Astérisque

JEAN-PIERRE BOURGUIGNON

Stabilité par déformation non-linéaire de la métrique de Minkowski [d'après D. Christodoulou et S. Klainerman]

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki, exp. n° 740, p. 321-358

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__321_0>

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Juin 1991
43ème année, 1990-91, n° 740

STABILITÉ PAR DÉFORMATION NON-LINÉAIRE DE LA MÉTRIQUE DE MINKOWSKI [d'après D. Christodoulou et S. Klainerman]

par Jean-Pierre BOURGUIGNON

On doit à Henri Poincaré (*cf.* [38]) et à Hermann Minkowski (*cf.* [32] et [33]) la formulation de la Relativité Restreinte comme géométrie d'un espace vectoriel de dimension 4 muni d'une forme bilinéaire de signature $(-+++)$, d'où le nom d'*espace de Minkowski* donné à cet espace, et de *groupe de Poincaré** à son groupe d'invariance affine.

La Théorie de la Relativité Générale, introduite par Albert Einstein dans une série d'articles dont la publication commença en 1913 (*cf.* [18]) et culmina en 1916 (*cf.* [17]), interprète la Gravitation comme une modification de la géométrie locale de l'espace-temps. Elle identifie le champ de gravitation à une métrique lorentzienne, et les *équations d'Einstein*, qui sont les équations de la théorie, égalent une partie de la courbure de cette métrique (le tenseur d'Einstein, *cf.* 1.3) au tenseur d'impulsion-énergie qui se déduit des autres interactions qui ont lieu dans l'espace-temps. Ces équations sont *un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires du second ordre* dont tout covecteur est caractéristique. Il peut être rendu hyperbolique par choix approprié de coordonnées. Résoudre exactement ce système est un problème mathématique ardu.

* Auparavant, pour expliquer les effets de contraction sur les électrons aux grandes vitesses, Hendrik A. Lorentz avait introduit dans [31] les transformations de l'espace-temps portant aujourd'hui son nom dont Poincaré montre dans [38] qu'elles forment le groupe d'invariance de la géométrie pré-citée.

Dans $\mathbf{R}^4$, toute métrique invariante par translation est une solution (triviale) de ces équations, et on peut identifier l'espace-temps à l'espace de Minkowski. Dimitri Christodoulou et Sergiu Klainerman ont donné en 1989 dans [15] une solution rigoureuse au problème de la perturbation de cette solution triviale.

THEOREME (*cf.* [15]).– *Toute donnée initiale de Cauchy suffisamment proche de la donnée triviale de l'espace de Minkowski et fortement asymptotiquement plate sur* $\mathbf{R}^3$ *se développe en une unique métrique lorentzienne sur* $\mathbf{R}^4$*, solution des équations d'Einstein du vide, qui est régulière, complète et globalement hyperbolique.*

L'objet de ce rapport est de présenter ce résultat (en commençant par les différentes notions apparaissant dans le théorème). Cet énoncé est souvent interprété comme la preuve de la *stabilité non-linéaire de la métrique de Minkowski* : "stabilité" parce que la topologie de l'espace-temps n'est pas modifiée et qu'aucune singularité n'y apparaît, et on ajoute l'adjectif "non-linéaire" pour insister sur le fait que c'est bien le système des équations d'Einstein que l'on résout, et non pas une version linéarisée.

Les difficultés pour parvenir au résultat sont assez formidables, et il faut mêler de façon complexe des estimées analytiques et des idées géométriques. Comme la preuve, rédigée soigneusement dans [15], fait près de 600 pages, dans ce rapport il ne peut être question que de relever quelques-unes des idées nouvelles (tant géométriques qu'analytiques) nécessaires pour commencer le travail. En fait ce théorème fournit un prétexte pour présenter quelques-unes des tendances actuelles les plus intéressantes de la Géométrie Différentielle : outre le passage du local au global (mentionné ici seulement pour mémoire), l'étude de conditions asymptotiques sur des espaces non compacts, les propriétés particulières des espaces de basse dimension, la réémergence de la géométrie conforme, l'étude de singularités, et bien sûr les stimulations venant de problèmes de la Physique mathématique.

1. LE CADRE MATHEMATIQUE DE LA RELATIVITE GENERALE*

1.1. Pour nous, un *espace-temps* désignera une variété lorentzienne (Σ, γ) de dimension 4 où γ est un champ de formes bilinéaires symétriques de signature $(- + ++)$ supposé suffisamment régulier. Les vecteurs $v \in T\Sigma$ tels que $g(v, v) > 0$ sont dits *de type espace*, ceux tels que $g(v, v) = 0$ *du type lumière* (on dit aussi *isotropes*), et ceux tels que $g(v, v) < 0$ *du type temps*. De la même façon, une courbe sera dite *causale* si son vecteur-vitesse est du type temps ou lumière, une hypersurface $M \subset \Sigma$ *du type espace* si tous les vecteurs (non nuls) de TM sont du type espace.

Pour que Σ puisse modéliser un espace-temps, nous supposerons que Σ *est orientée et temporellement orientée.* Sur une telle variété nous parlerons d'une courbe causale (identifiée à la trajectoire d'un observateur) *orientée vers le futur* (resp. *orientée vers le passé*) si son vecteur-vitesse a une orientation temporelle positive (resp. négative) ou est adhérent à des vecteurs ayant une telle orientation. Pour écarter aussi d'autres pathologies de nature causale, nous ne considérerons que le cas où l'espace-temps (Σ, γ) est *globalement hyperbolique*, i.e. nous supposerons qu'*il existe dans* Σ *une hypersurface* M *qui n'est coupée qu'une seule fois par toute courbe causale.* Ceci signifie en particulier que Σ est difféomorphe à $M \times \mathbf{R}$.

1.2. D'un point de vue tensoriel, la géométrie lorentzienne se développe de façon tout à fait parallèle à la géométrie riemannienne. Aussi les notations que nous introduisons maintenant valent aussi bien pour les variétés riemanniennes (qui apparaîtront dans la suite) que pour les variétés lorentziennes. Dans un espace-temps (Σ, γ), il existe une et une seule dérivation covariante ∇^γ qui soit métrique et sans torsion comme la dérivation covariante de Levi-Civita sur une variété riemannienne. Nous *notons* R^γ la *courbure de Riemann-Christoffel* de ∇^γ (rappelons que, pour

* Les introductions à la Relativité Générale accessibles à un mathématicien sont nombreuses, par exemple [22], [34], [39], et aussi [44] qui vieillit bien.

$p \in \Sigma$, u, v, $w \in T_p\Sigma$,

$$R^\gamma(u,v)w = \nabla^\gamma_u(\nabla^\gamma_V W) - \nabla^\gamma_v(\nabla^\gamma_U)W - \nabla^\gamma_{[U,V]}W$$

où U, V et W désignent des extensions au voisinage de p de u, v et w respectivement). Nous *notons* Ric^γ la *courbure de Ricci* de γ obtenue à partir de R^γ en prenant la trace de la façon suivante

$$\mathrm{Ric}^\gamma(u,v) = \mathrm{Trace}\,(w \mapsto R^\gamma(w,u)v)\ .$$

Nous *notons* enfin $\mathrm{Scal}^\gamma = \mathrm{Tr}_\gamma \mathrm{Ric}^\gamma$ la *courbure scalaire* de γ qui est la trace de Ric^γ par rapport à γ.

Toutes les intégrations que nous aurons à faire sur Σ seront faites par rapport à la mesure canonique v_γ définie par la métrique γ.

1.3. Les *équations d'Einstein* sont des équations intrinsèques qui s'écrivent alors

$$\mathrm{Ric}^\gamma - \frac{1}{2}\,\mathrm{Scal}^\gamma\,\gamma = 8\pi\,T \tag{1.4}$$

où le membre de gauche est le *tenseur d'Einstein* de γ (qui ne dépend que de la géométrie), et où T désigne le *tenseur d'impulsion-énergie* déterminé par le contenu physique de l'espace-temps. Dans le cas d'un champ électromagnétique par exemple, représenté par une 2-forme différentielle extérieure ω, le tenseur impulsion-énergie T^ω s'écrit $T^\omega = \omega ._\gamma \omega - \frac{1}{4}|\omega|^2_\gamma\,\gamma$ (où $._\gamma$ désigne le produit une fois contracté utilisant la métrique lorentzienne γ et $|\ \ |_\gamma$ la norme déduite de γ). Dans le cas du vide, nous avons bien évidemment $T \equiv 0$, et les équations d'Einstein prennent une forme plus simple puisqu'en prenant la trace de (1.4) nous obtenons $\mathrm{Ric}^\gamma = 0$: *les espaces-temps vides sont donc les espaces-temps à courbure de Ricci nulle.* Une des approches possibles des équations d'Einstein du vide (due à David Hilbert, *cf.* [24]) est de les considérer comme l'équation aux variations à support compact de la fonctionnelle $\gamma \mapsto \mathbf{S}(\gamma) = \int_\Sigma \mathrm{Scal}^\gamma\, v_\gamma$ (souvent appelée *potentiel de gravitation* de l'espace-temps).

1.5. Dans $\Sigma = \mathbf{R}^4$ rapporté au système global de coordonnées linéaires (t, x, y, z), la métrique de Minkowski s'écrit $\epsilon = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ (on notera que $(\mathbf{R}^4, \epsilon)$ est un modèle d'espace-temps dans lequel les unités ont été choisies de telle sorte que la vitesse de la lumière soit égale à 1). On constate trivialement que la dérivation covariante associée à ϵ est la dérivation ordinaire dans $\mathbf{R}^4$, et que la courbure de cette variété lorentzienne est identiquement nulle. *L'espace-temps de Minkowski est donc bien une solution globalement définie dans $\mathbf{R}^4$ des équations d'Einstein du vide.*

Les courbes causales issues d'un point p de l'espace-temps de Minkowski remplissent les nappes futures et passées du cône issu de p translaté du cône quadratique défini par la métrique ϵ de sommet l'origine O, soit $C^O = \{v \mid v \in \mathbf{R}^4,\ \epsilon(v, v) = 0\}$. Cette distribution de cônes caractérise la classe conforme de la métrique de Minkowski, i.e. la détermine à multiplication près par une fonction.

L'espace de Minkowski admet le *groupe de Poincaré* comme groupe de symétrie : c'est le produit semi-direct du *groupe de Lorentz* qui est de dimension 6 par le *groupe des translations* de $\mathbf{R}^4$ ce qui porte sa dimension à 10 (le maximum pour le groupe des isométries d'une variété lorentzienne de dimension 4). Le groupe des transformations conformes (quelquefois appelé *groupe de Poincaré conforme*) est, lui, de dimension 15 et contient en plus les *homothéties* et les *inversions*. Une base de son algèbre de Lie est fournie par les champs de vecteurs de $\mathbf{R}^4$ suivants : les 4 champs de vecteurs constants $\partial/\partial t$ (du type temps futur), $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ et $\partial/\partial z$ (tous trois du type espace) ; les 6 champs de vecteurs engendrant les transformations de Lorentz, soit $\Omega_{xt}(= t\,\partial/\partial x + x\,\partial/\partial t)$, Ω_{yt}, Ω_{zt} (dont le type dépend du point où on les considère), $\Omega_{xy}(= x\,\partial/\partial y - y\,\partial/\partial x)$, et encore Ω_{xz} et Ω_{yz} (tous de type espace) ; le champ de Liouville $L = t\,\partial/\partial t + x\,\partial/\partial x + y\,\partial/\partial y + z\,\partial/\partial z$ (de type variable) et les inverses des translations $I_t(= 2\,t\,L + (x^2 + y^2 + z^2 - t^2)\,\partial/\partial t)$ (du type temps futur), $I_x(= -2\,x\,L + (x^2 + y^2 + z^2 - t^2)\,\partial/\partial x)$, I_y et I_z (tous trois de type espace).

1.6. La fonction $t : (\mathbf{R}^4, \epsilon) \longrightarrow \mathbf{R}$ est (comme sa dénomination le suggère) une *fonction du type temps* ce qui signifie que ses surfaces de niveau sont du type espace ou que, ce qui est équivalent, sa différentielle dt vérifie $\epsilon^{-1}(dt, dt) < 0$ (pour une métrique γ, γ^{-1} désigne la métrique naturellement induite sur les covecteurs en se souvenant que sa matrice dans un système de coordonnées (x^μ), soit $(\gamma^{\mu\nu})$, est la matrice inverse de la matrice $(\gamma_{\mu\nu})$ de γ).

Il est utile de donner l'expression de la métrique de Minkowski ϵ en introduisant les coordonnées sphériques habituelles (r, θ, φ) sur l'espace $M_0 = \{0\} \times \mathbf{R}^3$ et les fonctions $u = t - r$ et $v = t + r$. Nous avons $\epsilon = -du\, dv + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$. Notons (pour un usage futur) que les fonctions u et v vérifient l'*équation eikonale* $\epsilon^{-1}(du, du) = \epsilon^{-1}(dv, dv) = 0$ (c'est pourquoi on les appelle souvent des fonctions *optiques*), et aussi la normalisation $\epsilon^{-1}(du, dv) = -2$. Les surfaces de niveau de u sont les nappes orientées vers le futur des cônes de lumière et celles de v les nappes orientées vers la passé des mêmes cônes.

Il est à noter que les sphères pour la métrique euclidienne e_t sur M_t centrées en $O_t \in M_t$ pour $t > 0$ peuvent être obtenues comme intersection des cônes de lumière $C^{O_{t'}}$ centrés en $O_{t'} \in M'_t$, autrement dit comme les feuilles du feuilletage de codimension 2 défini par la fonction optique u et la fonction t.

1.7. Revenons à la description d'un espace-temps général. Pour mieux comprendre la nature des équations d'Einstein, il est utile d'écrire explicitement ce système en ayant choisi un système de coordonnées locales (x^μ) au voisinage d'un point p, soit

$$(\mathrm{Ric}^\gamma)_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \gamma^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\beta}}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\beta} \right)$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \left(\Gamma_{\mu\ \alpha}^{\ \beta} \Gamma_{\nu\ \beta}^{\ \alpha} - \Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \beta} \Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \alpha} \right) , \tag{1.8}$$

où les symboles de Christoffel $(\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \alpha})$ sont reliés aux coefficients $(\gamma_{\alpha\beta})$ de la métrique par la formule (classique)

$$\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\beta=0}^{3} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \gamma_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \gamma_{\nu\beta}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} \right) .$$

Il ressort de la formule (1.8) que *toute direction cotangente ξ est caractéristique* puisque le symbole principal de l'opérateur qui à une métrique lorentzienne γ associe sa courbure de Ricci $\mathrm{Ric}^\gamma = \rho$ s'annule pour toutes les formes bilinéaires symétriques $\xi \circ \eta$ (où η est une 1-forme arbitraire et $\circ$ le produit symétrique). Ces directions de dégénérescence sont la trace analytique de l'action du groupe des difféomorphismes de l'espace-temps sur l'espace des métriques lorentziennes. En effet la version infinitésimale de la relation de naturalité $\mathrm{Ric}^{\psi^*\gamma} = \psi^*(\mathrm{Ric}^\gamma)$ valable pour tout difféomorphisme ψ dit que, pour tout champ de vecteurs X, l'image par le linéarisé de la courbure de Ricci de $\mathcal{L}_X\gamma$ est $\mathcal{L}_X\rho$, donc un opérateur différentiel *du premier ordre* dans le champ de vecteurs X.

Cependant, si les coordonnées sont reliées à la métrique par la condition d'*harmonicité* $\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g^{\alpha\beta}\,\Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \mu} = 0$ (exprimant que la carte vue comme application d'un ouvert U de (Σ, γ) dans $(\mathbf{R}^4, \epsilon)$ est harmonique), alors on voit facilement* que le seul terme contenant des dérivées secondes qui reste dans (1.8) est le premier terme dont le symbole principal s'identifie à $-\gamma^{-1}(\xi, \xi)$. *Dans un tel système de coordonnées, les équations d'Einstein forment un système hyperbolique sous forme diagonale.* C'est Yvonne Choquet-Bruhat qui a établi en 1952 (*cf.* [11]) l'existence de solutions locales du problème de Cauchy (à données sur une hypersurface du type espace) pour les équations d'Einstein en montrant justement l'existence de systèmes de coordonnées harmoniques et en s'appuyant sur la théorie des équations hyperboliques mise au point par Jean Leray (*cf.* [29]).

Cette nécessité d'imposer aux coordonnées des conditions impliquant la métrique (qui est l'inconnue) est une des principales difficultés dans ce

* L'idée avait déjà été formulée par Einstein.

problème. L'autre vient de ce que, pour estimer des quantités vectorielles ou tensorielles, il est nécessaire d'utiliser un produit scalaire et que celui-ci est justement défini au fur et à mesure que nous résolvons l'équation. Ceci impose d'obtenir sur la solution un contrôle extrêmement strict. Ces difficultés sont communes aux problèmes ayant trait à la courbure de Ricci (*cf.* [8] pour un rapport sur les progrès récents dans le cas riemannien). La spécificité du problème lorentzien traité ici est de ne prendre tout son sens que dans le cas d'un espace non compact, le champ cherché ayant un comportement asymptotique fixé (*cf.* 4.).

2. METRIQUES DE SCHWARZSCHILD

2.1. Il y a seulement un petit nombre de familles de solutions exactes des équations d'Einstein. Elles ont toutes des symétries particulières ou se déduisent de métriques spéciales par des constructions géométriques simples. La première famille de ces solutions à avoir été trouvée est celle des *métriques de Schwarzschild* ϵ^S_m introduite par Karl Schwarzschild en 1916 dans [42] pour modéliser le champ de gravitation à l'extérieur d'une étoile sphérique. Dans les coordonnées déjà introduites dans $\mathbf{R}^4$, elles sont définies par

$$(2.2)\quad \epsilon^S_m = -\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

où m est une constante positive ou nulle. Bien sûr, $\epsilon^S_0=\epsilon$.

La métrique ϵ^S_m est a priori définie sur $\Sigma^e_m=\mathbf{R}\times(\mathbf{R}^3-\overline{B}_{2m})$ où B_r désigne la boule ouverte de rayon r centrée à l'origine de $\mathbf{R}^3$.

En fait ϵ^S_m est aussi une solution des équations d'Einstein dans le domaine intérieur $\Sigma^i_m=\mathbf{R}\times(B_{2m}-\{0\})$. La géométrie (lorentzienne) de cette région diffère de celle de Σ^e_m car les courbes du type temps y atteignent la singularité $r=0$ en un temps fini ce qui signifie que cet espace-temps n'est pas complet (voir 2.4. pour une discussion de ce point).

2.3. Les métriques de Schwarzschild ont les propriétés de symétrie suivantes :

- elles sont *statiques*, i.e. elles admettent un champ de vecteurs de Killing (nom traditionnel des isométries infinitésimales) du type temps dont la distribution orthogonale est intégrable. Ce champ est le gradient (pour ϵ^S_m) de la fonction t (il est même parallèle pour la dérivation covariante de Levi Civita de ϵ^S_m) ;

- elles sont à *symétrie sphérique*, i.e. elles sont invariantes par l'action du groupe SO_3 sur les variables spatiales (x, y, z) de $\mathbf{R}^4$ dont les orbites sont les sous-variétés à r et t constants.

Ces propriétés les caractérisent comme l'a établi George D. Birkhoff.

THEOREME (*cf.* [5]).– *Tout espace-temps vide statique à symétrie sphérique tel que la fonction mesurant l'aire des sphères orbites du groupe* SO_3 *soit régulière est un espace-temps de Schwarzschild.*

2.4. Mais le phénomène le plus intéressant a trait aux singularités de ces métriques (pour une discussion historique, *cf.* [25] pages 231-239). L'expression (2.2) de la métrique de Schwarzschild ϵ^S_m présente a priori deux singularités : l'une pour $r = 0$, l'autre pour $r = 2m$. Lorsque $r \longrightarrow 0$ dans Σ^i_m, ϵ^S_m est bien singulière en $r = 0$ car la norme du tenseur de courbure tend vers l'infini dans cette limite.

La singularité que l'on rencontre pour $r = 2m$ est, elle, seulement apparente, et n'est qu'une singularité du système de coordonnées. Il est possible de compléter l'espace-temps en une extension maximale Σ^S_m de ϵ^S_m comme cela a été mis en évidence par Martin D. Kruskal dans [28] (pour une discussion détaillée, voir [22]). Comme Σ^S_m contient aussi bien Σ^e_m que Σ^i_m, *les espaces-temps de Schwarzschild* $(\Sigma^S_m, \epsilon^S_m)$ *ne sont donc pas géodésiquement complets.*

On peut accomplir une partie de cette extension comme suit : en définissant les coordonnées optiques $u = t - r^*$ et $v = t + r^*$ après avoir posé $r^* = r + 2m \log(r - 2m)$, on peut introduire deux régions dans lesquels l'expression de ϵ^S_m dans les variables (u, r, θ, φ) d'une part et

(v, r, θ, φ) d'autre part s'étend pour toute valeur de r. Dans ces deux régions, la sous-variété $r = 2m$ joue un rôle spécial : elle permet aux courbes du type lumière ou temps de passer de la région $r > 2m$ à la région $r < 2m$ lorsqu'elles sont dirigées vers le futur dans le premier cas, et lorsqu'elles sont dirigées vers le passé dans le second cas. C'est la formulation précise du phénomène de *trou noir* et de son symétrique temporel le *trou blanc*. La surface séparant ces différentes régions (qui fonctionne comme une membrane semi-perméable) est appelée un *horizon apparent*.

2.5. La dernière propriété des métriques de Schwarzschild qu'il convient de mettre en évidence est leur comportement à l'infini spatial. En effet, pour tout $m \geq 0$, ϵ^S_m est *asymptotiquement plate* ce qui signifie que la métrique riemannienne g_m induite sur les hypersurfaces du type espace $M_t = \{t\} \times \mathbf{R}^3$ vérifie, lorsque $r \longrightarrow +\infty$, la propriété suivante : il existe une métrique euclidienne e sur M_t telle que $g_m - e = O(r^{-1})$; la différence $D^{g_m} - D^e$ des dérivations covariantes de Levi-Civita de g_m et e est $O(r^{-2})$; enfin la courbure de g_m vérifie $|R^{g_m}|_e = O(r^{-3})$.

En étudiant le comportement à l'infini, il est aussi possible de donner une interprétation de la constante m qui apparaît dans la définition de ϵ^S_m. Lorsqu'on considère une géodésique radiale $s \mapsto (r(s))$ de cette métrique, son comportement pour r assez grand est donné par l'équation différentielle $d^2r/ds^2 = -m/r^2 + O(r^{-3})$ analogue à celle d'une particule-test dans le champ de gravitation *newtonien* d'un corps de masse m. La constante m s'identifie donc à la masse de l'étoile dont nous modélisons le champ de gravitation*. Nous revenons sur le fait que la constante m doit être prise *positive* dans la section 4.

---

* Le fait que m semble exprimée dans une unité de longueur tient à nos choix d'unités.

3. LES EQUATIONS D'EINSTEIN COMME EQUATIONS D'EVOLUTION

3.1. Pour étudier le système hyperbolique non-linéaire des équations d'Einstein dans un espace-temps (Σ, γ) supposé globalement hyperbolique, il est naturel de considérer le problème de Cauchy pour des données non caractéristiques, i.e. sur une hypersurface du type espace. Ce point de vue a été introduit par André Lichnerowicz (*cf.* [30]), mais sa systématisation est souvent attribuée à Robert Arnowitt, Stanley Deser et Charles W. Misner.

Sur (Σ, γ), prenons donc une fonction du type temps, soit t, dont le gradient pour γ est noté F, et *notons* $i_t : M_t \longrightarrow \Sigma$ le feuilletage de Σ par les sous-variétés des points de date t que nous appellerons un feuilletage *temporel. Notons* encore $g_t = i_t^*(\gamma)$ la première forme fondamentale de M_t qui est une métrique riemannienne, et $k_t = -\frac{1}{2}\, i_t^*(\mathcal{L}_F \gamma)$ sa seconde forme fondamentale. La dérivation covariante de Levi-Civita de g_t sera *notée* D^t, son tenseur de courbure de Riemann-Christoffel R^t, sa courbure de Ricci Ric^t et sa courbure scalaire Scal^t. *Nous omettrons de mettre l'indice* 0 *pour tout ce qui a trait à la date* $t = 0$.

Le feuilletage temporel (M_t) permet de construire un difféomorphisme de Σ avec $\mathbf{R} \times M$ de telle sorte que $\gamma = -\phi_t^2\, dt^2 + g_t$. Il est traditionnel d'appeler la fonction ϕ_t, définie sur M_t par $\phi_t = (-\gamma(F,F))^{-1/2}$, le *décalage* associé à la fonction t (*"lapse function"* en anglais). Il est facile de voir que $k_t = -\frac{1}{2}\, \phi_t^{-1}\, \partial g / \partial t$.

3.2. Dans cette approche, il importe de traduire la géométrie de (Σ, γ) en celle de la courbe $t \mapsto (g_t, k_t, \phi_t)$ tracée dans le produit du fibré tangent de l'espace des métriques riemanniennes sur M par un fibré trivial.

Une partie de cette traduction exprime les équations générales de structure d'une hypersurface qui donnent les composantes de la courbure de (Σ, γ) dans la décomposition $T\Sigma = \mathbf{R}.F \oplus TM$. Les équations de Gauss proviennent des composantes de R^γ ne contenant pas F, celles de Codazzi des composantes contenant F une seule fois. Hormis le tenseur de courbure de (Σ, γ), ces deux familles d'équations ne font intervenir que des quantités définies sur M en termes de g et de k. Une dernière famille d'équations exprime les composantes de R^γ contenant deux fois F. Celle-là fait intervenir le 1-jet de $t \mapsto k_t$.

3.3. Comme, par les équations d'Einstein, nous ne connaissons que la trace de R^γ, il nous faut prendre la trace des équations générales précédentes sauf pour la dernière qui ne faisait intervenir que Ric^γ. Les équations que l'on obtient ainsi peuvent se regrouper en deux familles : celles de la première, généralement appelées *équations d'évolution*, s'écrivent

$$\text{(3.4)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial t} = -2\,\phi\, k_t \\ \dfrac{\partial k}{\partial t} = -Dd\phi + \phi\,(\mathrm{Ric}^t + (\mathrm{Tr}_{g_t} k_t)k - 2\, k_t \cdot_{g_t} k_t)\ ; \end{cases}$$

celles de la seconde, appelées *équations de contrainte*, s'écrivent

$$\begin{cases} \delta^{g_t} k_t - d(\mathrm{Tr}_{g_t} k_t) = 0 \\ \mathrm{Scal}^t - |k_t|^2_{g_t} + (\mathrm{Tr}_{g_t} k_t)^2 = 0\ , \end{cases}$$

où δ^g désigne la codifférentielle des champs de formes bilinéaires symétriques qui est la trace de la dérivation covariante de la métrique g.

Cette terminologie mérite une explication :

- les équations d'évolution déterminent l'évolution de la courbe $t \mapsto (g_t, k_t)$ en définissant son vecteur-vitesse pour chaque temps t ;
- les équations de contrainte portent ce nom car on peut montrer que, si elles sont satisfaites sur $M = M_0$, alors elles sont satisfaites sur M_t pour tout t dans le domaine de définition de la courbe $t \mapsto (g_t, k_t)$.

3.5. Arthur M. Fischer et Jerrold E. Marsden montrent dans [19] que cette approche peut s'interpréter plus ou moins comme la recherche de géodésiques dans l'espace des métriques riemanniennes sur M avec des contraintes, d'où le nom de *formalisme hamiltonien* quelquefois donné à ce point de vue.

Ils en tirent une preuve différente du théorème d'existence locale (*cf.* [20]). C'est cette approche que Klainerman et Christodoulou mettent en œuvre dans [15].

3.6. Il est à noter que les équations d'évolution contiennent 13 inconnues (6 pour g_t, 6 pour k_t et 1 pour ϕ) alors que nous n'avons écrit que 12 équations. Il nous reste seulement la liberté de fixer la fonction du type temps t.

La donnée du feuilletage par les hypersurfaces M_t ne définit la fonction t qu'à un changement de variables au but près. Il semble a priori que le choix le plus naturel soit $\phi \equiv 1$. C'est celui (habituel en géométrie riemannienne) qui correspond à prendre l'exponentielle normale à une hypersurface M comme carte pour un voisinage tubulaire de M. Ici il faut prendre garde que des équations (3.4) avec $\phi \equiv 1$ découle

$$\frac{\partial(\mathrm{Tr}_{g_t} k_t)}{\partial t} = |k_t|^2_{g_t} \geq \frac{1}{3}\,(\mathrm{Tr}_{g_t} k_t)^2$$

ce qui aboutit à une explosion en un temps fini dès que $\mathrm{Tr}_{g_t} k_t$ est positive en au moins un point de M par le lemme de Gronwall.

Ceci conduit à faire jouer un rôle particulier aux sous-variétés M dont la seconde forme fondamentale k est à trace nulle (en géométrie lorentzienne on parle de sous-variétés *maximales*, le pendant des sous-variétés minimales de la géométrie riemannienne). Notons qu'il ressort de la deuxième équation de contrainte qu'une sous-variété maximale d'un espace-temps vide est nécessairement à courbure scalaire positive.

Christodoulou et Klainerman travaillent avec des sous-variétés maximales ce qui revient à choisir une fonction du type temps particulière. La possibilité de feuilleter l'espace-temps avec des hypersurfaces maximales de type espace, établie dans [2], permet donc de lever l'indétermination qui demeurait sur la formulation des équations d'Einstein du vide. Dans la situation qui est la leur, à savoir une perturbation de l'espace de Minkowski, il convient d'ajouter une condition à l'infini qui rend elliptique le problème dont la fonction de décalage ϕ est solution. On prend en général $\phi \longrightarrow 1$ à l'infini de l'hypersurface M supposé difféomorphe à l'extérieur d'une boule dans $\mathbf{R}^3$. Ceci revient à demander que la fonction t tende vers l'abscisse curviligne des courbes intégrales du champ de vecteurs F issues de points s'éloignant indéfiniment dans M. Nous développons ce point dans la section 4.

PROPOSITION (espace-temps vide à partir d'une hypersurface maximale).– *Etant donnée une variété riemannienne (M,g) de dimension* 3 *et un champ de formes bilinéaires symétriques k défini sur M et vérifiant les équations de contrainte,*

$$(3.7) \qquad \begin{cases} \mathrm{Tr}_g\, k = 0 \\ \delta^g k = 0 \\ \mathrm{Scal}^g = |k|_g^2 \ , \end{cases}$$

résoudre les équations d'Einstein du vide à partir des conditions initiales (M,g,k) revient à trouver un développement de ces données initiales, i.e. une courbe $t \mapsto (g_t, k_t)$ et une courbe de fonctions $t \mapsto \phi_t$ solutions des équations d'évolution

$$(3.8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial t} = -2\,\phi\, k_t \\ \dfrac{\partial k}{\partial t} = -Dd\phi + \phi\,(\mathrm{Ric}^t - 2\, k_t \cdot_{g_t} k_t) \ ; \end{cases}$$

et de l'équation

$$\Delta_{g_t}\phi = -|k|_{g_t}^2\, \phi$$

(où Δ_g désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami d'une métrique g).

L'espace-temps recherché, solution des équations d'Einstein du vide, feuilleté par des hypersurfaces maximales, s'écrit $(I \times M, -\phi_t^2\, dt^2 + g_t)$ où I désigne l'intervalle d'existence de l'équation d'évolution.

4. METRIQUES ASYMPTOTIQUEMENT PLATES

4.1. L'espace-temps vide recherché par Christodoulou et Klainerman est une perturbation (finie) de l'espace de Minkowski, mais ils exigent en plus de lui qu'il soit *asymptotiquement plat.* Nous avons introduit cette notion dans la section 2 à propos des métriques de Schwarzschild. En fait c'est une version un peu plus forte qu'ils utilisent dans leur travail (voir 4.5). Cette restriction est justifiée par les considérations suivantes.

Pour un espace-temps asymptotiquement plat (modélisant un système isolé), il est possible (après Arnowitt-Deser-Misner, *cf.* [1]) de définir sa masse*. Par définition un espace-temps asymptotiquement plat (Σ, γ) admet une hypersurface du type espace, soit (M, g), dont une partie non compacte est difféomorphe par un difféomorphisme ψ avec l'extérieur d'une boule dans $(\mathbf{R}^3, e)$ et y vérifie les estimations suivantes pour tout champ de vecteurs constant X dans $\mathbf{R}^3$:

$$|\psi^* g - e|_e = O(r^{-1}) \ , \quad |\mathcal{L}_X(\psi^* g)|_e = O(r^{-2}) \ , \quad |\mathcal{L}_X\mathcal{L}_X(\psi^* g)|_e = O(r^{-3})$$

en ce qui concerne sa première forme fondamentale g, et

$$|\psi^* k|_e = O(r^{-2}) \ , \quad |\mathcal{L}_X(\psi^* k)|_e = O(r^{-3})$$

en ce qui concerne sa seconde forme fondamentale k. Ces conditions de décroissance assurent que les tenseurs de courbure de g et de γ sont $O(r^{-3})$ le long de M.

4.2. On définit la *masse* m_g d'un espace-temps (Σ, γ) supposé asymptotiquement plat en posant

$$m_g = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{16\pi} \int_{S_r} (\delta^e(\psi^* g) - d(\mathrm{Tr}_e\, \psi^* g))(N)\, a_e \ ,$$

---

* Il peut paraître paradoxal que dans une théorie de la Gravitation comme la théorie de la Relativité Générale la notion de masse soit difficile à définir. En fait la seule notion de masse connue est globale et non additive, et ne vaut que pour les systèmes isolés. La recherche d'une définition de masse qui soit quasi-locale est toujours un des thèmes actifs de recherche en Relativité Générale.

où N désigne le champ des normales à la sphère euclidienne S_r et a_e son élément d'aire. Il est facile de voir que la masse de la métrique de Schwarzschild ϵ_m^S est précisément m.

Il existe d'autres notions de masse en Relativité Générale comme la *masse de Bondi.* Elle s'évalue aussi de façon asymptotique, mais cette fois le long de 2-sphères propagées le long de surfaces isotropes.

Une des questions majeures dans la théorie des espaces-temps asymptotiquement plats vides ou vérifiant la *condition d'énergie positive* (i.e. $T(v,v) \leq 0$ pour tout vecteur v du type temps) a été de décider si la masse était nécessairement une quantité positive. Ce problème a été résolu par Richard Schoen et Shing Tung Yau en 1978 (pour un rapport, *cf.* [26]).

THEOREME (de la masse positive [40], [41]).– *Si une variété riemannienne (M,g) de dimension 3 asymptotiquement plate est à courbure scalaire positive, alors $m_g \geq 0$ et $m_g = 0$ si et seulement si (M,g) est isométrique à $(\mathbf{R}^3, e)$.*

La preuve contenue dans [40] et [41] s'appuie sur un raisonnement par l'absurde utilisant les résultats récents sur l'existence de surfaces minimales stables dans les variétés de dimension 3 à courbure scalaire positive ou nulle. Dans [45] (rigorisé dans [36]), une preuve constructive est donnée. Il y est montré que la masse peut s'identifier à l'énergie (i.e. l'intégrale de Dirichlet) d'un champ de spineurs vérifiant des conditions asymptotiques convenables.

Une conséquence très importante de ce théorème est *l'impossibilité d'imposer à un espace-temps vide des conditions de platitude à l'infini trop fortes sans le réduire à l'espace de Minkowski.*

4.3. Suite à l'équivalence, habituelle en Relativité, entre énergie et masse, m_g est quelquefois appelée une *énergie* ce qui est justifié par les considérations suivantes.

Il est possible de définir, de façon analogue à m_g, un *moment à l'infini* P_γ pour tout espace-temps vide asymptotiquement plat, vivant naturellement dans le dual de l'algèbre de Lie du groupe des déplacements de $(\mathbf{R}^3, e)$, en posant pour tout champ de Killing X

$$P_\gamma(X) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{8\pi} \int_{S_r} (\psi^* k - (\mathrm{Tr}_e(\psi^* k))\, e)(N, X)\, a_e\ .$$

L'existence des limites est une conséquence directe des hypothèses de décroissance mises dans la définition d'un espace-temps asymptotiquement plat, et de la transformation de la différence des intégrales prises sur des sphères de rayon différent en une intégrale de volume dont l'intégrand est contrôlé par les équations de contrainte (3.8).

Il est traditionnel de distinguer dans ce moment à l'infini sa partie *linéaire* P_γ^ℓ (qu'on évalue contre les champs de vecteurs constants dans $\mathbf{R}^3$ qui engendrent les translations) et sa partie *angulaire* P_γ^a (qu'on évalue contre les rotations infinitésimales de $(\mathbf{R}^3, e)$). On regroupe alors m_g et P_γ^ℓ en un quadrivecteur après s'être assuré que les définitions que nous avons données qui semblent dépendre du choix d'une carte euclidienne à l'infini n'en dépendent en fait pas à cause des hypothèses de décroissance à l'infini*. Il est à remarquer que les conditions de décroissance n'excluent pas des comportements oscillatoires de g et k à l'infini à condition qu'ils ne soient pas trop forts.

On montre, en utilisant la formulation d'évolution (3.8) des équations d'Einstein, que dans un espace-temps vide asymptotiquement plat les conditions de décroissance à l'infini persistent sur les hypersurfaces M_t et que m_g et P_γ sont conservés.

4.4. Dans [15], Christodoulou et Klainerman introduisent la définition suivante.

DEFINITION.– Des données d'espace-temps (M, g, k) sont dites *fortement asymptotiquement plates* s'il existe un nombre positif m et un difféomorphisme ψ du complémentaire d'un ensemble compact dans M avec

* Une formulation mathématique intrinsèque nécessiterait l'introduction de champs de vecteurs sur M asymptotiquement de Killing.

l'extérieur d'une boule euclidienne dans $(\mathbf{R}^3, e)$ tel que, pour tout champ de vecteurs constant X dans $\mathbf{R}^3$,

$$(\mathcal{L}_X)^i \psi^* g = (\mathcal{L}_X)^i \left((1 + \frac{2m}{r})\, e \right) + o(r^{-\frac{3}{2}-i}) \text{ pour tout } i,\ 1 \leq i \leq 4\ ,$$

$$(\mathcal{L}_X)^j \psi^* k = o(r^{-\frac{5}{2}-j}) \text{ pour tout } j,\ 1 \leq j \leq 3\ .$$

Il suit trivialement de la définition que, pour des données fortement asymptotiquement plates (M, g, k), alors m_g et P_γ (où γ désigne le développement de (M, g, k)) sont bien définis et que $m_g = m$ et $P_\gamma^\ell = 0$. En fait cette dernière condition distingue un feuilletage temporel maximal dont la signification physique est d'être un système "à centre de gravité fixé".

5. LA GEOMETRIE CONFORME

5.1. Dans cette section, nous rassemblons un certain nombre de faits ayant trait à des propriétés de la géométrie des espaces-temps qui ne font intervenir que la classe conforme de la métrique. Ces propriétés sont importantes du point de vue physique à cause de l'interprétation d'invariance dimensionnelle des quantités invariantes conformes.

Nous avons déjà remarqué que la partie de la géométrie qui n'a trait qu'aux cônes de lumière ne dépend que de la classe conforme de la métrique lorentzienne.

Dans les espaces-temps asymptotiquement plats, il est devenu traditionnel depuis les travaux de Penrose d'ajouter à l'infini une *compactification conforme* qui pour être régulière a l'inconvénient d'exiger une décroissance de la courbure qui semble plus stricte que ce qu'il est raisonnable de demander.

5.2. Une partie de la courbure de Riemann-Christoffel R^γ d'une métrique γ ne dépend en fait que de la classe conforme de cette métrique.

Pour l'introduire, il est commode de commencer par des considérations de pure algèbre linéaire. Sur un espace vectoriel fixe V de dimension n lorentzien (ou euclidien), que nous identifions bien sûr à l'espace tangent en un point d'une variété riemannienne ou lorentzienne, on considére l'espace $\mathcal{R}V$ des tenseurs vérifiant toutes les symétries algébriques d'un tenseur de courbure. A cause des antisymétries de la courbure et de la première identité de Bianchi, il est maintenant devenu classique de voir $\mathcal{R}V$ comme l'orthogonal de $\Lambda^4 V^*$ dans $S^2\Lambda^2 V^*$, et donc de considérer la courbure de Riemann-Christoffel comme un endomorphisme sur l'espace des 2-formes. Sous l'action du groupe orthogonal (ou de Lorentz), $\mathcal{R}V$ se scinde en trois sous-espaces irréductibles (dès que $n \geq 4$), d'où la décomposition du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel R^γ en $R^\gamma = S^\gamma + Z^\gamma + W^\gamma$ où

i) S^γ désigne la composante correspondant à la représentation triviale qui est la courbure d'un espace à courbure constante ayant même courbure scalaire que R^γ, donc un multiple de $\mathrm{Id}_{\Lambda^2 V}$;

ii) Z^γ désigne la composante correspondant à une représentation isomorphe à l'espace $S_0^2 V$ des tenseurs symétriques à trace nulle de V et qui est complètement déterminée par la partie à trace nulle de la courbure de Ricci (identiquement nulle si la dimension est 2) ;

iii) W^γ désigne la composante "restante", i.e. celle qui est dans le noyau de la contraction envoyant la courbure de Riemann-Christoffel sur la courbure de Ricci, appelée *courbure conforme de Weyl.* Les éléments de cet espace sont appelés des *tenseurs de Weyl.* Cette composante n'existe pas en dimensions 2 et 3.

En conséquence, on peut donc dire que *dans un espace-temps vide, la courbure de Riemann-Christoffel se réduit à la courbure de Weyl.*

Le point de vue précédent ne permet pas de voir pourquoi W^γ mérite le nom de *courbure conforme**. Pour cela il faut faire un changement de métrique conforme, i.e. remplacer la métrique γ par la métrique $a^2\gamma$,

* Il est à noter qu'Hermann Weyl avait introduit le tenseur qui porte son nom lors d'une tentative (*cf.* [44]) d'unification de la Gravitation et de l'Electromagnétisme en généralisant la Géométrie Lorentzienne, cadre de la Relativité Générale, à une Géométrie Lorentzienne Conforme. Cette tentative a avorté.

où a est une fonction positive, et constater que $W^{a^2\gamma} = W^\gamma$, calcul qui suppose d'évaluer un certain nombre de dérivées et n'est donc pas purement algébrique*. Notons que cette formule n'est valable que pour la courbure de Weyl naturellement définie, qui est de type $(3,1)$, et non pour ses variantes obtenues en contractant avec la métrique ou son inverse ; des puissances de a apparaissent alors. De cette propriété découle évidemment le fait qu'*en dimension 4 ou plus, une métrique γ est localement conforme à une métrique plate si et seulement si sa courbure conforme W^γ est identiquement nulle.*

5.3. Dans un espace vectoriel orienté V de dimension n muni d'une métrique lorentzienne γ, une autre quantité géométrique a d'intéressantes propriétés conformes : c'est l'*opérateur de Hodge* $*_\gamma : \Lambda^k V^* \longrightarrow \Lambda^{n-k} V^*$ défini, pour α, $\beta \in \Lambda^k V^*$, par

$$\alpha \wedge (*_\gamma \beta) = \gamma^{-k}(\alpha, \beta)\, v_\gamma \ .$$

Lorsque la dimension est 4, $*_\gamma$ est un automorphisme orthogonal de $\Lambda^2 V^*$ de carré $-\mathrm{Id}$, donc y définit une structure complexe. (Pour une métrique euclidienne, $*$ est au contraire une involution qui permet de définir les notions de 2-forme positive et négative fondamentales dans les théories de jauge sur les variétés de dimension 4.) En fait $*_{\gamma\,|\Lambda^2 V^*}$ *ne dépend que de la classe conforme de γ.*

Il est possible de définir les tenseurs de Weyl en dimension 4 comme les éléments de $S^2\Lambda^2 V^*$ à trace nulle qui commutent à $*_\gamma$, toutes conditions invariantes conformes.

5.4. Il y a une autre façon de considérer les tenseurs de courbure reposant encore sur l'exploitation de leur symétries : on peut en effet plonger $\mathcal{R}V$

* Un raisonnement purement algébrique permet cependant de prévoir le résultat. En effet la fonction a devrait être présente dans $W^{a^2\gamma}$ par l'intermédiaire de son 2-jet qui appartient à $S^2 V$, or il n'existe pas d'application équivariante sous le groupe orthogonal entre $S^2 V$ et l'espace des tenseurs de Weyl.

dans $S^2S^2V^*$ en associant à $R \in \mathcal{R}V$ l'endomorphisme $\overline{R} : h \mapsto \overline{R}(h)$ qui sur deux vecteurs v et w vaut $\overline{R}(h)(v,w) = \sum_{i,j=1}^n R^l_{ikj}\, h_{lm}\, g^{km}\, v^i\, w^j$ (*cf.* [10]).

De cette approche, nous tirons les deux constructions suivantes utiles pour la preuve du théorème de Christodoulou et Klainerman (à partir de maintenant, nous identifions V avec l'espace tangent d'un espace-temps).

Si f est un vecteur tangent (pris du type temps orienté vers le futur pour représenter le vecteur d'univers d'un observateur), toute 2-forme ω (modélisant un champ électro-magnétique) se décompose en ses parties *électrique* E et *magnétique* B définies respectivement par $E^\omega = i_f\omega$ et $H^\omega = i_f(*\omega)$. Par extension, on définit la *décomposition électro-magnétique* d'un tenseur de Weyl W relativement à f comme la paire de tenseurs symétriques à trace nulle (E^W, H^W) avec $E^W = \overline{W}(f \otimes f)$ et $H^W = (\overline{*W})(f \otimes f)$. On vérifie facilement que f est dans le noyau de E^W et de H^W, que l'on peut voir comme portées par l'espace normal à f ; par ailleurs ces formes déterminent W.

A tout tenseur de Weyl W, il est possible d'associer son *tenseur de Bel-Robinson* Q^W défini (*cf.* [4]) par

$$Q^W = \frac{1}{2}\left(\overline{W} \circ \overline{W} + \overline{*W} \circ \overline{*W}\right) .$$

On voit facilement que $Q^W \in S^4V$ et est à trace nulle comme il est montré dans [14]. De plus, pour tous vecteurs f_1 et f_2 du type temps futur, on a $Q^W(f_1,f_2,f_1,f_2) > 0$. Il est à noter que la construction qui à un tenseur de Weyl W associe son tenseur de Bel-Robinson Q^W est complètement analogue à celle qui à une 2-forme extérieure ω associe son tenseur d'impulsion-énergie T^ω (*cf.* 1.3), et cette analogie sera exploitée ultérieurement ; de plus, si W est pris de variance $(3,1)$, cette construction ne dépend que de la classe conforme de la métrique.

5.5. La courbure de Riemann-Christoffel R^γ d'une métrique γ quelconque vérifie aussi une identité différentielle, la *deuxième identité de Bianchi*, qui s'écrit

$$d^{D^\gamma} R^\gamma = 0 ,$$

où d^{D^γ} désigne la *différentielle extérieure des 2-formes à valeurs dans les 2-formes.* Rappelons qu'il est nécessaire d'avoir choisi une dérivation covariante pour que cette notion ait un sens (d'où l'exposant D^γ), et notons que d^{D^γ} n'est pas un opérateur de cobord exact puisque son carré fait intervenir la courbure de la métrique γ.

Il suit des équations d'Einstein du vide que

$$d^{D^\gamma}(*_\gamma R^\gamma) = 0 .$$

Comme la codifférentielle δ^γ sur l'espace des 2-formes différentielles extérieures s'écrit $\delta^\gamma = - *_\gamma \circ d \circ *_\gamma$, cette condition, combinée avec la deuxième identité de Bianchi, dit que la courbure d'un espace-temps vide est *harmonique.* Elle n'implique pas en général les équations d'Einstein*. Elle a cependant un double avantage sur elles : elle est un analogue non-linéaire des équations de Maxwell du vide (qui expriment que le champ électromagnétique ω vérifie $d\omega = 0$ et $d(*\omega) = 0$) ; elle suit de $d^{D^\gamma} W^\gamma = 0$, car un champ de Weyl W fermé en ce sens est automatiquement cofermé (*cf.* [7]), ce qui équivaut à dire que $*_\gamma W$ est aussi fermé.

Cette formulation souligne l'importance dans notre contexte de l'opérateur d^{D^γ} intervenant dans la deuxième identité de Bianchi dont Klainerman et Christodoulou se servent abondamment. Ils s'appuient notamment sur deux propriétés des champs de Weyl fermés (pour d^{D^γ}), liées aux changements conformes de métriques :

- si W est un champ de Weyl fermé, alors Q^W est à divergence nulle (i.e. $\delta^\gamma Q^W = 0$) ;
- si W est un champ de Weyl fermé, et si ϕ est une transformation conforme de (Σ, γ) telle que $\phi^*\gamma = a^2\,\gamma$, alors $a^{-1}\,\phi^* W$ est un champ de Weyl fermé (noter que la dépendance non-linéaire de l'opérateur d^{D^γ} par rapport à γ intervient ici).

* mais, dans le cas riemannien, elle lui est quelquefois équivalente sous des hypothèses topologiques globales (*cf.* par exemple [7]).

5.6. De plus les conditions de contrainte (3.7) pour des données initiales (M, g, k) sont *conformément covariariantes* au sens suivant : pour toute fonction b positive sur M, $\tilde{g} = b^4\, g$, $\tilde{k} = b^{-2}\, k$ sont solutions des deux premières équations de contrainte exprimées avec $D^{\tilde{g}}$; cela permet de satisfaire la troisième, à partir de données initiales qui ne la satisferaient pas, en prenant b solution de l'équation scalaire

$$\Delta^g b + \frac{1}{8}\,\mathrm{Scal}^g\, b - |k|_g^2\, b^{-5} = 0\ ,$$

en prenant des conditions asymptotiques sur b qui garantissent que la métrique reste asymptotiquement plate.

5.7. Il est aussi utile de voir les champs de 2-tenseurs symétriques comme des 1-formes à valeurs dans le fibré tangent. Ainsi, sur une hypersurface M du type espace, il est classique de considérer la 2-forme sur M à valeurs dans TM, appelée *tenseur de Bach*, $B^g = d^{D^\gamma}(\mathrm{Ric}^g - \frac{1}{4}\,\mathrm{Scal}^g\, g)$, qu'il est commode de voir (comme M est de dimension 3) comme une 2-forme bilinéaire symétrique. Cette forme est en fait à trace nulle à cause des conséquences sur la courbure de Ricci de la deuxième identité de Bianchi. La nullité de B^g caractérise les métriques g conformément plates sur un espace de dimension 3. Ce champ est un autre exemple de champ conformément covariant, ce qui implique par exemple que le champ de Bach B^{g_t} des métriques induites sur les sous-variétés M_t par une métrique de Schwarzschild ϵ_m^S s'annule à un ordre beaucoup plus élevé à l'infini que les dérivées de g_t.

6. LES LOIS DE CONSERVATION APPROCHEES

6.1. Le théorème d'Emmy Noether affirme que *toute symétrie d'un système dont les équations de champ expriment qu'une fonctionnelle est extrémale donne lieu à une loi de conservation.*

En Relativité Générale, un premier exemple d'application de ce théorème (donné par Einstein, *cf.* [17]) se présente ainsi : l'invariance par difféomorphisme du potentiel de gravitation $\gamma \mapsto \int_\Sigma \mathrm{Scal}^\gamma\, v_\gamma$ implique

$$\delta^\gamma(\mathrm{Ric}^\gamma - \frac{1}{2}\,\mathrm{Scal}^\gamma\,\gamma) = 0\ . \tag{6.2}$$

Cette propriété (qui suit aussi de la deuxième identité de Bianchi) traduit l'inclusion de l'espace tangent à l'orbite d'une métrique sous les difféomorphismes dans le noyau de la différentielle du potentiel de gravitation sur l'espace des métriques puisque $2\,\delta^\gamma$ est l'adjoint de l'opérateur $X \mapsto \mathcal{L}_X\gamma$ qui décrit l'action infinitésimale des difféomorphismes.

D'après les équations d'Einstein, (6.2) implique que le tenseur d'impulsion-énergie T est lui aussi à divergence nulle. Il est possible d'exploiter ce fait ainsi : si X est un champ de Killing de la métrique γ (i.e. vérifie $\mathcal{L}_X\gamma = 0$ ou, ce qui est équivalent, a la partie symétrique de sa dérivée covariante nulle), alors la 1-forme différentielle $i_X T$ est à divergence nulle, ce qui implique que, si M_t désigne le développement d'une hypersurface de Cauchy M, $\int_{M_t} *_{g_t}(i_X T) = \int_{M_t} T(X,F)\, v_{g_t}$ est indépendant de t. Cette loi de conservation permet une estimation en fonction des données initiales. C'est précisément de cette façon, en prenant pour X le champ de Killing conforme I_t, que les estimées L^2 de décroissance des ondes électromagnétiques, solutions des équations de Maxwell dans l'espace de Minkowski, ont été obtenues par Cathleen Morawetz (*cf.* [35]). Ce point de vue est systématiquement employé pour les équations linéaires dans [14]. Le projet est ici d'en faire une extension non-linéaire.

6.3. Comme nous étudions des espaces-temps vides (i.e. nous prenons $T \equiv 0$), les considérations précédentes ne s'appliquent pas telles quelles. Une des idées importantes de Christodoulou et Klainerman est de *substituer à T le tenseur de Bel-Robinson Q^W d'un champ de Weyl W fermé.* Ils utilisent la nullité de sa codifférentielle pour déduire des estimations sur le champ étudié. Pour produire une 1-forme différentielle dont le dual (par l'opérateur de Hodge) est intégrable sur une hypersurface, il faut le contracter avec trois champs de vecteurs. Le fait que Q^W soit à trace nulle permet d'utiliser des transformations infinitésimales conformes X, encore appelées *champs de Killing conformes*, (i.e. telles que $\mathcal{L}_X\gamma$ est un multiple de γ ce qui équivaut à annuler la partie à trace nulle de $D^\gamma X$). Par suite, pour tout champ de Weyl W fermé, et pour tous champs de Killing conformes X_1, X_2 et X_3, $\int_{M_t} *_{g_t}(i_{X_1} i_{X_2} i_{X_3} W)$ est indépendant de t. De plus, si les X_i sont de type temps futur, il suit des propriétés de positivité de Q^W que l'intégrale sera positive.

Pour mettre en œuvre ces résultats dans notre problème, sont encore nécessaires deux idées supplémentaires que nous introduisons maintenant.

6.4. Il faut d'abord *engendrer suffisamment de champs de Weyl fermés* pour obtenir les estimations souhaitées. Christodoulou et Klainerman ont recours à une modification de la dérivation de Lie $\mathcal{L}$ augmentant sa compatibilité avec une métrique γ. Ils donnent de cette *dérivation de Lie métrique* $\mathcal{L}^\gamma$ une définition calculatoire*. La propriété fondamentale de $\mathcal{L}^\gamma$ est de préserver toutes les quantités intrinsèquement définies par la métrique γ : ainsi, pour *tout* champ de vecteurs X, $\mathcal{L}^\gamma \gamma = 0$, $\mathcal{L}^\gamma *_\gamma = 0$, $\mathcal{L}^\gamma$ commute aux contractions faisant intervenir γ, etc. Il suit que $\mathcal{L}^\gamma_X$ préserve l'espace des champs de Weyl (qui est défini par des conditions de symétrie et de nullité de contraction) pour *tout* champ de vecteurs X ce qui n'était pas le cas de la dérivation de Lie ordinaire $\mathcal{L}_X$.

6.5. Nous pouvons aussi *exploiter la covariance conforme de l'espace des champs de Weyl fermés*, mentionnée en 5.6, en remarquant que, si W est un champ de Weyl fermé, alors $\mathcal{L}^\gamma_X W$ est encore un champ de Weyl fermé dès que X est un champ de Killing conforme. En présence d'un grand groupe de transformations conformes, ceci permet d'engendrer un grand nombre de champs de Weyl fermés à partir d'un. Ainsi sur un espace-temps vide (Σ, γ), pour tous champs de Killing conformes X_1, ..., X_ℓ, $\mathcal{L}^\gamma_{X_1} \ldots \mathcal{L}^\gamma_{X_\ell} W^\gamma$ est un champ de Weyl fermé. On trouve ainsi un grand nombre de quantités conservées en suivant le développement de données

* mais une définition géométrique conceptuelle s'appuyant sur un procédé universel de comparaison des bases orthonormées de deux métriques se trouve dans [9].

initiales, par exemple

$$\int_{M_t} *_{g_t} i_{X_1} i_{X_2} i_{X_3} Q^{\mathcal{L}^\gamma_{X_4} \mathcal{L}^\gamma_{X_5} W^\gamma}$$

où les X_i $(i = 1,2,3,4,5)$ sont des champs de Killing conformes.

6.6. L'espace-temps vide (Σ, γ) que nous voulons étudier n'a aucune raison d'avoir un groupe de transformations conformes non trivial, mais nous supposons qu'il est une perturbation de l'espace de Minkowski $(\mathbf{R}^4, \epsilon)$ qui, comme nous l'avons vu, a un groupe de transformations conformes de dimension 15. Ceci garantit que, si nous parvenons à définir sur (Σ, γ) des champs qui soient proches des champs de Killing conformes X de l'espace de Minkowski, leur *tenseur de déformation* $\mathcal{L}_X \gamma$ sera suffisamment petit.

Il reste alors à remarquer que toutes les considérations que nous avons développées précédemment en supposant que les champs étaient des champs de Killing conformes, donc solutions d'une équation homogène, peuvent être étendues sous formes d'estimations à des champs dont le tenseur des déformations est contrôlé. *Les lois de conservation établies auparavant deviennent des lois de conservation approchées*, qu'il convient peut-être d'appeler des *lois de comportement*, contrôlant les intégrales sur des hypersurfaces du type espace de certaines 1-formes déduites d'un champ de Weyl W par contraction de son tenseur de Bel-Robinson avec des champs X approximativement de Killing conformes en termes d'intégrales dans l'espace-temps de quantités quadratiques en W et linéaires en $\mathcal{L}_X \gamma$. Il faut trouver des champs dont le tenseur des déformations décroît suffisamment vite à l'infini pour que les quantités dont nous étudions le comportement au cours du temps aient leur croissance contrôlée par leur propre taille.

7. LA GEOMETRIE ISOTROPE

7.1. Pour des raisons physiques évidentes, la structure causale d'un espace-temps (Σ, γ) est fondamentale. Un sous-ensemble $S \subset \Sigma$ définit un *sous-ensemble d'influence futur* $I^+(S)$ formé de toutes les courbes causales orientées vers le futur issues de points de S. De la même façon, on définit $I^-(S)$ le *sous-ensemble d'influence passé.* Les bords des sous-ensembles d'influence d'une sous-variété sont des hypersurfaces isotropes qui sont les surfaces de niveau d'une fonction *optique*. Les sous-ensembles d'influence d'un point $p \in \Sigma$ représentent les cônes de lumière C^p issus de ce point. Si Σ est feuilleté par des hypersurfaces du type espace M_t, alors, si $p \in M_{t_0}$, pour t voisin de t_0, $C^p \cup M_t$ est une sphère différentiable. Inversement, à partir d'une sphère S dans M_t, on peut construire les hypersurfaces isotropes qui coupent M_t suivant S.

Nous avons vu dans l'espace de Minkowski que les notions introduites précédemment sont définies par des équations algébriques.

7.2. L'approche la plus facile à mettre en œuvre consiste à travailler avec les hypersurfaces de niveau d'une fonction optique u et de considérer le feuilletage de Σ par des surfaces $S_{t,u}$ définies par les deux fonctions t et u. Ce feuilletage remplace les sphères euclidiennes, qui étaient les orbites de l'action de SO_3 dans l'espace de Minkowski.

L'outil de base pour développer la géométrie isotrope est le choix d'une base du fibré normal à $S_{t,u}$ après avoir constaté que la métrique sur le fibré normal est de signature $(-+)$. On prend une base de vecteurs isotropes (J, K) de ce fibré dont les composantes suivant F (le gradient de t par rapport à γ) soient 1.

Il devient dès lors possible de définir les ingrédients fondamentaux pour contrôler les solutions de l'équation des ondes par analogie avec ce qui se passe dans l'espace de Minkowski, à savoir *la fonction distance* r pour laquelle on pose $r = \text{aire}(S_{t,u})/4\pi$, *une deuxième fonction optique* v définissant les cônes du passé en posant $v = u + 2\,r$, et deux champs de vecteurs très importants : l'analogue du champ de Liouville dans l'espace de Minkowski engendrant les dilatations $L = \frac{1}{2}(v\,J + u\,K)$, et l'inverse des translations temporelles $I_t = \frac{1}{2}(v^2\,J + u^2\,K)$. Pour mémoire, le champ de vecteurs engendrant les translations temporelles F est relié à J et K par $F = \frac{1}{2}\,(J + K)$.

7.3. On peut aussi raffiner la décomposition de la courbure R^γ adaptée au feuilletage de Σ par les hypersurfaces M_t en une décomposition adaptée aux sous-variétés $S_{t,u}$. En contractant R^γ avec les vecteurs J et K, on peut définir deux champs de formes bilinéaires symétriques portées par l'espace tangent à $S_{t,u}$ (qui sont à trace nulle à cause de la nullité de la courbure de Ricci), deux 1-formes différentielles tangentes à $S_{t,u}$, et deux fonctions.

Toutes ces quantités peuvent être reliées aux expressions de la courbure adaptées au feuilletage M_t. L'importance de ce raffinement dans la décomposition tient aux taux de décroissance à l'infini différents que présentent ces différentes composantes.

8. LE THEOREME DE CHRISTODOULOU ET KLAINERMAN

8.1. La stratégie de Christodoulou et Klainerman pour prouver leur théorème consiste à se donner les instruments de comparaison avec l'espace de Minkowski, donc à construire

- un feuilletage par des hypersurfaces du type espace maximales,
- les cônes de lumière dans la direction du futur comme surfaces de niveau d'une fonction optique,
- des champs approximativement de Killing conformes pour déduire des estimations sur la courbure.

Une fois ces instruments construits, la preuve s'appuie alors sur une méthode de continuité : après avoir établi un théorème d'existence locale en temps mais globale en espace, on suppose que l'espace-temps a été défini jusqu'à un temps t_∞ au-delà duquel il ne peut être prolongé sans que des estimations sur certaines quantités géométriques soient violées. Christodoulou et Klainerman montrent qu'il n'en est en fait rien en établissant que les intégrales temporelles de quantités faisant intervenir le tenseur de Bel-Robinson de dérivées bien choisies de la courbure R^γ peuvent être contrôlées en fonction de leur valeur pour $t = 0$ ce qui produit une contradiction.

Des difficultés de plusieurs sortes apparaissent dans la mise sur pied de ce programme. Nous les passons en revue dans les paragraphes qui suivent*.

8.2. Evoquons d'abord la difficulté liée à *la nécessité de travailler dans des systèmes de coordonnées particuliers* pour rendre le problème analytiquement bien posé. L'approche la plus naïve consisterait à chercher à étendre la construction de solutions locales par résolution du problème de Cauchy hyperbolique dans des coordonnées harmoniques faite dans [11] en une construction locale en temps mais globale en espace le long d'une hypersurface. Malheureusement, Choquet-Bruhat montre dans [12] qu'une telle approche conduit à une instabilité parmi les espaces-temps asymptotiquement plats proches de l'espace de Minkowski.

Christodoulou et Klainerman ne travaillent pas dans un système de coordonnées particuliers mais *fixent seulement une fonction de type temps t dont les hypersurfaces de niveau M_t sont maximales.* Ils adoptent alors le point de vue des équations d'évolution développé dans la section 4.

8.3. La courbure de Riemann-Christoffel d'un espace-temps vide (Σ, γ) se réduit à sa courbure de Weyl W^γ qui est donc fermée. Si nous possédons des estimations de W^γ, les données initiales (g, k, ϕ) sur l'hypersurface (M, g) peuvent s'en déduire par le biais du système elliptique

$$(8.4) \qquad \begin{cases} \mathrm{Ric}^g - k._g k = E^{W^\gamma} \\ d^{D^g} k = H^{W^\gamma} \\ \delta^g k = 0 \\ \mathrm{Tr}_g k = 0 \end{cases}$$

combiné avec l'équation satisfaite par la fonction de décalage ϕ. Christo-

* Bien évidemment pour les surmonter, des calculs explicites, longs et (pour certains d'entre eux) fastidieux, sont indispensables. Il n'est pas possible de même en donner une idée dans un rapport comme celui-ci. Le lecteur devra donc se reporter à [15].

doulou et Klainerman établissent les estimations elliptiques sur les variétés de dimension 3 nécessaires pour déduire du contrôle de W^γ celui des conditions initiales sur (M,g). Ainsi il est possible de contourner le problème du choix des coordonnées.

8.5. Pour obtenir les estimations nécessaires sur W^γ, Christodoulou et Klainerman s'appuient sur l'analyse détaillée du comportement asymptotique des solutions des équations de Bianchi dans l'espace de Minkowski qu'ils ont faites dans [14], qui est la version linéarisée du système qu'il faut étudier.

Pour cela il faut disposer d'une action d'un groupe analogue au groupe de Poincaré conforme. On fait les constructions mentionnées dans la section 7 sur la géométrie isotrope en partant de l'hypersurface M_{t_∞} supposée terminale. Grâce à la fonction optique qui doit vérifier des estimations très strictes (dont la vérification prend plus de 70 pages), on peut construire à partir d'une sphère à l'infini une action du groupe SO_3 dont les orbites sont les intersections des hypersurfaces M_t et les cônes de lumières orientés vers le passé s'appuyant sur cette sphère qui sont les surfaces de niveau de la fonction optique, puis finalement étendre cette action sous la forme d'une action du groupe de Poincaré conforme. Cette action n'a aucune raison d'être isométrique ou conforme.

Le contrôle des tenseurs des déformations des champs des vitesses associés à cette action se ramène au contrôle de la géométrie des hypersurfaces M_t et C_u. C'est là qu'apparaît une des difficultés techniques majeures (mais dont la signification physique est considérable), à savoir *la divergence logarithmique des cônes de lumière.* En effet, alors que dans l'espace de Minkowski, la variable r liée à l'aire des sphères orbites du groupe des rotations reste à distance bornée de t sur le cône C_u, dans une perturbation fortement asymptotiquement plate de masse m, nous avons

$$r - t = -2\,m\,\log t + O(1)\ .$$

Ce phénomène est particulier à la dimension 4. Il est directement lié au fait que le flux d'énergie qui est rayonné à l'infini est non nul. Ce flux peut se mesurer par la non-ombilicité des surfaces $S_{t,u}$.

8.6. Les quantités dont la croissance doit être contrôlée font intervenir de façon fondamentale les idées développées dans la section 6 sur les lois de conservation approchées. La courbure R^γ de l'espace-temps vide est un champ de Weyl fermé, et donc le champ de Weyl $\mathcal{L}_X^\gamma W^\gamma$ a une norme contrôlée par les tenseurs de déformations de X que nous prenons comme champ de Killing conforme approché. La 1-forme dont l'estimation s'avère cruciale est la 1-forme P définie par

$$\begin{aligned} P = &- i_{I_t+F} i_{I_t+F} i_F Q^{\mathcal{L}_\Omega^\gamma W^\gamma} - i_{I_t+F} i_{I_t+F} i_F Q^{\mathcal{L}_\Omega^\gamma \mathcal{L}_\Omega^\gamma W^\gamma} \\ &- i_{I_t+F} i_{I_t+F} i_F Q^{\mathcal{L}_\Omega^\gamma \mathcal{L}_F^\gamma W^\gamma} - i_{I_t+F} i_{I_t+F} i_{I_t+F} Q^{\mathcal{L}_L^\gamma \mathcal{L}_\Omega^\gamma W^\gamma} \\ &- i_{I_t+F} i_{I_t+F} i_{I_t+F} Q^{\mathcal{L}_F^\gamma \mathcal{L}_F^\gamma W^\gamma} , \end{aligned}$$

où Ω désigne un champ de vecteurs défini par l'action de SO_3.

Les deux quantités numériques cruciales à estimer dans la bande d'espace-temps étudiée sont $E_1 = \sup_t \int_{M_t} *_{g_t} P$ et $E_2 = \sup_u \int_{C_u} *_{g_t} P$. Il est possible de montrer que ces quantités peuvent être contrôlées par une fonction affine d'elles-mêmes dont le terme constant est déterminé par les conditions initiales. Si ce terme est pris suffisamment petit, alors on arrive à une contradiction.

8.7. Mais il faut aller plus loin et tenir compte du fait que le système étudié est vraiment non-linéaire. En particulier les estimées, qui donnent la décroissance des ondes dans l'espace de Minkowski, font maintenant intervenir des termes d'erreur qui dépendent linéairement des tenseurs de déformation des champs de Killing approchés et quadratiquement de la courbure et de ses dérivées.

L'annulation cruciale qui se produit alors est liée à la non-linéarité très particulière des équations d'Einstein qui a pour effet de faire disparaître les termes a priori dominants (qui demeurent dans d'autres équations comme celles de l'Elasticité non-linéaire ou celles des Fluides compressibles). Ce calcul est analogue à des calculs se trouvant dans [27].

8.8. Terminons cet aperçu de la preuve par quelques détails sur la condition de petitesse des conditions initiales (M, g, k) qu'utilisent Christodoulou et Klainerman. Elle contient la norme uniforme (à poids) de la courbure de Ricci, la norme H^3 sur M à poids de la partie seconde forme fondamentale k de la donnée initiale, et la norme H^1 sur M (à poids) du tenseur de Bach B^g de la partie première forme fondamentale g. Ces diverses normes sont prises en privilégiant un point $p \in M$ et une unité de longueur particuliers. La mesure finale de la donnée initiale est faite en prenant la borne inférieure de ces normes sur ces paramètres particuliers, ce qui fournit une quantité sans dimension.

9. PROBLEMES OUVERTS ET CONSEQUENCES PHYSIQUES

9.1. Très modestement, Klainerman et Christodoulou disent dans l'introduction de [15] que le résultat qu'ils obtiennent est d'une difficulté très relative si on le compare aux conjectures qui ont trait à la distribution des singularités dans un espace-temps.

La notion de singularité ne va pas de soi en Relativité Générale (*cf.* [21] et le chapitre 8 de [22]). Un espace-temps peut présenter divers types d'incomplétude, et il n'est pas sûr que les singularités du type "trou noir" ou "trou blanc" soient les seules qu'il faille répertorier. Le point de vue intrinsèque est suffisamment établi aujourd'hui pour que les singularités du seul système de coordonnées ne soient plus prises en compte (*cf.* 2.4). Un critère pour avoir une vraie singularité peut être le fait que certaines quantités scalaires formées avec la courbure tendent vers l'infini.

Même en se limitant à des singularités "géométriques", il est nécessaire de comprendre comment celles-ci apparaissent dans l'espace-temps. Stephen W. Hawking et Roger Penrose ont donné des critères assurant l'existence d'une singularité, desquels nous extrayons le suivant.

THEOREME (*cf.* [23]).– *Dans un espace-temps vide globalement hyperbolique, toute surface du type espace dont les vecteurs normaux isotropes déterminent une évolution future qui n'accroît pas l'aire a une géodésique causale incomplète.*

Du théorème précédent suit notamment la persistance de singularités par perturbation alors que l'on avait cru un moment qu'elles étaient liées à une trop grande symétrie provoquant une focalisation vers celles-ci.

9.2. Obtenir une description de la façon dont les singularités apparaissent en Relativité Générale (classique) est considéré comme un des problèmes majeurs du sujet. Il existe de nombreuses versions de la conjecture dite de la "censure cosmique" (*cf.* [3], [37], [46]), nom générique donné à diverses formulations de l'hypothèse selon laquelle ce qui a été constaté sur les métriques de Schwarzschild serait en fait un comportement universel dans les espaces-temps vides (ou non vides à condition que les interactions "physiques" qui s'y passent vérifient certaines conditions de positivité physiquement raisonnables). Nous en formulons une version dont le contenu géométrique est facile à appréhender.

CONJECTURE (de la "censure cosmique").– *Tout espace-temps vide présentant une singularité admet une perturbation dans laquelle cette singularité est entourée par un horizon apparent.*

Il n'est pas possible d'énoncer cette conjecture sans laisser la possibilité de perturber l'espace-temps considéré car la métrique de Taub-NUT (décrite dans [22] pages 170-178) a une singularité "nue" que la conjecture exclut. Cette métrique est spatialement homogène, et ce haut degré de symétrie est censé être responsable de la singularité de cet espace-temps vide.

9.3. Une autre partie de [15] a trait au rayonnement de l'énergie gravitationnelle dans les perturbations de l'espace de Minkowski construites. Cette question est d'un intérêt physique fondamental car on ne dispose encore aujourd'hui que de très peu d'expériences mettant en évidence des phénomènes qui pourraient être considérés comme de bons tests de cette théorie. Les tests dont nous disposons sont :

- l'avance du périhélie de Mercure (expérience qui a joué un grand rôle dans la reconnaissance de la théorie par un public plus large que celui des spécialistes),

- la déviation des rayons lumineux dans le champ de gravitation d'une étoile massive,

- la déviation vers le rouge du rayonnement de certaines étoiles s'éloignant de notre galaxie.

La détection des ondes gravitationnelles qui sont prévues par la Théorie de la Relativité Générale (*cf.* [6]) en serait une vérification supplémentaire. Cette théorie prévoit que ces ondes se déplacent à la vitesse de la lumière, et sont transversales et portées par un champ de formes bilinéaires symétriques à trace nulle. La dualité onde-particule amène à associer une particule à ces ondes, le *graviton* de spin 2 (en effet, en dimension 4, le complexifié de l'espace $S^2_0\mathbf{R}^4$ des formes bilinéaires symétriques à trace nulle sur $\mathbf{R}^4$ est isomorphe au complexifié de $\Lambda^+\mathbf{R}^4 \otimes \Lambda^-\mathbf{R}^4$, or $\Lambda^\pm\mathbf{R}^4 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong S^2\mathcal{S}^\pm$ où $\mathcal{S}^\pm$ désigne l'espace des demi-spineurs). La recherche de ces ondes a fait l'objet de plusieurs tentatives jusqu'ici infructueuses (*cf.* [16] et [43] pour des rapports sur ces tentatives). Le fait de pouvoir embarquer du matériel expérimental à bord de satellites offre évidemment de nouvelles perspectives. Il est donc très important de pouvoir disposer d'une bonne prédiction de ces ondes. H. Bondi a développé une théorie sur leur propagation que Christodoulou et Klainerman justifient dans le cas des espaces-temps vides qu'ils considèrent. Dans [13], Christodoulou donne des arguments s'appuyant sur [15] pour justifier que les effets non-linéaires doivent être suffisamment importants même à grande distance pour ne pouvoir être négligés devant les effets d'une théorie linéarisée ce qui souligne une nouvelle fois la nature fortement non-linéaire des équations d'Einstein.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Arnowitt, S. Deser, C. Misner, *Coordinate invariance and energy expressions in General Relativity*, Phys. Rev. **122** (1961), 997-1006.

[2] R. Bartnik, *Existence of maximal surfaces in asymptotically flat space-times*, Commun. Math. Phys. **94** (1984), 155-175.

[3] R. Bartnik, *Results and conjectures in Mathematical Relativity*, Proc. Geometry and Physics, Australian Nat. Univ. **22**, 1989.

[4] L. Bel, *Introduction d'un tenseur du quatrième ordre*, C.R. Acad. Sci. Paris **248** (1959), 1094-1096.

[5] G.D. Birkhoff, *Relativity and Modern Physics*, Harvard Univ. Press, Cambridge, 1923.

[6] H. Bondi, M.G.J. van der Burg, A.W.K. Metzner, *Gravitational waves in General Relativity, VII*, Proc. Roy. Soc. London **269** (1962), 21-52.

[7] J.P. Bourguignon, *Les variétés de dimension quatre à courbure harmonique et à signature non nulle sont d'Einstein*, Inventiones Math. **63** (1981), 263-286.

[8] J.P. Bourguignon, *L'équation de la chaleur associée à la courbure de Ricci*, Séminaire Bourbaki, Exposé n° 653, Astérisque **145-146** (1987), 45-61.

[9] J.P. Bourguignon, P. Gauduchon, *Spineurs, opérateurs de Dirac et variations de métriques*, à paraître.

[10] J.P. Bourguignon, H. Karcher, *Curvature operators : pinching estimates and geometric examples*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. Paris **11** (1978), 71-92.

[11] Y. Choquet-Bruhat, *Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non-linéaires*, Acta Math. **88** (1952), 141-225.

[12] Y. Choquet-Bruhat, *Un théorème d'instabilité pour certaines équations hyperboliques non-linéaires*, C.R. Acad. Sci. Paris **276**, 281-284.

[13] D. Christodoulou, *The nonlinear nature of Gravitation and gravitational wave experiments*, Preprint, Courant Institute (1990).

[14] D. Christodoulou, S. Klainerman, *Asymptotic properties of linear field equations in Minkowski space*, Commun. Pure Appl. Math. **43** (1990), 137-199.

[15] D. Christodoulou, S. Klainerman, *The global nonlinear stability of the Minkowski space*, à paraître.

[16] A.H. Cook, *Experiments on gravitation*, in *300 years of gravitation*, S.W. Hawking et W. Israel ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1987), 51-79.

[17] A. Einstein, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Ann. Phys. **49** (1916), 769-822.

[18] A. Einstein, M. Grossmann, *Entwurf einer allgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation*, Z. Math. Phys. **62** (1913), I. Physikalischer Teil 225-244 ; II. Mathematischer Teil, 244-261.

[19] A. Fischer, J.E. Marsden, *The Einstein equations of evolution : a geometric approach*, J. Math. Phys. **13** (1972), 546-568.

[20] A. Fischer, J.E. Marsden, *The Einstein evolution equations as a first-order symmetric hyperbolic quasilinear system*, Commun. Math. Phys. **28** (1972), 1-38.

[21] R.P. Geroch, *What is a singularity in General Relativity ?*, Ann. Phys. **48** (1968), 526-540.

[22] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge Monographs on Math. Phys., Cambridge, 1973.

[23] S.W. Hawking, R. Penrose, *The singularities of gravitational collapse and cosmology*, Proc. Roy. Soc. London **314** (1970), 529-548.

[24] D. Hilbert, *Die Grundlagen der Physik, (Erste Mitteilung)*, Nachr. Gesellsch. Wiss. Göttingen **3** (1915), 395-407.

[25] W. Israel, *Dark stars : the evolution of an idea*, in *300 years of gravitation*, S.W. Hawking et W. Israel ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1987), 199-276.

[26] J.L.KAZDAN, *Positive energy in General Relativity*, Séminaire Bourbaki, Exposé n° 593, Astérisque **92-93** (1982), 315-330.

[27] S. KLAINERMAN, *The null condition and global existence to nonlinear wave equations*, Lect. Appl. Math. **23** (1986), 293-326.

[28] M.D. KRUSKAL, *Maximal extension of the Schwarzschild metric*, Phys. Rev. **119** (1960), 1743-1745.

[29] J. LERAY, *Hyperbolic differential equations*, notes Inst. Adv. Stud., Princeton (1952).

[30] A. LICHNEROWICZ, *Sur certains problèmes globaux relatifs au système des équations d'Einstein*, Act. Sci. Ind. **833** (1939), Hermann, Paris.

[31] H.A. LORENTZ, *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light*, Proc. Acad. Sci. Amsterdam **6** (1904).

[32] H. MINKOWSKI, *Space and Time*, Address at the 80th Assembly of German Natural Scientists and Physicians, Cologne (1908), in *The principle of relativity*, Dover Pub. (1952), 73-91.

[33] H. MINKOWSKI, *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*, Nachr. Gesellsch. Wissensch.. Göttingen (1908), 53.

[34] C. MISNER, K. THORNE, J.A. WHEELER, *Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1973.

[35] C. MORAWETZ, *The limiting amplitude principle*, Commun. Pure Appl. Math. **15** (1962), 349-362.

[36] T. PARKER, C. TAUBES, *On the proof by E. Witten of the positive mass conjecture*, Commun. Math. Phys. **84** (1982), 223-238.

[37] R. PENROSE, *Unsolved problems in General Relativity*, in *Seminar in Differential Geometry*, Ann. Math. Studies **102** (1981), 631-668.

[38] H. POINCARÉ, *Sur la dynamique de l'électron*, Rend. Circ. Mat. Palermo **21** (1906), 129-176.

[39] R.K. SACHS, H. WU, *General Relativity for the mathematician*, Grad. Texts in Math. **48**, Springer Verlag, New York, 1977.

[40] R. SCHOEN, S.T. YAU, *On the proof of the positive mass conjecture I*, Commun. Math. Phys. **65** (1978), 45-76.

[41] R. SCHOEN, S.T. YAU, *On the proof of the positive mass conjecture II*, Commun. Math. Phys. **79** (1981), 231-260.

[42] K. SCHWARZSCHILD, *Über das Gravitationsfeld eines Masses nach der Einsteinschen Theorie*, Sitzungsber. Königl. Preuß. Akad. Wiss. (1916), 189-196.

[43] K.S. THORNE, *Gravitational radiation*, in *300 years of gravitation*, S.W. Hawking et W. Israel ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1987), 330-458.

[44] H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie*, (1920) ; *Space, Time, Matter*, Engl. version, Dover, New York, (1952).

[45] E. WITTEN, *A new proof of the positive energy theorem*, Commun. Math. Phys **80** (1981), 381-402.

[46] S.T. YAU, *Problems Section*, in *Seminar in Differential Geometry*, Ann. Math. Studies **102** (1981), 695-697.

Jean Pierre BOURGUIGNON

Centre de Mathématiques
U.R.A. 169 du C.N.R.S.
Ecole polytechnique
F-91128 PALAISEAU Cedex