Astérisque

JEAN-LOUIS LODAY

# Excision en *k*-théorie algébrique

*Astérisque*, tome 206 (1992), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 752, p. 251-271
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1991-1992__34__251_0>

Séminaire BOURBAKI Février 1992
44ème année, 1991-92, n° 752

# EXCISION EN $K$-THÉORIE ALGÉBRIQUE,

d'après A. Suslin et M. Wodzicki

**par Jean-Louis LODAY**

Pour tout anneau $A$ les groupes de $K$-théorie algébrique $K_n(A), n \geq 0$, sont des groupes abéliens définis de la manière suivante. Pour $n \geq 0$, $K_0(A)$ est le groupe de Grothendieck des modules projectifs de type fini sur $A$. Pour $n \geq 1$, $K_n(A) := \pi_n(BGL(A)^+)$ où $GL(A)$ est la réunion des groupes linéaires $GL_n(A)$ ($n \times n$ matrices inversibles) et $BGL(A)$ est le classifiant du groupe discret $GL(A)$. La construction plus de Quillen donne l'espace $BGL(A)^+$ qui est un $H$-espace ayant même homologie que $BGL(A)$. En basses dimensions on trouve

$$K_1(A) = H_1(GL(A)) = GL(A)/[GL(A), GL(A)] = GL(A)/E(A),$$

où $E(A)$ est le sous-groupe de $GL(A)$ engendré par les matrices élémentaires. Pour $n = 2$ on a $K_2(A) = H_2(E(A))$.

Il est important pour les calculs de pouvoir comparer $K_n(A)$ et $K_n(A/I)$ lorsque $I$ est un idéal bilatère. On définit abstraitement des groupes de $K$-théorie relatifs $K_n(A, I)$ (voir (1.3)) qui s'insèrent dans une suite exacte

$$(0) \quad \cdots \to K_{n+1}(A/I) \to K_n(A, I) \to K_n(A) \to K_n(A/I) \to \cdots \to K_0(A/I).$$

La question naturelle qui se pose est alors la suivante : les groupes $K_n(A,I)$ ne dépendent-ils que de $I$ et pas de l'anneau ambiant $A$ ? En fait pour tout pseudo-anneau (=anneau sans élément unité) $I$ on peut définir des groupes $K_n(I)$ de la façon suivante.

La loi $(n,u)(m,v) = (nm, nv+mu+uv)$ fait de $\mathbb{Z}\ltimes I$ un anneau unitaire (unité $= (1,0)$) contenant $I$ comme idéal bilatère. On pose

$$K_n(I) := \mathrm{Ker}(K_n(\mathbb{Z}\ltimes I) \to K_n(\mathbb{Z})).$$

Remarquons que l'on a $K_n(I) = K_n(\mathbb{Z}\ltimes I, I)$. L'homomorphisme naturel d'anneaux $\mathbb{Z}\ltimes I \to A$ induisant l'identité sur $I$ permet de reformuler la question précédente de la façon suivante :

– l'homormophisme naturel $K_n(I) \to K_n(A,I)$ est-il un isomorphisme pour tout $n$ et tout anneau $A$ ?

Si la réponse est positive on dit que $I$ est *$K$-excisif.*

H. Bass [B] a montré que la réponse est oui pour $n = 0$. Par contre ce n'est plus vrai pour $n > 0$ (voir la discussion en section 6). Dans [S-W] Suslin et Wodzicki donnent une condition nécessaire et suffisante simple pour l'excisivité de $I$ en $K$-théorie algébrique rationnelle.

*Définition* [W3]. — On dit que la $\mathbb{Q}$-algèbre (non nécessairement unitaire) $I$ est *$H$-unitaire* si le complexe

$$B_*(I) \qquad \cdots \to I^{\otimes n+1} \xrightarrow{b'} I^{\otimes n} \to \cdots \to I \otimes_{\mathbb{Q}} I \xrightarrow{b'} I \to 0$$

où $\otimes = \otimes_{\mathbb{Q}}$ et $b'(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n)$, est acyclique (i.e. $H_n(B_*(I)) = 0, n \geq 0$).

Remarquons que l'on a alors $I^2 = I$. Toute $\mathbb{Q}$-algèbre unitaire est $H$-unitaire car $s : I^{\otimes n-1} \to I^{\otimes n}$, $s(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) = (1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1})$, vérifie $sb' + b's = Id$.

Supposons que pour tout ensemble fini $\{a_0, \cdots, a_n\}$ d'éléments de $I$ il existe un élément $u \in I$ tel que $ua_i = a_iu = a_i$ pour tout $i$. Alors $I$, qui est dit *localement unitaire*, est $H$-unitaire. On trouvera d'autres exemples dans [W2].

Pour tout groupe abélien $M$ on note $M_{\mathbb{Q}}$ le localisé $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

THÉORÈME 1. — *Pour tout pseudo-anneau $I$ les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *$I$ est $K_{\mathbb{Q}}$-excisif,*

(*b*) *$I_{\mathbb{Q}}$ est $H$-unitaire.*

On en déduit aisément le résultat suivant

THÉORÈME 2. — *Pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre $I$ (non nécessairement unitaire) les propriétés suivantes sont équivalentes*

(*a*) *$I$ est $K$-excisif,*

(*b*) *$I$ est $H$-unitaire.*

A. Suslin m'a annoncé qu'il était actuellement en train d'écrire la démonstration du résultat suivant pour $\Lambda = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ :

"$I$ est $K_\Lambda$-excisif si et seulement si $\mathrm{Tor}_*^{\mathbb{Z}\ltimes I}(\mathbb{Z}, \Lambda) = 0$."

Le but de cet exposé est d'indiquer les principales étapes de la démonstration du théorème 1 dans le cas où $I$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre. Dans la section 1 on traduit la $K$-excisivité en termes d'homologie du groupe $GL$. Dans la section 2 on relie l'hypothèse de $H$-unitarité à l'homologie cyclique, puis à l'homologie de l'algèbre de Lie $gl$. Le plan général de la preuve est discuté dans la section 3. Les sections 4 et 5 sont consacrées à la comparaison des homologies de $GL$ et de $gl$.

Dans la dernière section (6) on aborde le problème du calcul de l'obstruction à l'excision, qui est évidemment plus général que de donner des conditions pour la nullité de cette obstruction.

Dans toute la suite on entend par "algèbre" une algèbre associative non nécessairement unitaire.

Avant de passer aux démonstrations, indiquons une généralisation et une application données dans le même article [S-W].

THÉORÈME 3. — *Supposons que pour tout $m$-uple d'éléments $a_1, \ldots, a_m$ du pseudo-anneau $I$ il existe des éléments $b_1, \ldots, b_m, c, d \in I$ tels que $a_i = b_i cd$, $1 \le i \le m$, et tels que les annulateurs gauches de $cd$ et $c$ coïncident. Alors $I$ est $K$-excisif.*

L'une des applications remarquables est la preuve du résultat suivant, connu sous le nom de “conjecture de Karoubi”.

THÉORÈME 4. — *Pour toute $C^*$-algèbre $\mathcal{A}$ il y a un isomorphisme canonique*

$$K_n(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{K}) \cong K_n^{\mathrm{top}}(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{K}), \quad n \ge 0.$$

Dans cette formule $\mathcal{K}$ désigne la $C^*$-algèbre des opérateurs compacts d'un espace de Hilbert infini dénombrable, $\widehat{\otimes}$ est le produit tensoriel dans la catégorie des $C^*$-algèbres, $K_n^{\mathrm{top}}$ désigne la $K$-théorie topologique, i.e. $\pi_n(BGL(-))$ où la topologie de $GL$ est prise en compte pour former l'espace classifiant.

Dans la même veine voici une application due à M. Wodzicki :

THÉORÈME 5. — *Pour toute $C^*$-algèbre $A$ les groupes de $K$-théorie algébrique $K_n(A \otimes \mathcal{K})$ sont périodiques de période 2.*

Je remercie Andrei Suslin et Mariusz Wodzicki pour leurs commentaires durant la rédaction de cet article.

## 1. Groupe général linéaire et $K$-théorie algébrique

Pour tout anneau $A$ le groupe linéaire $GL_n(A)$ est le groupe des $n \times n$-matrices inversibles à coefficients dans $A$. En bordant la matrice par des 0 et un 1 on obtient une inclusion $i_n : GL_n(A) \hookrightarrow GL_{n+1}(A)$. La limite inductive des $i_n$ est le groupe $GL(A)$. Considéré comme un groupe discret $GL(A)$ admet un classifiant $BGL(A)$ (espace d'Eilenberg-Mac Lane de type $K(GL(A), 1)$), dont l'homologie est notée $H_*(BGL(A))$ ou encore $H_*(GL(A))$.

Quillen a montré qu'on peut modifier $BGL(A)$ en lui ajoutant des cellules de manière à faire du nouvel espace $BGL(A)^+$ un $H$-espace sans en changer l'homologie (*cf.* [Q], ou [L1]). Par définition la $K$-théorie algébrique de l'anneau $A$ est

$$K_n(A) := \pi_n(BGL(A)^+), \quad n \geq 1. \tag{1.1}$$

La principale propriété de ces groupes dont nous aurons besoin est la suivante. Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel gradué $H_*(GL(A), \mathbb{Q}) = \bigoplus_{n\geq 0} H_n(GL(A), \mathbb{Q})$ est muni d'une comultiplication, grâce à la diagonale, et d'une multiplication, grâce à la somme directe des matrices (car cette opération est interne sur $GL(A)$), qui en font une $\mathbb{Q}$-algèbre de Hopf graduée commutative et co-commutative. En conséquence $H_*(GL(A), \mathbb{Q})$ est complètement déterminé par sa partie primitive, qui est précisément la $K$-théorie de $A$. Plus précisément on a un isomorphisme

$$\Lambda(\oplus_{n\geq 1} K_n(A)_{\mathbb{Q}}) \cong H_*(GL(A), \mathbb{Q}), \tag{1.2}$$

où $\Lambda$ est le foncteur "algèbre symétrique graduée".

Soit $I$ un idéal bilatère de $A$. La surjection $A \to A/I$ induit un homomorphisme de groupes $GL(A) \to GL(A/I)$ dont on note $\overline{GL}(A/I)$ l'image. L'application induite $BGL(A)^+ \to B\overline{GL}(A/I)^+$ admet une fibre homotopique connexe notée $F(A, I)$. Notons que $\pi_n(BGL(A/I)^+) = \pi_n(B\overline{GL}(A/I)^+)$ pour $n > 1$ et $\pi_1(B\overline{GL}(A/I)^+) = \mathrm{Im}(K_1(A) \to K_1(A/I))$. Par définition les *groupes de $K$-théorie relatifs* de la paire $(A, I)$ sont les groupes

$$K_n(A, I) := \pi_n(F(A, I)), \quad n \geq 1. \tag{1.3}$$

La suite exacte (0) de l'introduction est donc tout simplement la longue suite exacte d'homotopie d'une fibration.

Signalons ici que les groupes $K_n$ existent aussi pour $n < 1$. En fait ils se définissent à partir du groupe de Grothendieck $K_0$ pour lequel le problème d'excision est résolu.

La première étape pour aborder la question de l'excisivité en $K$-théorie algébrique rationnelle consiste à comparer l'homologie du groupe

$$GL(I) := \operatorname{Ker}(GL(\mathbb{Z} \ltimes I) \to GL(\mathbb{Z}))$$

avec celle du groupe $\widetilde{GL}(I) := \lim_n \widetilde{GL}_n(I)$ où

$$\begin{aligned}\widetilde{GL}_n(I) &:= GL_n(I) \ltimes M_{n1}(I)\\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(I) | \alpha \in GL_n(I), v \in M_{n1}(I) \right\}.\end{aligned}$$

Ici $M_{n1}(I)$ désigne les $n \times 1$-matrices à coefficients dans $I$. Notons que pour tout sous-groupe $G$ de $GL_n(I)$ (resp. $GL(I)$) on a un groupe $\widetilde{G}$ défini par $\widetilde{G} := G \ltimes M_{n1}(I)$. De manière analogue le groupe $\widetilde{\widetilde{GL}}_n(I)$ (et plus généralement $\tilde{\tilde{G}}$) est défini par

$$\widetilde{\widetilde{GL}}_n(I) := M_{1n}(I) \ltimes GL_n(I).$$

1.4. PROPOSITION. — *Considérons le diagramme commutatif de fibrations homotopiques suivant*

$$\begin{array}{ccccc} BGL(I) & \longrightarrow & BGL(A) & \longrightarrow & B\overline{GL}(A/I) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow & & \downarrow \\ F(A,I) & \longrightarrow & BGL(A)^+ & \twoheadrightarrow & B\overline{GL}(A/I)^+. \end{array}$$

*Si les inclusions $GL(I) \to \widetilde{GL}(I)$ et $GL(I) \to \widetilde{\widetilde{GL}}(I)$ induisent des isomorphismes en homologie, alors l'application $\varphi$ induit une équivalence d'homotopie :*

$$\varphi^+ = BGL(I)^+ \longrightarrow F(A,I).$$

*Preuve* (Esquisse) (*cf.* Corollary 1.7 de [S-W]). Les deux applications verticales de droite induisent des isomorphismes en homologie par la propriété fondamentale de la construction plus. On a alors envie d'appliquer le théorème de comparaison des suites spectrales de Zeeman pour démontrer que $\varphi$ induit un isomorphisme en homologie. Encore faut-il que les hypothèses soient remplies, à savoir que le $\pi_1$ de la base opère trivialement sur l'homologie de la fibre. Pour la fibration du bas c'est immédiat car on a à faire à des $H$-espaces. Pour la fibration du haut il suffit de montrer que tout élément provenant de $\pi_1(BGL_n(A)) = GL_n(A)$ opère trivialement (pour l'action par conjugaison) sur $H_*(GL(I))$. Une manipulation de matrices (cor. 1.6 of loc. cit.) permet de se ramener à montrer que $GL(\mathbb{Z})$ opère trivialement sur $H_*(GL(I))$. La première hypothèse (avec $\widetilde{GL}$) permet de montrer qu'il en est bien ainsi pour les matrices élémentaires $E_{i\,i+1}(1)$ et la seconde (avec $\widetilde{\widetilde{GL}}$) pour les $E_{i+1\,i}(1)$. Comme $GL(\mathbb{Z})$ est engendré par ces matrices élémentaires et $-1$ (qui opère trivialement), le tour est joué. $\square$

On a donc ainsi une condition homologique sur $GL$ qui implique la $K$-excisivité de $I$. Remarquons qu'il suffit de montrer que cette condition est remplie pour $\widetilde{GL}$, la condition pour $\widetilde{\widetilde{GL}}$ s'en déduisant par dualité.

## 2. Algèbres de Lie des matrices et homologie cyclique

Si, dans le paragraphe précédent, on remplace le groupe $GL(A)$ par l'algèbre de Lie $gl(A)$ (où $A$ est maintenant une algèbre associative unitaire sur un corps $k$ de caractéristique 0), on a aussi que l'homologie de $gl(A)$ à coefficients dans $k$ est une algèbre de Hopf graduée commutative et cocommutative. Elle est donc complètement déterminée par sa partie primitive que l'on peut appeler la "$K$-théorie additive" de $A$.

La grande différence avec la situation précédente est que l'on peut "calculer" cette partie primitive, en le sens qu'on peut exhiber un complexe *sans matrices* dont cette partie primitive est l'homologie :

2.1. THÉORÈME (Loday-Quillen [L-Q], Tsygan [T]). — *Pour toute algèbre associative unitaire $A$ sur un corps $k$ de caractéristique $0$ il y a un isomorphisme d'algèbres de Hopf graduées :*

$$H_*(gl(A), k) \cong \Lambda HC_{*-1}(A),$$

*où $HC_n(A), n \geq 0$, est l'homologie cyclique de $A$.*

Dans ce cadre l'homologie cyclique se définit de la manière suivante. Reprenons le complexe $B_*(A)$ de l'introduction utilisé pour définir la notion de $H$-unitarité. Lorsque $A$ est unitaire c'est une résolution de $A$ par des $A$-bimodules (mettre $A^{\otimes n+2}$ en degré $n$). Notons $A^{op}$ l'anneau opposé de $A$, $A^e$ le produit tensoriel $A \otimes_k A^{op}$ et $(a_0, \ldots, a_n)$ le générateur $(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n)$ de $A^{\otimes n+1}$. Par définition le *complexe de Hochschild* $(C_*(A), b)$ est $(A \otimes_{A^e} B_*(A)), \mathrm{id}_A \otimes b')$. Explicitement on a $C_n(A) = A^{\otimes n+1}$ car $a \otimes (a_0, \ldots, a_{n+1}) \longmapsto (a_{n+1} a a_0, a_1, \ldots, a_n)$, $A \otimes_{A^e} B_n(A) \cong A^{\otimes n+1}$ est un isomorphisme. L'application $b : C_n(A) \to C_{n-1}(A)$ est alors donnée par

$$b(a_0, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (a_0, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_n) + (-1)^{n+1} (a_n a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}).$$

L'homologie du complexe $(C_*(A), b)$ est notée $HH_n(A), n \geq 0$, et est appelée *l'homologie de Hochschild* de $A$.

Introduisons maintenant *l'opérateur cyclique* $t : C_n(A) \to C_n(A)$ défini par

$$t(a_0, \ldots, a_n) = (-1)^n (a_n, a_0, \ldots, a_{n-1}).$$

A. Connes [C] a remarqué que l'on a l'identité

$$b(1 - t) = (1 - t) b'.$$

En conséquence, si l'on pose $C_n^\lambda(A) := A^{\otimes n+1}/(1-t)$, on a un nouveau complexe $(C_*^\lambda(A), b)$ dont l'homologie, notée $HC_n(A)$, $n \geq 0$, est appelée *l'homologie cyclique* de $A$ (cette définition est la bonne lorsque $k$ contient $\mathbb{Q}$, cas qui nous intéresse ici. Sinon voir [L-Q], [L2]). L'une des propriétés principales de l'homologie cyclique est la longue suite exacte de périodicité de Connes

$$(2.2) \qquad \cdots \to HH_n(I) \to HC_n(I) \to HC_{n-2}(I) \to HH_{n-1}(I) \to \cdots$$

qui est valable, avec les définitions données ici, pour toute algèbre $H$-unitaire $I$ (*cf.* [C] pour le cas unitaire, rationnel et [L-Q] pour le cas général).

Bien que nous n'en ayons pas besoin, signalons, pour fixer les idées, le calcul suivant de l'homologie cyclique d'une $\mathbb{Q}$-algèbre (commutative, unitaire) lisse :

$$HC_n(A) \cong \Omega_A^n / d\Omega_A^{n-1} \oplus H_{DR}^{n-2}(A) \oplus H_{DR}^{n-4}(A) \oplus \cdots$$

Ici $\Omega_A^n$ désigne le module des $n$-formes différentielles absolues et $H_{DR}^n$ est la cohomologie de de Rham.

Le problème de l'excision se pose aussi pour les théories $HH$ et $HC$. Il est évidemment plus facile à résoudre que pour la $K$-théorie algébrique.

Tout épimorphisme d'algèbres $A \to A/I$ donne naissance à un épimorphisme de complexes $C(A) \to C(A/I)$ (resp. $C^\lambda(A) \to C^\lambda(A/I)$). Par définition l'homologie de Hochschild (resp. cyclique) relative $HH_n(A, I)$ (resp. $HC_n(A, I)$) est l'homologie du complexe noyau. On dit que $I$ est *$HH$-excisif* (resp. *$HC$-excisif*) si $HH_n(I) := HH_n(\mathbb{Z} \ltimes I) \to HH_n(A, I)$ (resp. $HC_n(\mathbb{Z} \ltimes I, I) \to HC_n(A, I)$) est un isomorphisme pour tout $n$.

2.3. Proposition [W1, thm 3]. — *Pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre $I$ les énoncés suivants sont équivalents :*

*a) $I$ est $H$-unitaire,*

*b) $I$ est excisif pour $HH$,*

*c) $I$ est excisif pour $HC$.*

*Commentaire sur la preuve.* L'équivalence entre b) et c) est immédiate à partir de la suite exacte de Connes. De b) vers a) il suffit de calculer un cas particulier d'algèbre contenant un idéal nilpotent. De a) vers b) Wodzicki remarque astucieusement que le complexe dont on veut démontrer l'acyclicité est en fait le complexe total d'un "multi-complexe". L'hypothèse de $H$-unitarité implique l'acyclicité du multi-complexe lorsqu'on prend l'homologie dans une direction. Ceci suffit à impliquer l'acyclicité du complexe total. $\square$

Au vu de ce qu'on a fait pour la $K$-théorie et du lien entre $HC_*(A)$ et $H_*(gl(A))$, il est assez naturel de traduire la propriété d'excision pour $HC$ en termes d'homologie de $gl$.

2.4. PROPOSITION. — *Pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre $H$-unitaire $I$ l'homomorphisme*

$$H_*(gl(I)) \to H_*(\widetilde{gl}(I))$$

*est un isomorphisme.*

*Preuve.* Le même type d'arguments que dans la preuve ci-dessus permet de démontrer que l'algèbre $I_1 = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in I\right\}$ est $H$-unitaire et que l'inclusion $I \hookrightarrow I_1$ induit un isomorphisme en homologie de Hochschild (*cf.* [W1]). Par la suite exacte de Connes c'est encore un isomorphisme en homologie cyclique. Pour transférer ce résultat à l'homologie de $gl$ on utilise l'extension du théorème de Loday-Quillen-Tsygan (*cf.* 2.1) aux algèbres $H$-unitaires faite par P. Hanlon [H]. On en conclut un isomorphisme

$$H_*(gl(I)) \xrightarrow{\sim} H_*(gl(I_1).$$

Il est aisé de comparer les homologies de $gl(I_1)$ et de $\widetilde{gl}(I)$ pour conclure. $\square$

2.5. *Remarque.* Signalons que la réciproque de la proposition 2.4 est vraie (M. Wodzicki, communication personnelle).

## 3. Le théorème principal

On va se contenter de traiter le cas suivant du théorème de Suslin et Wodzicki.

3.1. THÉORÈME. — *Pour toute $\mathbf{Q}$-algèbre (non nécessairement unitaire) $I$ les énoncés suivants sont équivalents.*

*a) $I$ est $H$-unitaire,*

*b) $I$ est excisif pour $HC$ (avec $k = \mathbf{Q}$),*

*c) $I$ est excisif pour $K_{\mathbf{Q}}$.*

Les implications $(a) \Leftrightarrow (b)$ et $(c) \Rightarrow (a)$ sont déjà dans [W1] (*cf.* section 2 et 5.5). Le nouveau résultat qu'apporte [S-W] est l'implication $a) \Rightarrow c)$, que nous allons maintenant détailler.

Nous avons d'ores et déjà traduit la propriété de $K$-excision (resp. $HC$-excision) en termes d'homologie de $GL$ (resp. $gl$), *cf.* 1.4 (resp. *cf.* 2.4). Il nous faut donc disposer d'un moyen de comparer ces deux homologies. L'idée est d'utiliser le "modèle de Volodin" pour décrire l'homologie de $GL$. Ce modèle utilise un recouvrement de $GL(I)$ par des sous-groupes $T_n^\sigma(I)$ de matrices triangulaires. Plus précisément on va construire un espace $\underline{T}(I)$ (resp. $\widetilde{\underline{T}}(I)$) à partir des classifiants $BT_n^\sigma(I)$ (resp. $B\widetilde{T}_n^\sigma(I)$), puis une application continue $\underline{T}(I) \to \widetilde{\underline{T}}(I)$.

De manière analogue on va associer, dans le cadre des algèbres de Lie, à $gl(I)$ (resp. $\widetilde{gl}(I)$) un complexe de chaînes $\underline{t}(I)$ (resp. $\widetilde{\underline{t}}(I)$) construit à partir des algèbres de Lie $t_n^\sigma(I)$ correspondant aux $T_n^\sigma(I)$. Puis on construit un morphisme de complexes $\underline{t}(I) \to \widetilde{\underline{t}}(I)$.

Le point-clé, utilisé pour la première fois dans un contexte analogue par T. Goodwillie [G], est que, $T_n^\sigma(I)$ étant un groupe nilpotent, on sait comparer son homologie rationnelle à celle de l'algèbre de Lie $t_n^\sigma(I)$. Ceci permet de comparer $H_*(\underline{T}(I))$ à $H_*(\underline{t}(I))$ et $H_*(\widetilde{\underline{T}}(I))$ à $H_*(\widetilde{\underline{t}}(I))$.

En résumé le plan de la démonstration de l'implication $a) \Rightarrow c)$ du théorème 3.1 est :

$$\begin{array}{lllll}
I \text{ est } H-\text{unitaire} & & & & \\
\quad\Updownarrow (0) & & & & \\
I \text{ est } HC\text{–excisif} & \overset{(1)}{\Leftrightarrow} & H_*(gl(I) \cong H_*(\widetilde{gl}(I)) & \overset{(2)}{\Leftrightarrow} & H_*(\underline{t}(I)) \cong H_*(\underline{\tilde{t}}(I)) \\
 & & & & \qquad\Updownarrow (3) \\
I \text{ est } K_{\mathbf{Q}}\text{–excisif} & \overset{(1')}{\Leftarrow} & H_*(GL(I)) \cong H_*(\widetilde{GL}(I)) & \overset{(2')}{\Leftrightarrow} & H_*(\underline{T}(I)) \cong H_*(\underline{\tilde{T}}(I)).
\end{array}$$

Les étapes (0) et (1) ont été traitées en section 2. L'étape (1′) a été traitée en section 1. Voici quelques détails sur les étapes (2), (2′) et (3).

## 4. Constructions de Volodin

Soit $I$ un pseudo-anneau. Pour tout ordre partiel $\sigma$ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ on note $T_n^\sigma(I)$ le sous-groupe de matrices $\sigma$-triangulaires de $GL_n(I)$ :

$$T_n^\sigma(I) = \{(a_{ij}) \in GL_n(I) | a_{ij} = 0 \text{ si } i \overset{\sigma}{\not<} j \text{ et } a_{ii} = 1\ ;\ 1 \leq i \neq j \leq n\}.$$

En particulier si $\sigma$ est l'ordre usuel $1 < 2 < \cdots < n$, alors $T_n^\sigma(I)$ est simplement le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures au sens habituel.

L'espace classifiant $BT_n^\sigma(I)$ est un sous-espace de $BGL_n(I)$ et l'espace $\underline{T}(I) := \cup_{n,\sigma} BT_n^\sigma(I)$ est un sous-espace de $BGL(I)$ (note : ce n'est *pas* une réunion disjointe).

Le lien entre l'homologie de $\underline{T}(I)$ et l'homologie de $BGL(I)$ s'obtient sous la forme d'une suite spectrale de la manière suivante.

Pour tout groupe discret $G$ l'espace classifiant $BG$ admet un revêtement universel $EG$ qui est contractile. Si $\{G_j\}_{j\in J}$ est une famille de sous-groupes de $G$, il existe un sous-espace connexe $V(G,\{G_j\})$ de $EG$ au-dessus de $\bigcup_j BG_j$ sur lequel $G$ opère et pour lequel on a une suite spectrale

$$(4.1) \qquad E^2_{pq} = H_p(BG; H_q(V(G_j\{G_j\}))) \Rightarrow H_{p+q}(\bigcup_j BG_j).$$

Cet espace, appelé *espace de Volodin*, possède en outre la propriété suivante. Pour toute autre donnée $(G', \{G'_j\}_{j\in J})$ et tout homomorphisme $\varphi : G \to G'$ tels que $\varphi(G_j) \subset G'_j$ et $\varphi : G/G_{i_1} \cap \cdots \cap G_{i_p} \xrightarrow{\sim} G'/G'_{i_1} \cap \cdots \cap G'_{i_p}$ est un isomorphisme pour tout $p$-uple d'indices,

(4.2) l'application induite $V(G,\{G_j\}) \to V(G',\{G'_j\})$ est une équivalence d'homotopie.

Dans la pratique on fait ces constructions dans le cadre simplicial.

4.3. PROPOSITION. — *Pour tout pseudo-anneau $I$ tel que $I = I^2$ les conditions suivantes sont équivalentes :*

$$\text{(a) } H_*(GL(I)) \cong H_*(\widetilde{GL}(I)),$$
$$\text{(b) } H_*(\underline{T}(I)) \cong H_*(\underline{\widetilde{T}}(I)).$$

*Esquisse de démonstration.* La propriété (4.2) implique que les deux espaces de Volodin $V(I)$ et $\widetilde{V}(I)$ sont homotopiquement équivalents. Puis on montre que $GL(I^2)$ (resp. $\widetilde{GL}(I^2)$) opère trivialement sur $H_*(V(I))$ (resp. $H_*(\widetilde{V}(I))$. La proposition est alors une conséquence de la comparaison des suites spectrales (4.1) pour $\underline{T}(I) = \bigcup_{n,\sigma} BT^{\sigma}_n(I)$ et $\underline{\widetilde{T}}(I) = \bigcup_{n,\sigma} B\widetilde{T}^{\sigma}_n(I)$. $\square$

Pour l'étape (2) on répète le raisonnement ci-dessus, mais dans le cadre des algèbres de Lie. La différence technique est que les espaces classifiants sont remplacés par des complexes de chaînes. Explicitement l'objet de base est le complexe de Chevalley-Eilenberg

$$C_*(\mathfrak{g}, M) \qquad \cdots \to M \otimes \Lambda^n \mathfrak{g} \xrightarrow{d} M \otimes \Lambda^{n-1} \mathfrak{g} \to \cdots \to M,$$

où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sur un anneau commutatif $k$, $\Lambda^n \mathfrak{g}$ sa $n$-ième puissance extérieure, $M$ un $\mathfrak{g}$-module, et $d$ est donné par

$$d(g_0, g_1, \ldots, g_n) = \sum_{0 \le i < j \le n} (-1)^j (g_0, \ldots, g_{i-1}, [g_i, g_j], g_{i+1}, \ldots, \hat{g}_j, \ldots g_n),$$

pour $g_0 \in M, g_1, \ldots, g_n \in \mathfrak{g}$.

Par définition l'homologie de $\mathfrak{g}$ à coefficients dans $M$, notée $H_n(\mathfrak{g}, M)$, est l'homologie de $C_*(\mathfrak{g}, M)$.

Pour toute famille $\{\mathfrak{g}_j\}_{j \in J}$ de sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$, l'espace de Volodin est remplace par un certain *complexe de Volodin* $v_*(\mathfrak{g}, \{\mathfrak{g}_j\}) \subset C_*(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g}))$ ($U(\mathfrak{g})$ est l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$).

L'analogue de l'espace $\underline{T}(I)$ est le complexe $\underline{t}_*(I)$ construit de la manière suivante. Soit $t_n^\sigma(I)$ l'algèbre de Lie des matrices $\sigma$-triangulaires de $gl_n(I)$. Le complexe $C_*(t_n^\sigma(I))$ est un sous-complexe de $C_*(gl_n(I))$. Par définition $\underline{t}_*(I)$ est le sous-complexe de $C_*(gl(I))$ suivant

$$\underline{t}_*(I) := \sum_{n,\sigma} C_*(t_n^\sigma(I)).$$

Les propriétés du complexe de Volodin, en tout point analogue à celle de l'espace de Volodin, permettent de démontrer la

4.4. Proposition. — *Pour toute $k$-algèbre $I$ telle que $I^2 = I$ les conditions suivantes sont équivalentes*

(a) $H_*(gl(I)) \cong H_*(\widetilde{gl}(I))$,

(b) $H_*(\underline{t}(I)) \cong H_*(\widetilde{\underline{t}}(I))$. $\square$

4.5. *Remarque.* En fait les complexes $\underline{t}(I)$ et $\tilde{\underline{t}}(I)$ sont acycliques lorsque $I$ est $H$-unitaire (*cf.* section 9 de [S-W]). Dans une récente prépublication [Su2] A. Suslin donne un argument direct pour démontrer cette acyclicité rendant caduque les étapes (0), (1) et (2). Néanmoins celles-ci sont très intéressantes en vue d'un calcul complet de l'obstruction à l'excision (*cf.* section 6).

## 5. Comparaison homologie du groupe linéaire et de son algèbre de Lie

La théorie de Malcev met en bijection les algèbres de Lie nilpotentes $\mathfrak{n}$ sur $\mathbb{Q}$ et les groupes nilpotents $N$ uniquement divisibles. Par cette bijection $T_n^\sigma(I)$ correspond à $t_n^\sigma(I)$. Le point principal de cette dernière étape est le résultat suivant.

5.1. THÉORÈME (*cf.* [P]). — *Pour toute algèbre de Lie nilpotente* $\mathfrak{n}$ *sur* $\mathbb{Q}$, *il y a un isomorphisme canonique (de coalgèbres graduées) :*

$$H_*(\mathfrak{n}, \mathbb{Q}) \cong H_*(N, \mathbb{Q}).$$

A gauche c'est l'homologie de l'algèbre de Lie, à droite celle du groupe discret.

*Esquisse de preuve.* L'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{n})$ de $\mathfrak{n}$ admet un complété pour son idéal d'augmentation, que l'on note $U(\mathfrak{n})^\wedge$. De même l'algèbre $\mathbb{Q}[N]$ du groupe discret $N$ admet un complété noté $\mathbb{Q}[N]^\wedge$. On a alors les propriétés suivantes, dues à la condition de nilpotence (*cf.* [P]) :

(a) L'inclusion $N \subset (U(\mathfrak{n})^\wedge)^\times$ induit un isomorphisme d'algèbres de Hopf $\mathbb{Q}[N]^\wedge \cong U(\mathfrak{n})^\wedge$,

(b) $\mathbb{Q}[N]^\wedge$ est plat sur $\mathbb{Q}[N]$,

(c) $U(\mathfrak{n})^\wedge$ est plat sur $U(\mathfrak{n})$.

Ces deux dernières propriétés sont dues à la propriété d'Artin-Rees.

L'isomorphisme de 5.1 peut se construire en comparant abstraitement les résolutions donnant respectivement le complexe de Chevalley-Eilenberg (pour $\mathfrak{n}$) et le complexe de Mac Lane (pour $N$). Mais par cette méthode la naturalité est délicate à prouver (*cf.* [S-W,§5]). Une autre méthode consiste à comparer ces deux groupes d'homologie avec $\mathrm{Tor}^{U(n)^\wedge}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) = \mathrm{Tor}^{\mathbb{Q}[N]^\wedge}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ comme dans [L2,XI.3.14]. $\square$

Un argument classique de suites exactes de Mayer-Vietoris permet de prouver le

5.2. THÉORÈME. — *Pour tout pseudo-anneau $I$ on a un isomorphisme*

$$H_*(\underline{T}(I)) := H_*(\bigcup_{n,\sigma} BT_n^\sigma(I)) \cong H_*(\sum_{n,\sigma} C_*(t_n^\sigma(I))) =: H_*(\underline{t}(I))$$

*et pareillement pour $\widetilde{\underline{T}}(I)$ et $\tilde{\underline{t}}(I)$.* $\square$

On en déduit alors le dernier maillon de la preuve (3) :

5.3. COROLLAIRE. — *Pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre $I$ les énoncés suivants sont équivalents*

$$\text{(a) } H_*(\underline{T}(I)) \cong H_*(\widetilde{\underline{T}}(I)),$$
$$\text{(b) } H_*(\underline{t}(I)) \cong H_*(\tilde{\underline{t}}(I)). \quad \square$$

5.4. *Remarque.* Le théorème 1 ($I$ pseudo-anneau, $I_\mathbb{Q}$ $H$-unitaire) résulte essentiellement du théorème 3.1. (valable pour $I_\mathbb{Q}$) et du fait que $H_*(T_n^\sigma(I);\mathbb{Q})$ est isomorphe à $H_*(T_n^\sigma(I_\mathbb{Q});\mathbb{Q})$ (et idem avec $\widetilde{T}$ à la place de $T$).

5.5. *Commentaire sur le preuve de "$I$ $K_\mathbb{Q}$-excisif $\Rightarrow$ $I$ $H$-unitaire".*

Ce résultat avait été précédemment obtenu par M. Wodzicki [W1] en utilisant le même type de technique. Le principe est de choisir, à partir de $I$, une situation d'excision qui se ramène à calculer un groupe de $K$-théorie relatif $K_*(R,J)_\mathbb{Q}$ où $J$ est un idéal nilpotent. Le point crucial est le théorème de Goodwillie [G] affirmant qu'on a alors un isomorphisme

$$K_*(R,J)_\mathbb{Q} \cong HC_{*-1}(R,J)_\mathbb{Q}. \tag{5.6}$$

L'hypothèse de $K$-excision (nullité d'un certain groupe de $K$-théorie relative) implique alors la nullité d'un certain groupe d'homologie cyclique relative. L'exemple $(R, J)$ est choisi de telle manière que le groupe d'homologie cyclique relative contienne $H_*(B_*(I), b')$ en facteur direct.

Signalons que les idées exposées ci-dessus concernant les espaces et complexes de Volodin sont issues de la preuve de (5.6) par T. Goodwillie [G] et de l'article [Su1] de A. Suslin.

## 6. Obstruction à l'excision en $K$-théorie algébrique

Soit $I$ un idéal bilatère de l'anneau $A$. Soit $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneau tel que $\varphi$ restreint à $I$ soit injectif et $\varphi(I)$, que l'on notera encore $I$, soit un idéal bilatère de $B$. Le diagramme commutatif

$$(6.0) \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/I & \xrightarrow{\varphi'} & B/I \end{array}$$

est cartésien. Si $I$ est $K$-excisif on a un isomorphisme $K_n(A, I) \cong K_n(B, I)$, dont on déduit l'exactitude de la suite de Mayer-Vietoris

$$(6.1) \qquad \cdots \to K_n(A) \to K_n(B) \oplus K_n(A/I) \to K_n(B/I) \\ \to K_{n-1}(A) \to \cdots \to K_0(B/I).$$

Comme indiqué déjà dans l'introduction $K_0(A, I) \to K_0(B, I)$ est toujours un isomorphisme. Si, de plus, $\varphi$ est surjectif, on peut montrer qu'on a aussi un isomorphisme $K_1(A, I) \xrightarrow{\sim} K_1(B, I)$ (*cf.* [M, lemme 6.3]). Si on note $J = \operatorname{Ker} \varphi$, cette donnée est équivalente à la donnée d'un anneau $A$ et de deux idéaux bilatères $I$ et $J$ vérifiant

$$I \cap J = \{0\}.$$

Il est alors naturel de construire des groupes de $K$-théorie birelatifs $K_n(A;I,J)$ s'inscrivant dans une suite exacte

$$(6.2)\quad \cdots \to K_n(A;I,J) \to K_n(A,I) \to K_n(A/J, I+J/J) \to K_{n-1}(A;I,J) \to \cdots$$

Ces groupes sont l'*obstruction à l'exactitude* de la suite de Mayer-Vietoris.

Les résultats précédents se traduisent par

$$K_0(A;I,J) = K_1(A.I,J) = 0.$$

Le premier exemple pour lequel $K_2(A;I,J) \neq 0$ a été construit par Swan [Sw] : $A = \mathbb{Z}[x,y]/(xy)$, $I = (x)$, $J = (y)$. Dans cette situation $K_2(A;I,J)$ est un facteur direct dans $K_2(A)$. L'élément, dont Swan démontre la non-trivialité, est l'image du générateur standard de $H_2(\mathbb{Z}^2)$ (classe fondamentale du tore) par l'homomorphime $\rho_* : H_2(\mathbb{Z}^2) \to H_2(E(A)) \cong K_2(A)$ induit par

$$\rho : \mathbb{Z}^2 \to E(A), \rho(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}.$$

En fait on peut calculer explicitement ce premier groupe d'obstruction.

6.3. Théorème. — [GW-L, K]. *Si $I \cap J = \{0\}$ alors*

$$K_2(A;I,J) \cong I \otimes_{A^e} J \text{ où } A^e = A \otimes A^{op}.$$

On remarquera que ce théorème ne comporte pas d'hypothèse de rationalité.

Si l'on remplace la $K$-théorie par l'homologie cyclique (se rappeler qu'il y a un décalage de degré dans les notations), on prouve aisément que

$$HC_0(A;I,J) = 0 \text{ et } HC_1(A;I,J) = I \otimes_{A^e} J.$$

Ces calculs, joints à l'isomorphisme de Goodwillie (*cf.* 5.6) comparant $K$-théorie et homologie cyclique pour un idéal nilpotent et à la preuve du théorème de Suslin-Wodzicki, suggèrent la

6.4. *Conjecture.* Si $I \cap J = \{0\}$, alors

$$K_n(A; I, J)_{\mathbb{Q}} \cong HC_{n-1}(A; I, J)_{\mathbb{Q}}.$$

(En fait, s'il en est ainsi, l'hypothèse $I \cap J$ nilpotent est suffisante). Bien que plusieurs fois annoncée cette conjecture n'a pas encore été démontrée.

On trouvera dans [G-W] des résultats sur l'obstruction à l'excision en basses dimensions dans le cas où $\varphi$ (*cf.* 6.0) n'est pas surjectif.

## Bibliographie

[B] BASS, H., *Algebraic K-theory*, Benjamin, 1968.

[C] CONNES, A., *Non-commutative differential geometry*, Publ. Math. IHES 62 (1985), 257-360.

[G-W] GELLER, S. and WEIBEL, C., *K(A,B,I) : II*, J. $K$-theory 2 (1989), 753-760.

[G] GOODWILLIE, T.G., *Relative algebraic K-theory and cyclic homology*, Ann. of Math. 124 (1986), 347-402.

[GW-L] GUIN-WALÉRY, D. et LODAY, J.-L., *Obstruction à l'excision en K-théorie algébrique*, Springer Lect. Notes in Math. 854 (1981), 179-216.

[H] HANLON, P., *On the complete $GL(n, C)$-decomposition of the stable cohomology of $gl_n(A)$*, Trans. AMS 308 (1988), 209-225.

[K] KEUNE, F., *The relativization of $K_2$*, J. Algebra 54 (1978), 159-177.

[L1] LODAY, J.-L., *K-théorie algébrique et représentations de groupes*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 9 (1976), 309-377.

[L2] LODAY, J.-L., *Cyclic Homology*, Grund. Math. Wiss. 301, 1992, Springer-Verlag.

[L-Q] LODAY, J.-L. and QUILLEN, D., *Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices*, Comment. Math. Helvetici 59 (1984), 565-591.

[M] MILNOR, J., *Introduction to algebraic K-theory*, Ann. Math. Studies 72, Princeton U. Press. 1974.

[P] PICKEL, P.F., *Rational cohomology of nilpotent groups and Lie algebras*, Comm. in Alg. 6(1978), 409-419.

[Q] QUILLEN, D., *Cohomology of groups*, Actes Congrès International des Mathématiciens, t. II, 1970, 47-51.

[Su1] SUSLIN, A., *On the equivalence of K-theories,* Comm. in alg. 9 (1981), 1559-1566.

[Su2] SUSLIN, A., *On the acyclicity of the sum of triangular complexes*, preprint, University of Utrecht, (1991), 6 p.

[S-W] SUSLIN, A. and WODZICKI, M., *Excision in algebraic K-theory*, Ann. of Maths. 136 (1992), 51-122.

[Sw] SWAN, R.G., *Excision in algebraic K-theory*, J. Pure Applied Algebra 1 (1971), 221-252.

[T] TSYGAN, B.L., *The homology of matrix Lie algebras over rings and the Hochschild homology (en russe)*, Uspekhi Mat. Nauk 38 (1983), 217-218 – Russ. Math. Survey 38 n°2 (1983), 198-199.

[W1] WODZICKI, M., *Excision in cyclic homology and in rational algebraic K-theory*, Ann. Math. 129 (1989), 591-639.

[W2] WODZICKI, M., *Homological properties of rings of functional analytic type*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 87 (1990), 4910-4911.

[W3] WODZICKI, M., *The long exact sequence in cyclic homology associated with an extension of algebras,* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris Sér. A-B 307 (1988), 249-254.

Jean-Louis LODAY
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
7, rue René-Descartes
67084 Strasbourg Cedex