omega(t, \phi^t(x)) = \mathrm{rot} u^0(x).$$

Démonstration. L'idée centrale dans ce résultat apparaît dans la démonstration suivante de l'unicité. En reprenant la démonstration donnée au §1.1, on constate que, puisque ∇v n'est plus L^∞, on ne peut plus conclure aussi simplement par le lemme de Gronwall. En revanche, puisque les opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0 sont bornés sur L^p pour tout $p \in]1,\infty[$, on a $\nabla u(t) \in L^p(M)$, et l'inégalité de Hölder donne alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u(t) - v(t)\|_{L^2}^2 &\leq 2\|\nabla v(t)\|_{L^p}\|u(t) - v(t)\|_{L^{2p'}}^2 \\ &\leq 2M^{2/p}\|\nabla v(t)\|_{L^p}\|u(t) - v(t)\|_{L^2}^{2/p'},\end{aligned}$$

où p' désigne l'exposant conjugué de p et $M = \sup_{t\in[0,T]} [u(t) - v(t)]_0$. La belle idée de Yudovitch est alors d'étudier cette inéquation différentielle lorsque p tend vers l'infini, en s'appuyant sur le résultat suivant, corollaire du théorème d'interpolation de Marcinkiewicz (*cf.* par exemple Stein [St]) et de la théorie de Calderon–Zygmund (*cf.* par exemple [CM]):

Lemme 6. *Soient M une variété compacte, A un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 sur M. Alors il existe une constante C telle que, pour tout $p < \infty$, on ait l'estimation*

$$\|Af\|_{L^p} \leq Cp\|f\|_{L^\infty}.$$

En utilisant le lemme 6 et en posant $g(t) = \|u(t) - v(t)\|_{L^2}^2$, on obtient

$$\frac{d}{dt}g \leq CpM^{2/p}g^{1-1/p}.$$

En intégrant cette inéquation et en tenant compte du fait que $g(0) = 0$, il vient, pour tout $t \geq 0$,

$$g(t) \leq M^2(Ct)^p.$$

Cette inégalité ayant lieu pour tout $p < \infty$, on en déduit que $g(t) = 0$ pour tout $t < 1/C$ et finalement $g = 0$, ce qui démontre l'unicité. Pour démontrer l'existence, on régularise la donnée de Cauchy u^0 et, en utilisant le théorème 1, on obtient un suite (u_n) de solutions régulières de (E); l'équation (T) entraîne que $\mathrm{rot} u_n$ est borné dans L^∞, donc $u_n(t)$ est borné dans C^1_* uniformément par rapport à t. Par ailleurs, l'argument utilisé ci–dessus pour l'unicité montre que la suite (u_n) est de Cauchy dans $C^0([0,T], L^2)$ pour tout $T > 0$. Par interpolation, on en déduit que u_n converge uniformément vers une solution u de (E'); les autres propriétés énoncées s'obtiennent alors aisément par passage à la limite.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME A.

3.1. Position du problème.

Soit u^0 un champ de vitesses sur M dont le tourbillon est

$$\omega^0 = a1_{D^0} + b(1 - 1_{D^0}),$$

où D^0 est un ouvert régulier de M, et où a et b sont des nombres réels vérifiant

$$a\,\mathrm{vol}(D^0) + b\,(\mathrm{vol}(M) - \mathrm{vol}(D^0)) = 0.$$

Pour simplifier, nous supposerons de plus que la frontière de D_0 est connexe. Désignons par u la solution de Yudovitch associée à cette donnée de Cauchy, par ϕ^t le flot de u à partir de $t = 0$. Alors le tourbillon de $u(t)$ est donné par

$$\omega(t) = a 1_{D^t} + b(1 - 1_{D^t}),$$

où $D^t = \phi^t(D^0)$. Choisissons un champ régulier X^0 non nul sur un voisinage compact K^0 de ∂D^0, tangent à cette courbe, et désignons par $\gamma^0 : \mathbf{S}_1 \to \partial D^0$ un difféomorphisme tel que

$$\frac{d}{ds}\gamma^0 = X^0(\gamma^0).$$

Pour étudier la régularité de $\gamma^t = \phi^t(\gamma^0)$, on remarque que, formellement, si le champ $X^t = \phi^t_*(X^0)$ était suffisamment régulier, on aurait

$$\frac{d}{ds}\gamma^t = X^t(\gamma^t), \nabla^k_{\frac{d}{ds}} \frac{d}{ds}\gamma^t = \nabla^k_{X^t} X^t(\gamma^t).$$

Une information de régularité sur X^t est donc immédiatement transformée en une information analogue sur γ^t. On rend rigoureux ce raisonnement en régularisant les données et en considérant la suite (u_n) de solutions régulières correspondantes. En remarquant que $\gamma^t_n = \phi^t_n(\gamma^0)$ converge uniformément vers γ^t, on est ramené à estimer $X^t_n = \phi^t_{n*}(X^0)$ et ses dérivées covariantes par rapport à lui–même, par exemple en norme C^α, pour $\alpha \in]0,1[$ fixé. Nous allons nous restreindre ici au cas de $[X^t_n]_\alpha$, ce qui entraînera que la courbe est $C^{1+\alpha}$. Les dérivées d'ordre supérieur se traitent ensuite plus facilement. L'information cruciale sur la suite des données de Cauchy régularisées (ω^0_n) est alors que $L_{X^0}\omega^0_n$ est bornée dans l'espace L^∞, et que ω^0_n est bornée dans C^α sur le complémentaire $(K^0)^c$ de K^0. Outre une estimée de $[X^t_n]_\alpha$, on va en déduire une estimation de la norme Lipschitz de $u_n(t)$, qui lui est intimement reliée, et on prouvera donc que *le champ $u(t)$ est en fait lipschitzien pour tout temps.*

Si K est un compact de M et X est un champ de vecteurs sur M, on pose

$$I(K, X) = \min_{x \in K} |X(x)|.$$

On obtient alors le résultat souhaité en appliquant à la suite de solutions régularisées le théorème suivant:

THÉORÈME 7. (Chemin [C4]). *Pour tout $\alpha \in]0,1[$, il existe une constante C_α telle que, pour toute solution régulière u de l'équation d'Euler, pour tout compact K^0 de M, pour tout champ de vecteurs régulier X^0 ne s'annulant pas sur K^0, on ait, pour tout $t \geq 0$, l'estimation suivante, où u^0 désigne la donnée de Cauchy de u et ω^0 son tourbillon :*

$$[u(t)]_1 \leq C_\alpha M(u^0) \log N_\alpha(K^0, X^0, \omega^0)\, e^{C_\alpha M(u^0)t},$$

$$\|X^t\|_\alpha \leq C_\alpha \Big(\|X^0\|_\alpha + [\mathrm{div} X^0]_0 + \frac{[L_{X^0}\omega^0]_0}{[\omega^0]_0} \Big) N_\alpha(K^0, X^0, \omega^0)^{2\exp C_\alpha M(u^0)t}$$

$$\textit{avec} \quad M(u^0) = [\omega^0]_0 + \|u^0\|_{L^2},$$

$$N_\alpha(K^0, X^0, \omega^0) = 2 + \frac{\|X^0\|_\alpha + [\mathrm{div} X^0]_0}{I(K^0, X^0)} + \frac{[L_{X^0}\omega^0]_0}{I(K^0, X^0)[\omega^0]_0} + \frac{\|\omega^0\|_{\alpha,(K^0)^c}}{[\omega^0]_0}.$$

La démonstration du théorème 7 fait l'objet des deux sections suivantes.

3.2. L'estimation fondamentale.

Le point crucial dans la démonstration du théorème 7 est une inégalité logarithmique sur le laplacien en dimension 2:

Proposition 8. *Pour tout $\alpha \in]0,1[$, il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que, pour tous champs de vecteurs u et X de classe C^∞ sur M, vérifiant* $\mathrm{div} u = 0$, *pour tout compact K de M sur lequel X ne s'annule pas, on ait l'inégalité*

$$[\nabla u]_0 \leq C([\omega]_0 + \|u\|_{L^2}) \log\Big(2 + \frac{\|X\|_\alpha + [\mathrm{div} X]_0}{I(K,X)} + \frac{[L_X \omega]_0}{I(K,X)[\omega]_0} + \frac{\|\omega\|_{\alpha,K^c}}{[\omega]_0}\Big),$$

où l'on a posé $\omega = \mathrm{rot} u$.

Démonstration. Elle repose sur les trois lemmes suivants.

Lemme 9. *Soit $\alpha \in]0,1[$. On a les estimations suivantes entre normes hölderiennes et la norme L^∞:*

$$(i) \qquad [f]_0 \leq C_\alpha \|f\|_0 \log\Big(2 + \frac{\|f\|_\alpha}{\|f\|_0}\Big)$$

$$(ii) \qquad [a.b]_0 \leq C_{\alpha,p} [a]_0 \|b\|_0 \log\Big(2 + \frac{\|a\|_\alpha}{[a]_0} + \frac{\|a.b\|_\alpha}{[a]_0\|b\|_0}\Big),$$

$$\textit{avec} \quad a = (a_1, ..., a_p),\ b = (b_1, ..., b_p),\ a.b = a_1 b_1 + ...a_p b_p$$

$$(iii) \qquad \|L_Z B f\|_\alpha \leq C_{\alpha,\alpha',B}\big([L_Z f]_0 + (\|Z\|_{\alpha'} + [\mathrm{div} Z]_0)[f]_0\big),$$

pour tout $\alpha' > \alpha$, tout opérateur pseudodifférentiel B d'ordre -1 et tout champ de vecteurs Z.

Il suffit bien sûr de montrer les trois inégalités ci-dessus dans $\mathbf{R}^n$. Elles découlent alors de la caractérisation des espaces de Hölder par les décompositions dyadiques et du calcul paradifférentiel de Bony [B1]; l'inégalité (iii) est une adaptation d'un lemme de commutateur de [B1]. Pour démontrer (i), on écrit, pour tout N,

$$\begin{aligned}[f]_0 &\leq \sum_{p\leq N}[\Delta_p f]_0 + \sum_{p>N}[\Delta_p f]_0,\\ &\leq CN\|f\|_0 + C_\alpha 2^{-N\alpha}\|f\|_\alpha,\end{aligned}$$

et on conclut en optimisant le choix de N comme dans la preuve du lemme 3. Enfin, la preuve de (ii) combine ce type d'interpolation logarithmique avec le paraproduit de Bony. Notons en passant que, si l'on applique (i) à $f = Ag$, avec A pseudodifférentiel d'ordre 0, on obtient, puisque A est borné dans C^0_*,

$$\begin{aligned}[Af]_0 &\leq C_\alpha\|f\|_0 \log\Big(2 + \frac{\|f\|_\alpha}{\|f\|_0}\Big),\\ &\leq C_\alpha[f]_0 \log\Big(2 + \frac{\|f\|_\alpha}{[f]_0}\Big),\end{aligned}$$

ce qui est une forme précisée du lemme 2.(avec $A = \nabla B$.) Voici une variante de ce type d'estimation, où la régularité hölderienne est cette fois remplacée par une hypothèse de localisation:

Lemme 10. *Soient A un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0. Il existe $C > 0$ tel que, si F et G sont deux fermés disjoints dans M, et si f est une fonction essentiellement bornée supportée par F, alors*

$$\sup_{x\in G}|Af(x)| \leq C[f]_0\Big(1 + \log_+ \frac{1}{d(F,G)}\Big).$$

Là encore il suffit de raisonner en coordonnées locales; le lemme découle alors immédiatement de la formule

$$Af(x) = \int K(x,y)f(y)\,dy$$

où K est un noyau à support compact vérifiant $K(x,y) \leq C|x-y|^{-n}$. Cette approche donne d'ailleurs une autre démonstration du lemme 2.

Enfin, la dimension 2 est utilisée dans la remarque élémentaire suivante:

Lemme 11. *Soient E un plan vectoriel réel, Y un vecteur non nul de E et J un endomorphisme de E tel que $J^2 = -1$. Alors l'application*

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(E) &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \times E \\ T &\mapsto (\mathrm{tr}(T), tr(JT), T(Y)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Indiquons maintenant brièvement comment on aboutit à la proposition 8. Grâce au lemme 10, l'estimation de ∇u ne pose pas de problème dans un domaine L suffisamment éloigné de K; en effet, écrivons $\omega = \omega_1 + \omega_2$, où ω_1 est supporté dans un voisinage K' de K disjoint de L, et où ω_2 est supporté dans K^c. D'après le lemme 10, la contribution de ω_1 à ∇u sur L est estimée par $[\omega]_0 \log(2 + \theta^{-1})$, où $\theta = d(L, K')$, tandis que la contribution de ω_2 est estimée à l'aide du lemme 9, (i), par $[\omega]_0 \log(2 + \theta^{-1} + \|\omega\|_{\alpha,K^c}/[\omega]_0)$, si l'on suppose de plus que $d(K, K'^c)$ est également de l'ordre de θ. Le paramètre θ sera ajusté plus loin.

Il reste à estimer ∇u sur le voisinage $K'' = L^c$ de K. Pour cela, on utilise la conséquence suivante du lemme 11 : il existe $C > 0$ tel que, pour toute section T de $\mathrm{End}TM$, pour tout champ de vecteurs Y sur M tel que $|Y(x)| = 1$ sur K'', on a, pour tout $x \in K''$,

$$|T(x)| \leq C(|\mathrm{tr}(T(x))| + |\mathrm{tr}(JT(x))| + |T(x)Y(x)|).$$

Appliquant cette inégalité à $T = \nabla u$, on obtient

$$|\nabla u(x)| \leq C(|\omega(x)| + |\nabla_Y u(x)|). \tag{3}$$

On choisit alors $Y = \chi_\theta X/|X|$, où χ_θ est une fonction C^∞ valant 1 près de K'' et supportée dans un voisinage K''' d'ordre θ de K'', de sorte que l'on ait, pour tout $\beta \in]0,1[$,

$$\|\chi_\theta\|_\beta \leq C\theta^{-\beta}.$$

Le choix de θ intervient ici pour garantir que l'on puisse minorer $|X|$ sur K'''; en choisissant $\theta = (I(K,X)/A\|X\|_\alpha)^{1/\alpha}$ où A est une constante assez grande, on a facilement

$$I(K''', X) \geq \frac{1}{2} I(K, X), \ \|Y\|_\alpha \leq C\frac{\|X\|_\alpha}{I(K,X)}, \ \|\nabla_Y u\|_\alpha \leq C\frac{\|X\|_\alpha \|\nabla_X u\|_\alpha}{I(K,X)^2}.$$

Le lemme 9, (ii), conduit alors à

$$[\nabla_Y u]_0 \leq C([\omega]_0 + \|u\|_{L^2}) \log\Big(2 + \frac{\|X\|_\alpha}{I(K,X)} + \frac{\|\nabla_X u\|_\alpha}{I(K,X)([\omega]_0 + \|u\|_{L^2})}\Big),$$

où l'on a de plus utilisé que $\|u\|_0 \leq C([\omega]_0 + \|u\|_{L^2})$. En revenant à l'inégalité (3) et en appliquant le lemme 9, (iii), pour estimer $\|\nabla_X u\|_\alpha$, on obtient la proposition 8.

3.3. Propagation de la régularité.

La fin de la preuve du théorème 7 s'appuie sur le lemme suivant de propagation de la régularité höldérienne dans une équation de transport:

Lemme 12. *Soit $\alpha \in]0,1[$. Il existe une constante C telle que, pour tout $u \in C^\infty(\mathbf{R}_+ \times M, TM)$ et pour toutes fonctions f, g sur $\mathbf{R}_+ \times M$ vérifiant $\partial_t f + L_u f = g$, on ait l'estimation*

$$\|f(t)\|_\alpha \leq \|f(0)\|_\alpha \, e^{\int_0^t [u(s)]_1 \, ds} + \int_0^t \|g(s)\|_\alpha \, e^{\int_s^t [u(\sigma)]_1 \, d\sigma} \, ds\,.$$

L'estimation ci–dessus s'obtient aisément à l'aide de la méthode des caractéristiques.

Reprenons les notations du paragraphe 3.1; de l'équation de transport

$$\partial_t L_X \omega + L_u L_X \omega = 0,$$

on déduit d'abord que $[L_X\omega]_0 = [L_X^0 \omega^0]_0$. Par ailleurs, puisque ϕ^t conserve le volume,

$$[\mathrm{div} X]_0 = [\mathrm{div} X^0]_0.$$

On applique alors le lemme 12 à l'équation de transport

$$\partial_t X + \nabla_u X = \nabla_X u,$$

en tenant compte de l'estimation

$$\|\nabla_X u\|_\alpha \leq C_\alpha([L_X\omega]_0 + [u]_1(\|X\|_\alpha + [\mathrm{div} X]_0),$$

qui est une variante du lemme 9,(iii) ; on obtient, par le lemme de Gronwall,

$$\|X^t\|_\alpha \leq C_\alpha\Big(\|X^0\|_\alpha + [\mathrm{div}X^0]_0 + \frac{[L_{X^0}\omega^0]_0}{[\omega^0]_0}\Big)\, e^{2\int_0^t [u(s)]_1\, ds}.$$

De plus, on montre directement que

$$I(K^0,X^0) \leq I(K^t,X^t)\, e^{\int_0^t [u(s)]_1\, ds}, \quad \|\omega(t)\|_{\alpha,(K^t)^c} \leq \|\omega^0\|_{\alpha,(K^0)^c}\, e^{\int_0^t [u(s)]_1\, ds}.$$

En injectant ces trois estimations dans l'inégalité fournie par la proposition 8, on obtient finalement

$$[u(t)]_1 \leq C_\alpha([\omega^0]_0 + \|u^0\|_{L^2})\Big(\log N_\alpha(K^0,X^0,\omega^0) + \int_0^t [u(s)]_1\, ds\Big),$$

où l'on a posé

$$N_\alpha(K^0,X^0,\omega^0) = 2 + \frac{\|X^0\|_\alpha + [\mathrm{div}X^0]_0}{I(K^0,X^0)} + \frac{[L_{X^0}\omega^0]_0}{I(K^0,X^0)[\omega^0]_0} + \frac{\|\omega^0\|_{\alpha,(K^0)^c}}{[\omega^0]_0}.$$

On en déduit le théorème 7.

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME B.

4.1. Elimination de la pression.

Lemme 13. *Soient $T > 0$ et $u \in L^2(]0,T[\times M, TM)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) u est solution du système d'Euler

$$(E') \qquad \partial_t u + \mathrm{div}(u \otimes \tilde{u}) = -\nabla p, \quad \mathrm{div} u = 0.$$

(ii) u est solution de l'équation

$$(E'') \qquad \partial_t u + A\Big(u \otimes \tilde{u} - \frac{1}{2} g(u,u) I\Big) = 0, \quad \mathrm{div} u = 0,$$

où $A = J\nabla\Delta^{-1}\mathrm{rotdiv} + H\mathrm{div}$.

Considérons l'opérateur pseudodifférentiel $P = J\nabla\Delta^{-1}\mathrm{rot} + H$, de sorte que $A = P\mathrm{div}$. D'après la décomposition de Hodge des sections–distributions de TM (ou champs distributions), P est le projecteur sur l'espace des champs à divergence nulle parallèlement à l'espace des champs de gradients. Le système d'Euler (E') est donc équivalent à

$$\partial_t u + P\mathrm{div}(u \otimes \tilde{u}) = 0, \quad \mathrm{div} u = 0.$$

Pour toute distribution scalaire f, on a $\mathrm{div}(fI) = \nabla f$; on peut donc ajouter à l'argument de $P\mathrm{div}$ dans la première équation ci–dessus n'importe quel tenseur du type fI ; on choisit $f = -\frac{1}{2}g(u,u)$, et on obtient le résultat.

Remarques.

Le choix très arbitraire de f que nous venons de faire va trouver sa justification dans la section 4.3 ci–dessous.

L'équation (E'') montre en particulier que toute solution u du système d'Euler qui est de carré intégrable sur $]0,T[\times M$ est continue sur $[0,T]$ à valeurs dans les champs distributions sur M. On pourra donc parler, pour *tout* $t \in [0,T]$, du champ distribution $u(t)$ et de la distribution $\omega(t)$.

4.2. Un théorème de stabilité.

Rappelons qu'une famille $\mathcal{F}$ de fonctions τ–intégrables sur M est dite uniformément τ–intégrable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que , pour toute partie borélienne E de M vérifiant $\int_E \tau \leq \delta$, on ait

$$\forall f \in \mathcal{F}, \int_E |f|\tau \leq \epsilon.$$

Le critère de Dunford–Pettis (*cf.* par exemple [Gr]) assure que la famille $\mathcal{F}$ est alors relativement compacte dans $L^1(M,\tau)$ pour la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$. Le théorème B est en fait conséquence du résultat général suivant.

THÉORÈME 14. (Delort [D1,2]). *Soient $T > 0$ et (u_n) une suite de solutions de carré intégrable sur $]0,T[\times M$ du système d'Euler conservatif (E'). On suppose que, pour tout $t \in [0,T]$, $u_n(t)$ est de carré intégrable, que son tourbillon $\omega_n(t)$ est une mesure de Radon sur M, et qu'il existe une constante C telle que*

$$\forall t \in [0,T], \int_M |u_n(t)|^2\tau + \int_M |\omega_n(t)| \leq C. \tag{4}$$

En outre, on suppose que, pour tout $t \in [0,T]$, il existe une suite $\sigma_n(t)$ de mesures de Radon positives (resp.négatives) sur M telle que $(\omega_n(t) - \sigma_n(t))$ soit uniformément τ-intégrable sur M pour $n \in \mathbf{N}, t \in [0,T]$. Alors toute valeur d'adhérence de la suite (u_n) pour la topologie faible de $L^2(]0,T[\times M, TM)$ est solution du système d'Euler (E').

La démonstration du théorème 14 fait l'objet de la section suivante. Dans l'immédiat, indiquons comment il entraîne le théorème B.

Soit u^0 un champ L^2 à divergence nulle dont le tourbillon ω^0 est une mesure de Radon à partie singulière σ^0 positive (resp. négative). Posons $\omega_n^0 = e^{\Delta/n}\omega^0$ et $u_n^0 = B\omega_n^0 + H(u^0)$. Il est clair que u_n^0 converge vers u^0 en moyenne quadratique. Soit (u_n) la suite de solutions C^∞ de (E) sur $[0,\infty[\times M$, dont la suite des données de Cauchy est (u_n^0). Alors la conservation de l'énergie cinétique et l'équation de transport (T) entraînent les estimations (4). Par ailleurs, soit σ_n la solution de l'équation de transport (T) avec $u = u_n$ et $\sigma_n(0) = e^{\Delta/n}\sigma^0$. On a donc $\sigma_n \geq 0$ (resp. ≤ 0). Remarquons que $\mathrm{rot} u_n^0 - \sigma_n^0$ n'est autre que $e^{\Delta/n}f^0$, où f^0 est la dérivée de Radon–Nikodym de ω^0 par rapport à τ. Il en résulte que la suite $(\omega_n^0 - \sigma_n^0)$ est uniformément τ -intégrable, et, en utilisant à nouveau l'équation de transport (T) et le fait que le flot de u_n conserve le volume, on en déduit que la famille $(\omega_n(t) - \sigma_n(t))_{n,t}$ est uniformément τ-intégrable. Puisque, d'après (4), la suite (u_n) est bornée dans $L^2(]0,T[\times M)$, elle admet une valeur d'adhérence faible u qui est donc solution de (E'). De plus, l'équation (E'') entraîne que la suite (u_n) est équicontinue sur $[0,T]$ à valeurs dans les champs distributions sur M, donc $u(0)$ est la limite de u_n^0, c'est-à-dire u^0. De même, pour tout $t \in [0,T]$, $u(t)$ est valeur d'adhérence de $u_n(t)$ donc de carré intégrable, et son tourbillon est une mesure de Radon à partie singulière positive (resp.négative), ce qui achève la démonstration du théorème B.

4.3. Démonstration du théorème 14.

En utilisant l'équicontinuité en temps découlant de l'équation (E''), on constate qu'il suffit de montrer que si, pour tout $t \in [0,T]$, $u_n(t)$ converge faiblement vers $u(t)$ dans $L^2(M,TM)$, alors u est solution de (E''). Compte tenu de l'équation (E'') et du théorème de convergence dominée, le théorème 14 est donc conséquence du résultat suivant, indépendant de la variable t :

Lemme 15. *Soit (u_n) une suite bornée de champs de vecteurs de carrés intégrables à divergence nulle, dont la suite des tourbillons (ω_n) est bornée dans l'espace des mesures de Radon. On suppose qu'il existe une suite (σ_n) de mesures de Radon positives (resp. négatives) sur M telle que la suite $(\omega_n - \sigma_n)$ soit uniformément τ-intégrable. Alors, si u_n converge vers u faiblement, $u_n \otimes \tilde{u}_n - g(u_n, u_n)I/2$ converge vers $u \otimes \tilde{u} - g(u,u)I/2$ au sens des tenseurs distributions.*

Bien sûr, nous allons montrer le lemme 15 en utilisant la relation de Biot et Savart

$$u_n = B\omega_n + H(u_n).$$

Puisque la suite $H(u_n)$ est bornée dans l'espace de dimension finie $\mathcal{H}$, elle est relativement compacte, et l'on est ramené au cas où $u_n = B\omega_n$. Le lemme 15 est alors conséquence d'un résultat très général de "compensation microlocale" par positivité, que nous allons énoncer en dimension quelconque.

Pour cela, il est utile d'introduire un peu de vocabulaire. Soit E un espace vectoriel réel de dimension d, et soit f une fonction continue sur E, homogène de degré $-d$. On désigne par ρ le champ radial sur $E \setminus \{0\}$, donné en coordonnées linéaires $(\xi_1, ..., \xi_d)$ par $\rho = \sum \xi_j \partial_{\xi_j}$. Soit λ une mesure de Lebesgue sur E, et soit φ une fonction de classe C^1 sur E, à support compact, et valant 1 près de l'origine. Alors la quantité $\int_E f L_\rho \varphi \, d\lambda$ ne dépend pas de φ. En effet, si ψ est une fonction ayant les mêmes propriétés que φ, la fonction de classe C^1 $\varphi - \psi$ est supportée dans un compact de $E \setminus \{0\}$, et une intégration par parties donne

$$\int_E f L_\rho(\varphi - \psi) \, d\lambda = \int_E (\varphi - \psi)(-L_\rho - d) f \, d\lambda,$$

qui est nul d'après la relation d'Euler. Suivant Wodzicki (*cf.* par exemple l'exposé de Kassel [K] dans ce séminaire), désignons par $\mathrm{res}(f, \lambda)$ cette quantité. Remarquons qu'elle possède une interprétation métrique très simple : si Q est un produit scalaire sur E dont λ est l'élément de volume, en approchant la fonction indicatrice de la boule unité de Q par de telles fonctions φ, on obtient que $\mathrm{res}(f, \lambda)$ est l'intégrale de f sur la sphère unité de Q pour la mesure de Lebesgue.

Supposons maintenant que M soit une variété de dimension d et que f soit une fonction continue sur $T^*M \setminus M$, homogène de degré $-d$. D'après ce qui précède, l'expression en coordonnées locales

$$\mathrm{res}(f) = |dx^1 \wedge ... \wedge dx^d| \mathrm{res}\Big(f(x,.), |d\xi_1 \wedge ... \wedge d\xi_d|\Big)$$

définit sur M une densité (c'est–à–dire une d–forme tordue, au sens de [VAR]) indépendante du choix des coordonnées ; convenons d'appeler résidu de f cette densité. Le résultat clé de Delort s'énonce alors de la façon suivante :

Lemme 16. *Soit M une variété compacte de dimension d munie d'une densité > 0 identifiant distributions et distributions–densités. Soit (ω_n) une suite bornée de mesures de Radon sur M, également bornée dans l'espace de Sobolev $H^{-d/2}(M)$, et convergeant faiblement vers ω. On suppose qu'il existe une suite (σ_n) de mesures de Radon positives et une suite (f_n) uniformément intégrable sur M telles que*

$$\omega_n = \sigma_n + f_n.$$

Alors, pour tout opérateur pseudodifférentiel scalaire A sur M, d'ordre $-d$, et dont le symbole principal a un résidu nul, on a

$$(A\omega_n, \omega_n)_{H^{d/2}, H^{-d/2}} \longrightarrow (A\omega, \omega)_{H^{d/2}, H^{-d/2}} .$$

Démonstration. On suppose par exemple $\sigma_n \geq 0$. En utilisant une partition de l'unité, on se ramène à prouver un résultat analogue sur $\mathbf{R}^d$, ω_n étant supportée dans un compact fixe.

Première étape. *Si ω est une mesure de Radon à support compact dans $\mathbf{R}^d$ appartenant de plus à $H^{-d/2}$, alors ω est diffuse, c'est–à–dire que, pour tout point x_0, $\omega(\{x_0\}) = 0$.*

En effet, si φ est une fonction C^∞ à support compact près de l'origine, le théorème de convergence dominée nous indique que

$$\omega(\{x_0\}) = \lim_{r \to 0} \int \varphi(\frac{x - x_0}{r})\,\omega(dx).$$

Comme la famille $(\varphi((x - x_0)/r))$ est bornée dans $H^{d/2}$ et converge faiblement vers 0, on en déduit l'assertion.

Deuxième étape. *Si de plus $\omega = \sigma + f$, où $\sigma \geq 0$ et $f \in L^1$, alors, pour toute fonction $g \in L^1$, $\sigma + g$ est diffuse.*

En effet, $\sigma + g = \omega + g - f$.

Troisième étape. Le noyau de l'opérateur A est de la forme $k(x, x-y)$, où $k = k(x,z)$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$, et l'hypothèse de résidu nul signifie exactement que $k(x,z)$ est bornée près du lieu singulier $z = 0$ (*cf.* par exemple [CM]). De plus, si φ est une fonction C^∞ à support compact valant 1 près de l'origine, on a, si f et g appartiennent à $H^{-d/2}$,

$$(Af, g)_{H^{d/2}, H^{-d/2}} = \lim_{r \to 0} \int k(x, x-y)\Big(1 - \varphi(\frac{x-y}{r})\Big) f(y)\bar{g}(x)\, dxdy.$$

Dès lors, si ω est comme à la première étape, on a

$$(A\omega, \omega)_{H^{d/2}, H^{-d/2}} = \int k(x, x-y)\omega(dy)\,\bar{\omega}(dx),$$

d'après le théorème de convergence dominée, puisque, en vertu du théorème de Fubini, la mesure $\omega \otimes \bar{\omega}$ ne charge pas la diagonale.

Quatrième étape. On utilise maintenant le lemme élémentaire suivant de théorie de la mesure:

Lemme 17. *Soient X un espace métrique compact, (μ_n) une suite de mesures de Radon sur X convergeant vaguement vers μ, et (ν_n) une suite de mesures de Radon positives convergeant vaguement vers ν, telle que $|\mu_n| \le \nu_n$. Si f est une fonction borélienne bornée sur X, continue en dehors d'un fermé de mesure nulle pour ν, alors*

$$\int_X f\, d\mu_n \to \int_X f\, d\mu.$$

Il suffit d'appliquer ce lemme à $X = K \times K$ où K est un compact de $\mathbf{R}^d$, $\mu_n = \omega_n \otimes \bar{\omega}_n$, $\mu = \omega \otimes \bar{\omega}$, $\nu_n = \sigma_n + |f_n|$. Comme (f_n) est uniformément intégrable, on peut supposer que f_n converge faiblement vers $f \in L^1$ et que $|f_n|$ converge faiblement vers $g \in L^1$. Alors σ_n converge vaguement vers la mesure positive $\sigma = \omega - f$ et on peut prendre $\nu = (\sigma + g) \otimes (\sigma + g)$. Il reste à vérifier que ν ne charge pas la diagonale, ce qui est une conséquence immédiate de la seconde étape et du théorème de Fubini.

La démonstration du lemme 16 est maintenant aisée. Soient α une 1–forme et X un champ de vecteurs réguliers sur M. Alors

$$\langle u_n \otimes \tilde{u}_n - \frac{1}{2} g(u_n, u_n), \alpha \otimes X\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = (A\omega_n, \omega_n)_{H^1, H^{-1}},$$

où $A = {}^t\langle\alpha, B\rangle\langle\tilde{B}, X\rangle - \frac{1}{2}{}^t\tilde{B}\langle\alpha, X\rangle B$. Son symbole principal est donc, sur la sphère unité de g dans T^*M,

$$a(x,\xi) = g(*\xi,\alpha)g(*\xi,\tilde{X}) - \frac{1}{2}g(\alpha,\tilde{X}).$$

Son résidu est donc

$$\tau\int_{S^1}\Big(g(\xi,\alpha)g(\xi,\tilde{X}) - \frac{1}{2}g(\alpha,\tilde{X})\Big)\,d\sigma(\xi) = 0,$$

comme le montre un calcul élémentaire. Ceci achève la démonstration.

Remarque.

La démonstration ci–dessus s'étend au cas d'une suite (u_n) de solutions de l'équation de Navier–Stokes

$$\partial_t u_n + \operatorname{div}(u_n \otimes \tilde{u}_n) - \nu_n \Delta u_n = -\nabla p_n, \quad \operatorname{div} u_n = 0,$$

où (ν_n) est une suite de nombres > 0 convergeant vers zéro, modélisant la viscosité du fluide. Les solutions mises en évidence par Delort peuvent donc être vues comme le modèle limite de nappes de tourbillon dans un fluide peu visqueux.

BIBLIOGRAPHIE

[A1] S. ALINHAC - *Remarques sur l'instabilité du problème des poches de tourbillon,* J. of Functional Analysis **98** (1991), 361-379.

[A2] S. ALINHAC - *Un phénomène de concentration évanescente pour des flots non–stationnaires incompressibles en dimension 2,* Commun. Math. Phys. **127** (1990), 585-596.

[Ar] V. ARNOLD - *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits,* Ann. Inst. Fourier **16** (1966), 319-361.

[BF] C. BARDOS, U. FRISCH, C. SULEM, P.–L. SULEM - *Finite time analyticity for the two and three–dimensional Kelvin–Helmholtz instability,* Commun. Math. Phys. **80** (1981), 485-516.

[Ba] G.K. BATCHELOR - *An Introduction to Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, 1970.

[Be] A.L. BERTOZZI - *Existence, uniqueness, and a necessary and sufficient condition for blow up of smooth solutions to the contour dynamics equation*, prépublication, Université de Princeton, Mai 1992.

[BC] A.L. BERTOZZI, P. CONSTANTIN - *Global regularity for vortex patches*, prépublication, Université de Chicago, Mars 1992.

[Bi] G. BIRKHOFF - *Helmholtz and Taylor instability,* in *Hydrodynamic instability,* Proc. Symp. Appl. Math. vol.13, AMS, 1962, 55-76.

[B1] J.–M. BONY - *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires,* Ann. Sc. Ecole Normale Sup. **14** (1981), 209-246.

[B2] J.–M. BONY - *Analyse microlocale et singularités non linéaires,* in *Nonlinear Hyperbolic Problems,* Lecture Note in Mathematics n^0 1402, Springer, 1989.

[Br] Y. BRENIER - *The least action principle and the related concept of generalized flows for incompressible perfect fluids* , J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), 225-255.

[CO] R. CAFLISH, O. ORELLANA - *Longtime existence for a slightly perturbed vortex sheet,* Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), 807-838.

[C1] J.–Y. CHEMIN - *Autour du problème des vortex patches,* Séminaire Equations aux dérivées partielles, 1989-1990, Ecole Polytechnique.

[C2] J.–Y. CHEMIN - *Régularité des trajectoires d'un fluide parfait incompressible remplissant l'espace,* prépublication, Ecole Polytechnique 1990, à para ıtre au J. Math. Pures et Appliquées.

[C3] J.–Y. CHEMIN - *Sur le mouvement des particules d'un fluide parfait incompressible bidimensionnel,* Inventiones Math. **103** (1991), 599-629.

[C4] J.–Y. CHEMIN - *Persistance de structures géométriques dans les fluides incompressibles bidimensionnels,* prépublication, Ecole Polytechnique, Avril 1991.

[C5] J.–Y. CHEMIN - *Evolution d'une singularité ponctuelle dans des équations strictement hyperboliques non linéaires,* Amer. J. Math. **112** (1990), 805-860..

[CL] R. COIFMAN, P.–L. LIONS, Y. MEYER, S. SEMMES - *Compensated compactness and Hardy spaces,* prépublication, Université Paris–Dauphine, n^0 9123, 1991.

[CM] R. COIFMAN, Y. MEYER - *Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels,* Astérisque **57** Société Mathématique de France, 1978.

[CT] P. CONSTANTIN, E. TITI - *On the evolution of nearly circular vortex patches,* Commun. Math. Phys. **119** (1988), 177-198.

[D1] J.-M. DELORT - *Existence de nappes de tourbillon pour l'équation d'Euler sur le plan,* Séminaire Equations aux dérivées partielles, 1990-1991, Ecole Polytechnique.

[D2] J.-M. DELORT - *Existence de nappes de tourbillon en dimension deux,* J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 553-586.

[DM1] R.J. DIPERNA, A. MAJDA - *Oscillations and concentrations in weak solutions of the icompressible fluid equations,* Commun. Math. Phys. **108** (1987), 667-689.

[DM2] R.J. DIPERNA, A. MAJDA - *Concentrations in regularizations for 2-D incompressible flow,* Comm. Pure Appl.Math. **40** (1987), 301-345.

[DM3] R.J. DIPERNA, A. MAJDA - *Reduced Hausdorff dimension and concentration-cancellation for 2-D incompressible flow,* J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 59-95.

[D] D.G. DRITSCHEL - *Contour dynamics and contour surgery : numerical algorithms for extended, high-resolution modeling of vortex dynamics in two-dimensional, inviscid, incompressible flows,* Computer Physics Reports **10** (1989), 77-146.

[DI] D.G. DRITSCHEL, M.E. McINTIRE - *Does contour dynamics go singular?,* Physics of Fluids A **2** (1990), 748-753.

[DR] J. DUCHON, R. ROBERT - *Global Vortex Sheet Solutions of Euler Equations in the Plane,* Journal of Differential Equations **73** (1988), 215-224.

[EB] D. EBIN, J.E. MARSDEN - *Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid,* Ann. of Math. **40** (1970), 102-163.

[E] L. EULER - *Principes généraux du mouvement des fluides,* Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin **11** (1755), 274-315, 316-361, Opera Omnia, series Secunda, livre 12.

[EM] L.C. EVANS, S. MÜLLER - *Hardy spaces and the two-dimensional Euler equations with nonnegative vorticity,* prépublication.

[GT] C. GREENGARD, E. THOMANN - *On DiPerna-Majda concentration sets for two-dimensional incompressible flow,* Comm. Pure Appl. Math. **41**

(1988), 295-303.

[Gr] A. GROTHENDIECK - *Espaces vectoriels topologiques,* S.Paulo, 1958.

[H] H.L.F. von HELMHOLTZ - *Über discontinuierlich Flussigkeitsbewegungen,* Monastberichte der konigl. Akad. Wissenschaften zu Berlin (1868), 215-228.

[K] C. KASSEL - *Le résidu non commutatif (d'après M. Wodzicki),* Séminaire Bourbaki, 1988-89, exposé n° 708, Astérisque **177-178** , Société Mathématique de France.

[Ka] T. KATO - *On classical solutions of the two-dimensional non-stationnary Euler equation,* Arch. Rat. Mech. Anal. **27** (1968), 188-200.

[Ke] Lord KELVIN (Sir W. THOMPSON) - *Mathematical and physical papers,* **4** Cambridge University Press, 1910.

[Kr] R. KRASNY - *Desingularization of periodic vortex sheet roll-up,* J. Comput. Phys. **65** (1986), 292-313.

[L] G. LEBEAU - *Interaction des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires (d'après J.-M. Bony et al.),* Séminaire Bourbaki, 1984-85, exposé n° 642, Astérisque **133-134** , Société Mathématique de France.

[Li] L.LICHTENSTEIN - *Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssikeiten und die Helmholtzschen Wirbelsatze,* Mathemat. Zeit. **23** (1925), 89-154, 310-316, **26** (1927), 196-323, 387-415, 725, **32** (1930), 608.

[Lo] P.-L. LIONS - *Remarks on incompressible models of Fluid Mechanics,* prépublication, Université de Paris-Dauphine, n° 9206, 1992.

[M1] A. MAJDA - *Vorticity and the mathematical theory of incompressible fluid flow,* Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), supplément, 187-220.

[M2] A. MAJDA - *Vortex dynamics : Numerical Analysis, scientific computing, and mathematical theory,* Proceedings of the First International Congress for Industrial and Applied Mathematics, S.I.A.M.Publ., 1988, 153-182.

[M3] A. MAJDA - *The interaction of nonlinear analysis and modern applied mathematics,* Proc. I.C.M., Kyoto, 1990.

[R] G. de RHAM - *Variétés différentiables,* Hermann, Actualités Sci. Indust., Paris, 1960.

[SB] P. SAFFMAN, G. BAKER - *Vortex interactions,* Ann. Rev. Fluid Mech. **11** (1979), 95-122.

[S] P. SERFATI - *Vortex patches bidimensionnels,* manuscrit, Février 1990, et thèse Université de Paris VI, septembre 1992.

[Sh] A. SHNIRELMAN - *On the geometry of the group of diffeomorphisms and the dynamics of an ideal incompressible fluid,* Math. USSR Sbornik **56** (1987), 79-105.

[St] E. STEIN - *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions,* Princeton University Press, 1970.

[T] Sir G. TAYLOR - *The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes,* Proc. Roy. Soc. London, Ser.A, vol. **201** (1950), 192-196.

[VAR] N. BOURBAKI - *Variétés différentelles et analytiques, fascicule de résultats, paragraphes 8 à 15,* Hermann, Paris, 1971.

[W] W. WOLIBNER - *Un théorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long,* Math. Z. **37** (1933), 698-726.

[Y] V. YUDOVITCH - *Niestatsionarnye tietchenia idealnoï niecjimaiemoï jidkosti,* Journal vytchisl. mat. i mat. fis. **3** (1963), 1032-1066.

[Z] N. ZABUSKY, M. HUGHES, K. ROBERTS - *Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions,* J. Comput. Phys. **30** (1979), 96-106.

Patrick GÉRARD

Université de Paris–Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
F–91405 ORSAY Cedex