Astérisque

JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ

Travaux de Herman sur les tores invariants

Astérisque, tome 206 (1992), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 754, p. 311-344
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1991-1992__34__311_0>

Séminaire BOURBAKI Février 1992
44ème année, 1991-92, n° 754

TRAVAUX DE HERMAN SUR LES TORES INVARIANTS

par Jean-Christophe YOCCOZ

0. Cet exposé se veut une introduction aux spectaculaires récents résultats de M. Herman en dynamique symplectique ([H1] à [H7]).

Après quelques rappels dans les deux premiers paragraphes, le troisième est consacré à la construction d'un contre-exemple, dans la catégorie des champs hamiltoniens, au C^∞ closing lemma.

Le paragraphe 4 tourne tout entier autour de l'existence de tores diophantiens, invariants ou translatés, de codimension 1. De même que pour les courbes translatées de Rüssmann ([R1], [H9]), ces tores apparaissent déjà dans des situations non conservatives. Dans un cadre conservatif (flots hamiltoniens, difféomorphismes préservant le volume), ils produisent des contre-exemples à plusieurs conjectures : Hypothèse quasi-ergodique, conjecture de Pesin, ...

Dans le paragraphe 5 on présentera quelques uns des résultats de Herman sur les tores invariants *lagrangiens* . La géométrie de ces tores dépend alors très fortement de la signature de la torsion; on possède aussi de nombreuses informations sur la dynamique sur le tore générique.

Pour alléger l'exposition, nous nous placerons fréquemment, pour présenter les résultats, dans un cadre simple, mais pas optimal. En particulier, on se place *toujours, sauf mention contraire* en classe C^∞.

1. COURBES INVARIANTES PAR LES DIFFÉOMORPHISMES DU CYLINDRE

1.1. On pose $\mathbf{A} = \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$; on note $\theta \in \mathbf{T}^1$, $r \in \mathbf{R}$ les coordonnées canoniques sur $\mathbf{A}$. On considère la 1-forme $v = r d\theta$ sur $\mathbf{A}$ et la 2-forme symplectique $\omega = dv = dr \wedge d\theta$.

Soit $f : (\theta, r) \mapsto (\Theta(\theta, r), R(\theta, r))$ un difféomorphisme de $\mathbf{A}$, isotope à l'identité. On écrit

$$\Theta(\theta, r) = \theta + \phi(\theta, r), \quad \phi \in C^\infty(\mathbf{A}).$$

DÉFINITIONS.— *Le difféomorphisme* F *est*

- monotone positif (resp. négatif) *si* $\partial_r \phi > 0$ (resp. $\partial_r \phi < 0$) *sur* $\mathbf{A}$;
- symplectique *si* $F^* \omega = \omega$;
- exact symplectique *si la* 1*-forme* $F^* v - v$ *est exacte* ;
- complètement intégrable *si* $R(\theta, r) = r$, *et* $\phi(\theta, r) = l(r)$ *ne dépend pas de* θ.

1.2. Théorie de Birkhoff ([B1],[H9],[F],[L3])

Soit F un difféomorphisme monotone positif de $\mathbf{A}$.

Premier théorème de Birkhoff : *Supposons que* F *laisse invariant le graphe d'une fonction* $\psi \in C^0(\mathbf{T}^1)$. *Alors* ψ *est lipschitzienne et on a, pour presque tout* $\theta \in \mathbf{T}^1$

$$\frac{\partial_r R}{\partial_r \phi} \left(F^{-1}(\theta, \psi(\theta))\right) > D\psi(\theta) > -\frac{\partial_\theta \Theta}{\partial_r \phi} \left(\theta, \psi(\theta)\right).$$

On suppose maintenant de plus que F est symplectique (il suffirait que F préserve une mesure de Radon chargeant tous les ouverts).

Deuxième théorème de Birkhoff: *Supposons que* F *préserve un ouvert* U *de* $\mathbf{A}$ *ayant les propriétés suivantes :*

- *Il existe* $r_0 < r_1$ *tels que* $\mathbf{T}^1 \times (-\infty, r_0) \subset U \subset \mathbf{T}^1 \times (-\infty, r_1)$;
- U *est difféomorphe à* $\mathbf{A}$;
- U *est l'intérieur de son adhérence.*

Alors la frontière de U est le graphe d'une fonction $\psi \in C^0(\mathbf{T}^1)$ (lipschitzienne d'après le premier théorème).

Conséquences : Soit F un difféomorphisme symplectique monotone positif de $\mathbf{A}$; pour $r_0 > 0$, considérons l'ensemble $\mathcal{C}(r_0)$ des courbes simples, homotopes à $\{r = 0\}$, de $\mathbf{A}$ qui sont invariantes par F, et contenues dans $\mathbf{T}^1 \times [-r_0, r_0]$. Toute courbe $C \in \mathcal{C}(r_0)$ est graphe d'une application ψ_C, lipschitzienne de rapport inférieur ou égal à $K(r_0)$. L'union des courbes $C \in \mathcal{C}(r_0)$ est compacte, de même que l'ensemble des ψ_C (pour la C^0 topologie). Si l'on écrit

$$F(\theta, \psi_C(\theta)) = (f_C(\theta), \psi_C(f_C(\theta))),$$

et qu'on note ρ_C le nombre de rotation de f_C, l'ensemble des ρ_C est compact. De plus, si ρ_C est irrationnel et $C' \in \mathcal{C}(r_0)$ est distincte de C, on a soit $\rho_{C'} < \rho_C$, $\psi_{C'} < \psi_C$ soit $\rho_{C'} > \rho_C, \psi_{C'} > \psi_C$.

Remarque : Pour que $\mathcal{C}(r_0)$ soit non vide, il faut que F soit *exact* symplectique. Mais cette condition n'est pas suffisante comme le montre l'exemple suivant :

$$F_0(\theta, r) = (\theta + r, r + \cos 2\pi(\theta + r)), \quad F_0^n(0,0) = (0, n).$$

1.3. Courbes diophantiennes : forme normale de Birkhoff

Pour $\gamma > 0$, $\tau \geq 0$, on pose :

$$CD(\gamma, \tau) = \{\alpha \in \mathbf{R}; \forall q \geq 1, \forall p \in \mathbf{Z}, |q\alpha - p| \geq \gamma q^{-1-\tau}\},$$

$$CD(\tau) = \bigcup_{\gamma > 0} CD(\gamma, \tau), \quad CD = \bigcup_{\tau \geq 0} CD(\tau).$$

Un nombre $\alpha \in CD$ est dit *diophantien.* On dit qu'une courbe (simple) C, invariante par un difféomorphisme F est diophantienne si F/C préserve l'orientation et si le nombre de rotation de F/C est diophantien.Si F et C sont lisses, d'après le théorème de conjugaison global des difféomorphismes du cercle ([H8],[Y]), il existe sur toute courbe diophantienne C une coordonnée $\theta \in \mathbf{T}^1$ telle que F/C soit une translation dans cette coordonnée.

PROPOSITION ([B2]).— *Soient F un difféomorphisme symplectique de $\mathbf{A}$, isotope à l'identité, et C une courbe invariante diophantienne, homotope à $\{r = 0\}$. Pour tout entier $n \geq 0$, il existe un difféomorphisme symplectique H de $\mathbf{A}$, isotope à l'identité, tel qu'on ait $H(C) = \{r = 0\}$ et :*

$$H \circ F \circ H^{-1}(\theta, r) = \left(\theta + \sum_1^n b_i r^i + \alpha, r\right) + \mathcal{O}(r^{n+1}),$$

où $\alpha \in CD$ est le nombre de rotation de F/C et les nombres b_i, $i \geq 1$ sont uniquement déterminés (invariants de Birkhoff).

On dit que la torsion de F le long de C est positive si $b_1 > 0$, négative si $b_1 < 0$, dégénérée si $b_1 = 0$.

Exercice : Si le difféomorphisme symplectique F est monotone positif, la torsion de F le long de toute courbe invariante diophantienne, homotope à $\{r = 0\}$, est positive. Ceci n'est plus nécessairement vrai si la courbe n'est pas homotope à $\{r = 0\}$.

1.4. Le théorème de la courbe translatée.

Le théorème de la courbe translatée, du à H. Rüssmann ([R1],[H9]), est une forme plus flexible, car valable sans hypothèse de conservativité, du théorème de la courbe invariante de J. Moser ([Mo1]).

Soit $L(\theta, r) = (\theta + l(r), r)$ un difféomorphisme complètement intégrable de $\mathbf{A}$. On suppose que $l(0) = \alpha$ est *diophantien* , et que $l'(0) \neq 0$. Pour $\mu \in \mathbf{R}$ on note T_μ la translation : $(\theta, r) \mapsto (\theta, r + \mu)$ de $\mathbf{A}$.

THÉORÈME.— *Si F est un difféomorphisme de $\mathbf{A}$, assez proche de L dans la C^∞-topologie, il existe un réel μ_F proche de 0, et une fonction $\psi_F \in C^\infty(\mathbf{T}^1)$ petite dans la C^∞-topologie, tels que le graphe de ψ_F soit une courbe invariante, de nombre de rotation α, par $T_{\mu_F} \circ F$.*

Remarques.— 1) L'application $F \mapsto (\mu_F, \psi_F)$ définie au voisinage de L, est une bonne application de classe C^∞ au sens de Hamilton ([Ha1],[H10],[Bo]).

2) Soient $\tau \geq 0$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$. Supposons que $l'(r) \neq 0$ pour $r \in [-\delta, \delta]$; posons $K = l([-\delta, \delta]) \cap CD(\gamma, \tau)$. Il existe alors, pour tout $k > 2\tau + 3$, un voisinage de L dans la C^k-topologie telle que la conclusion du théorème soit valide pour tout nombre de rotation dans K. La dépendance de ψ_F, μ_F par rapport au nombre de rotation est lisse au sens de Whitney ([La],[Po]).

3) Soit F un difféomorphisme exact symplectique monotone positif de $\mathbf{A}$. Soit α un nombre réel diophantien .

- Si F ne préserve pas de courbe , homotope à $\{r = 0\}$, de nombre de rotation α, il en est de même pour toute perturbation de F .

- Si F préserve une courbe *lisse* , homotope à $\{r = 0\}$, de nombre de rotation α, il en est de même pour toute perturbation *exacte symplectique* de F.

1.5. Zones d'instabilité.

Soit F un difféomorphisme exact symplectique monotone positif de $\mathbf{A}$. L'union des courbes invariantes par F homotopes à $\{r = 0\}$ est une partie fermée de $\mathbf{A}$. Les composantes connexes du complémentaire qui sont bordées par deux telles courbes sont appelées *zones d'instabilité* de F; la dynamique de F dans ces zones est loin d'être parfaitement comprise,mais de nombreux progrès ont été enregistrés récemment,dont il ne nous est pas possible de rendre compte ici;nous renvoyons le lecteur aux références : [An], [B-H], [Ch], [L1] à [L4], [M1] à [M5].

2. QUELQUES RAPPELS DE DYNAMIQUE SYMPLECTIQUE

2.1. Une variété symplectique est une paire (M, ω), où M est une variété (de dimension paire $2n$) et ω une 2-forme fermée partout non dégénérée. Soit N une variété de dimension moitié.Une immersion $j : N \to M$ est lagrangienne si $j^*\omega = 0$. Soit $H \in C^\infty(M)$;le champ X_H défini par:

$$\omega(X_H, .) = dH(.)$$

est dit champ hamiltonien associé au hamiltonien H.

Si une hypersurface V de M est variété de niveau de deux hamiltoniens H_1, H_2 sur M,les champs associés X_{H_1}, X_{H_2} sont colinéaires sur V et les flots qu'ils engendrent ont, sur V, les mêmes orbites.

2.2. Le fibré cotangent $p : T^*V \to V$ d'une variété V est canoniquement une variété symplectique : on pose $\omega = dv$, où la 1-forme v au point ζ de T^*M est définie par:

$$v(Y) = \zeta(Tp(Y)), \quad Y \in T_\zeta(T^*M).$$

Une section $s : V \to T^*V$, c'est-à-dire une 1-forme sur V, est alors un plongement lagrangien si et seulement si s est fermée.

PROPOSITION (Weinstein)[W].— *Si N est une sous-variété lagrangienne plongée d'une variété symplectique M,il existe un difféomorphisme symplectique d'un voisinage de N dans M sur un voisinage de la section nulle dans T^*N (envoyant N sur la section nulle).*

2.3. Pour $2n \geq k \geq 0$,on munit $\mathbf{T}^{2n-k} \times \mathbf{R}^k$ des coordonnées $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2n-k} \in \mathbf{T}^1, r_1, \ldots, r_k \in \mathbf{R}$. Pour $H \in C^\infty(\mathbf{T}^{2n-k} \times \mathbf{R}^k)$, on pose

$$\nabla H =^t (\partial_{\theta_1} H, \ldots, \partial_{r_k} H).$$

Soit $A \in GL(2n, \mathbf{R})$ une matrice antisymétrique ; la forme symplectique (à coefficients constants) telle que

$$\omega_A(A\nabla H, .) = dH(.)$$

est dite associée à A.

2.4. On identifiera $T^*(\mathbf{T}^n)$ à $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$ qu'on notera $\mathbf{A}^n$. La forme symplectique canonique est alors $\omega = dv = \sum dr_i \wedge d\theta_i, \quad v = \sum r_i d\theta_i$.

Soit F un difféomorphisme de $\mathbf{A}^n$,homotope à l'identité. On écrit:

$$F(\theta, r) = (\Theta(\theta, r), R(\theta, r)) = (\theta + \phi(\theta, r), R(\theta, r)).$$

DÉFINITIONS.— *On dit que F est*

- symplectique *si* $F^*\omega = \omega$;

- exact symplectique *si* $F^*v - v$ *est exacte* ;
- monotone *si* $\partial_r \phi$ *est partout inversible* ;
- fortement monotone *si pour tout* $\theta \in \mathbf{T}^n, r \mapsto \phi(\theta, r)$ *est un difféomorphisme de* $\mathbf{R}^n$;
- complètement intégrable *si* $R(\theta, r) = r$ *et* $\phi(\theta, r) = l(r)$ *ne dépend pas de* θ.

Si $L : (\theta, r) \mapsto (\theta + l(r), r)$ est complètement intégrable et symplectique la différentielle $Dl(r)$ est pour tout $r \in \mathbf{R}^n$ une matrice symétrique. On a $l = D\hat{l}$,pour une certaine fonction $\hat{l} \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Si le graphe d'une fonction $\psi \in C^\infty(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ est une sous-variété lagrangienne,on a $\psi = [\psi] + d\hat{\psi}$ avec $\hat{\psi} \in C^\infty(\mathbf{T}^n), [\psi] = \int \psi dm$(où on notera dm la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{T}^n$).

2.5. Conditions diophantiennes.

Soient $\gamma > 0, \tau \geq 0, n \geq 1$. On définit:

$$CDH_n(\gamma, \tau) = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n, \forall k \in \mathbf{Z}^n - \{0\}, \left|\sum k_i \alpha_i\right| \geq \gamma (sup|k_i|)^{1-n-\tau}\},$$

$$CDH_n(\tau) = \bigcup_{\gamma > 0} CDH_n(\gamma, \tau), \quad CDH_n = \bigcup_{\tau \geq 0} CDH_n(\tau)$$

$$CD_n(\gamma, \tau) = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n, \forall k \in \mathbf{Z}^n - \{0\}, \forall l \in \mathbf{Z}, |l + \sum k_i \alpha_i| \geq \gamma (sup|k_i|)^{-n-\tau}\},$$

$$CD_n(\tau) = \bigcup_{\gamma > 0} CD_n(\gamma, \tau), \quad CD_n = \bigcup_{\tau \geq 0} CD_n(\tau).$$

Pour $\tau > 0$, $CD_n(\tau)$ et $CDH_n(\tau)$ sont de mesure de Lebesgue pleine, mais maigres au sens de Baire (pour $n \geq 2$ dans le cas de CDH_n). Les translations entières préservent les $CD_n(\gamma, \tau)$; on note de la même façon leurs images dans $\mathbf{T}^n$.

2.6. Théorèmes de conjugaison locaux sur les tores

Pour $\alpha \in \mathbf{T}^n$,on note R_α la translation $\theta \mapsto \theta + \alpha$ de $\mathbf{T}^n$. Pour $\alpha \in \mathbf{R}^n$,on note X_α le champ de vecteurs $\sum \alpha_i \partial_{\theta_i}$. On note $\mathrm{Diff}_0^\infty(\mathbf{T}^n)$ l'ensemble des difféomorphismes h de $\mathbf{T}^n$ qui sont homotopes à l'identité et vérifient $\int (h(\theta) - \theta) dm = 0$

THÉORÈME.— *Soit $\alpha \in CD_n$.Tout difféomorphisme f de $\mathbf{T}^n$ suffisamment proche de R_α s'écrit de façon unique $f = R_\lambda \circ h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$,avec $\lambda \in \mathbf{T}^n$ proche de 0 et $h \in \mathrm{Diff}_0^\infty(\mathbf{T}^n)$ proche de l'identité.*

THÉORÈME.— *Soit $\alpha \in CDH_n$.Tout champ de vecteurs X sur $\mathbf{T}^n$ suffisamment proche de X_α s'écrit de façon unique $X = X_\lambda + h_* X_\alpha$, avec $\lambda \in \mathbf{R}^n$ proche de 0 et $h \in \mathrm{Diff}_0^\infty(\mathbf{T}^n)$ proche de l'identité.*

L'application $f \mapsto (\lambda, h)$ (resp. $X \mapsto (\lambda, h)$) définie au voisinage de R_α (resp. de X_α) est une bonne application de classe C^∞ au sens de Hamilton ([Ha1],[H10],[Bo]).

Si f préserve la mesure de Lebesgue (resp. si X est de divergence nulle) la conjugaison h préserve la mesure de Lebesgue, car R_α (resp. X_α) est uniquement ergodique (c'est-à-dire la mesure de Lebesgue est l'unique mesure de probabilité invariante).

De façon beaucoup plus élémentaire, on a :

PROPOSITION.— *Soient $\alpha \in CDH_n$, $\psi \in C^\infty(\mathbf{T}^n)$, $\psi > 0$. Il existe un unique nombre réel $c > 0$ et un unique difféomorphisme $h \in \mathrm{Diff}_0^\infty(\mathbf{T}^n)$ tels qu'on ait $\psi X_\alpha = h_* X_{c\alpha}$.*

2.7. Forme normale de Birkhoff

Soit F un difféomorphisme symplectique d'une variété symplectique (M, ω). Un tore T , de dimension k, invariant par F, est dit *diophantien* s'il existe $\alpha \in CD_k$ et un difféomorphisme $h : \mathbf{T}^k \to T$ tels que $h \circ R_\alpha \circ h^{-1} = F_{/}T$.

Remarques.— 1) Si on remplace h par $h \circ A$, $A \in GL(k, \mathbf{Z})$, on remplace α par $A^{-1}\alpha$.

2) La 2-forme $h^*(\omega_{/}T)$, étant invariante par la translation ergodique R_α, est à coefficients constants. Si la forme symplectique ω est exacte (par exemple $M = T^*V$), on doit avoir $h^*(\omega_{/}T) = 0$; ceci implique $k \leq \frac{1}{2} \dim M$.

Soit T un tore invariant diophantien *lagrangien.*

PROPOSITION.— *Pour tout $n \geq 0$, il existe un plongement symplectique H d'un voisinage de $\mathbf{T}^n \times \{0\}$ dans $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$ dans M tel que $H(\mathbf{T}^n \times \{0\}) = T$ et*

$$H^{-1} \circ F \circ H(\theta, r) = \left(\theta + \sum_1^m l_i(r) + \alpha, r\right) + \mathcal{O}(||r||^{m+1}),$$

où, pour $1 \leq i \leq m$, $l_i(r)$ est une application polynômiale homogène de degré i de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ de la forme $D\hat{l}_i$ (où $\hat{l}_i$ est un polynôme homogène de degré $i+1$ dans $\mathbf{R}^n$).

Remarque.— Si on remplace H par $H \circ T^*A, A \in GL(n, \mathbf{Z})$, on remplace $\hat{l}_i$ par $\hat{l}_i \circ^t A^{-1}$.La signature de la forme quadratique $\hat{l}_2$ reste inchangée.

DÉFINITION.— *On dit que le tore T a une torsion dégénérée, positive, négative,indéfinie, nulle, suivant que la forme quadratique $\hat{l}_2$ est dégénérée, positive, négative, indéfinie, nulle.*

Ce qui précède possède un analogue pour les champs hamiltoniens: au voisinage d'un tore lagrangien diophantien invariant,un champ hamiltonien est approché ,à un ordre arbitraire, par un champ hamiltonien complètement intégrable.

2.8. Théorèmes KAM

Nous renvoyons à [Bo] pour un exposé très complet et une bibliographie très détaillée sur les différentes variantes de théorèmes KAM. Nous nous contentons ici d'en citer une.

THÉORÈME.— *Soient $(M^{2n}, \omega = dv)$ une variété exacte symplectique et F_0 un difféomorphisme exact symplectique de (M, ω). Soient $\alpha \in CD_n$ et $h_0 : \mathbf{T}^n \to M$ un plongement (automatiquement lagrangien) tels que*

$T_0 = h_0(\mathbf{T}^n)$ soit invariant par F_0 et qu'on ait :

$$h_0 \circ R_\alpha \circ h_0^{-1} = F_0/T_0.$$

Pour tout difféomorphisme exact symplectique F suffisamment proche de F_0, il existe un plongement (lagrangien) $h_F : \mathbf{T}^n \to M$, proche de h_0, tel que $T_F = h_F(\mathbf{T}^n)$ soit invariant par F et qu'on ait

$$h_F \circ R_\alpha \circ h_F^{-1} = F_{/T_F}.$$

L'application $F \mapsto h_F$ est une bonne application de classe C^∞ au sens de Hamilton.

3. UN CONTRE-EXEMPLE AU C^∞-CLOSING LEMMA POUR LES CHAMPS HAMILTONIENS

3.1. Le "closing lemma"

Étant donnés une variété M et un difféomorphisme f de M (ou un flot $(f^s)_{s\in\mathbf{R}}$ associé à un champ de vecteurs X), on dit qu'un point $x \in M$ est (positivement) récurrent si

$$\operatorname*{Liminf}_{s\to+\infty} d(f^s(x), x) = 0.$$

Le problème du "closing lemma" est le suivant : peut-on perturber f (ou X) de manière que le point x devienne *périodique* ? Ce problème se pose pour les difféomorphismes les plus généraux, mais aussi à l'intérieur de classes plus restreintes de difféomorphismes ou de champs de vecteurs : difféomorphismes préservant le volume, difféomorphismes symplectiques, champs de vecteurs hamiltoniens, difféomorphismes biholomorphes, ...

Les réponses à ces questions dépendent de façon essentielle de la topologie dans laquelle sont permises les perturbations. En ce qui concerne la classe de tous les difféomorphismes, la réponse est trivialement positive en C^0-topologie; en C^1-topologie, la réponse est encore positive, mais c'est un théorème difficile de Pugh ([Pu]). En C^2-topologie, Gutierrez [Gu] a construit un champ de vecteurs sur $\mathbf{T}^2$ possédant un point récurrent $x \neq 0$

qu'on ne peut rendre périodique par une C^2-perturbation à support compact dans $\mathbf{T}^2 - \{0\}$. La question est totalement ouverte pour la C^2-topologie sur une variété compacte.

Le résultat de Pugh a été étendu à la classe des champs de vecteurs hamiltoniens par Pugh et Robinson ([P-R]) : si x est récurrent pour le champ hamiltonien X_{H_0}, on peut perturber H_0 dans la C^2-topologie en un hamiltonien H tel que x soit périodique pour X_H.

L'exemple ci-dessous a été introduit par Zehnder ([Z1]) pour montrer qu' une surface d'énergie compacte d'un hamiltonien ne contient pas nécessairement d'orbites périodiques. Herman a démontré que ce même exemple fournit un contre-exemple au "closing lemma" en topologie C^k (k assez grand), dans la classe des champs de vecteurs hamiltoniens.

3.2. Soient $\alpha \in CDH_{2n-1}$, et A une matrice antisymétrique dans $GL(2n, \mathbf{R})$ de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} B & {}^t\alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B \in M(2n-1, \mathbf{R}).$$

Munissons $\mathbf{T}^{2n-1} \times [-\delta, \delta]$ de la forme symplectique constante ω_A associée à A (cf. 2.3).

Posons $H_0(\theta, r) = r$. Sur chaque surface d'énergie $\{r = r_0\}$, le champ hamiltonien X_{H_0} coïncide avec le champ de vecteurs constant X_α sur $\mathbf{T}^{2n-1}$.

Considérons maintenant un hamiltonien $H \in C^\infty(\mathbf{T}^{2n-1} \times [-\delta, \delta])$, C^∞-proche de H_0 et $r_0 \in [-\delta/2, \delta/2]$. La surface de niveau $\{H = r_0\}$ est le graphe T d'une fonction $\psi \in C^\infty(\mathbf{T}^{2n-1}, [-\delta, \delta])$.

Posons $K(\theta, r) = r - \psi(\theta)$, de sorte que $T = \{K = 0\}$. Les champs X_H et X_K sont colinéaires sur T.

Le champ $Z = -B\nabla_\theta\psi + X_\alpha$ sur $\mathbf{T}^{2n-1}$ est la projection de X_K/T. Comme B est antisymétrique, Z a une divergence nulle. Comme Z est proche de X_α, on peut l'écrire (cf. 2.6)

$$Z = X_\lambda + h_* X_\alpha,$$

où $h \in \mathrm{Diff}_0(\mathbf{T}^{2n-1})$ préserve la mesure de Lebesgue.

Or on a

$$\int Z dm = \alpha = \int h_* X_\alpha dm,$$

donc $\lambda = 0$.

Le champ X_K sur T est donc conjugué à X_α; d'après 2.6, le champ X_H sur T est conjugué à $X_{c\alpha}$, pour un certain c proche de 1.

Ceci démontre le :

THÉORÈME ([H1], [H2]).— *Pour tout hamiltonien H suffisament proche de H_0, et toute surface d'énergie $\{H = r_0\}$, $|r_0| \leq \delta/2$, le champ de vecteurs X_H sur $\{H = r_0\}$ est conjugué à un champ diophantien $X_{c\alpha}$, $c > 0$. En particulier, la région $\{|H| \leq \delta/2\}$ ne contient pas d'orbites périodiques de X_H.*

Remarques.— 1) On peut plonger l'exemple précédent dans $\mathbf{T}^{2n}$, puis éclater symplectiquement des points de $\mathbf{T}^{2n}$, pour obtenir une famille dénombrable de variétés symplectiques compactes sur lesquelles se produit le phénomène précédent. On ne peut cependant plonger cet exemple dans une variété symplectique exacte (cf. 2.7), sauf si $n = 1$. Le "closing lemma" pour les champs hamiltoniens sur un fibré cotangent (par exemple) demeure une question ouverte.

2) En prenant $\alpha \in CDH_{2n-1}(0)$, il suffit d'exiger dans le théorème précédent que H soit C^k-proche de H_0, pour tout k donné $> 2n$.

3) On verra au prochain paragraphe une illustration plus subtile de ce phénomène de rigidité du nombre de rotation.

4. TORES INVARIANTS DE CODIMENSION 1

4.1. Le théorème du tore translaté ([H7])

Pour $n \geq 1, \delta > 0$, on pose $\mathbf{B}^n = \mathbf{T}^n \times \mathbf{R}$, $\mathbf{B}^n(\delta) = \mathbf{T}^n \times [-\delta, +\delta]$, et on note $p_1 : \mathbf{B}^n \to \mathbf{T}^n$ et $p_2 : \mathbf{B}^n \to \mathbf{R}$ les deux projections.

Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbf{B}^n$, on note $R_{\lambda,\mu}$ la translation $(\theta, r) \mapsto (\theta + \lambda, r + \mu)$.

Considérons un plongement $F_0 : \mathbf{B}^n(\delta) \hookrightarrow \mathbf{B}^n$, de classe C^∞, qui vérifie $F_0(\theta, 0) = (\theta + \alpha, 0)$, où α appartient à CD_n.

THÉORÈME.— *Pour tout plongement $F : \mathbf{B}^n(\delta) \hookrightarrow \mathbf{B}^n$ suffisamment proche de F_0, il existe une translation $R_{\lambda,\mu}$ de $\mathbf{B}^n$, une application $\psi \in C^\infty(\mathbf{T}^n)$ de moyenne nulle, et un difféomorphisme $h \in \mathrm{Diff}_0^\infty(\mathbf{T}^n)$ tels que:*

1) *le plongement $\widetilde{F} = R_{\lambda,\mu} \circ F$ préserve le graphe de ψ ;*

2) *pour $\theta \in \mathbf{T}^n$, on a*

$$\widetilde{F}(\theta, \psi(\theta)) = (f(\theta), \psi(f(\theta))) \text{ avec } f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}.$$

Compléments.— 1) Pour $F = F_0$, on a $\lambda = \mu = 0, \psi = 0, h = id$; pour F proche de F_0, si l'on exige que λ, μ, ψ soient petits et h proche de l'identité, ils sont uniquement déterminés par les propriétés du théorème.

2) Le bon cadre (du moins, le plus agréable et le plus flexible) pour formuler de nombreux théorèmes de petits diviseurs est celui de Hamilton ([Ha1],[Ha2],[H10],[Bo]) ; il définit des notions de "bon espace de Fréchet" et de "bonnes applications de classe C^r" entre bons espaces de Fréchet, pour lesquelles le théorème d'inversion locale (ou des fonctions implicites) reste valide (il faut cependant vérifier l'inversibilité de la différentielle sur tout un voisinage du point considéré). Je renvoie à [Bo] pour de plus amples renseignements. La démonstration du théorème, dont nous donnons une vague indication ci-dessous, montre qu'alors l'application $F \mapsto (\lambda, \mu, \psi, h)$ est une bonne application de classe C^∞ au sens de Hamilton.

3) Fixons $\tau \geq 0, \gamma > 0$. Pour tout $\alpha' \in CD_n(\gamma, \tau)$, on peut appliquer le théorème à $R_{\alpha'-\alpha,0} \circ F_0$; on obtient alors pour F dans un voisinage $U_{\alpha'}$ de F_0, $\lambda_{\alpha'}, \mu_{\alpha'}, \psi_{\alpha'}, h_{\alpha'}$ tels que

$$F(\theta, \psi_{\alpha'}(\theta)) = (f_{\alpha'}(\theta), \psi_{\alpha'}(f_{\alpha'}(\theta))) - (\lambda_{\alpha'}, \mu_{\alpha'}),$$
$$f_{\alpha'} = h_{\alpha'} \circ R_{\alpha'} \circ h_{\alpha'}^{-1}.$$

Les deux faits suivants sont vitaux pour les applications :

— L'intersection des $U_{\alpha'}$, lorsque α' décrit $CD_n(\gamma, \tau)$, est encore un voisinage de F_0.

— L'application $\alpha' \mapsto (\lambda_{\alpha'}, \mu_{\alpha'}, \psi_{\alpha'}, h_{\alpha'})$ est lisse au sens de Whitney.

Pour démontrer ceci à peu de frais, la remarque suivante de Bost est fondamentale : considérons la démonstration du théorème, pour α fixé, dans le cadre de Hamilton ; elle fait intervenir de bons espaces de Fréchet $F_1, F_2, \ldots$ et de bonnes applications $L_1 : F_1 \to F_2, \ldots$. Considérant ensuite α comme un paramètre, remplaçons F_1, F_2 par $\widetilde{F}_1 = C^p(CD_n(\gamma,\tau), F_1)$, $\widetilde{F}_2 = C^p(CD_n(\gamma,\tau), F_2)$ et L_1 par : $\widetilde{L}_1 : \widetilde{F}_1 \to \widetilde{F}_2$. Alors $\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2$ sont encore de bons espaces de Fréchet et $\widetilde{L}_1$ une bonne application, ce qui permet de conclure.

4.2. Quelques indications sur la démonstration

Soit F_1 un difféomorphisme de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{T}^1 = \mathbf{T}^{n+1}$ qui coïncide avec F_0 au voisinage de $\mathbf{T}^n \times \{0\}$. Posons

$$C_1 = \{\psi \in C^\infty(\mathbf{T}^n), \int \psi dm = 0\},$$

$$C_2 = C_1^n \subset C^\infty(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n),$$

$$C_3 = \{g \in C^\infty(\mathbf{T}^{n+1}, \mathbf{R}^{n+1}), g/_{\mathbf{T}^n \times \{0\}} \equiv 0\}.$$

Pour $\psi \in C_1$, définissons

$$K_\psi(\theta, r) = (\theta, r + \psi(\theta)).$$

Pour $\varphi \in C_2$, définissons

$$H_\varphi(\theta, r) = (\theta + \varphi(\theta), r).$$

Pour $g \in C_3$, définissons

$$J_g(\theta, r) = (\theta, r) + g(\theta, r).$$

Nous voulons montrer que l'application

$$\begin{aligned} \Phi : &\mathbf{T}^n \times \mathbf{R} \times C_1 \times C_2 \times C_3 \to \mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{T}^{n+1}) \\ &(\lambda, \mu, \psi, \varphi, g) \mapsto R_{\lambda,\mu} \circ K_\psi \circ H_\varphi \circ J_g \circ F_1 \circ H_\varphi^{-1} \circ K_\psi^{-1}, \end{aligned}$$

définie au voisinage de l'origine $(0,0,0,0,0)$, est un bon difféomorphisme de classe C^∞ au sens de Hamilton d'un voisinage de l'origine sur un voisinage de F_1 dans $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{T}^{n+1})$. Il suffit pour ceci de vérifier les hypothèses du théorème d'inversion locale de Hamilton. Nous n'indiquons ici que la raison pour laquelle la différentielle $D_0\Phi$ de Φ à l'origine est inversible.

On a

$$D_0\Phi(\lambda,\mu,\psi,\varphi,g) = (\lambda,\mu) + g\circ F_1 + S_1 + S_2,$$

$$S_1(\theta,r) = (\varphi\circ p_1\circ F_1(\theta,r),0) - D_{(\theta,r)}F_1(\varphi(\theta),0),$$

$$S_2(\theta,r) = (0,\psi\circ p_1\circ F_1(\theta,r)) - D_{(\theta,r)}F_1(0,\psi(\theta)).$$

En posant $a(\theta) = \partial_r(p_2\circ F_1)(\theta,0)$, on a :

$$S_1(\theta,0) = (\varphi(\theta+\alpha)-\varphi(\theta),0),$$
$$S_2(\theta,0) = (0,\psi(\theta+\alpha)-a(\theta)\psi(\theta)).$$

Donnons-nous $\eta_1 \in C^\infty(\mathbf{T}^{n+1},\mathbf{R}^n)$, $\eta_2 \in C^\infty(\mathbf{T}^{n+1},\mathbf{R})$, et considérons l'équation

$$D_0\Phi(\lambda,\mu,\psi,\varphi,g) = (\eta_1,\eta_2).$$

On doit avoir

$$\eta_1(\theta,0) = \lambda + \varphi(\theta+\alpha) - \varphi(\theta)$$

ce qui détermine de façon unique $\lambda\in\mathbf{R}^n, \varphi\in C_2$.
On doit aussi avoir

$$\eta_2(\theta,0) = \mu + \psi(\theta+\alpha) - a(\theta)\psi(\theta)$$

ce qui détermine de façon unique $\mu \in \mathbf{R}, \psi \in C_1$: on écrit $a(\theta) = a^*\dfrac{b(\theta)}{b(\theta+\alpha)}$, $a^*\neq 0$, $b>0, \log b\in C_1$, puis on résout (cf.[H9])

$$b(\theta+\alpha)\eta_2(\theta,0) - \mu b(\theta+\alpha) = b\psi(\theta+\alpha) - b\psi(\theta)a^*.$$

Finalement on doit avoir

$$g\circ F_1(\theta,r) = (\eta_1(\theta,r)-\eta_1(\theta,0),\eta_2(\theta,r)-\eta_2(\theta,0)),$$

ce qui détermine uniquement g.

On a ainsi montré que $D_0\Phi$ est inversible.

4.3. Rigidité du nombre de rotation

Le lemme ci-dessous est une étape cruciale dans l'application du théorème 4.1 qui sera donnée en 4.5.

Soient $0 < k < n$ deux entiers, U un ouvert de $\mathbf{R}^k$. Munissons $\mathbf{T}^{2n-k} \times U$ d'une forme symplectique constante ω ; notons $p_1 : \mathbf{T}^{2n-k} \times U \to \mathbf{T}^{2n-k}$ la projection canonique.

Soient $H \in C^\infty(\mathbf{T}^{2n-k} \times U)$ un hamiltonien, X_H le champ associé, $\lambda \in \mathbf{R}^{2n-k}$, $X_\lambda = \sum \lambda_i \partial/\partial\theta_i$, $Y = X_H + X_\lambda$.

Lemme :Supposons que :

1) Y soit tangent au graphe T d'une fonction lisse ψ de $\mathbf{T}^{2n-k}$ dans U ;

2) on ait $p_{1*}(Y/T) = h_*(X_\alpha)$, où h est un difféomorphisme homotope à l'identité de $\mathbf{T}^{2n-k}$, et X_α un champ constant ergodique sur $\mathbf{T}^{2n-k}$.

Alors $\lambda - \alpha$ est ω-orthogonal à $\mathbf{R}^{2n-k} \times \{0\}$.

Démonstration.— Identifions $\mathbf{T}^{2n-k}$ à $\mathbf{T}^{2n-k} \times \{0\}$; posons $j(\theta) = (\theta, \psi(\theta))$, $\omega_1 = \omega/\mathbf{T}^{2n-k}$, $\omega_2 = j^*\omega$.

Comme j est homotope à l'inclusion : $\mathbf{T}^{2n-k} \times \{0\} \hookrightarrow \mathbf{T}^{2n-k} \times \mathbf{R}^k$, les formes ω_1 et ω_2 sont cohomologues ; comme h est homotope à l'identité, ω_2 et $h^*\omega_2$ sont cohomologues. Les formes ω_1 et $h^*\omega_2$ sont à coefficients constants (puisque X_α est ergodique) et cohomologues, donc égales.

Posons $Y_1 = p_{1*}(Y/T)$. Le champ Y est symplectique, donc $i_Y\omega$ est fermée ; on a $j^*(i_Y\omega) = i_{Y_1}\omega_2$, et cette forme est cohomologue à $h^*(i_{Y_1}\omega_2) = i_{X_\alpha}\omega_1$. D'autre part $i_Y\omega = i_{X_H}\omega + i_{X_\lambda}\omega$, où $i_{X_H}\omega = dH$ est exacte, et $j^*(i_{X_\lambda}\omega)$ est cohomologue à $i_{X_\lambda}\omega_1$.

Donc $i_{X_\lambda}\omega_1$ et $i_{X_\alpha}\omega_1$ sont cohomologues ; étant à coefficients constants, elles sont égales, ce qu'on voulait démontrer.

4.4. L'hypothèse quasi-ergodique

L'hypothèse quasi-ergodique est une tentative (désespérée, on va le voir) d'assurer les fondements mathématiques de la mécanique statistique.

L'hypothèse ergodique de Boltzmann ("les moyennes temporelles sont égales aux moyennes spatiales"), en langage moderne (Birkhoff, Koopman

[B-K]) signifie que pour (presque) tout hamiltonien propre H sur une variété symplectique (M, ω) et (presque) toute valeur de l'énergie, le champ X_H est ergodique sur (chaque composante connexe de) ce niveau d'énergie. Cette hypothèse est mise en défaut par les théorèmes KAM : pour un ouvert de Hamiltoniens H et un ouvert de valeurs de l'énergie, on trouve sur chaque niveau d'énergie un ensemble de tores diophantiens lagrangiens invariants de mesure positive.

Au lieu d'exiger que le champ X_H soit ergodique sur chaque composante connexe de presque tout niveau d'énergie, on peut ne demander que la propriété (considérablement plus faible) suivante : que, pour un ensemble dense de valeurs de l'énergie, le champ X_H ait une orbite dense sur chaque composante connexe de ce niveau d'énergie. On obtient ainsi l'hypothèse quasi-ergodique ([Eh],[P]).

Cette hypothèse est trivialement vraie si dim $M = 2$; si dim $M = 4$, elle est fausse d'après les théorèmes KAM, puisque les tores diophantiens invariants séparent la surface d'énergie. Au numéro suivant, nous expliquerons, suivant Herman, pourquoi, sur certaines variétés symplectiques (non exactes), il existe un ouvert de hamiltoniens, et un ouvert de niveaux d'énergie pour lesquels un ensemble de Cantor de tores invariants diophantiens de codimension 1 exclut l'existence d'une orbite dense dans la surface d'énergie.

4.5. Un contre-exemple à l'hypothèse quasi-ergodique ([H7])

Munissons $\mathbf{T}^{2n} \times [-\delta, +\delta]^2$ (coordonnées $\theta_1 \dots \theta_{2n}, r_1, r_2$) de la forme symplectique constante ω_A associée à une matrice $A \in GL(2n+2, \mathbf{R})$ antisymétrique de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & B & {}^t\beta & {}^t\beta' \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ -1 & -\beta' & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $B \in M(2n-1, \mathbf{R}), \beta' \in CD_{2n-1}, \beta \in \mathbf{R}^{2n-1}, \beta \neq 0$.

Soit $H_0 \in C^\infty([-\delta, +\delta]^2)$ un hamiltonien ne dépendant que de r_1, r_2.

On suppose que

$$H_0(0,0) = \partial_{r_1} H_0(0,0) = 0,$$
$$\partial_{r_2} H_0(0,0) \neq 0 \neq \partial_{r_1}^2 H_0(0,0).$$

THÉORÈME.— *Soient $H \in C^\infty(\mathbf{T}^{2n} \times [-\delta, +\delta]^2)$ un hamiltonien suffisamment proche de H_0, et b une valeur de l'énergie proche de 0. Le champ X_H, sur la surface d'énergie $\{H = b\}$ préserve un ensemble de Cantor de tores diophantiens de dimension $2n$, qui sont C^∞ voisins de $\mathbf{T}^{2n} \times (0,0)$.*

Esquisse de démonstration.— 1) On choisit $\gamma > 0, \tau > 0$ de façon que $s = 0$ soit point de densité de l'ensemble des $s \in \mathbf{R}$ tels que $\beta' - \beta s \in CD_{2n-1}(\gamma, \tau)$.

2) La surface d'énergie $\{H = b\}$, au voisinage de $\mathbf{T}^{2n} \times (0,0)$, a pour équation

$$K(\theta, r_1, r_2) = r_2 - \eta(\theta, r_1) = 0.$$

Les champs X_H, X_K sur $\{H = b\}$ sont colinéaires. La projection sur $\{r_2 = 0\}$ de X_K est le champ Z sur $\mathbf{T}^{2n} \times [-\varepsilon, +\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < \delta)$ défini par :

$$Z = (1, -B\nabla_\theta \eta - \beta \partial_{r_1} \eta + \beta', \langle \beta, \nabla_\theta \eta \rangle).$$

Le champ Z est une petite perturbation C^∞ du champ constant horizontal $(1, \beta', 0)$.

Le temps un du flot de Z préserve $\{\theta_1 = 0\}$ et y induit un difféomorphisme qu'on notera F.

On identifie $\mathbf{T}^{2n-1} \times \mathbf{R}$ à $\{0\} \times \mathbf{T}^{2n-1} \times \mathbf{R}$.

3) Pour $\lambda \in [-1, +1]^{2n-1}$, notons Z_λ le champ $Z + (0, \lambda, 0)$ et F_λ la restriction à $\mathbf{T}^{2n-1} \times \mathbf{R}$ du temps un de ce flot.

Fisons r_1 proche de 0 et s proche de 0 tel que $\alpha = \beta' - \beta s \in CD_{2n-1}(\gamma, \tau)$. D'après le théorème du tore translaté (4.1), il existe $\Lambda(\lambda) \in \mathbf{R}^{2n-1}$, $\mu(\lambda) \in \mathbf{R}$ tels que $\widetilde{F}_\lambda = R_{\Lambda(\lambda), \mu(\lambda)} \circ F_\lambda$ préserve le graphe d'une fonction lisse de $\mathbf{T}^{2n-1}$ dans $\mathbf{R}$, de moyenne r_1, et y soit C^∞-conjugué à la rotation R_α.

4) On vérifie aisément que $\lambda \mapsto \Lambda(\lambda)$ est un difféomorphisme au voisinage de l'origine, et qu'il existe donc un unique $\lambda_0 = \lambda_0(r_1, s)$ tel que $\Lambda(\lambda_0) = 0$.

On a$|\partial_{r_1}^2 \eta(\theta,0)| > k > 0$; on peut donc choisir $r_1 = r_1(s)$ de façon que $\lambda_0(r_1(s),s)$ soit (euclidiennement) orthogonal à β.

5) Montrons que $\mu(\lambda_0(r_1(s),s)) = 0$.

Soit $\omega_{A'}$ la forme symplectique constante sur $\mathbf{T}^{2n-1} \times \mathbf{R}$ associée à :

$$A' = \begin{pmatrix} B & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Le difféomorphisme $\widehat{F} = F_{\lambda_0(r_1(s),s)}$ est exact symplectique (θ_1 est le paramètre d'une isotopie hamiltonienne reliant l'identité à $\widehat{F}$). Si $d\Omega$ est la forme volume associée à $\omega_{A'}$, la forme $\widehat{F}^*\Omega - \Omega$ est exacte. Mais alors, un tore translaté est en fait invariant.

6) Montrons finalement que $\lambda_0(r_1(s),s) = 0$. On applique le lemme de rigidité (4.3) à $Y = Z_{\lambda_0(r_1(s),s)}$: on conclut que le vecteur $(1,\alpha) - (0,\lambda_0(r_1(s),s))$ est ω_A-orthogonal à $\mathbf{R}^{2n} \times (0,0)$, donc combinaison linéaire de $(1,\beta')$ et $(0,\beta)$. Donc $\lambda_0(r_1(s),s)$ et β sont colinéaires. Comme il sont aussi orthogonaux, $\lambda_0(r_1(s),s) = 0$.

4.6. Tores invariants de codimension 1 dans un cadre non hamiltonien

4.6.1. Courbes non planaires

Soit $\varphi : [-\delta,+\delta] \to \mathbf{R}^n$ une application de classe C^∞. On munit $\mathbf{R}^n$ de la norme euclidienne. Soient $0 < a < b$. On dit que φ est (a,b) *non planaire* si, pour $|x| \le \delta$, $v \in \mathbf{S}^{n-1}$, on a :

$$a \le \sup_{1\le j\le n} |\langle v, D^j\varphi(x)\rangle| \le b.$$

En particulier, pour tout $x \in [-\delta,+\delta]$, les vecteurs $D\varphi(x),\ldots,D^n\varphi(x)$ forment une base de $\mathbf{R}^n$.

Exemple.— $\varphi(t) = (t,t^2,\ldots,t^n)$.

De nombreux mathématiciens russes, autour de Sprindzŭk, se sont intéressés à la question de savoir quelles approximations diophantiennes vérifient presque tout point d'une courbe non planaire. Nous n'avons ici besoin que du résultat élémentaire suivant, dû à Pyartli ([Py]).

PROPOSITION.— *Soit* $\tau > n^2 - 1$. *Il existe une constante* $C = C(a,b,\tau,\delta) > 0$ *telle que, si* $\varphi : [-\delta,+\delta] \to \mathbf{R}^n$ *est* (a,b) *non planaire, on ait :*

$$m\{x \in [-\delta,+\delta], \quad \varphi(x) \notin CD_n(\gamma,\tau)\} \leq C\gamma^{1/n}.$$

Remarque.— Sprindzŭk conjecture (lorsque φ est analytique) que l'estimation précédente vaut encore pour tout $\tau > 0$. Même obtenir $\tau = o(n^2)$ semble difficile !

4.6.2. Considérons un plongement F_0 de $\mathbf{B}^n(\delta)$ dans $\mathbf{B}^n$ (cf. 4.1) de la forme

$$F_0(\theta,r) = (\theta + \ell(r), r).$$

Supposons que, pour certaines constantes $0 < a < b$, l'application ℓ soit (a,b) non planaire.

Fisons $\tau > n^2-1$ et $\gamma > 0$ suffisamment petit. Soit $F : \mathbf{B}^n(\delta) \hookrightarrow \mathbf{B}^n$ un plongement proche de F_0. Appliquons le théorème du tore translaté : pour $\alpha \in CD_n(\gamma,\tau)$ et $r \in [-\delta/2,+\delta/2]$, il existe une translation $R_{\lambda(r,\alpha),\mu(r,\alpha)}$ de $\mathbf{B}^n$ et une fonction ψ sur $\mathbf{T}^n$ de moyenne r telles que $R_{\lambda(r,\alpha),\mu(r,\alpha)} \circ F$ préserve le graphe $T_{\alpha,r}$ de ψ et y soit conjugué à R_α.

Pour $F = F_0$, on aurait $\mu_0(\alpha,r) \equiv 0$, $\lambda_0(\alpha,r) = \alpha - \ell(r)$. L'application $(\alpha,r) \mapsto \lambda(\alpha,r)$, définie sur $CD_n(\gamma,\tau) \times [-\delta/2,\delta/2]$, s'étend en une application de classe C^∞ de $\mathbf{R}^n \times [-\delta/2,\delta/2]$ dans $\mathbf{R}^n$ (cf. 4.1), C^∞-proche de λ_0. L'équation $\lambda(\alpha,r) = 0$ définit alors implicitement une fonction $\ell_F : [-\delta/2,\delta/2] \to \mathbf{R}^n$, telle que $\lambda(\ell_F(r),r) = 0$. La fonction ℓ_F étant C^n proche de ℓ, elle est $(a/2,2b)$ non planaire.

Si $r_0 \in [-\delta/2,+\delta/2]$ est tel que $\ell_F(r_0) \in CD_n(\gamma,\tau)$, le tore $T_{\ell_F(r_0),r_0}$ est verticalement translaté par F ; ceci se produit, d'après la proposition 4.6.1, pour un ensemble K de valeurs de r_0 qui a une grande mesure relative (pour γ petit) dans $[-\delta/2,\delta/2]$.

4.6.3. Difféomorphismes préservant le volume

Dans la situation précédente, supposons que F préserve le volume $d\Omega = d(rd\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_n)$, et que le flux de F soit nul, c'est-à-dire que la forme $F^*\Omega - \Omega$ soit exacte. Chacun des tores translatés doit alors être invariant. On obtient donc :

THÉORÈME ([H7]).— *Pour tout plongement $F : \mathbf{B}^n(\delta) \hookrightarrow \mathbf{B}^n$, préservant le volume, de flux nul, suffisamment proche de F_0, il existe un ensemble de Cantor $K \subset [-\delta/2, \delta/2]$, de mesure positive, et une application $r \mapsto \psi_r$ de K dans $C^\infty(\mathbf{T}^n)$ tels que :*

(i) $\forall r \in K$, $\int_{\mathbf{T}^n} \psi_r dm = r$; $\|D\psi_r\| < \varepsilon$;

(ii) $\forall r \in K$, *le graphe de ψ_r est un tore diophantien T_r invariant par F ;*

(iii) *l'union des T_r est de mesure de Lebesgue positive dans $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}$.*

L'existence de ces tores invariants de codimension un, lorsque $n = 2$ et F est analytique, a été démontrée par Cheng et Sun ([C-S]). Un résultat similaire semble avoir été obtenu indépendamment (mais postérieurement) par De la Llave. Le résultat plus général et plus précis ci-dessus est dû à Herman ([H7]).

4.6.4. Plongeons $\mathbf{T}^n \times [-\delta, +\delta]$ dans un ouvert de carte d'une variété compacte arbitraire M^{n+1}. Considérons un difféomorphisme G_0 de M^{n+1}, dont la classe d'isotopie peut être prescrite arbitrairement, qui coïncide avec F_0 sur $\mathbf{T}^n \times \left[-\frac{3\delta}{4}, \frac{3\delta}{4}\right]$. Observons que $\mathbf{T}^n \times \{0\}$ sépare M.

Pour tout difféomorphisme G dans un voisinage U de G_0 dans $\mathrm{Diff}^\infty(M)$, nous avons la remarquable alternative suivante :

— Soit G laisse invariant un ensemble de Cantor de tores invariants, dont l'union est de mesure de Lebesgue positive, sur lesquels il induit des rotations diophantiennes.

— Soit G n'est pas *transitif par chaînes*, c'est-à-dire qu'il existe des points x, x' de M qui ne sont dans la même orbite d'aucune C^0-*perturbation* de G.

Si la perturbation G préserve une mesure de probabilité μ chargeant tous les ouverts, le second terme de l'alternative ne peut se produire. Observons qu'il est essentiel de considérer un voisinage de G_0 dans la C^∞-topologie : Oxtoby a en effet montré ([O]) que, dans le groupe $\mathrm{Homeo}_\mu(M)$ des homéomorphismes d'une variété compacte M préservant une mesure de probabilité μ (sans atomes, chargeant tous les ouverts), la propriété d'avoir une orbite dense est générique au sens de Baire.

Dans le cas où la mesure μ est équivalente à la mesure de Lebesgue, l'union des tores invariants est une partie de μ-mesure positive sur laquelle tous les exposants de Lyapunov de G sont nuls : ceci donne un contre-exemple à une conjecture de Pesin ([Pe]).

5. GÉOMÉTRIE ET DYNAMIQUE DES TORES INVARIANTS LAGRANGIENS

5.1. Le premier théorème de Birkhoff

Soit F un difféomorphisme exact symplectique, fortement monotone de $\mathbf{A}^n$ (cf. 2.4). Un relèvement $\widehat{F}$ de F à $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ s'écrit

$$\widehat{F}(\theta, r) = (\Theta, R) = (\theta + \varphi_1(\theta, r), \varphi_2(\theta, r)),$$

où φ_1, φ_2 sont $\mathbf{Z}^n$-périodiques en θ.

Écrivons $\widehat{F}^* v - v = dH$, et choisissons θ, Θ comme coordonnées globales sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$; la fonction H, définie à une constante additive près, s'appelle la *fonction génératrice* de $\widehat{F}$. Elle vérifie

$$H(\theta + k, \Theta + k) = H(\theta, \Theta), \quad k \in \mathbf{Z}^n$$

$$\widehat{F}(\theta, r) = (\Theta, R) \Longleftrightarrow \begin{cases} \partial_\theta H(\theta, \Theta) = -r \\ \partial_\Theta H(\theta, \Theta) = R. \end{cases}$$

DÉFINITION.— *On dit que $\widehat{F}$ (ou F) est* globalement positif *si H vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*

(i) *H est minorée :*

(ii) $\forall \theta \in \mathbf{R}^n, \quad \Theta \to H(\theta, \Theta)$ *est minorée :*

(iii) $\forall \Theta \in \mathbf{R}^n, \quad \theta \to H(\theta, \Theta)$ *est minorée :*

(iv) $\displaystyle\lim_{\|\theta - \Theta\| \to +\infty} \|\Theta - \theta\|^{-1} H(\theta, \Theta) = +\infty.$

DÉFINITION.— *Le graphe d'une application $\psi \in C^0(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ est dit C^0-lagrangien s'il existe $c \in \mathbf{R}^n$, $\eta \in C^1(\mathbf{T}^n)$ tels que $\psi = c + d\eta$ (de façon* *équivalente, si ψ, vue comme section du fibré cotangent $T^*(\mathbf{T}^n)$, est fermée au sens des distributions).*

THÉORÈME ([H6]).— *Soit F un difféomorphisme globalement positif de $\mathbf{A}^n$. Supposons que F préserve le graphe C^0-lagrangien d'une fonction $\psi \in C^0(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$. Alors ψ est lipschitzienne ; de plus, si on pose $\widehat{F}(\theta, \psi(\theta)) = (\Theta, \psi(\Theta))$, on a, pour presque tout $\theta \in \mathbf{T}^n$:*

$$D\psi(\theta) \geq -\partial_\theta^2 H(\theta, \Theta),$$
$$D\psi(\Theta) \leq \partial_\Theta^2 H(\theta, \Theta)$$

(relation d'ordre entre matrices symétriques).

Esquisse de démonstration.— Posons $\widehat{\psi}(\theta) = \langle c, \theta \rangle + \eta(\theta)$ (*cf.* déf. ci-dessus) et notons f l'homéomorphisme de $\mathbf{R}^n$ tels que

$$\widehat{F}(\theta, \psi(\theta)) = (f(\theta), \psi(f(\theta))).$$

Posons $K(\theta, \Theta) = H(\theta, \Theta) + \widehat{\psi}(\theta) - \widehat{\psi}(\Theta)$.

On a

$$\partial_\theta K(\theta, \Theta) = 0 \iff \Theta = f(\theta) \iff \partial_\Theta K(\theta, \Theta) = 0.$$

Comme $\lim_{\|\Theta - \theta\| \to +\infty} K(\Theta, \theta) = +\infty$, la variété critique $\{\Theta = f(\theta)\}$ réalise le *minimum* de K. Les distributions $\theta \mapsto \partial_\Theta^2 K\big|_{\Theta = f(\theta)}$ et $\Theta \mapsto \partial_\theta^2 K\big|_{\theta = f^{-1}(\Theta)}$, à valeurs dans les matrices symétriques, sont donc *positives*. Le théorème en résulte.

5.2. Deuxième théorème de Birkhoff (version perturbative)

La grassmannienne lagrangienne $\Lambda(n)$ de $\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^n \oplus i\mathbf{R}^n \simeq T^*\mathbf{R}^n$ s'identifie à $U(n)/O(n)$, le point base étant le sous-espace horizontal $h_0 = \mathbf{R}^n \times \{0\}$. L'application $\delta : U(n)/O(n) \to S^1$

$$\delta : u \mapsto (det_{\mathbf{C}} u)^2$$

induit des isomorphismes : $\pi_1(\Lambda(n)) \to \pi_1(S^1)$, $H^1(S^1, \mathbf{Z}) \to H^1(\Lambda(n), \mathbf{Z})$.

DÉFINITION.— *Soit $j : N \to \mathbf{A}^n$ une immersion lagrangienne. L'indice de Maslov de (N, j) est la classe $J^*(\tau) \in H^1(N, \mathbf{Z})$, où τ est le générateur canonique de $H^1(\Lambda(n), \mathbf{Z})$ et $J : x \mapsto Tj(T_x N)$ est l'application de N dans $\Lambda(n)$ déduite de j.*

THÉORÈME (Viterbo [V]).—*Un tore lagrangien plongé homotope à $\{r = 0\}$ dans $\mathbf{A}^n$ a un indice de Maslov nul.*

DÉFINITION.— *Soit f une application continue d'un espace métrique (X, d) dans lui-même. Un point $x \in X$ est récurrent par chaînes si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n > 0$ et $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = x$ tels que $d(fx_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ pour $0 \leq i < n$. L'application f est récurrente par chaînes si tout point est récurrent par chaînes.*

Pour $R > 0$ posons $\mathbf{A}^n(R) = \mathbf{T}^n \times [-R, +R]^n$.

THÉORÈME ([H6]).— *Soit $L(\theta, r) = (\theta + \ell(r), r)$ un difféomorphisme symplectique complètement intégrable de $\mathbf{A}^n(R)$. On suppose que $D\ell(r) > 0$ pour tout $r \in [-R, +R]^n$.*

Soit $\varepsilon > 0$. Tout plongement symplectique $F : \mathbf{A}^n(R) \hookrightarrow \mathbf{A}^n$, C^1 suffisamment voisin de L, a la propriété suivante : si $N \subset \mathbf{A}^n(R)$ est une sous-variété compacte, connexe, lagrangienne, d'indice de Maslov nul, invariante par F, et si F/N est récurrent par chaînes, alors N est un tore, graphe d'une application $\psi \in C^1(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ vérifiant $\|D\psi\| < \varepsilon$.

Le point crucial de la démonstration est le suivant : notons $\widetilde{L} : \mathbf{A}^n(R) \times \widetilde{\Lambda}(n) \to \mathbf{A}^n(R) \times \widetilde{\Lambda}(n)$ (où $\widetilde{\Lambda}(n)$ est le revêtement universel de $\Lambda(n)$) l'application déduite de TL ; si $(z, \widetilde{h}) \in \mathbf{A}^n(R) \times \widetilde{\Lambda}(n)$ est récurrent par chaînes pour une petite perturbation C^0 de $\widetilde{L}$, alors la projection de $\widetilde{h}$ dans $\Lambda(n)$ est proche du plan horizontal h_0.

Pour des généralisations non perturbatives du deuxième théorème de Birkhoff, voir [Bi],[B-P2],[Pol].

5.3. Dynamique générique ([H5])

Considérons comme précédemment, un difféomorphisme symplectique complètement intégrable de $\mathbf{A}^n(R)$:

$$L(\theta, r) = (\theta + \ell(r), r)$$

et supposons encore qu'on a $D\ell(r) > 0$ pour tout $r \in [-R, +R]^n$.

Pour un plongement symplectique $F : \mathbf{A}^n(R) \hookrightarrow \mathbf{A}^n$, C^1-proche de L, notons $IT^\infty(F)$ l'ensemble des tores invariants lisses diophantiens qui sont homotopes à $\{r = 0\}$. Un tel tore est automatiquement lagrangien (cf. 2.7) et son indice de Maslov est nul d'après le théorème de Viterbo. D'après le théorème 5.2 ci-dessus, il existe donc un voisinage $\mathcal{U}$ de L dans la C^1-topologie tel que, pour $F \in \mathcal{U}$, tout tore T de $IT^\infty(F)$ est graphe d'une fonction $\psi_T \in C^\infty(\mathbf{T}^n, [-R, +R]^n)$ vérifiant $\|D\psi_T\| \leq 1$.

Munissons l'espace S des applications lipschitziennes de $\mathbf{T}^n$ dans $[-R, +R]^n$, de constante de Lipschitz ≤ 1, de la C^0-topologie. L'espace S est compact. Considérons, via l'application $T \to \psi_T$, l'ensemble $IT^\infty(F)$ comme une partie de S, et notons $IT(F)$ son adhérence dans S. Pour tout $\psi \in IT(F)$, le graphe T_ψ de ψ est un tore invariant par F, C^0-lagrangien.

Pour tout $F \in \mathcal{U}$, et tout $\psi \in IT(F)$, la restriction F/T_ψ est *récurrente par chaînes*: en effet T_ψ est limite de tores diophantiens, et la propriété d'être récurrent par chaînes est fermée.

Pour tout $F \in \mathcal{U}$, et un ensemble résiduel de $\psi \in IT(F)$:

— l'application ψ est de classe C^1 ;

— la restriction de F à T_ψ est minimale, uniquement ergodique, et son nombre de rotation est un nombre de Liouville.

Finalement, pour une application générique $F \in \mathcal{U}$, et un ensemble résiduel de $\psi \in IT(F)$, la restriction de F à T_ψ a une entropie topologique nulle, n'est pas mélangeante, est faiblement mélangeante, et son unique mesure invariante est singulière et même supportée par un borélien de dimension de Hausdorff 0.

Ces dernières propriétés, spécialement le mélange faible, montrent combien la dynamique sur le tore générique diffère de celle d'une rotation !

Nous renvoyons [H5] pour des propriétés génériques supplémentaires et pour les démonstrations, qui montrent toute la puissance des méthodes basées sur la catégorie de Baire.

Remarque.— Un tore lagrangien invariant par le difféomorphisme symplectique générique d'une variété symplectique M^{2n} peut-il contenir une orbite périodique? Il est facile de voir que non si $n = 1$; M.C.Arnaud ([A]) a prouvé que c'est impossible pour $n = 2$. La question est ouverte pour $n > 2$.

5.4. Torsion indéfinie ([H4])

5.4.1. Les hypothèses sur F dans les numéros précédents 5.2, 5.3 sont en particulier satisfaites par tout difféomorphisme symplectique au voisinage d'un tore lisse invariant lagrangien diophantien, quand la torsion de ce tore est *positive* (cf. 2.7) : cela résulte de la forme normale de Birkhoff. Un énoncé analogue vaut bien sûr également lorsque la torsion est négative.

Lorsqu'on perturbe un difféomorphisme complètement intégrable dont la torsion est dégénérée ou indéfinie, la situation change dramatiquement.

5.4.2. *Exemple*

Considérons

$$L(\theta_1, \theta_2, r_1, r_2) = (\theta_1 + r_2, \theta_2 + r_1, r_1, r_2)$$
$$F(\theta_1, \theta_2, r_1, r_2) = (\theta_1 + r_2, \theta_2 + r_1, r_1 + \varepsilon\varphi(\theta_1 + r_2), r_2),$$

où

$$0 < \varepsilon << 1, \quad \varphi \in C^\infty(\mathbf{T}^1), \quad \int_{\mathbf{T}^1} \varphi dm = 0.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, la sous-variété $M_\alpha = \{r_2 = \alpha\}$ est invariante par F. Pour $n \geq 0$, on a : $F^n(\theta_1, \theta_2, r_1, \alpha) = (\Theta_1^{(n)}, \Theta_2^{(n)}, R_1^{(n)}, \alpha)$ avec

$$\begin{cases} \Theta_1^{(n)} = \theta_1 + n\alpha \\ \Theta_2^{(n)} = \theta_2 + nr_1 + \varepsilon \sum_1^n (n-i)\varphi(\theta_1 + i\alpha) \\ R_1^{(n)} = r_1 + \varepsilon \sum_1^n \varphi(\theta_1 + i\alpha) \end{cases}$$

1er cas : l'équation

$$\psi(\theta_1 + \alpha) - \psi(\theta_1) = \varphi(\theta_1 + \alpha)$$

admet une solution $\psi \in C^0(\mathbf{T}^1)$, $\int_{\mathbf{T}^1} \psi dm = 0$. C'est le cas (avec $\psi \in C^\infty(\mathbf{T}^1)$) si α est diophantien. Les tores T_c d'équation $\{r_1 = \varepsilon\psi(\theta_1) + c, r_2 = \alpha\}$ sont invariants par F et leur union est M_α. Sur T_c, F est C^0-conjugué à la rotation $R_{\alpha,c}$ si et seulement si l'équation

$$\eta(\theta_1 + \alpha) - \eta(\theta_1) = \psi(\theta_1)$$

a une solution $\eta \in C^0(\mathbf{T}^1)$.

2e cas : l'équation

$$\psi(\theta_1 + \alpha) - \psi(\theta_1) = \varphi(\theta_1 + \alpha)$$

n'a pas de solution $\psi \in C^0(\mathbf{T}^1)$. D'après Gottschalk et Hedlund , pour tout $(\theta_1, \theta_2, r_1, \alpha) \in M_\alpha$, on a

$$\sup_{n \geq 1} |R_1^{(n)}| = +\infty.$$

Supposons qu'une infinité de coefficients de Fourier de φ soient non nuls :

— pour presque tout $\alpha \in \mathbf{R}$, M_α est union de tores invariants lisses lagrangiens,

— pour un ensemble G_δ-dense de α, l'orbite de tout point de M_α n'est pas bornée.

Il est facile de vérifier qu'aucune inégalité a priori ne peut être satisfaite par les tores invariants lagrangiens. En conjuguant F par un difféomorphisme exact symplectique proche de l'identité, on peut obtenir des tores invariants lisses lagrangiens diophantiens, homotopes à $\{r_1 = r_2 = 0\}$, qui ne sont pas des graphes.

5.4.3. Instabilité de la torsion

Si F est une perturbation d'un difféomorphisme symplectique complètement intégrable L à torsion *positive* comme en 5.2, 5.3, il n'est pas difficile de voir que tout tore invariant $T \in IT^\infty(F)$ a encore une torsion positive ; c'est en particulier le cas lorsque F décrit (via la forme normale de Birkhoff) la dynamique d'un difféomorphisme symplectique au voisinage d'un tore lagrangien diophantien invariant de torsion positive.

La situation est radicalement différente si la torsion est indéfinie. Soient F un difféomorphisme symplectique d'une variété symplectique (M, ω), et T un tore diophantien lagrangien (lisse) invariant par F. Supposons que la torsion de F le long de T soit dégénérée ou indéfinie.

THÉORÈME.— *On peut perturber, dans la C^∞-topologie, F en un difféomorphisme $\widetilde{F}$ de façon que $\widetilde{F}$ préserve un tore diophantien lagrangien $\widetilde{T}$ C^∞-proche de T, et que la torsion de $\widetilde{F}$ le long de $\widetilde{T}$ ait une signature, non identiquement nulle, arbitrairement prescrite.*

On ne sait qu'il est possible d'annuler complètement la torsion par petite perturbation C^∞.

5.4.4. Instabilité de la géométrie des tores

Une partie de la pathologie de l'exemple 5.4.2 persiste, sous l'hypothèse de torsion indéfinie, dans un cadre plus général.

Considérons un difféomorphisme symplectique complètement intégrable de $\mathbf{A}^n$ $L(\theta, r) = (\theta + \ell(r), r)$. Supposons que $D\ell(0)$ soit indéfinie, ou dégénérée ; soit $v \in \mathbf{R}^n, v \neq 0$ un vecteur tel que $\langle v, D\ell(0))v\rangle = 0$.

Quitte à perturber L (parmi les difféomorphismes symplectiques complètement intégrables), on peut supposer que $\ell(0) \in \mathbf{Q}^n$, $v \in \mathbf{Q}^n$, $\langle v, D_0^2\ell(v,v)\rangle \neq 0$. À changement de coordonnées linéaire et revêtement fini près, on se ramène à $\ell(0) = 0$, $v = (1, 0, \ldots, 0)$.

La fonction $\widehat{\ell}(r)$ telle que $D\widehat{\ell} = \ell$ satisfait alors :

$$\widehat{\ell}(r_1, 0) = ar_1^3 + O(r_1^4), \qquad a \neq 0.$$

Considérons le hamiltonien :

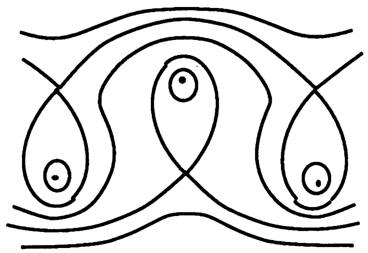
$$H(\theta, r) = \widehat{\ell}(r) - \varepsilon \cos 2\pi\theta_1 + \sum_1^n \beta_i r_i,$$

où $0 < |\beta_1|, \ldots, |\beta_n|, |\varepsilon| << 1$.

Le champ associé X_H possède n intégrales en involution : $r_2, \ldots, r_n, H$. Lorsqu'on fixe les valeurs $r_2 = \ldots = r_n = 0$ des $n-1$ premières intégrales, et qu'on fait varier la valeur de la dernière intégrale H, les variétés invariantes obtenues sont produit de $\mathbf{T}^{n-1}$ (coordonnées $\theta_2, \dots, \theta_n$) par les courbes de niveau de la fonction : $(\theta_1, r_1) \mapsto \widehat{\ell}(r_1, 0) - \varepsilon \cos 2\pi\theta_1 + \beta_1 r_1$. On a représenté les courbes de niveau sur la figure ci-dessous (pour $a > 0, \beta_1 < 0$).

Le temps un du flot de X_H est une petite perturbation F de L (qui correspond à $\varepsilon = \beta_1 = \ldots = \beta_n = 0$) dans la C^∞-topologie. Le difféomorphisme F possède des tores invariants lagrangiens lisses diophantiens (pour un bon choix des β_i) qui ne sont pas des graphes, et qui s'accumulent même, pour la topologie de Hausdorff, sur un compact invariant qui n'est pas une variété.

Qui plus est, on peut faire en sorte qu'un tel tore ait à nouveau une torsion indéfinie, ce qui permet d'itérer la construction précédente...



BIBLIOGRAPHIE

[A.M.] R. ABRAHAM, J. MARSDEN -*Foundations of Mechanics*, 2nd edition, Benjamin Cummings, Reading, Mass.(1970).

[An] S.B ANGENENT -*Monotone recurrence relations, their Birkhoff orbits and topological entropy*, Erg. Th. Dyn. Sys. 1 (1990) 15-41.

[A] M.-C. ARNAUD -*Points périodiques et tores lagrangiens invariants des difféomorphismes symplectiques*, Thèse Univ. Paris VII (1990).

[Ar1] V.I. ARNOLD -*Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou (1974).

[Ar2] V.I. ARNOLD -*Small denominators I:On the mapping of a circle into itself*, Trans l. Am. Math. Soc., série 2, 46 (1965) 213-284.

[Ar3] V.I. ARNOLD -*Small denominators II: Proof of a theorem of A.N. Kolmogorov on the invariance of quasiperiodic motion under small perturbation of the hamiltonian*, Russ. Math. Surv., 18, 5 (1963) 9-36.

[Ar4] V.I. ARNOLD (editor) -*Dynamical Systems (III)*, E.M.S 3, Springer Verlag (1988).

[Bi] M.L BIALYI -*Aubry-Mather sets and Birkhoff's theorem for geodesic flows on the two-dimensional torus*, Comm. Math. Phys. 126 (1989) 13-24.

[B-P1] M.L BIALYI, L.V.POLTEROVICH -*Geodesic flows on the two-dimensional torus and phase-transitions "commensurability-non commensurability"*, Func. Anal. Appl. 20 (1986) 260-266.

[B-P2] M.L BIALYI ,L.V.POLTEROVICH -*Hamiltonian diffeomorphisms and Lagrangian distributions*, preprint (1991).

[B1] G.D.BIRKHOFF -*Surface transformations and their dynamical applications*, Acta Math. 43 (1920), 1-119.

[B2] G.D.BIRKHOFF -*Note sur la stabilité*, J. Math., 15 (1936) 339-344. Coll. Math. Papers, vol.2, 662-667.

[B-K] G.D. BIRKHOFF, B.O. KOOPMAN -*Recent contributions to the ergodic theory*, Proc. Nat. Ac. Sc. 18 (1932), 279-282. Coll. Math. Papers, vol.2, 462-466.

[B-H P. BOYLAND, G.R. HALL -*Invariant circles and the order structure of periodic orbits in monotone twist maps*,Topology 26 (1987), 21-35.

[Bo] J.B. BOST -*Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens*, Sem.Bourbaki n^o 639, Astérisque 133-134 (1986), 113-157.

[Ch] A. CHENCINER -*La dynamique au voisinage d'un point fixe elliptique conservatif : de Poincaré et Birkhoff à Aubry et Mather*, Sém. Bourbaki n^o 622, Astérisque 121-122 (1985), 147-170.

[C-S] C.Q. CHENG, Y.S. SUN -*Existence of invariant tori in three-dimensional measure preserving mappings*, Cel. Mech. 47 (1990), 275-293.

[D] R. DOUADY -*Stabilité et instabilité des points fixes elliptiques*, Ann. Sc. E.N.S.,4^e série 21 (1988), 1-46.

[Eh] P. EHRENFEST, T. EHRENFEST -*The conceptual foundations of statistical mechanics* (1912), Engl. trans. repr., Dover publ. (1990).

[E] H. ELIASSON -*Invariant Tori for Hamiltonian systems*, Ann. Sc. Norm. Pisa 15 (1988), 115-147.

[F] A. FATHI - *Une interprétation plus topologique de la démonstration du théorème de Birkhoff*, App. au Ch.1 de [H9, vol.1].

[G] C. GUTTIEREZ -*A counterexample to a C^2 closing lemma*, Erg. Th. Dyn. Sys. 7 (1987), 509-530.

[Ha1] R.S. HAMILTON -*The inverse function theorem of Nash and Moser*, preprint (1974).

[Ha2] R.S. HAMILTON -*The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bull. A. M. S. 7 (1982), 65-222.

[H1] M.R. HERMAN -*Exemple de flots hamiltoniens dont aucune perturbation en topologie C^∞ n'a d'orbites périodiques sur un ouvert de surfaces d'énergie*, C.R.A.S, t. 312, série I (1991), 989-994.

[H2] M.R. HERMAN -*Différentiabilité optimale et contre-exemples à la fermeture en topologie C^∞ des orbites récurrentes des flots hamiltoniens*, C.R.A.S, t. 313, série I (1991), 49-51.

[H3] M.R. HERMAN -*Stabilité topologique des systèmes dynamiques conservatifs,* à paraître dans Atas do 18° Col. Bras. Mat.(1992).

[H4] M.R. HERMAN -*Dynamics connected to indefinite torsion*, à paraître dans Proc. Conf. "Twist maps and its applications", I.M.A, Univ. Minnesota, Springer Verlag.

[H5] M.R. HERMAN -*On the dynamics on Lagrangian tori invariant under symplectic diffeomorphisms*, preprint École Polytechnique (1990).

[H6] M.R. HERMAN -*Inégalités a priori pour des tores lagrangiens invariants par des difféomorphismes symplectiques*, Publ. Math. I.H.E.S. 70 (1989), 47-101.

[H7] M.R. HERMAN -*Théorème des tores translatés et quelques applications à la stabilité topologique des systèmes dynamiques conservatifs* , en préparation.

[H8] M.R. HERMAN -*Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Publ. Math. I.H.E.S. 49 (1979), 5-233.

[H9] M.R. HERMAN -*Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau*, Astérisque, vol.1, 103-104 (1983), vol.2, 144 (1986).

[H10] M.R. HERMAN - *Démonstration du théorème des courbes translatées par les difféomorphismes de l'anneau ; démonstration du théorème des tores invariants*, manuscrit (1980).

[Ho] L. HORMANDER - *The boundary problem of physical geodesy*, Arch. Rat. Mech. Anal. 62 (1976), 1-52.

[K] A.N. KOLMOGOROFF - *Théorie générale des systèmes dynamiques et mécanique classique* (en russe), Proc.1954, Int. Cong., North Holland, Amsterdam, 315-333.

[La] V.F. LAZUTKIN - *The existence of caustics for a billiard problem in a convex domain*, Math. USSR Izv. 7 (1973), 185-214.

[L1] P. LE CALVEZ - *Propriétés dynamiques des zones d'instabilité*, Ann. Sc. E.N.S., 4^e série, 20 (1987), 443-464.

[L2] P. LE CALVEZ - *Propriétés générales des applications déviant la verticale*, Bull. S.M.F., 117 (1989), 69-102.

[L3] P. LE CALVEZ - *Étude topologique des applications déviant la verticale*, Ensaios Mat., Vol. 2 (1990).

[L4] P. LE CALVEZ - *Sur les difféomorphismes de l'anneau et du tore*, soumis à Astérisque.

[M1] J. MATHER - *The existence of quasiperiodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus*, Topology 21 (1982), 457-467.

[M2] J. MATHER - *Minimal measures*, Comm. Math. Helv. 64 (1989), 375-394.

[M3] J. MATHER - *Variational construction of orbits of twist diffeomorphisms*, preprint (1990).

[M4] J. MATHER - *A criterion for the non existence of invariant circles*, Publ. Math. I.H.E.S. 63 (1986), 153-204.

[M5] J. MATHER - *Destruction of invariant circles*, Erg. Th. Dyn. Sys. 8 (1988), 199-214.

[Mo1] J. MOSER - *On invariant curves of area preserving mappings of an annulus*, Nachr. Ak. Wiss. Gott., Math. Phys. Kl. (1962), 1-20.

[Mo2] J. MOSER - *A rapidly convergent iteration method and nonlinear partial differential equations* 2, Ann. Sc. Norm. Pisa 20 (1966), 499-535.

[O] J.C. OXTOBY -*Note on transitive transformations*, Proc. Nat. Ac. Sc. (1937), 443-446.

[Pe] Y.B. PESIN -*Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory*, Russ. Math. Surv., 92, 4 (1977), 60.

[P] H. POINCARÉ -*Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, 3 volumes, Gauthier-Villars, Paris (1892).

[Pol] L.V. POLTEROVICH -*The second Birkhoff theorem for optical Hamiltonian systems*, à paraître dans Proc. A.M.S.

[Po] J. POSCHEL -*Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets*, Comm. Pure Appl. Math. 35 (1982), 653-695.

[Pu] C. PUGH -*The closing Lemma*, Amer. J. Math. 89 (1967), 956-1009.

[P-R] C. PUGH, C. ROBINSON -*TheC^1 closing lemma including Hamiltonians*, Erg. Th. Dyn. Sys. 3 (1983), 261-314.

[Py] A.S. PYARTLI -*Diophantine approximation on submanifolds of euclidean space*, Funct. Anal. App. 3 (1969), 303-306.

[R1] H. RUSSMANN -*Kleine Nenner I : Über invarianten Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreisringes*, Nachr. Ak. Wiss. Gott., Math. Phys. Kl. (1970), 67-105.

[R2] H. RUSSMANN -*On the existence of invariant curves of twist mappings of an annulus*, Lect. Notes in Math. 1007 (1983), 677-712.

[R3] H. RUSSMANN -*Non-degeneracy in the perturbation theory of integrable dynamical systems*, in Number Theory and Dynamical Systems, Dodson-Vickers (eds), L.N. 134, Lond. Math. Soc. (1989), 1-18.

[S-Z] D. SALAMON, E. ZEHNDER -*KAM theory in configuration space*, Comm. Math. Helv. 64 (1989), 84-142.

[V] C.VITERBO -*A new obstruction to embedding Lagrangian tori*, Inv. Math. 100 (1990), 301-320.

[Y] J.-C. YOCCOZ -*Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne*, Ann. Sc. E.N.S., 4^e série 17 (1984), 333-359.

[Z1] E. ZEHNDER -*Remarks on periodic solutions on hypersurfaces*, in "Periodic solutions of Hamiltonian systems and related topics", P.H. Rabinowitz et coll., D. Reidel Co., Dordrecht (1987), 91-140.

[Z2] E. ZEHNDER - *Generalized implicit function theorems with application to some small divisors problems I*, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), 91-140.

Jean-Christophe YOCCOZ
Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
F-91405 ORSAY CEDEX