PIERRE PANSU

Le flot géodésique des variétés riemanniennes à courbure négative

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki, exp. nº 738, p. 269-298

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__269_0>

Séminaire BOURBAKI Février 1991
43ème année, 1990-91, n° 738

LE FLOT GÉODÉSIQUE DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES À COURBURE NÉGATIVE

par Pierre PANSU[1]

1. INTRODUCTION

Sur une variété riemannienne V, la distance entre deux points est, par définition, la borne inférieure des longueurs des courbes qui les relient. Pour deux points assez proches, cette borne inférieure est atteinte pour une unique courbe. On appelle *géodésique* une courbe paramétrée qui réalise ce minimum entre deux quelconques de ses points (assez proches), et qui est parcourue à vitesse constante. Les géodésiques sont les solutions d'une équation différentielle du second ordre. Autrement dit, ce sont les projections des orbites d'un champ de vecteurs X sur le fibré tangent TV. On dit que V est *complète* si ce champ est complet, i.e., s'il s'intègre en un groupe à un paramètre (ϕ_t) de difféomorphismes de TV, défini pour tout temps.

Ainsi, les géodésiques peuvent être vues sous deux angles. Le point de vue variationnel - la géodésique est solution d'un problème de Dirichlet - a joué un rôle essentiel dans le développement interne de la géométrie riemannienne. Le point de vue dynamique - la géodésique est solution d'un problème de Cauchy - a donné naissance à une branche particulièrement riche en intéractions avec les disciplines voisines.

[1] L'auteur est partiellement soutenu par le contrat CEE GADGET n^0 SC1–0105–C.

Dans cet exposé, on rappellera quelques-unes des propriétés globales du flot lorsque la courbure est négative. La plus saisissante est sans doute le fait que les géodésiques, au comportement apparemment irrégulier, s'organisent collectivement suivant une loi codée dans le groupe fondamental (stabilité structurelle). L'apport de la théorie ergodique, notamment la notion d'entropie, soulève de nombreux problèmes de rigidité du genre : telle propriété est caractéristique de tel exemple. On présentera notamment trois résultats récents qui vont dans ce sens :

- caractérisation du flot géodésique des espaces localement symétriques par la différentiabilité du feuilletage stable ;
- caractérisation des espaces localement symétriques comme minima de l'entropie normalisée par la courbure ;
- détermination d'une surface par son spectre marqué des longueurs.

Je tiens à remercier Patrick Foulon et les participants du séminaire de Géométrie Ergodique de l'Ecole Polytechnique qui m'ont initié aux mystères du flot géodésique.

2. INSTABILITE INFINITESIMALE

2.1. *Un flot hamiltonien.* Une géodésique parcourue à vitesse constante est un point critique de l'énergie

$$\frac{1}{2}\int \| \dot{c}(t) \|^2 \ dt.$$

Depuis Hamilton, on sait que le champ de vecteurs X, dont les orbites se projettent sur les géodésiques, vit plus naturellement sur le fibré cotangent que sur le fibré tangent.

La métrique définit une fonction H - la moitié du carré de la norme des covecteurs - sur le cotangent. Or celui-ci porte une 1-forme canonique α, dont la différentielle extérieure $d\alpha$ est symplectique. La relation

$$dH = -i_Y d\alpha$$

définit le champ de vecteurs hamiltonien Y, dont le flot préserve α. La métrique définit aussi un difféomorphisme (linéaire sur les fibres) de TV sur T^*V. Ce difféomorphisme applique le champ hamiltonien Y sur le flot géodésique X, la forme α sur une 1-forme A et la fonction H en une fonction - la norme des vecteurs - invariante par X. Le flot géodésique est tangent aux surfaces de niveau - les fibrés en sphères, et on considérera désormais sa restriction au fibré unitaire T_1V. La restriction de A au fibré unitaire est une forme de contact, qui détermine entièrement le champ X, via les relations

$$A(X) = 1, \quad i_X dA = 0.$$

On dit que X est le *champ de Reeb* de la forme de contact A. On voit que X préserve l'élément de volume

$$A \wedge (dA)^{n-1}$$

(où n est la dimension de V) que l'on appelle souvent la *mesure de Liouville.*

2.2. *Intervention de la courbure.*

Pour évaluer la différentielle du difféomorphisme ϕ_t, on doit résoudre l'équation aux variations des géodésiques. C'est l'équation de Jacobi. Elle porte sur des champs de vecteurs tangents J le long d'une géodésique $c(t)$, et s'écrit, en fonction de la dérivée covariante D de la métrique riemannienne,

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\dot{c}, J)\dot{c} = 0$$

où R est le tenseur de courbure riemannien. La courbure apparaît donc à travers l'endomorphisme symétrique

$$u \mapsto R(\dot{c}, u)\dot{c} \ ,$$

nul sur $\dot{c}$, et dont les autres valeurs propres sont des courbures sectionnelles.

De cette équation vectorielle, tirons une équation satisfaite par la norme du champ de vecteurs J :

$$\frac{d^2}{dt^2}|J| = -\langle R(\dot{c}, J)\dot{c}, \frac{J}{|J|}\rangle + |\frac{DJ}{dt}|^2 - \langle \frac{J}{|J|}, \frac{DJ}{dt}\rangle^2$$
$$\geq -\langle R(\dot{c}, J)\dot{c}, \frac{J}{|J|}\rangle.$$

On voit qu'il est plus aisé d'interpréter l'équation de Jacobi quand on se donne une borne supérieure sur la courbure sectionnelle plutôt qu'une borne inférieure. On suppose désormais que J est orthogonal au vecteur vitesse $\dot{c}$.

Si la courbure sectionnelle est négative ou nulle, la fonction $t \to |J(t)|$ est *convexe*. Cela annonce le fait que *localement la fonction distance entre deux géodésiques est convexe.*

Si de plus la courbure sectionnelle K est majorée par une constante négative, par exemple $K \leq -1$, alors en général, la fonction $|J(t)|$ tend vers l'infini au moins comme e^t lorsque t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Cela indique qu'*en général deux géodésiques infiniment voisines divergent exponentiellement.*

Il y a toutefois des exceptions : certaines solutions tendent vers 0 en $+\infty$ ou en $-\infty$. L'espace E des champs de Jacobi le long de c orthogonaux à $\dot{c}$ est de dimension $2n-2$. Les solutions qui tendent vers 0 en $+\infty$ (resp. $-\infty$) forment un sous-espace vectoriel E^s (resp. E^u) de dimension moitié $n-1$. En effet, pour chaque t, la condition $J(t) = 0$ définit un sous-espace $E(t)$ de E, de dimension $n-1$, et E^s est la limite des $E(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Clairement, $E^s \cap E^u = 0$. Revenant au fibré unitaire tangent, en chaque point $p \in T_1V$, on interprète E^s_p et E^u_p comme des sous-espaces de T_pT_1V. En termes dynamiques, E^s_p *est candidat à être l'espace tangent en* p *à la variété stable de* p.

Conclusion. La courbure négative se manifeste de trois manières différentes :

(1) la convexité de la fonction distance ;

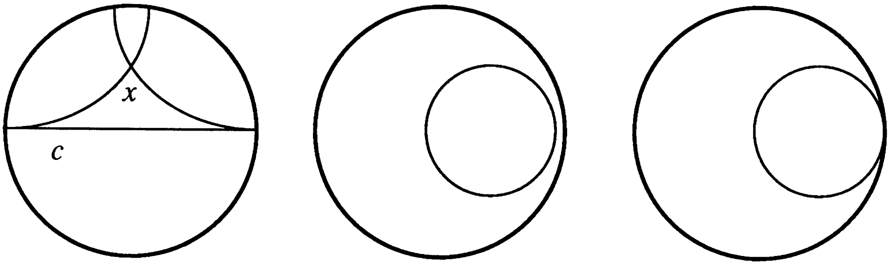
(2) l'instabilité des géodésiques ;

(3) l'existence de variétés stable et instable transverses et de dimension $n-1$.

3. L'ESPACE DES GEODESIQUES

3.1. *Le plan hyperbolique*

Le *plan hyperbolique*, noté H^2, découvert par Lobatchevsky et Bolyai vers 1828, est une géométrie où l'axiome des parallèles est en défaut. On le représente traditionnellement comme l'intérieur d'un disque plan. Les géodésiques sont les arcs de cercle orthogonaux au bord (appelé le *cercle à l'infini* et noté $H^2(\infty)$ car il se trouve à distance infinie). On voit que, étant donnés une géodésique c et un point x, il existe une infinité de géodésiques passant par x et ne rencontrant pas c (voir figure).

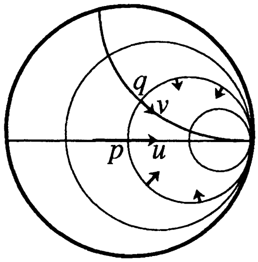


Le plan hyperbolique

Toutefois, par deux points distincts du cercle à l'infini passe exactement une géodésique. *L'espace des géodésiques* $G(H^2)$ du plan hyperbolique est donc

$$G(H^2) = H^2(\infty) \times H^2(\infty) - \text{Diag}.$$

Les variétés stables du flot géodésique sont aussi aisées à décrire. Les cercles géodésiques (lieu des points équidistants d'un point donné) sont représentés par des cercles euclidiens mais décentrés (le centre hyperbolique est plus près du bord que le centre euclidien). A la limite, les cercles euclidiens tangents au bord s'appellent *horocycles.* Leurs trajectoires orthogonales sont des géodésiques convergeant exponentiellement dans une direction. Il y a donc bien, pour chaque $p = (x, u)$ du fibré unitaire, une variété stable. On l'obtient comme suit. L'orbite de p est une géodésique orientée aboutissant en un point ξ du cercle à l'infini. Un point $q = (y, v)$ de la variété stable de p a sa projection y sur l'horocycle passant par x et q, et le vecteur v est la normale dirigée vers q (voir figure).



Les variétés stables s'identifient aux horocycles

3.2. *Les quotients du plan hyperbolique.*

Dans les années 20, E. Artin, G.D. Birkhoff, J. Koebe s'intéressent à la dynamique du flot géodésique sur un quotient du plan hyperbolique. Ces variétés s'imposent en raison du dictionnaire - issu du théorème d'uniformisation de Riemann-Poincaré-Koebe : chaque surface de Riemann, i.e., variété complexe de dimension 1, de caractéristique d'Euler négative s'écrit uniquement comme un quotient de ce plan hyperbolique par un groupe discret sans point fixe d'isométries préservant l'orientation.

D'autre part, la complexité de la dynamique a été mise en évidence dès 1898 par J. Hadamard. Suivant la voie indiquée par H. Poincaré, on étudie les orbites fermées. Puis, sous l'impulsion de G. D. Birkhoff, les questions de transitivité. Petit à petit, les résultats seront étendus à la courbure variable et aux dimensions supérieures. Voir à ce sujet l'article de revue de G. A. Hedlund [He2].

Si V est le quotient de H^2 par un groupe discret Γ d'isométries de H^2, sans point fixe, alors l'espace des géodésiques de V est le quotient de l'espace des géodésiques du revêtement universel $\tilde{V} = H^2$ par l'action de Γ. Comme l'action de Γ se prolonge au bord, on a

$$G(V) = \Gamma \setminus (H^2(\infty) \times H^2(\infty) - \mathrm{Diag}).$$

Les propriétés du flot géodésique de V se traduisent par des propriétés de l'action de Γ sur $H^2(\infty)$ et sur $G(H^2)$.

Une géodésique fermée dans V correspond à un *axe* de Γ, i.e. une paire de points de $\tilde{V}(\infty)$, qui sont des points fixes (une source et un puit) d'un élément de Γ. On a un dictionnaire :

densité des géodésiques fermées dans T_1V	$\Longleftrightarrow$	densité des axes dans $G(H^2)$
la plupart des géodésiques sont denses dans T_1V	$\Longleftrightarrow$	la plupart des orbites de Γ dans $G(H^2)$ sont denses
ergodicité du flot géodésique dans T_1V pour la mesure de Liouville.	$\Longleftrightarrow$	ergodicité de Γ dans $G(H^2)$ pour la mesure symplectique

3.3. *Généralisation*

La discussion précédente s'étend aux variétés simplement connexes à courbure négative (et même, pour certains aspects, courbure négative ou nulle). La convexité de la distance entre géodésiques joue un grand rôle : elle garantit l'unicité de la géodésique joignant deux points et la convexité des boules. Etant donné une géodésique c, la famille des boules passant par x et centrées en $c(t)$ est croissante, sa réunion définit une *horoboule*, dont le bord est une *horosphère*. Deux géodésiques c et c' définissent la même famille d'horosphères si et seulement si la distance $d(c(t), c'(t))$ reste bornée lorsque t tend vers $+\infty$. Deux telles géodésiques sont dites *asymptotes*, et les classes d'équivalence de géodésiques asymptotes forment la *sphère à l'infini* de V, notée $V(\infty)$ (si l'idée de cette relation d'équivalence remonte à M. Morse [M2], J. Hadamard [H1] mettait déjà en évidence l'invariance de "l'ordre circulaire" des géodésiques).

Lorsque la courbure est strictement négative, deux géodésiques asymptotes se rapprochent l'une de l'autre exponentiellement, et les horosphères, relevées dans le fibré unitaire par leur vecteur normal rentrant, sont les variétés stables. De plus, chaque horosphère est une sous-variété plongée, aussi régulière que la métrique donnée. Enfin, par deux points de la sphère à l'infini passe une unique géodésique. Par conséquent, lorsque V est simplement connexe à courbure strictement négative, *l'espace des géodésiques* $G(V)$ s'identifie aux paires de points distincts de la sphère à l'infini.

En général, pour une variété V à courbure négative, non simplement connexe, de revêtement universel $\tilde{V}$, l'espace des géodésiques $G(V)$ est le quotient par l'action du groupe fondamental $\pi_1(V)$ de l'ensemble des paires de points distincts de $\tilde{V}(\infty)$, et le dictionnaire s'étend, P. Eberlein et G. O'Neill [EO], [E].

4. GEODESIQUES FERMEES

Dans ce paragraphe, on explique pourquoi, en courbure négative, il y a tant de géodésiques fermées. Le principe dégagé vers 1924 par E. Artin, J. Nielsen, M. Morse (voir [He2]) est que, près de chaque géodésique presque fermée, il y a une géodésique fermée. Cela résulte du fait suivant : dans l'espace euclidien, si on se déplace en regardant le ciel, l'aspect de la voûte étoilée ne change pas (l'angle entre les étoiles ne varie pas). Dans le plan hyperbolique, au contraire, lorsqu'on se déplace, on voit les étoiles s'écarter les unes des autres. Plus précisément,

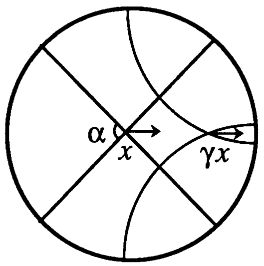
Lemme.— *Soit $\tilde{V}$ une variété simplement connexe à courbure majorée par une constante négative $-\kappa$. Soit S un secteur de sommet x, d'ouverture α, déterminant un ouvert O sur la sphère à l'infini. Si $y \in S$ et $d(x,y) > 1$, alors O est vu de y sous un angle au moins égal à $\alpha'(\kappa,\alpha) > \alpha$.*

Théorème. (Closing Lemma).— *Soit V une variété à courbure négative. Pour tout ϵ petit et T grand, il existe $\eta(\epsilon,T)$ avec la propriété suivante : pour tout $p \in T_1V$ tel que $d(p,\phi_T(p)) < \eta$, il existe $q \in T_1V$ et un $T' \in [T-\epsilon, T+\epsilon]$ tel que $\phi_{T'}(q) = q$ et $d(\phi_t p, \phi_t q) < \epsilon$ pour tout $t \in [0,T]$.*

En effet, passons au revêtement universel. Il existe une isométrie $\gamma \in \pi_1(M)$ telle que

$$d(\gamma(p), \phi_T(p)) < \epsilon \ .$$

Il faut montrer que γ laisse invariante une géodésique proche de p.



Pour ϵ petit et T grand, $\gamma(p)$ est contenu dans un secteur $S(p,\alpha)$ de petite ouverture. D'après le lemme, ce secteur est envoyé dans lui-même par γ. Par symétrie, le secteur opposé $S(-\phi_T(p),\alpha)$ est envoyé dans lui-même par γ^{-1}. La famille décroissante de convexes

$$\gamma^n(S(p,\alpha))$$

a une intersection vide, donc leurs adhérences dans $V \cup V(\infty)$ ont un seul point commun, fixé par γ. On trouve de même un point fixe de γ^{-1}. La géodésique qui les joint est invariante par γ et proche de p.

Corollaire.— *Soit V une variété simplement connexe à courbure majorée par une constante négative. Toute géodésique récurrente (i.e., qui s'accumule sur elle-même dans T_1V) est limite de géodésiques fermées. En particulier, si le volume de V est fini, les points périodiques du flot géodésique sont denses dans T_1V.*

Il y a d'autres manières de mesurer la richesse d'un flot en orbites périodiques : compter le nombre de géodésiques fermées de longueur inférieure à T, étudier leur répartition "en mesure" (voir au paragraphe 11), étudier finement la répartition des longueurs à travers les propriétés de la fonction zeta (voir [PP]). La méthode consiste à établir une correspondance entre le flot et un *flot symbolique*, décrit en termes finis. L'idée de départ - coder chaque orbite par une suite infinie de symboles - se trouve en germe dans [H1] et s'est développée en une riche théorie que M. Morse [M1] a baptisée *dynamique symbolique.*

5. TRANSITIVITE

L'instabilité des géodésiques, mise en évidence en 2.2, donne à penser que, sur une variété compacte, une géodésique typique va visiter toute la variété. C'est ce que l'on entend par transitivité. Par exemple, J. Hadamard [H1] montrait que, étant donnée une surface à courbure négative plongée dans l'espace euclidien, qui a par conséquent des branches infinies, après une perturbation arbitrairement petite, on peut faire partir toute géodésique dans n'importe laquelle des branches infinies.

La *transitivité topologique* affirme l'existence de géodésiques denses. C'est une conséquence assez directe de la densité des orbites périodiques, voir [He2].

Dans la catégorie mesurable, la transitivité s'appelle *ergodicité.* Elle affirme que *les seules fonctions mesurables invariantes sont les fonctions constantes presque partout.* Activement recherchée - l'histoire de l'ergodicité remonte à Maxwell et Boltzmann, mais peu d'exemples de systèmes dynamiques ergodiques existent avant les années 30, - elle est prouvée par Hedlund en 1934 [He1] pour les surfaces d'aire finie, à courbure constante.

En 1938, E. Hopf propose l'argument suivant, qui s'étend au cas de la courbure variable [Hop]. Il s'agit de prouver l'ergodicité de l'action du groupe $\pi_1(V)$ sur les paires de points du cercle à l'infini. Un lemme de G. Birkhoff permet de se ramener aux fonctions obtenues comme limites temporelles de fonctions continues à support compact sur V (les limites temporelles

$$f_{\pm}(x) = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f\circ\phi_s(x)\,ds$$

existent pour presque tout x et sont presque partout égales). Or clairement la limite f_+ est constante sur les variétés stables, i.e., sur les tranches $\xi \times \tilde{V}(\infty)$, f_- est constante sur les variétés instables.

Dans cet argument intervient un point technique : le mesure naturelle sur $G(\tilde{V})$ est-elle absolument continue par rapport à la mesure produit ? Cela découle de la différentiabilité de l'homéomorphisme entre l'espace des géodésiques $G(\tilde{V})$ et $\tilde{V}(\infty)\times\tilde{V}(\infty) - \mathrm{Diag}$, liée à la régularité du feuilletage stable W^s. E. Hopf savait montrer seulement en dimension 2 que le feuilletage stable est de classe C^1. En dimensions supérieures, le problème de l'ergodicité du flot géodésique des variétés compactes à courbure négative non constante est resté ouvert jusqu'en 1962. D.V. Anosov le résoud en montrant que le feuilletage stable est absolument continu [A1]. On reviendra sur cette question de régularité au paragraphe 8.

6. STABILITE STRUCTURELLE

Dans une variété compacte à courbure négative, chaque classe d'homotopie libre de courbes fermées contient une unique géodésique (à translation du paramètre près). Cela résulte du principe variationnel (existence) et de la convexité (unicité). Par conséquent, si on perturbe la métrique, on peut suivre chaque géodésique fermée. En est-il de même pour les géodésiques non fermées ? La réponse remonte à M. Morse

[M1] : l'espace des géodésiques $G(V)$ est essentiellement indépendant de la métrique à courbure négative particulière. Cela résulte de la caractérisation de la sphère à l'infini du revêtement universel au moyen de *quasigéodésiques*, due à G.A. Margulis.

6.1. *Invariance de l'espace des géodésiques*

Une courbe σ dans $\tilde{V}$ est une *quasigéodésique* si

(1) sa vitesse est bornée ;

(2) le rapport $\frac{\|t-s\|}{d(\sigma(t),\sigma(s))}$ est borné.

On montre que, dans une variété simplement connexe à courbure majorée par une constante négative, toute quasigéodésique est contenue dans un voisinage tubulaire de largeur bornée d'une unique géodésique. Par conséquent, la sphère à l'infini s'identifie aux classes d'équivalence de quasigéodésiques asymptotes.

En fait, la notion de quasigéodésique garde un sens dans un groupe discret de type fini. Si V est compacte, $\tilde{V}(\infty)$ est attaché intrinsèquement au groupe discret $\Gamma = \pi_1(V)$, et

$$G(V) = \Gamma \setminus (\Gamma(\infty) \times \Gamma(\infty) - \mathrm{Diag}).$$

La sphère à l'infini devient un outil pour l'étude du groupe Γ : des propriétés de l'action de Γ sur $\Gamma(\infty)$, on déduit la structure des sous-groupes abéliens, l'existence de sous-groupes distingués libres, la finitude du nombre de sous-groupes isomorphes à un groupe donné, la finitude de $Out(\Gamma)$), etc...

Ce point de vue, inauguré par A. Preissmann [P], a été développé par M. Gromov [Gr2]. Celui-ci généralise les propriétés des groupes fondamentaux liées à la courbure négative à la classe des *groupes hyperboliques*, qui contient "la plupart" des groupes discrets de type fini, voir l'exposé [Gh3].

6.2. *Stabilité structurelle des flots d'Anosov*

Soit V une variété compacte, X le flot géodésique d'une métrique riemannienne à courbure négative, vu comme un champ de vecteurs sur T_1V.

On vient de voir que, si on perturbe X parmi les champs géodésiques attachés à des métriques riemanniennes, l'espace des orbites reste inchangé. Qu'en est-il pour des perturbations plus générales ? C'est le problème de la stabilité structurelle.

D.V. Anosov [A2] a formulé ses résultats sous l'hypothèse suivante sur un champ de vecteurs différentiable X, de flot ϕ_t, sur une variété M : il existe une décomposition

$$(U) \qquad TM = E^s \oplus E^u \oplus E^0$$

où $E^0 = \mathbf{R}X$, et sur E^s, (resp. E^u) la dérivée $d\phi_t$ (resp. $d\phi_{-t}$) est uniformément contractante.

Depuis, un champ de vecteurs ayant ces propriétés est appelé *flot d'Anosov.* La définition correspondante pour un difféomorphisme est évidente (supprimer la partie E^0).

Théorème [D.V. Anosov], ([A2]).— *Sur une variété compacte, un champ de vecteurs d'Anosov X est C^1-structurellement stable, i.e., si X' est un champ de vecteurs suffisamment C^1-proche de X, il existe un homéomorphisme (dépendant différentiablement de la perturbation) envoyant les orbites du flot de X sur les orbites du flot de X'.*

D.V. Anosov fait remonter la méthode qu'il emploie à J. Hadamard, [H2].

Peut-on faire mieux ? On ne peut certainement pas transformer cette équivalence d'orbites en conjugaison (même mesurable), car les longueurs des orbites fermées, par exemple, seraient alors conservées.

Du côté de la régularité, on peut affirmer que l'équivalence d'orbites n'est pas absolument continue en général. En effet, il résulte de la preuve du théorème de rigidité de G.D. Mostow [Mos] que, pour des surfaces à courbure -1 homéomorphes mais non isométriques, la correspondance entre cercles à l'infini n'est pas absolument continue.

Enfin, on peut se demander si, pour deux variétés à courbure négative ayant même type d'homotopie, l'homéomorphisme entre fibrés unitaires tangents implique un homéomorphisme entre variétés. C'est vrai en grande dimension, mais on ne peut pas aller jusqu'à un difféomorphisme, [FJ].

6.3. *Universalité de l'hyperbolicité*

L'instabilité du comportement individuel des trajectoires entraîne la stabilité de leur comportement collectif. Ce principe paradoxal, mis en évidence par D.V. Anosov dans le contexte des flots géodésiques, a été observé simultanément par S. Smale sur son fameux "fer à cheval". S. Smale [S] a dégagé l'idée que l'hypothèse (U) d'Anosov, satisfaite seulement le long d'un compact invariant Λ suffit pour assurer la stabilité de Λ et une description symbolique. Un tel compact invariant est dit *hyperbolique.*

Il émerge de ces travaux une méthode d'investigation d'un système dynamique : partant du fait que les ensembles invariants hyperboliques sont compris, on doit décrire comment le comportement du système se rattache ou diffère du comportement hyperbolique. Ce point de vue est toujours d'actualité, voir par exemple [Y].

7. COURBURE NEGATIVE OU NULLE ET ERGODICITE

Certains aspects de la courbure négative s'étendent au cas où on autorise la courbure à s'annuler tout en restant non positive. En quelque sorte, il suffit qu'une géodésique rencontre un peu de courbure négative pour que son comportement soit conforme au modèle hyperbolique. Cette généralisation fait l'objet de l'article de revue de Ya. Pesin [Pes].

La question de l'ergodicité du flot géodésique a conduit W. Ballmann à l'hypothèse suivante.

Définition.— *Soit V une variété à courbure négative ou nulle.* Le rang *d'une géodésique c est la dimension de l'espace vectoriel des champs de Jacobi parallèles le long de c.* Le rang de la variété *V est la borne inférieure des rangs des géodésiques de V.*

L'hypothèse de rang égal à 1 entraîne probablement l'ergodicité du flot géodésique. Malheureusement, ce point n'est pas encore complètement éclairci. Toutefois, on a

Théorème [W. Ballmann et M. Brin], ([BB]).— *Soit V une variété à courbure négative ou nulle, de rang un. Si le volume de V est fini, alors il existe dans T_1V un ouvert invariant sur lequel le flot géodésique est ergodique.*

Voici deux classes de variétés de rang supérieur ou égal à 2 :

- les produits riemanniens : le rang d'un produit est la somme des rangs des facteurs ;
- les espaces symétriques de rang supérieur ou égal à 2 ; un espace symétrique est le quotient d'un groupe de Lie semi-simple par son compact maximal ; le rang est la dimension des sous-espaces plats totalement géodésiques maximaux, et ne vaut 1 que pour une courte liste d'exemples décrits au paragraphe suivant.

Le flot géodésique sur un produit (resp. sur un espace localement symétrique de rang supérieur à 2) a des intégrales premières invariantes par isométries. Il s'agit de l'angle que fait un vecteur tangent avec les facteurs (resp. avec les murs de sa chambre de Weyl).

Suite aux efforts conjugués de W. Ballman, M. Brin, K. Burns, P. Eberlein, R. Spatzier, on sait maintenant que les variétés compactes, à courbure négative ou nulle, de rang supérieur ou égal à deux, sont essentiellement les variétés localement symétriques de rang supérieur ou égal à deux.

Théorème. ([Bal], [BBE], [BBS], [BS]).— *Soit V une variété compacte à courbure négative, de rang au moins égal à 2. Alors le revêtement universel de V est, ou bien un produit, ou bien un espace symétrique de rang supérieur ou égal à 2.*

La preuve consiste à reconstruire un à un les éléments de la géométrie des espaces symétriques : sous-espaces plats totalement géodésiques maximaux, chambres de Weyl, intégrales premières. W. Ballmann montre que les intégrales premières sont invariantes par holonomie et conclut avec un théorème fameux de M. Berger. K. Burns et R. Spatzier préfèrent utiliser la rigidité des immeubles de Tits sphériques.

Le théorème est maintenant connu sous l'hypothèse suivante : tout point de T_1V est récurrent [EH].

8. LES ESPACES SYMETRIQUES DE RANG 1

Ce sont les espaces symétriques dont la courbure est strictement négative. Il y a le plan hyperbolique décrit en 3, et ses généralisations, en dualité avec les espaces projectifs. Il y a un exemple, noté $\mathbf{K}H^m$ sur chacun des corps $\mathbf{K} = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{Ca}$, pour chaque dimension m (seulement $m = 2$ pour les octaves de Cayley $\mathbf{Ca}$). Par exemple, le plan hyperbolique est à la fois $\mathbf{R}H^2$ et $\mathbf{C}H^1$.

Dans un espace symétrique, le tenseur de courbure est parallèle, l'équation de Jacobi est à coefficients constants. En rang un, le groupe d'isométries est transitif sur le fibré unitaire, et les valeurs propres non nulles de l'opérateur

$$u \mapsto R(\dot{c}, u)\dot{c} \ ,$$

ne dépendent pas de $\dot{c}$. Elles valent -1 (dans le cas réel), -1 et -4 dans les autres cas, avec les multiplicités $(m-1)k$, et $k-1$ respectivement ($k = dim\,\mathbf{K}$). Voici pourquoi : $\mathbf{K}H^m$ est un ouvert dans le projectif $\mathbf{K}P^m$. Chaque géodésique est contenue dans une $\mathbf{K}$-droite unique, qui est totalement géodésique à courbure -4, et responsable des $k-1$ valeurs propres -4. Chaque vecteur propre de valeur propre -1 est tangent à un $\mathbf{R}P^2 \subset \mathbf{K}P^m$ totalement géodésique à courbure -1, qui contient la géodésique.

Il est clair que, dans ces exemples symétriques, les directions stables E^s, qui sont déterminées par le tenseur de courbure, sont différentiables.

Comme on l'a vu au paragraphe 5, la question de la régularité du feuilletage en variétés stables est délicate. D.V. Anosov a montré que, en dimension supérieure à 3, le feuilletage n'est pas toujours de classe C^1. On arrive à C^1 à condition de faire une hypothèse sur les exposants de contraction uniforme du flot (M. Hirsch et C. Pugh [HP], B. Hasselblatt [Has]), qui correspond au pincement 1/4 pour la courbure sectionnelle.

En dimension 2, S. Hurder et A. Katok [HK] sont allés plus loin : il obtiennent assez de régularité (une dérivée dans la classe de Zygmund) pour pouvoir définir et calculer l'invariant de Godbillon-Vey (c'est heureux, car ces feuilletages sont les principaux exemples où l'invariant de Godbillon-Vey est non trivial, voir par exemple [Gh2]). En fait, leur résultat s'étend aux flots d'Anosov *de contact* en dimension 3. Un flot d'Anosov est de contact si le champ de plans $E^s \oplus E^u$ forme une structure de contact de classe C^∞ ; c'est automatique pour une flot géodésique.

Il est probable que le feuilletage stable n'est de classe C^∞ que pour les espaces localement symétriques de rang 1. Dans cette voie, Y. Benoist, P. Foulon et F. Labourie ont obtenu le résultat suivant, qui constitue une sorte de pendant à la caractérisation des espaces symétriques de rang supérieur à 1 évoquée au paragraphe précédent.

Théorème. [Y. Benoist, P. Foulon et F. Labourie], ([BFL]).— *Tout flot d'Anosov de contact sur une variété compacte, dont les directions stables et instables sont de classe C^∞ est obtenu à partir du flot géodésique d'une variété localement symétrique de rang 1 par les opérations suivantes : passage à un revêtement ou à un quotient fini, changement de paramètre de classe C^∞.*

En fait, les seuls changements de paramètre possibles sont de la forme X changé en $X/(1+\alpha(X))$ où α est une 1-forme fermée dont seule la classe de cohomologie joue un rôle.

Remarques. Le résultat en dimension 3 est dû à E. Ghys, [Gh1].

Il est probable que le théorème reste vrai si les feuilletages sont supposés seulement de classe C^2. Cela a été établi en dimension 3 par S. Hurder et A.Katok [HK].

La preuve : l'idée initiale est due à M. Kanai [Kan]. Soit A la forme de contact. Sur le noyau de A, la forme symplectique dA, les sous-espaces lagrangiens E^u et E^s déterminent une forme quadratique q de signature nulle, invariante par le flot. Par conséquent, $q + A^2$ est une métrique pseudoriemannienne invariante par le flot. Ceci constitue une structure géométrique rigide.

Y. Benoist, P. Foulon et F. Labourie utilisent un résultat de M. Gromov [Gr3] sur les pseudogroupes d'isométries locales pseudoriemanniens : une orbite dense d'un tel pseudogroupe est automatiquement ouverte. Ils obtiennent une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ d'isométries locales. La condition d'Anosov entraîne que $\mathcal{G}$ est semi-simple donc l'orbite ouverte et dense porte une structure modelée sur un espace homogène G/H. Un argument dynamique montre que cette structure est complète, donc V est un quotient $V = \Gamma \setminus G/H$.

Il reste à trier les paires G/H possibles. On étudie une "sphère à l'infini généralisée" $(G/H)(\infty) = G/P$ où P est parabolique maximal. La condition d'Anosov entraîne qu'au moins un élément de Γ agit sur G/P comme en courbure négative, i.e., avec un puit et une source.

Ceci conduit à une restriction sur le groupe de Lie G : si P^- est un parabolique maximal opposé à P (par le flot géodésique $X \in \mathcal{G}$), alors $P-$ a exactement deux orbites dans G/P, dont l'une est réduite à un point. La théorie des groupes algébriques montre que, dans ce cas, G est de rang 1.

Remarques.

Le problème plus vaste où le flot n'est pas supposé de contact est ouvert.

Si on part du flot géodésique de V, on trouve un difféomorphisme de T_1V sur le fibré unitaire T_1V' d'un espace localement symétrique qui échange les flots (le changement de paramètre est exclu dans ce cas). Ce difféomorphisme provient-il d'une isométrie de V sur V' ? La réponse est positive lorsque $\dim V = 2$, [Kat] (voir aussi le paragraphe 10) mais la question reste ouverte en dimension supérieure.

9. ENTROPIES

Ce sont des nombres qui mesurent l'instabilité exponentielle des orbites d'une transformation. Ils ont été inventés par A.N. Kolmogorov [K].

9.1. *Entropie topologique* Il s'agit de compter, étant donné une résolution ϵ, le nombre d'orbites de longueur n qu'on peut distinguer. Autrement dit, soit ϕ une transformation d'un espace compact M. Notons $\mathcal{O}_n \subset M^n$ l'ensemble des orbites de longueur n, muni de la distance *sup*. On compte le nombre maximal $N(n,\epsilon)$ de boules 2 à 2 disjointes de rayon $\epsilon/2$ dans l'espace métrique $\mathcal{O}_n$.

L'entropie topologique $h(\phi)$ est la limite

$$h(\phi) = \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log N(n,\epsilon).$$

Le nombre $h(\phi)$ ne dépend pas de la distance choisie lorsque M est compact.

Pour un flot (ϕ_t), on définit l'entropie comme étant celle de ϕ_1.

Pour un flot géodésique, l'entropie topologique est reliée à l'exposant de croissance du volume des boules.

Théorème. [A. Manning], ([Man]).— *Soit (ϕ_t) le flot géodésique d'une variété riemannienne compacte V. Pour $r > 0$ et $\tilde{x}$ un point du revêtement universel $\tilde{V}$, notons $B(\tilde{x}, r)$ la boule de rayon r de centre $\tilde{x}$ dans $\tilde{V}$. Alors pour tout $\tilde{x}$,*

$$h(\phi_1) \geq \lim_{r\to+\infty}\frac{1}{r}\log(\mathrm{vol}\, B(\tilde{x},r))$$

et l'égalité a lieu en courbure négative.

En particulier, l'entropie du flot géodésique de V ne dépend que du revêtement universel $\tilde{V}$ de V, et on parlera librement de l'entropie de $\tilde{V}$. Par exemple, l'entropie de l'espace symétrique $\mathbf{K}H^m$ vaut $km + k - 2$.

En fait, en courbure négative, on a un développement asymptotique

Théorème. [G.A. Margulis], ([Mar]).— *Si V est compacte à courbure négative, alors, pour tout $\tilde{x} \in \tilde{V}$,*

$$\operatorname{vol} B(\tilde{x}, r) \sim c(\tilde{x}) \mathrm{e}^{hr}.$$

On peut aussi penser à l'entropie comme à la dimension de Hausdorff de la sphère à l'infini. Suivant U. Hamenstädt [Ha1], définissons une distance d_∞ sur chaque variété instable comme suit. Si p, q sont sur la même variété instable, on pose

$$d_\infty(p, q) = \mathrm{e}^{-t}$$

où t est le réel tel que $d(\phi_t(p), \phi_t(q)) = \epsilon$.

Dans le revêtement universel, chaque variété instable s'identifie à la sphère à l'infini (privée d'un point). Les distances obtenues ainsi sur la sphère à l'infini sont deux à deux localement équivalentes.

Comparons la distance sur l'espace $\mathcal{O}_n$ des orbites de longueur n avec d_∞. On peut voir $\mathcal{O}_n$ comme $T_1 V$ muni d'une distance d_n. La boule de rayon ϵ centrée en p pour la distance d_n est le produit de boules de rayon ϵ dans les directions du flot et de la feuille stable de p, par la boule de rayon e^{-n} pour d_∞ dans la feuille instable. Par conséquent, *l'entropie topologique du flot géodésique est la dimension de Hausdorff de d_∞.*

Dans le cas des espaces symétriques de rang 1, la distance d_∞ est explicite. Le groupe d'isométrie est transitif sur chaque sphère, et par conséquent sur chaque horosphère. Une horosphère peut-être vue comme une orbite d'un sous-groupe de Lie nilpotent d'isométries - un $\mathbf{R}^{m-1}$ dans le cas réel, un groupe de Heisenberg dans le cas complexe. La distance d_∞ est la distance euclidienne dans le premier cas. Dans le second, c'est une métrique de Carnot invariante, i.e. les courbes de longueur finie sont tangentes à un champ de plans non intégrable (qui correspond à l'espace propre -1 de la courbure).

On s'attend à ce que la mesure de Hausdorff h-dimensionnelle pour d_∞ joue un rôle important. C'est le cas : cette mesure a été inventée en fait par G.A. Margulis, qui en a donné les caractéristiques suivantes.

Théorème [G.A. Margulis], ([Mar]).— *Il existe une unique mesure qui se décompose localement en*

$$dt\, d\mu^s\, d\mu^u$$

où μ^s est une famille de mesures sur les variétés stables, multipliée exactement par e^{ht} par le flot. La famille $dt\, d\mu^s$ est une mesure transverse invariante pour le feuilletage instable.

Cette mesure a été redécouverte par R. Bowen (d'où la notation μ_{BM}).

Théorème. [R. Bowen], ([B]).— *La mesure μ_{BM} est la limite de la moyenne des mesures de Dirac le long des géodésiques fermées de longueur inférieure à t, lorsque t tend vers l'infini.*

Autrement dit, les géodésiques fermées sont équiréparties dans T_1V, mais par rapport à une mesure qui ne coïncide pas, en général, avec la mesure de Liouville.

Enfin, cette mesure μ_{BM} apparaît comme solution d'un problème variationnel. Etant donné une transformation ϕ, une mesure invariante μ donne une autre façon de compter les orbites distinctes, d'où émerge un autre nombre, *l'entropie probabiliste de ϕ relativement à la mesure μ*, notée $h_\mu(\phi)$.

E.I. Dinaburg [D] a montré que, en général, $h(\phi)$ est la borne supérieure des entropies des mesures invariantes. Il s'établit un parallèle avec la thermodynamique : étant donné une transformation ϕ, pensons à une mesure invariante comme décrivant l'état thermodynamique d'un système ; l'état d'équilibre est celui où l'entropie est maximale. Dans le cas des flots géodésiques à courbure négative, cette borne supérieure est atteinte pour une unique mesure de probabilité, appelée *mesure d'entropie maximale* qui n'est autre que μ_{BM}.

La comparaison des entropies du flot géodésique entre elles et avec les invariants traditionnels de la géométrie riemannienne donne lieu à toute une série de problèmes, dont voici trois échantillons.

9.3 *Cas d'égalité des entropies.*

Par unicité de la mesure d'entropie maximale, l'égalité $h = h_{Liouville}$ entraîne que mesure d'entropie maximale et mesure de Liouville sont égales, et que leurs conditionnelles le long des feuilles stables sont absolument continues les unes par rapport aux autres. C'est tout un faisceau de conditions. Peuvent-elles être remplies pour une métrique non symétrique ?

La réponse n'est connue qu'en dimension 2, où elle est due à A. Katok. Dans ce cas, toute métrique g est conforme à une métrique g_0 à courbure constante, $g = f^2\, g_0$, de même aire que g. On peut mesurer la distance qui sépare g de g_0 par le nombre

$$\rho = \int f \ \leq 1.$$

Théorème. [A. Katok], ([Kat]).— *On a les inégalités*

$$h_{Liouville}(g) \leq \rho h(g_0) \leq \rho^{-1} h(g_0) \leq h(g).$$

Voir aussi Ch. Croke et A. Fathi, [CF].

9.4. *Entropie contre volume.*

M. Gromov [Gr1] a posé le problème suivant : Soit V_0 un quotient compact de l'espace hyperbolique réel. Est-ce la métrique à courbure constante qui, à volume donné, minimise l'entropie topologique ?

La réponse est positive en dimension deux. Celà résulte du théorème d'A. Katok ci-dessus.

En dimension supérieure à **3**, on a ce résultat partiel.

Théorème. [M. Gromov], ([Gr1]).— *Soit V_0 une variété compacte à courbure -1, d'entropie $h_0 = n-1$. Si V est une variété riemannienne homéomorphe à V_0, de même volume, alors l'entropie de V satisfait $h \geq c(n)\, h_0$ où $c(n)$ est une constante ne dépendant que de la dimension n.*

La preuve repose sur le concept de *volume simplicial*, un invariant topologique des variétés qui, pour les variétés à courbure constante -1, est proportionnel au volume. Le facteur $c(n)$ dans l'inégalité est lié au rapport entre volume d'une boule et volume d'un simplexe.

Récemment, G. Besson, G. Courtois et S. Gallot [BCG] ont tenté de remédier à cette perte en introduisant une variante du volume simplicial. Ce nombre est majoré sans perte par l'entropie, il reste à l'évaluer pour les variétés à courbure constante. Cette dernière étape n'est accomplie pour l'instant qu'en dimension 2.

Noter que, grâce aux formules de [KKK] pour les dérivées première et seconde de l'entropie, une approche variationnelle de ce problème est peut-être envisageable.

9.5. *Entropie contre courbure*

Si on reprend l'interprétation de l'entropie comme dimension de Hausdorff de la sphère à l'infini du revêtement universel, et si on se souvient que la normalisation $K \leq -1$ est nécessaire pour que la distance d'U. Hamenstädt satisfasse l'inégalité triangulaire, le problème de savoir quelle métrique donne une dimension de Hausdorff minimale se pose assez naturellement comme suit.

Théorème. [U. Hamenstädt], ([Ha2]).— *Soit V_0 un espace localement symétrique compact, à courbure non constante et comprise entre -4 et -1, d'entropie h_0. Soit V une variété riemannienne compacte, à courbure sectionnelle $K \leq -1$, d'entropie h, qui a même type d'homotopie que V_0, alors $h \geq h_0$, et si l'égalité a lieu, toute équivalence d'homotopie de V sur V_0 est homotope à une isométrie.*

Remarque. L'inégalité $h \geq h_0$ apparaît dans [Pan].

La preuve. Le théorème généralise le théorème de rigidité de G.D. Mostow en rang 1 [Mostow], qui couvre le cas où l'on sait déjà que V est symétrique, et la preuve, dans sa première étape, emprunte la voie tracée par Mostow. On utilise l'homéomorphisme f entre sphères à l'infini évoqué au paragraphe 6. L'égalité des entropies entraîne que f est absolument continu sur presque toute courbe de $\tilde{V}(\infty)$. L'hypothèse $K \leq -1$ garantit que d_∞ majore la distance riemannienne, donc les courbes d_∞-rectifiables ont presque partout une dérivée, qui engendre le long des géodésiques un champ de Jacobi de direction parallèle, mais satisfaisant $J'' + J = 0$.

On est en présence d'une condition qui rappelle la définition du rang en courbure négative ou nulle, et la seconde partie de la preuve consiste à reconstruire pas à pas la géométrie symétrique de rang un : métrique de Carnot, sous-groupes d'isométries nilpotents.

10. LE PROBLEME ISOSPECTRAL

On se pose la question suivante (cf. fin du paragraphe 8) : si deux variétés riemanniennes compactes ont des flots géodésiques conjugués, sont-elles isométriques ? Le réponse est négative dans cette généralité : il existe des déformations de la sphère à géodésiques toutes fermées de longueur 2π, voir [Bes], mais la question reste ouverte en dimension plus grande que 3, dans le contexte de la courbure négative.

Elle est liée à un autre problème favori de la géométrie riemannienne, celui des variétés isospectrales : deux variétés qui ont même spectre du laplacien sont-elles isométriques ? Le lien passe par le *spectre des longueurs*, i.e. l'ensemble des longueurs des géodésiques fermées. En courbure négative, cet ensemble est déterminé par le spectre du laplacien, voir [Ber] à ce sujet.

Contrairement au spectre du laplacien, le spectre des longueurs peut être enrichi d'une information supplémentaire : chaque géodésique a une classe d'homotopie. C'est le *spectre marqué des longueurs*, i.e. la fonction qui, à une classe d'homotopie libre, associe la plus petite longueur d'une géodésique dans cette classe, qui est invariant par conjugaison.

Sachant qu'il existe des surfaces non isométriques ayant même spectre du laplacien, le problème se pose de savoir si la donnée plus riche du spectre marqué détermine la métrique. Ce problème a été résolu en dimension 2, par Ch. Croke et J. P. Otal indépendamment (on trouvera une généralisation de leur résultat dans [CFF]).

Théorème. [C. Croke], ([C]) ; [J.P. Otal], ([O]).— *Soient V, V' des variétés riemanniennes de dimension 2, à courbure négative. Si une équivalence d'homotopie de V sur V' préserve le spectre marqué des longueurs, alors elle est homotope à une isométrie.*

La preuve est très élégante. L'équivalence d'homotopie induit une correspondance entre géodésiques (paragraphe 6). Il s'agit de montrer que la concourance est préservée. Si ce n'est pas le cas, l'erreur est mesurée par le défaut angulaire dans un triangle, un nombre toujours positif - d'après le théorème de Gauss-Bonnet - dont la moyenne fait intervenir les deux mesures images des mesures de Liouville de V et V' dans $G(V) = G(V')$. On montre que ces mesures sont égales en utilisant la notion *d'intersection*, due à F. Bonahon, [Bon]. C'est un accouplement entre mesures sur $G(V)$ qui a les propriétés suivantes :

- sur le sous-espace dense des masses de Dirac le long de géodésiques fermées, il coïncide avec l'intersection ordinaire des courbes fermées ;
- il est “non dégénéré”, i.e. une mesure positive est déterminée par son intersection avec les géodésiques fermées ;
- l'intersection de la mesure de Liouville avec une géodésique fermée vaut sa longueur.

En dimensions supérieures, un résultat infinitésimal existe. La méthode, inaugurée par V. Guillemin et D. Kazhdan en dimension 2, a été été étendue par Min Oo.

Théorème. [V. Guillemin et D. Kazhdan], ([GK]) ; [Min Oo], ([Min]).— *Si V a un opérateur de courbure négatif, alors les déformations isospectrales infinitésimales sont toutes triviales.*

Une déformation infinitésimale est une forme quadratique, i.e. une fonction h sur T_1V quadratique sur les fibres. La condition d'isospectralité est que l'intégrale de h sur toute orbite périodique du flot X est nulle. D'après A. Livšic [L], l'équation $h = L_X q$ a une solution. Un argument inspiré de l'analyse harmonique sur $SL(2, \mathbf{R})$ montre que q est linéaire sur les fibres, i.e. h est la dérivée de Lie de la métrique par un champ de vecteurs.

BIBLIOGRAPHIE

[A1] D.V. ANOSOV - *Roughness of geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature,* Dokl. Akad. Nauk. SSSR **145** (1962), 707–709, = Soviet Math. Dokl. **3** (1962), 1062–1069.

[A2] D.V. ANOSOV - *Geodesic flows on compact manifolds of negative curvature,* Trud. Mat. Inst. Steklova **90** (1967), = Proc. Steklov Inst., Amer. Math. Soc. Trans. (1969).

[Bal] W. BALLMANN - *Non positively curved manifolds of higher rank,* Ann. Math. **112** (1985), 597–609.

[BB] W. BALLMANN et M. BRIN - *On the ergodicity of geodesic flows,* Ergod. Th. Dynam. Syst. **2** (1982), 311–315.

[BBE] W. BALLMANN, M. BRIN et P. EBERLEIN - *Structure of manifolds of non positive curvature, I,* Ann. Math. **112** (1985), 171–203.

[BBS] W. BALLMANN, M. BRIN et R. SPATZIER - *Structure of manifolds of non positive curvature, II,* Ann. Math. **112** (1985), 204–235.

[BFL] Y. BENOIST, P. FOULON, F. LABOURIE - *Flots d'Anosov à distributions stable et instable différentiables,* C. R. Acad. Sci. Paris **311** (1990), 351-354.

[Ber] P. BERARD - *Variétés riemanniennes isospectrales non isométriques,* Séminaire Bourbaki, mars 1989, exposé 705, Astérisque **177-**

178 (1989).

[Bes] A.L. BESSE - *Manifolds all of whose geodesics are closed,* Ergebnisse Band **98**, Springer, Berlin (1973).

[BCG] G. BESSON, G. COURTOIS, S. GALLOT - *Volume minimal des espaces localement symétriques,* Inventiones Math. **103** (1991), 415–445.

[Bon] F. BONAHON - *Bouts des variétés hyperboliques de dimension trois,* Ann. Math. **124** (1986), 71–158.

[B] R. BOWEN - *Periodic orbits for hyperbolic flows,* Amer. J. of Math. **94** (1972), 1–30.

[BS] K. BURNS et R. SPATZIER - *Manifolds of nonpositive curvature and their buildings,* Publ. Math. Inst. Haut. Et. Sci. **65** (1987), 35–59.

[C] C. CROKE - *Rigidity for surfaces of non-positive curvature,* Comment. Math. Helvetici **65** (1990), 150–169.

[CF] C. CROKE et A. FATHI - *An inequality between energy and intersection,* Bull. London Math. Soc. **22** (1990), 489-494.

[CFF] C. CROKE, A. FATHI et J. FELDMAN - *The marked length spectrum of a surface of negative curvature,* à paraître dans Topology.

[D] E.I. DINABURG - *A connection between various entropy characterizations of dynamical systems,* Izv. Akad. Nauk. SSSR **35** (1971), 324–366.

[E] P. EBERLEIN - *Geodesic flows on negatively curved manifolds,* I, Ann. Math **95** (1972), 492–510 ; II, Trans. Amer. Math. Soc. **178** (1973), 57–82.

[EH] P. EBERLEIN et J. HEBER - *A geometric characterization of symmetric spaces of higher rank,* Publ. Math. de l'I.H.E.S. **71** (1990), 33–44.

[EO] P. EBERLEIN, G. O'NEILL - *Visibility manifolds,* Pacific. J. Math. **46** (1973), 45–109.

[FJ] F.T. FARRELL et L.E. JONES - *Negatively curved manifolds with exotic smooth structures,* J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), 899–908.

[Gh1] E. GHYS - *Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris **20** (1987), 251–270.

[GH2] E. GHYS - *L'invariant de Godbillon-Vey*, Séminaire Bourbaki, mars 1989, exposé 706, Astérisque **177-178** (1989).

[GH3] E. GHYS - *Les groupes hyperboliques*, Séminaire Bourbaki, mars 1990, exposé 722, Astérisque (1990).

[Gr1] M. GROMOV - *Volume and bounded cohomology*, Publ. Math. Inst.Haut.Et.Sci. **56** (1982), 5–100.

[Gr2] M. GROMOV - *Hyperbolic groups*, in "Essays in group theory", éd. S.M. Gersten, M.S.R.I. Publ. n^0 8, Springer (1987).

[Gr3] M. GROMOV - *Rigid transformation groups*, in "Géométrie différentielle", éd. D. Bernard et Y. Choquet-Bruhat, Travaux en cours **33** (1988), 65–139, Hermann, Paris (1988).

[GK] V. GUILLEMIN et D. KAZHDAN - *Some inverse spectral results for negatively curved 2-manifolds*, Topology **19** (1980), 301–312.

[H1] J. HADAMARD - *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*, J. Math. Pures Appl. **4** (1898), 27–74.

[H2] J. HADAMARD - *Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles*, Bull. Soc. Math. France **24** (1901), 224–228.

[Ha1] U. HAMENSTÄDT - *A new description of the Bowen-Margulis measure*, Ergod. Th. Dynam. Syst. **9** (1989), 455–464.

[Ha2] U. HAMENSTÄDT - *Entropy rigidity of locally symmetric spaces of rank one*, Ann. Math. **131** (1990), 35–52.

[Has] B. HASSELBLATT - *Regularity of the Anosov splitting and of horospheric foliations*, Prépublication, I.H.E.S. Bures-sur-Yvette (1991).

[He1] G.A. HEDLUND - *On the metrical transitivity of the geodesics on closed surfaces of constant negative curvature*, Ann. Math. **35** (1934), 787–808.

[He2] G.A. HEDLUND - *The dynamics of geodesic flows*, Bull. Amer. Math. Soc. **45** (1939), 241–260.

[HP] M. HIRSCH et C. PUGH - *Stable manifolds and hyperbolic sets*, Proc. Symp. in Pure Math. **14** (1970), 133-163.

[Hop] E. HOPF - *Statistik der Lösungen geodätischer Probleme vom unstabilen Typus, II,* Math. Ann. **117** (1940), 590–608.

[HK] S. HURDER et A. KATOK - *Differentiability, rigidity and Godbillon-Vey classes,* Publ. Inst. Haut. Et. Sci. **72** (1990), 5–61.

[Kan] M. KANAI - *Geodesic flows of negatively curved manifolds with smooth stable and unstable foliations,* Ergod. Th. Dynam. Syst. **8** (1988), 215–240.

[Kat] A. KATOK - *Four applications of conformal equivalence to geometry and dynamics,* Erg. Th. Dynam. Syst. **8** (1988), 139–152.

[KKK] A. KATOK, G. KNIEPER, M. POLLICOTT et H. WEISS - *Differentiability and entropy for Anosov flows and geodesic flows,* Bull. Amer. Math. Soc. **22** (1990), 285–293.

[K] A.N. KOLMOGOROV - *A new metric invariant of transitive systems and automorphisms of Lebesgue spaces,* Dokl. Akad. Nauk SSSR **119** (1958), 861–864).

[L] A. LIVŠIC - *Cohomology of dynamical systems,* Isv. Akad. Nauk SSSR **36** (1972), 1296–1320, = Math. USSR Izvestia **6** (1972), 1278–1301.

[Man] A. MANNING - *Topological entropy for geodesic flows,* Ann. Math. **110** (1979), 567–576.

[Mar] G.A. MARGULIS - *On some applications of ergodic theory to the study of manifolds of negative curvature,* Funkt. Anal. i Prilozhen. **3** (1969), 89–90, = Func. Anal. Appl. **3** (1969), 335–336.

[Min] MIN OO - *Spectral rigidity for manifolds with negative curvature operator,* in "Nonlinear Problems in Geometry", Contemporary Math. **51** (1986), 99–103.

[M1] M. MORSE - *A one-to-one representation of geodesics,* Amer. J. Math. **43**, (1921), 33–51.

[M2] M. MORSE - *Instability and transitivity,* J. Math. Pures Appl. **14** (1935), 49–71.

[Mos] G.D. MOSTOW - *Strong rigidity of locally symmetric spaces,* Ann. of Math. Studies, Vol. 78, Princeton Univ. Press, Princeton (1973).

[O] J.P. OTAL - *Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure* *négative*, Ann. Math. **131** (1990), 151–162.

[Pan] P. PANSU - *Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative*, Ann. Acad. Sci. Fennicae **14** (1989), 177–212.

[PP] W. PARRY et M. POLLICOTT - *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*, Astérisque **187-188** (1990).

[Pes] Ya. B. PESIN - *Geodesic flows with hyperbolic behaviour of the trajectories and objects connected with them*, Uspekhi Math. Nauk **36** (1981), 3–31 = Russian Math. Surveys **36** (1981), 1–59.

[P] A. PREISSMANN - *Quelques propriétés globales des espaces de Riemann*, Comm. Math. Helvetici **15** (1943), 175–216.

[S] S. SMALE - *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 747–817.

[Y] J.C. YOCCOZ - *Polynomes quadratiques et attracteur de Hénon*, Séminaire Bourbaki, novembre 1990, exposé 734, Astérisque (1991).

Pierre PANSU

U.R.A. 169 du C.N.R.S.
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cédex

et

U.R.A. 1169 du C.N.R.S.
Mathématiques
Université Paris Sud
91405 Orsay Cédex