Astérisque

JOSEPH LE POTIER

Fibrés de Higgs et systèmes locaux

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki, exp. nº 737, p. 221-268

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__221_0>

Séminaire BOURBAKI Février 1991
43ème année, 1990-91, n° 737

FIBRÉS DE HIGGS ET SYSTÈMES LOCAUX

par **Joseph LE POTIER**

En 1965, Narasimhan et Seshadri établissaient [28] une correspondance bijective entre l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles du groupe fondamental π d'une surface de Riemann compacte X, et l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibré vectoriels stables de degré 0 sur X : ils associent à une représentation $\rho : \pi \to \mathbf{U}(r)$ le fibré vectoriel holomorphe E_ρ défini par

$$E_\rho = \tilde{X} \times_\pi \mathbf{C}^r$$

où $\tilde{X} \to X$ est le revêtement universel de X, et où le produit ci-dessus est le quotient de $\tilde{X} \times \mathbf{C}^r$par l'action de π définie par $(\gamma, (x, v)) \mapsto (x\gamma^{-1}, \gamma v)$ pour $\gamma \in \pi$ et $(x, v) \in \tilde{X} \times \mathbf{C}^r$. La correspondance fut étendue récemment sur toute variété projective lisse par Donaldson [6,7,9], et sur toute variété kählérienne compacte par Uhlenbeck et Yau ([36],[22], Séminaire Bourbaki n° 683) ; le point essentiel est de montrer que sur tout fibré vectoriel stable, il existe de bonnes métriques hermitiennes, dites suivant les auteurs, de Yang et Mills, ou d'Hermite et Einstein.

L'objet des travaux de C. Simpson, auxquels est consacré l'essentiel de ce rapport, est de trouver un analogue pour les représentations linéaires quelconques. On doit rajouter aux fibrés vectoriels holomorphes une donnée supplémentaire pour obtenir une équivalence du même type que celle de Narasimhan et Seshadri. C'est la notion de fibré de Higgs, qui fut d'abord introduite par Hitchin sur les courbes algébriques [19], et que nous expliquons dans la section 2. Pour définir le fibré vectoriel algébrique, muni de sa structure de Higgs, associé à une représentation $\pi \to \mathbf{Gl(r, C)}$ les choses ne sont pas aussi simples que ci-dessus, et l'on doit faire intervenir de bonnes métriques. La manière dont nous avons choisi de présenter les choses passe par l'intermédiaire des fibrés harmoniques (cf. section 1) notion introduite par Simpson sous une forme voisine dans [32].

Le résultat essentiel de Simpson [29,30,31], reposant en partie sur des résultats de Corlette [4], et surtout de Donaldson [6,7,8], est d'établir une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations linéaires du groupe fondamental d'une variété projective lisse, celle des fibrés plats, et celle des fibrés de Higgs semi-stables de classes de Chern nulles. Ceci se traduit, quand on fixe le rang r, par l'existence de trois espaces de modules grossiers $M_B(r), M_{DR}(r)$ et $M_{Dol}(r)$ associés à de tels objets ; ces variétés algébriques ont même ensemble de points fermés, mais les structures algébriques diffèrent. Les deux premiers espaces de modules ont cependant même espace analytique sous-jacent : déjà, pour $r = 1$, on retrouve les exemples classiques de Serre de variétés algébriques analytiquement isomorphes, mais non isomorphes. La construction de ces variétés de modules, esquissée dans la section 5, fait appel, comme on en a maintenant l'habitude, à la théorie de Mumford, que nous rappellerons brièvement. Sur la variété $M_{Dol}(r)$ le groupe $\mathbf{C}^*$ agit de manière naturelle ; les points fixes de cette action correspondent à des représentations d'un type particulier, appelées variations de structures de Hodge. Ces points fixes sont très utiles pour obtenir des renseignements sur la topologie de la variété de modules : nous en donnons un exemple sur les courbes dans la section 7.

Nous n'aborderons pas ici toute la partie du travail de Simpson relatif aux variétés kählériennes éventuellement non compactes [29,34]. Dans ce cadre, on rencontre bien sûr des difficultés supplémentaires, alors que si l'on se limite aux variétés projectives, il n'y a pas de problèmes majeurs pour étendre la méthode de Donaldson : on travaille essentiellement par récurrence sur la dimension, à condition d'avoir au préalable généralisé les théorèmes de restriction de Mehta et Ramanathan (cf. section 4).

Sommaire

Dans tout l'exposé, variété algébrique signifie schéma de type fini sur $\mathbf{C}$; par points, on entend les points fermés. Soit X une variété projective lisse, de dimension n, munie d'un fibré inversible très ample $\mathcal{O}(1)$.

1. Fibrés harmoniques

On considère sur X un fibré vectoriel complexe E de classe C^∞ , de rang r, muni d'une métrique hermitienne $<,>$; on désigne par $A^i(E)$ l'espace des formes différentielles de classe C^∞, de degré i à valeurs dans E. Une connexion de classe C^∞ sur E est un opérateur $\mathbf{C}$-linéaire $D : A^0(E) \to A^1(E)$ satisfaisant à la règle de Leibniz $D(fs) = (df)s + fDs$ pour $s \in A^0(E)$ et f fonction de classe C^∞ sur X. Etant donnée une telle connexion D, on peut lui en associer une autre, notée $\check{D}$, de sorte que l'on ait la formule, pour s et t sections de classe C^∞ de E

$$d < s,t >=< Ds,t > + < s,\check{D}t >$$

où, dans le membre de droite, $<,>$ désigne l'extension aux formes différentielles de la forme hermitienne. Les connexions constituent un espace affine $\mathcal{A}$ modelé sur l'espace vectoriel $A^1(End(E))$ des formes différentielles de degré 1 à valeurs dans le fibré des endomorphismes de E, et l'application $D \mapsto \check{D}$ est une involution affine de $\mathcal{A}$ dont l'application linéaire tangente est donnée par $\omega \mapsto -\omega^*$, où ω^* est la forme différentielle adjointe de ω. La connexion D est dite *hermitienne* si elle est invariante par cette involution. Toute connexion D s'écrit de manière unique $D = \nabla + \alpha$ où ∇

est une connexion hermitienne, et α une forme différentielle à valeurs dans $End(E)$ telle que $\alpha = \alpha^*$.

On appelle *fibré harmonique* sur X un triplet $(E, D, <,>)$ formé d'un tel fibré vectoriel, d'une connexion D et d'une métrique satisfaisant aux deux conditions d'intégrabilité suivantes :

(1) *la connexion D est intégrable .*

Ceci signifie que la forme différentielle de courbure $F_D \in A^2(End(E))$, définie par $F_D(s) = D^2(s)$ pour $s \in A^0(E)$, est nulle. Au couple (E, D) est alors associé un système local d'espaces vectoriels complexes de dimension r défini par le faisceau des sections locales (dans la topologie usuelle) annulées par D ; c'est aussi ce qu'on appelle fibré vectoriel plat de rang r. Un point x étant choisi dans X, ce fibré provient d'une représentation du groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ de la variété X dans $GL(r, \mathbf{C})$, bien définie à conjugaison près.

Pour énoncer la deuxième condition d'intégrabilité, on décompose D suivant la forme suivante : $D = \nabla + \alpha$, où ∇ est une connexion hermitienne, et où α est une forme différentielle de degré 1, à valeurs dans le fibré des endomorphismes $End(E)$, auto-adjointe par rapport à la métrique hermitienne. On décompose ∇ et α selon leur type :

$$\nabla = \partial + \overline{\partial} \quad ; \quad \alpha = \theta + \theta^*,$$

où ∂ et $\overline{\partial}$ sont de type (1,0) et (0,1) respectivement, et où θ est une forme différentielle de type (1,0) à valeurs dans le fibré des endomorphismes de E. A un tel couple (E, D) on associe l'opérateur différentiel $D'' : A^0(E) \to A^1(E)$ défini par $D'' = \overline{\partial} + \theta$. La deuxième condition s'énonce :

(2) *la forme différentielle $G \in A^2(End(E))$ définie par $G = D''^2$ est nulle .*

En décomposant la forme différentielle G en types, on voit que cette condition est équivalente à $\overline{\partial}^2 = 0, \overline{\partial}\theta = 0$ et $\theta \wedge \theta = 0$. Ainsi, l'opérateur $\overline{\partial}$ définit sur E une structure de fibré vectoriel holomorphe, et θ est alors une forme différentielle holomorphe sur X, à valeurs dans $End(E)$, satisfaisant à la condition $\theta \wedge \theta = 0$.

2. Fibrés de Higgs

On appelle *fibré de Higgs* sur X la donnée d'un couple (E, θ), où E est un fibré vectoriel algébrique sur X, et θ une forme différentielle régulière de degré 1 à valeurs dans le fibré des endomorphismes $End(E)$, satisfaisant à l'identité $\theta \wedge \theta = 0$. On pourra, si l'on veut, considérer cette forme différentielle comme un morphisme $\theta : E \rightarrow \Omega^1(E)$ de E dans le fibré $\Omega^1(E)$ des formes différentielles de degré 1 à valeurs dans E.

Puisque la variété X est projective, en vertu des théorèmes de comparaison de Serre, il revient au même de travailler avec les fibrés vectoriels algébriques ou les fibrés vectoriels holomorphes sur X. Ainsi, à tout fibré harmonique sur X on associe d'après le paragraphe précédent un fibré de Higgs de classes de Chern nulles. La question qui se pose immédiatement est la réciproque : dans quelles conditions un tel fibré de Higgs de classes de Chern nulles provient-il d'un fibré harmonique ? La réponse à cette question est en fait un cas particulier d'un énoncé plus général, concernant l'existence de métrique de Yang et Mills sur le fibré de Higgs .

Etant donné un fibré de Higgs (E, θ) de rang r et une métrique hermitienne $H =<,>$ sur E, il existe une unique connexion hermitienne ∇ sur E dont la partie de type (0,1) coïncide avec l'opérateur $\overline{\partial}$ de Dolbeault, et on pose $\alpha = \theta + \theta^*$. On considère alors la connexion $D = \nabla + \alpha$, dont la forme de courbure $F = D^2$ s'appellera forme de courbure de la métrique hermitienne H. Bien entendu, si les classes de Chern sont quelconques, il est hors de question d'espérer que l'on puisse obtenir par un choix convenable de H que la courbure F soit nulle . Cependant, on peut essayer de minimiser la courbure. Pour mesurer cette courbure, on munit le fibré des endomorphismes $End(E)$ de la métrique hermitienne $(f, g) \mapsto trace\ fg*$, pour f et g appartenant à une même fibre de $End(E)$. La forme quadratique associée est notée $f \mapsto | f |^2$; la norme L^2 de la courbure est alors définie par

$$\| F \|^2 = \int_X | F |^2 \frac{\omega^n}{n!}.$$

Par hypothèse, on dispose sur X d'un fibré très ample $\mathcal{O}(1)$; on désigne par h sa classe de Chern, et par ω la forme de Chern d'une métrique hermitienne sur ce fibré . Comme sur toute variété kählérienne, on dispose sur l'algèbre des formes différentielles extérieurs des opérateurs $*, C, L, \Lambda$; rappelons (cf. A. Weil [37]) que C est définie par

$$C\varphi = (-1)^{a-b}\varphi$$

pour toute forme différentielle φ de type (a, b).

On décompose la forme de courbure F de la connexion D associée sous la forme

$$F = \frac{1}{r}\mathrm{tr}(F) id_E + F^{\perp}$$

où $\mathrm{tr}(F)$ désigne la trace de F, et où $F^{\perp}$ est une forme différentielle de degré 2 à valeurs dans $End(E)$ de trace nulle . On désigne par F_0 (resp. $F_0^{\perp}$) la partie primitive de F (resp. $F^{\perp}$), et on écrit la décomposition orthogonale $F = F_0 + \frac{\omega}{n}\Lambda(F)$ (resp. $F^{\perp} = F_0^{\perp} + \frac{\omega}{n}\Lambda(F^{\perp})$). Enfin, soient c_i les classes de Chern de E. Ces classes de Chern fournissent des contraintes topologiques qui limitent les valeurs possibles de $\| F \|$, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 1. — *On a les formules*

$$(c_2 - \frac{c_1^2}{2}).h^{n-2} = \frac{1}{8\pi^2}(\| F_0 \|^2 - \frac{1}{n} \| \Lambda(F) \|^2)$$

$$(c_2 - \frac{r-1}{2r}c_1^2).h^{n-2} = \frac{1}{8\pi^2}(\| F_0^{\perp} \|^2 - \frac{1}{n} \| \Lambda(F^{\perp}) \|^2)$$

Démonstration. On traite seulement le cas n=2 ; les modifications à apporter pour n supérieur sont mineures. Considérons la décomposition de la forme de courbure $D = \nabla + \alpha$, où ∇ est la connexion hermitienne. La courbure de D s'écrit $F = A + B$, avec $A = F_{\nabla} + \alpha \wedge \alpha$ et $B = \nabla(\alpha)$; la forme différentielle A est anti-hermitienne, et de type (1,1), tandis que B est hermitienne (c'est-à-dire auto-adjointe), somme de formes différentielles de type (2,0) et (0,2). Par définition des classes de Chern, on a dans $H^4(X, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$

$$\begin{aligned} c_2 - \frac{c_1^2}{2} &= \frac{1}{8\pi^2} \int_X \operatorname{tr}(F^2) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_X \operatorname{tr}(BB^* - AA^*) \end{aligned}$$

Ecrivons $A = A_0 + A_1$, où A_0 est la partie primitive (donc anti-invariante par $*$) et A_1 la partie orthogonale (donc invariante par $*$). Alors $F_0 = A_0 + B$, et $A_1 = \frac{\omega}{n}\Lambda(F)$. De la définition de la norme des formes différentielles auto-adjointes $\| \varphi \|^2 = \int_X \varphi \wedge *\varphi$ on tire

$$\begin{aligned} c_2 - \frac{c_1^2}{2} &= \frac{1}{8\pi^2}(\| B \|^2 + \| A_0 \|^2 - \| A_1 \|^2) \\ &= \frac{1}{8\pi^2}(\| F_0 \|^2 - \frac{1}{n} \| \Lambda(F) \|^2) \end{aligned}$$

La démonstration de la seconde formule est identique, en remplaçant F par $F^\perp$, compte-tenu de la formule

$$c_2 - \frac{r-1}{2r} c_1^2 = \frac{1}{8\pi^2} \int_X \operatorname{tr}(F^\perp)^2.$$

Métriques de Yang et Mills

Une métrique hermitienne sur E est dite de *Yang et Mills* si

(1) la trace de F est harmonique

(2) $\Lambda(F^\perp) = 0$.

La première condition est équivalente à $\Lambda(\operatorname{tr}(F)) = cte$; dire que la métrique est de Yang et Mills signifie donc que la forme de courbure F s'écrit

$$F = i\lambda\omega id_E + F_0$$

où F_0 est la partie primitive de F, et λ un réel. Dans l'espace des métriques hermitiennes, la fonctionnelle $\| F \|^2$ est minimum aux points correspondant aux métriques de Yang et Mills. Le proposition ci-dessus impose des conditions topologiques pour l'existence de telles métriques :

Corollaire. — *Soit (E,θ) un fibré de Higgs sur X, muni d'une métrique de Yang et Mills.*
(1) on a

$$(c_2 - \frac{r-1}{2r}c_1^2).h^{n-2} \geq 0$$

(2) Si les classes de Chern c_1 et c_2 satisfont aux conditions suivantes :

$$c_1.h^{n-1} = 0 \quad ; \quad (c_2 - \frac{c_1^2}{2}).h^{n-2} = 0$$

la connexion associée D est plate. En particulier, toutes les classes de Chern sont nulles.

L'assertion (1) est la généralisation de l'inégalité classique de Bogomolov [2] et de Lübke [21] pour les fibrés stables. Sous les conditions de l'assertion (2), la métrique de Yang et Mills donnée définit sur (E,θ) une structure de fibré harmonique ce qui répond donc à la question posée en début de section. Le résultat qui suit explique les relations entre fibré de Higgs μ-stables et métriques de Yang et Mills.

Faisceaux de Higgs

Pour tout faisceau algébrique cohérent F sans torsion sur X, de rang r et de classes de Chern c_i on définit le degré et la pente de F par

$$\deg(F) = c_1.h^{n-1} \; ; \; \mu(F) = \frac{\deg(F)}{r}$$

Un *faisceau de Higgs* de rang r sur X est un couple (E,θ) formé d'un faisceau algébrique cohérent E et d'un morphisme $\theta : E \longrightarrow \Omega^1 \otimes E$ tel que $\theta \wedge \theta = 0$; bien entendu, à tout fibré de Higgs on associe un faisceau de Higgs en considérant le faisceau des sections régulières. Un sous-faisceau cohérent $E' \subset E$ sera dit sous-faisceau de Higgs si $\theta(E') \subseteq \Omega^1 \otimes E'$. On dit qu'un faisceau de Higgs (E, θ) est *μ-semistable* (resp. *μ-stable)* si pour tout sous-faisceau de Higgs E' de rang r', avec $0 < r' < r$, on a

$$\mu(E') \leq \mu(E) \quad ; \quad (resp. <).$$

Le résultat fondamental de C.Simpson donne une caractérisation des fibrés de Higgs sur lesquels existent une métrique de Yang et Mills.

Théorème 1 (Simpson).— *Soit (E, θ) un fibré de Higgs. Il existe sur (E, θ) une métrique de Yang et Mills si et seulement si E est somme directe de sous-fibrés de Higgs μ-stable de même pente μ. Cette métrique est unique à automorphismes près.*

Esquisse de démonstration

Soit (E, θ) un fibré de Higgs, muni d'une métrique de Yang et Mills $H = <,>$, et considérons un sous-faisceau de Yang et Mills E' , dont on se propose de majorer la pente. On peut supposer que le quotient $E'' = E/E'$ est sans torsion, de sorte que sur un ouvert de Zariski U dont le complémentaire est de codimension ≥ 2 on a la suite exacte de fibrés vectoriels algébriques

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0 \tag{1}$$

La métrique donnée sur E permet, sur l'ouvert U, de scinder cette suite exacte, en tant que fibrés vectoriels de classe C^∞ : $E = E' \oplus E''$; cette somme directe est orthogonale, et dans cette décomposition, les opérateurs $\overline{\partial}$ et θ s'écrivent sous forme matricielle

$$\overline{\partial} = \begin{pmatrix} \overline{\partial}_{E'} & \beta^* \\ 0 & \overline{\partial}_{E''} \end{pmatrix} \quad ; \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta' & \gamma \\ 0 & \theta'' \end{pmatrix}$$

où $\beta \in A^{1,0}(U, Hom(E'', E'))$ et $\gamma \in A^{1,0}(U, Hom(E', E''))$ sont des formes différentielles de types (1,0) à valeurs dans le fibré des homomorphismes $Hom(E', E'')$ et $Hom(E'', E')$ respectivement et où β^* désigne l'adjointe de β. Désignons par $D_{E'}$ et $D_{E''}$ les connexions associées aux fibrés de Higgs (E', θ') et (E'', θ'') respectivement, munis des métriques hermitiennes induites sur l'ouvert U. La connexion sur E a alors pour matrice

$$D = \begin{pmatrix} D_{E'} & \beta^* + \gamma \\ -\beta + \gamma^* & D_{E''} \end{pmatrix}$$

Désignons par F' et F'' les formes de courbure des fibrés de Higgs E' et E'' ; la forme de courbure F de la connexion D sur le fibré E est donnée au-dessus de U par la matrice

$$F = \begin{pmatrix} F' + (\beta^* + \gamma) \wedge (\gamma^* - \beta) & D(\beta^* + \gamma) \\ D(\gamma^* - \beta) & F'' + (\gamma^* - \beta) \wedge (\beta^* + \gamma) \end{pmatrix}$$

Dans cette formule, on a encore noté D les connexions induites sur les fibrés d'homomorphismes $Hom(E', E'')$ et $Hom(E'', E')$ et leur prolongement aux formes différentielles. Puisque la métrique est de Yang et Mills, on a $\frac{i}{2\pi} F.\omega^{n-1} = \frac{1}{\deg(X)} \mu\omega^n id_E$. De la matrice ci-dessus, il résulte que

$$\frac{i}{2\pi}(F' + \gamma \wedge \gamma^* - \beta^* \wedge \beta).\omega^{n-1} = \frac{1}{\deg(X)} \mu\omega^n id_{E'}.$$

En prenant la trace, et après intégration sur l'ouvert U on obtient, r' désignant le rang de E'

$$\mu' + \frac{1}{2\pi r'} \int_U i \; tr(\gamma \wedge \gamma^* - \beta^* \wedge \beta).\omega^{n-1} = \mu;$$

l'intégrale figurant ci-dessus est celle d'une fonction positive ; la formule dit en particulier que cette intégrale a un sens . Il en résulte que $\mu' \leq \mu$, avec égalité si et seulement si $\beta = \gamma = 0$. Dans ce cas, on obtient un scindage holomorphe de la suite exacte (1), scindage qui, du fait que le complémentaire de U est de codimension ≥ 2 s'étend à X. Ainsi, le fibré de Higgs (E, θ) est somme directe de sous-fibrés de Higgs de même pente μ, et chacun des facteurs porte encore une métrique de Yang et Mills, ce qui permet de recommencer la construction jusqu'à obtenir des facteurs qui soient μ-stables.

Formulaire

C'est bien entendu la réciproque qui est la partie la plus difficile. Nous avons d'abord besoin d'un formulaire. Si (E, θ) est un fibré de Higgs, et K une métrique hermitienne sur E, on note $D = D_K$ la connexion associée, et on écrit $D = D' + D''$. On pose $D^c = C^{-1}\check{D}\ C$, c'est-à-dire $D^c = i(D'' - D')$. Les identités classiques de géométrie kählérienne s'étendent à cette situation : on peut par exemple calculer l'adjoint formel pour les opérateurs D, D', D'' :

$$
\begin{aligned}
D^* &= - *D* \\
&= [\Lambda, D^c] \\
D'^* = i[\Lambda, D''] \quad &; \quad D''^* = -i[\Lambda, D']
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Considérons, sur le fibré vectoriel E, une autre métrique hermitienne H ; on écrit $H = Kh$, où h est un automorphisme de E, hermitien par rapport à K ; les opérateurs différentiels D'_H et D'_K , relatifs aux deux métriques H et K et leurs formes de courbures sont liés par les formules

$$D'_H = D'_K + h^{-1}D'_K h \tag{3}$$

$$F_H = F_K + h^{-1}(D''D'_K h - D''h\ h^{-1}D'_K h) \tag{4}$$

Compte-tenu de la formule (2), le laplacien Δ'_K associé à l'opérateur D'_K sur le fibré des endomorphismes de E, est donné par $\Delta'_K(h) = D'^*_K D'_K h = i\Lambda D'' D'_K h$. De la formule (3) on tire alors

$$\Delta'_K(h) = ih\Lambda(F_H - F_K) + i\Lambda(D''h\ h^{-1}D'_K h) \tag{5}$$

Champs de Yang et Mills

On se place sur la "variété" $Met(E)$ des métriques hermitiennes sur E, et on considère la fonctionnelle de Yang et Mills, définie par $H \mapsto \|F_H\|^2$. Une métrique de Yang et Mills devant minimiser cette fonctionnelle, on est amené à en rechercher les points critiques. Si on identifie l'espace tangent en H à l'espace vectoriel $Herm_H(E)$ des endomorphismes hermitiens de E pour la métrique H, on voit que la dérivée de cette fonctionnelle est donnée, en vertu de la formule (4) par l'application linéaire $Herm_H(E) \mapsto \mathbf{R}$ définie par $\eta \mapsto 2\Re e < D''D'_H\eta, F_H >_H$, où $<,>_H$ désigne le produit scalaire associé à la métrique L^2 définie sur $A^2(Hom(E,E))$ par la métrique H. Compte-tenu de la formule (2) et de l'identité de Bianchi $D'_H(F_H) = 0$, on obtient que cette dérivée est donnée par $\eta \mapsto \Re e < \eta, 2i\Delta'_H\Lambda F_H >_H$. Ainsi, le "champ de vecteurs " $H \mapsto 2i\Delta'_H\Lambda F_H$ joue le rôle d'un champ de gradient pour la fonctionnelle de Yang et Mills. On est amené à suivre les trajectoires $t \mapsto H_t$ du champ de de vecteurs $H \mapsto -i\Delta'_H\Lambda F_H$, c'est-à-dire à résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$H^{-1}\frac{\partial H}{\partial t} + i\Delta'_H\Lambda F_H = 0$$

Cette fonctionnelle décroît le long de ces trajectoires. Cette équation est du quatrième ordre ; tout comme Donaldson pour les fibrés stables, Simpson choisit ici de la remplacer par l'équation de la chaleur

$$H^{-1}\frac{\partial H}{\partial t} = -i\Lambda F_H \tag{6}$$

dont l'étude est plus facile.

L'équation de la chaleur

L'équation (6) se casse en deux dans la somme directe $End(E) = \mathbf{C}id_E \oplus End_0(E)$, où $End_0(E)$ est le fibré des endomorphismes de E de trace nulle. Multiplier H par une fonction réelle strictement positive permet de changer la partie centrale de F_H : on lui ajoute en effet une forme s'écrivant $\partial\overline{\partial}\varphi$, où φ est une fonction de classe C^∞ ; la partie centrale de F_H étant de type (1,1), par un choix convenable de cette fonction, on peut obtenir une fonction harmonique pour la partie centrale de F_H. On se contentera donc d'étudier les trajectoires $t \mapsto H_t$ partant d'un point $H_0 = K$, et telles que $\det(H_tK^{-1}) = 1$. Pour de telles trajectoires, l'équation (6) s'écrit

$$H^{-1}\frac{\partial H}{\partial t} = -i\Lambda F_H^\perp \tag{7}$$

Si on pose $H_t = Kh_t$, l'équation (7) est équivalente à l'équation suivante, compte-tenu de (5)

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta'_K)h = -ih(\Lambda F_K^{\perp}) + iD''h\ h^{-1}D'_K h \qquad (8)$$

C'est une équation non linéaire, de type parabolique. Ni l'existence, ni l'unicité des solutions de (7), avec conditions initiales imposées, ne sont évidentes, et une part importante du travail consiste à montrer le résultat suivant :

Proposition 2. — *L'équation de la chaleur (7) a , sur* $[0, \infty[$, *une solution et une seule* $t \mapsto H_t$ *telle que* $\det H_t K^{-1} = 1$ *et* $H_0 = K$.

Posons $e_t = \Lambda F_{H_t}^{\perp}$, et désignons par $|e|^2 = -trace\ e^2$ la fonction donnant le carré de la norme (relative à H_t) en chaque point de X. Un calcul facile ([29], lemme (6.1)) montre que le long de la trajectoire, on a

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta')\ |e|^2 = -|D''e|^2$$

Il en résulte que $(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta')\ |e|^2 \leq 0$. Il résulte du principe du maximum ([16], p. 101) que $t \mapsto Sup_X|e_t|$ décroît le long des trajectoires. Le point essentiel du travail de Simpson consiste alors à construire une fonctionnelle auxilliaire $M : Met(E) \times Met(E) \to \mathbf{R}$ sur l'espace des paires de métriques, satisfaisant aux propriétés suivantes :

$$\frac{d}{dt}M(H_t, K) = -2\|e_t\|^2_{H_t} \qquad (9)$$

Si (E, θ) *est stable, il existe des constantes* A *et* B *strictement positives telles que pour tout endomorphisme hermitien* s *(relativement à la métrique* K*) de trace nulle on ait la majoration*

$$\sup_X |s|_K \leq A + B\ M(Ke^s, K) \qquad (10)$$

Il en résulte de (9) que la fonction $t \mapsto M(H_t, K)$ est décroissante le long des trajectoires, et de (10) qu'elle est bornée inférieurement. Si on écrit pour une telle trajectoire $H_t = Ke^{s_t}$, avec s_t endomorphisme hermitien de trace nulle les s_t sont alors uniformément bornés d'après (10) , et e_t l'est d'après ce que l'on a vu plus haut. Comme dans Donaldson ([7], lemme 19) s_t reste bornée dans l'espace de Sobolev $\mathrm{L}_2^{\mathrm{p}}$. Le fait que $M(H_t, K)$ est borné inférieurement entraîne que l'on peut trouver une suite de réels $t_i \to \infty$ telle que $lim_{i\to\infty}\|e_{t_i}\|_{\mathrm{L}^2} = 0$. On peut supposer que la suite s_{t_i} converge faiblement vers s_∞ dans $\mathrm{L}_2^{\mathrm{p}}$; on aura alors pour $h_\infty = e^{s_\infty}$, d'après la formule (5) :

$$\Delta'_K h_\infty = -h_\infty e_0 + i\Lambda(D'' h_\infty \; h_\infty^{-1} D'_K h_\infty)$$

Par régularité elliptique, on obtient alors que h_∞ est en fait de classe C^∞, et définit une métrique hermitienne $H_\infty = Ke^{s_\infty}$ telle que $\Lambda F^{\perp}_{H_\infty} = 0$. Ainsi, H_∞ est de Yang et Mills.

La construction de $M(H, K)$

La construction de $M(H, K)$ est analogue à celle de Donaldson [7] ; elle est liée à la description des représentants des classes de Chern associés à des métriques hermitiennes, dûe à Bott et Chern [3]. Donaldson construit des classes caractéristiques, dites secondaires, $R(H, K) \in A^{1,1}(X)/\mathrm{Im}\;\partial + \mathrm{Im}\;\overline{\partial}$ satisfaisant aux conditions suivantes

(a) $R(H, H) = 0$, et $R(H, K) = R(H, J) + R(J, K)$ pour toutes métriques hermitiennes H, J, K;

(b) Pour tout chemin $t \mapsto H_t$ de classe C^1 dans l'espace des métriques, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} R(H_t, K) = 2i\mathrm{tr}\;(H^{-1}\frac{\partial H}{\partial t}.F_H)$$

(c) $i\partial\overline{\partial} R(H, K) = \mathrm{tr}(F_K{}^2) - \mathrm{tr}(F_H{}^2)$

La forme différentielle $R(H, K)$ s'obtient en intégrant la relation (b) sur un chemin de classe C^1 joignant H à K ; la propriété (a) permet de vérifier que le résultat ne dépend pas, modulo $\mathrm{Im}\;\partial + \mathrm{Im}\;\overline{\partial}$, du chemin choisi. La fonctionnelle considérée est alors définie par

$$M(H, K) = \int_X R(H, K) \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}$$

Remarquons que même si $R(H, K)$ n'est définie que modulo $\mathrm{Im}\partial + \mathrm{Im}\overline{\partial}$, cette formule a bien un sens. Il résulte de la propriété (b) que le long d'une trajectoire H_t telle que det $H_t^{-1}K = 1$ et $H_0 = K$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}M(H_t, K) =& 2\int_X \mathrm{tr}(\Lambda F_{H_t}^{\perp}.F_{H_t})\frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \\ =& -2\|e_t\|^2\end{aligned}$$

Ceci donne la formule (9). La démonstration de l'estimation (10) est le coeur du problème. Alors que la méthode de Donaldson [6,7] consistait à se restreindre à une section hyperplane générale de degré assez grand, ce qui conserve les propriétés de stabilité (voir section 4), Simpson s'inspire des travaux de Uhlenbeck et Yau [36] : il construit directement, si cette majoration n'était pas vraie, un sous-faisceau déstabilisant pour (E, θ) ([29], section 5). Ceci lui permet d'obtenir une variante du théorème 1 pour certaines variétés kählériennes non compactes.

L'unicité

Soient (E, θ) un fibré de Higgs, et H et K deux métriques de Yang et Mills. Il résulte de la formule (5) que l'endomorphisme $h = HK^{-1}$ satisfait à l'équation

$$\frac{1}{2}\Delta(\mathrm{tr}\, h) = -|D''h\ h^{-\frac{1}{2}}|_K^2 \ \leq 0$$

Par conséquent, la fonction $\mathrm{tr}\, h$ est plurisousharmonique ; le principe du maximum montre qu'elle est constante et on a alors $D''h = 0 = D'h$. Ainsi h est un endomorphisme holomorphe de E qui commute avec l'opérateur θ ; il en est de même de $h^{\frac{1}{2}}$ qui définit alors un isomorphisme entre les fibrés harmoniques (E, θ, H) et (E, θ, K). Bien sûr, si le fibré de Higgs (E, θ) est μ-stable, on trouve une homothétie de rapport constant. Ce raisonnement figure déjà, pour les fibrés stables sur une surface de Riemann, dans [9].

3. Fibrés plats

A tout fibré harmonique $(E, D, <, >)$ on associe le fibré plat (E, D). Réciproquement, étant donné un fibré plat (E, D) sur la variété X, à quelle condition existe-t'il une métrique hermitienne $H =<, >$ sur E telle le triplet $(E, D, <, >)$ soit harmonique, autrement dit que la condition d'intégrabilité (2) (section 1) soit satisfaite ? La forme différentielle $G = D''^2$ s'appelle *pseudocourbure* de la métrique hermitienne. Si la condition d'intégrabilité $G = 0$ est satisfaite, on dira aussi que la métrique est harmonique. Cette condition est en fait satisfaite dès que $\Lambda G = 0$, condition tout à fait analogue à la condition exigée dans la section précédente des métriques de Yang et Mills, comme le prouve le lemme suivant, dû à Deligne :

Lemme 2 (Deligne).— *Soit E un fibré vectoriel complexe sur X, muni d'une connexion plate D . Une métrique hermitienne sur E est harmonique dès que la pseudocourbure G satisfait à l'équation*

$$\Lambda(G) = 0$$

Démonstration. On utilise les mêmes notations que dans le formulaire de la section (2) ; les formules (2) n'utilisent pas de condition d'intégrabilité. Par hypothèse, on a $D^2 = (D^c)^2 = 0$. Par définition, $D'' = \frac{1}{2}(D - iD^c)$, d'où il découle que $G = -\frac{i}{4}(DD^c + D^cD)$. On a alors les identités de Bianchi : $D(G) = D^c(G) = 0$. Considérons la décomposition de D en types (1,0) et (0,1) : $D = d' + d''$, avec

$$d' = \partial + \theta \quad ; \quad d'' = \overline{\partial} + \theta^*$$

Du fait que la connexion est plate, on tire $d'^2 = d''^2 = d'd'' + d''d' = 0$. D'autre part, si on pose $\theta - \theta^* = 2i\beta$, on a

$$D^c = i(d'' - d' + 4i\beta)$$

et par suite $G = iD(\beta)$. Pour la métrique induite sur les formes différentielles, on a alors

$$\begin{aligned} \| G \|^2 &= i \int_X (D(\beta), G)\frac{\omega^n}{n!} \\ &= i \int_X (\beta, D^*(G))\frac{\omega^n}{n!} \end{aligned}$$

Or, l'identité de Bianchi et l'hypothèse $\Lambda(G) = 0$ entraînent $D^*(G) = [\Lambda, D^c](G) = 0$. Par suite $\| G \|= 0$. D'où l'énoncé.

Le théorème suivant, dû à Donaldson [8] et Corlette [4], est la généralisation d'un résultat de Eells et Sampson [10] sur les applications harmoniques ; le lien se fait en observant que la donnée d'un fibré harmonique de rang r sur X est équivalente à la donnée d'une représentation du groupe fondamental de X dans $GL(r, \mathbf{C})$ et d'une application harmonique du revêtement universel de X à valeurs dans $GL(n, \mathbf{C})/U(n)$, équivariante sous l'action du groupe de Poincaré . Un fibré plat est dit *irréductible* s'il ne contient pas de sous-fibré plat non nul de rang strictement inférieur ; en termes de représentation du groupe fondamental, ceci signifie que la représentation associée est irréductible. Une somme directe de fibrés plats irréductibles est dite *semi-simple.*

Théorème 2.— *Il existe sur un fibré plat une métrique harmonique si et seulement si il est semi-simple.*

Cet énoncé se démontre par des méthodes voisines de celles du théorème 1. Naturellement, on a aussi l'unicité à isomorphisme près pour la métrique.

Complexes de de Rham et de Dolbeault

Etant donné un fibré plat (E, D), on définit le complexe de de Rham $(A^\cdot(E), D)$:

$$0 \to A^0(E) \xrightarrow{D} A^1(E) \xrightarrow{D} \cdots$$

en prolongeant la connexion D aux formes différentielles ; sa cohomologie, notée $H^q_{DR}(E)$ s'identifie à la cohomologie de X à valeurs dans le faisceau (pour la topologie usuelle) des sections localement plates de E. De même, étant donné un fibré de Higgs (E, θ) les espaces vectoriels de cohomologie du complexe $(A^\cdot(E), D'')$:

$$0 \to A^0(E) \xrightarrow{D''} A^1(E) \xrightarrow{D''} \cdots$$

appelé complexe de Dolbeault, seront noté $H^q_{Dol}(E)$; si on considère le complexe $(\mathcal{A}^\cdot(E), D'')$ des faisceaux de formes différentielles de classe C^∞ à valeurs dans E, on obtient une résolution fine du complexe $(\Omega^\cdot(E), \theta)$ des formes différentielles holomorphes à valeurs dans E ; par suite, les groupes de cohomologie de Dolbeault $H^q_{Dol}(E)$ s'identifient aux groupes d'hypercohomologie $\mathbf{H}^q(X, (\Omega^\cdot(E), \theta))$ de X à valeurs dans le complexe ci-dessus. Lorsque l'on dispose d'un fibré harmonique, on peut à la fois considérer la cohomologie de de Rham et la cohomologie de Dolbeault. L'énoncé suivant généralise un énoncé bien connu en géométrie kählérienne :

Lemme 3.— *Soit E un fibré harmonique . On a un isomorphisme canonique*

$$H^q_{DR}(E) \simeq H^q_{Dol}(E)$$

Démonstration. On considère les laplaciens Δ, Δ' et Δ'' associés aux opérateurs différentiels D, D' et D'' respectivement, opérant sur les espaces de formes différentielles à valeurs dans E. Comme dans le cas des formes différentielles scalaires sur une variété kählérienne, les formules (2) et les conditions d'intégrabilité définissant les fibrés harmoniques fournissent les identités $\Delta = 2\Delta' = 2\Delta''$. Le lemme résulte alors du fait que chaque classe de cohomologie de $H^q_{DR}(E)$ (resp. $H^q_{Dol}(E)$) se représente par une forme Δ−harmonique (resp. Δ''−harmonique).

Soient E' et E'' deux fibrés harmoniques. Alors le fibré des homomorphismes $Hom(E'', E')$ est lui-même un fibré harmonique, et on a d'après le lemme ci-dessus $H^q_{DR}(Hom(E'', E')) \simeq H^q_{Dol}(Hom(E'', E'))$. Si $q = 0$, cette identité signifie que les morphismes plats s'identifient aux morphismes de fibrés de Higgs. Si q=1, l'espace vectoriel $H^1_{DR}(Hom(E'', E'))$ classifie les extensions de fibrés plats $0 \to E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \to 0$ avec f et g plats ; de même, l'espace $H^1_{Dol}(Hom(E'', E'))$ classifie les extensions $0 \to E' \xrightarrow{i} F \xrightarrow{j} E'' \to 0$, où F est un fibré de Higgs et où i et j sont des morphismes de Higgs. Plus généralement, si on considère un fibré plat E, il a une filtration $0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_\ell = E$ telle que chaque $gr_i = E_i/E_{i-1}$

soit un fibré plat irréductible. Chacun des fibrés gr_i provient d'un fibré harmonique d'après le théorème 2 ; une généralisation facile de ce qui précède montre que la filtration ci-dessus peut être considérée comme une filtration de fibrés de Higgs. Ceci conduit finalement au résultat suivant :

Théorème 3.— *La catégorie des fibrés plats est équivalente à celle des fibrés de Higgs possédant une filtration dont le gradué est somme directe de fibré de Higgs μ-stables dont les classes de Chern satisfont aux conditions suivantes :*

$$c_1.h^{n-1} = 0 \quad ; \quad (\frac{c_1^2}{2} - c_2).h^{n-2} = 0$$

Dans la section suivante, on va en fait montrer que l'on obtient tous les fibrés de Higgs μ-semi-stables dont les classes de Chern satisfont aux mêmes conditions (cf. corollaire 1 du théorème 4).

4. Restriction à une hypersurface

Il s'agit d'étendre aux fibrés de Higgs les théorèmes de restriction de Mehta et Ramanathan [25,26] . Rappelons d'abord qu'étant donné un faisceau algébrique cohérent sans torsion F sur X on peut trouver une filtration de F :

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_k = F$$

telle que (i) F/F_i soit sans torsion ; (ii) le gradué $gr_i = F_i/F_{i-1}$ soit μ-semi-stable, de pente μ_i strictement décroissante. Cette filtration est unique et s'appelle la filtration de Harder-Narasimhan de F. Dans la suite, on notera $\mu_1 = \mu_{max}(F)$, et $\mu_k = \mu_{min}(F)$. Il résulte du théorème de restriction de Mehta et Ramanathan [25], que l'on peut choisir d, aussi grand que l'on veut, et une hypersurface lisse $Y \in |\mathcal{O}_X(d)|$ telle que $F|_Y$ soit sans torsion et que la filtration de Harder-Narasimhan de $F|_Y$ coïncide avec $F_i|_Y$.

Etant donné un faisceau de Higgs (F, θ) , avec F sans torsion, on peut encore définir une filtration comme ci-dessus $0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_k = F$, satisfaisant aux conditions (i) et (ii) ci-dessus, où l'on impose à F_i d'être un sous-faisceau de Higgs, et où la semi-stabilité doit être prise au sens des faisceaux de Higgs. Cette filtration est encore unique, et sera appelée filtration de Harder-Narasimhan du faisceau de Higgs (F, θ).

Etant donnés un faisceau de Higgs (F, θ) et une sous-variété lisse Y de X, on définit un faisceau de Higgs $(F|_Y, \theta_Y)$ induit sur Y en considérant le morphisme composé

$$F|Y \xrightarrow{\theta|_Y} \Omega^1_X|_Y \otimes F|_Y \longrightarrow \Omega^1_Y \otimes F|_Y$$

L'énoncé qui suit étend aux faisceaux de Higgs le théorème classique de Mehta et Ramanathan :

Proposition 3.— *Soient (F, θ) un faisceau de Higgs μ-semi-stable sur X, et d_0 un entier. Il existe un entier $d \geq d_0$ et une hypersurface $Y \in |\mathcal{O}_X(d)|$ tels que $(F|_Y, \theta_Y)$ soit μ-semi-stable .*

On a aussi bien sûr le même énoncé pour les faisceaux de Higgs μ-stables. La démonstration repose sur le lemme suivant :

Lemme 4.— *Soient $Y \in |\mathcal{O}_X(d)|$ une hypersurface générale et $0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_k$ la filtration de Harder-Narasimhan du faisceau de Higgs $G = F|_Y$. Alors G_i est invariant par l'opérateur $\theta|_Y : G \to \Omega^1_X|_Y \otimes G$, pourvu que d soit assez grand.*

Démonstration. En vertu de la suite exacte $0 \to \mathcal{O}_Y(-d) \to \Omega^1_X|_Y \to \Omega^1_Y \to 0$ il suffit de vérifier que $\mathrm{Hom}(G_i, G/G_i\,(-d)) = 0$ si d est assez grand. Soit F_i la fitration de Harder-Narasimhan (ordinaire) de F, et supposons d et Y choisis en sorte que $F_i|_Y$ soit la filtration de Harder-Narasimhan (ordinaire) de $G = F|_Y$. On a alors $\mu_{max}(G) = d\mu_{max}(F)$ et $\mu_{min}(G) = d\,\mu_{min}(F)$ et d'autre part un calcul élémentaire de barycentres montre que, r désignant le rang de F,

$$\mu_{min}(G_i) - \mu_{max}(G/G_i) \geq r(\mu_{min}(G) - \mu_{max}(G))$$

Or, $\mu(\mathcal{O}_Y(1)) = d\deg(X)$. On voit donc que si $d > r(\mu_{max}(F) - \mu_{min}(F))$, on aura $\mathrm{Hom}(G_i, G/G_i\,(-d)) = 0$; d'où le lemme .

Dès lors, la démonstration de la proposition 3 se termine comme dans le cas classique de Mehta et Ramanathan [25 ;11 ;18] : si d est assez grand et Y suffisamment générale, la filtration de Harder-Narasimhan du faisceau de Higgs $G = F|_Y$ s'étend en une filtration de F par des sous-modules cohérents $(F_i)_{i=1,\cdots,k}$ de F, croissante et telle que F/F_i soit sans torsion : le seul point qui reste à vérifier est de constater que les sous-faisceaux F_i sont des sous-faisceaux de Higgs, pourvu que d soit assez grand. D'après la suite exacte $0 \to \Omega^1_X(-d) \to \Omega^1_X \to \Omega^1_X|_Y \to 0$, et le lemme 4, il suffit de vérifier que $\mathrm{Hom}(F_i, \Omega^1_X(-d) \otimes F/F_i) = 0$. Cet espace vectoriel sera nul dès que $d > \mu_{max}(F/F_i) - \mu_{min}(F_i) + \mu_{max}(\Omega^1_X)$. Comme ci-dessus, $\mu_{max}(F/F_i) - \mu_{min}(F_i) \leq r(\mu_{max}(F) - \mu_{min}(F))$ de sorte que cette condition sera réalisée si l'on prend $d > r(\mu_{max}(F) - \mu_{min}(F)) + \mu_{max}(\Omega^1_X)$. On a $\mu(G_i) = d\mu(F_i)$; ainsi le fibré de Higgs F ne peut être μ-semi-stable que si $k = 1$; par suite, $F|_Y$ est μ-semi-stable.

Etant donnés deux faisceaux de Higgs F et G, l'espace vectoriel des morphismes de Higgs de F dans G sera noté $\mathrm{Hom}_{Higgs}(F, G)$. Par des arguments semblables à ceux que nous venons d'utiliser on obtient également :

Lemme 5.—*Soient d un entier, $Y \in |\mathcal{O}_X(d)|$ une hypersurface lisse et F et G deux faisceaux de Higgs sans torsion sur X. Si d est assez grand, le morphisme de restriction*

$$\mathrm{Hom}_{Higgs}(F, G) \to \mathrm{Hom}_{Higgs}(F|_Y, G|_Y)$$

est injectif; si en outre G est réflexif, il est surjectif.

Lorsque F et G parcourent des familles limitées, on peut même choisir d aussi grand que l'on veut, indépendamment de F et G. L'injectivité est en fait déjà vraie pour l'espace des morphismes de modules. Pour vérifier la surjectivité, on relève un morphisme de Higgs $u : F|_Y \to G|_Y$ en un morphisme $v : F \to G$ en utilisant le fait que $\mathrm{Ext}^1(F, G(-d)) = 0$ pour d assez grand (lemme de Severi), et on constate que le morphisme relevé v est en fait un morphisme de Higgs, par la même méthode que ci-dessus. Nous allons utiliser ce résultat pour montrer que dans l'équivalence du théorème 3, on obtient en fait tous les fibrés μ-semi-stables de classes de Chern $c_i = 0$. Plus précisément :

Théorème 4.— *Soit (F,θ) un faisceau de Higgs μ-semi-stable , dont les classes de Chern c_i satisfont aux conditions suivantes :*

$$c_1.h^{n-1} = 0 \quad ; \quad (\frac{c_1^2}{2} - c_2).h^{n-2} = 0$$

Alors
(1) le bidual F^{**} est localement libre et possède une filtration par des sous-fibrés de Higgs dont le gradué est somme directe de fibrés de Higgs μ-stables de classes de Chern $c_i = 0$
(2) le morphisme canonique $F \to F^{**}$ est un isomorphisme en dehors d'un fermé de codimension ≥ 3.

Démonstration 1. Si X est une courbe, le résultat est trivial.

2. Si X est une surface, commençons par le cas où le faisceau de Higgs F est μ-stable. Le bidual F^{**} est alors localement libre et encore μ-stable, donc, d'après l'inégalité de Bogomolov et Lübke (corollaire de la proposition 1), on a pour F^{**}, $c_1.h = 0$ et $c_2 - \frac{r-1}{2r}c_1^2 \geq 0$. La forme d'intersection étant négative sur l'orthogonal de h, on obtient $c_2 - \frac{c_1^2}{2} \geq -\frac{c_1^2}{2r} \geq 0$, et l'hypothèse entraîne alors $c_2 - \frac{c_1^2}{2} = 0$ pour le fibré F^{**}. D'après le théorème 1, provient d'un fibré harmonique ; en particulier, ses classes de Chern sont nulles. Alors $F \simeq F^{**}$, et F est localement libre.

Si F est un faisceau cohérent de classes de chern c_i, on pose selon l'usage $ch_2(F) = \frac{c_1^2}{2} - c_2$; si F est un faisceau de Higgs μ-stable de pente $\mu = 0$, on vient de voir que $ch_2(F) \leq 0$. Si F est seulement μ-semi-stable il a une filtration par des sous-faisceaux de Higgs F_i tels que $gr_i = F_i/F_{i-1}$ soit un faisceau μ-stable de pente $\mu_i = 0$, et on a alors

$$0 = ch_2(F) = \sum_i ch_2(gr_i)$$

Par suite, $ch_2(gr_i) = 0$: il résulte de la première partie que gr_i est un fibré de Higgs de classes de Chern $c_i = 0$.

3. Dans le cas général on raisonne par récurrence sur la dimension. Par restriction à une hypersurface lisse $Y \in |\mathcal{O}_X(d)|$ convenable, on peut supposer d'après la proposition 4 que le faisceau de Higgs $(F|_Y, \theta_Y)$ est encore μ-semi-stable et que $F^{**}|_Y \simeq (F|_Y)^{**}$. D'après l'hypothèse de récurrence $G = (F|_Y)^{**}$ a une filtration dont le gradué est une somme directe de fibrés de Higgs μ-stables de classes de Chern $c_i = 0$, et le morphisme canonique $F|_Y \to (F|_Y)^{**}$ est un isomorphisme en dehors d'un fermé de codimension ≥ 3. Soit y un point de Y ; d'après le théorème 3, G provient d'une représentation du groupe fondamental $\pi_1(Y, y)$; comme $\dim X \geq 3$, d'après le théorème de Lefchetz, l'inclusion $Y \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme $\pi_1(Y, y) \simeq \pi_1(X, y)$, ce qui permet d'étendre le fibré de Higgs G en un fibré de Higgs H sur X. La famille des faisceaux de Higgs μ-semi-stables de rang et classes de Chern fixées est limitée (cf. section suivante) ; il résulte alors du lemme 5 que, pour un choix convenable de d, l'isomorphisme $F^{**}|_Y \simeq H|_Y$ s'étend en un isomorphisme $F^{**} \simeq H$. Le lemme de Nakayama montre que le support du conoyau du morphisme canonique $F \to F^{**}$ ne peut rencontrer Y que suivant un fermé de codimension ≥ 3 : il est donc lui aussi de codimension ≥ 3. D'où le théorème.

Corollaire 1.— *Soit F un fibré de Higgs μ-semi-stable, de classes de Chern c_i telles que*

$$c_1.h^{n-1} = 0 \quad ; \quad (\frac{c_1^2}{2} - c_2).h^{n-2} = 0$$

Alors F provient d'un fibré plat.

Corollaire 2.— *Soit F un faisceau de Higgs μ-semi-stable, de classes de Chern $c_i = 0$. Alors le faisceau F est localement libre, et provient d'un fibré plat.*

L'hypothèse implique en effet que les faisceau F et F^{**} ont même polynôme de Hilbert, et par suite, le morphisme canonique $F \to F^{**}$, injectif parce que F est sans torsion, est en fait un isomorphisme.

5. Les espaces de modules M_B, M_{Dol}, M_{DR}

L'espace de modules de Betti

Soit $x \in X$; le groupe fondamental $\pi = \pi_1(X, x)$ est un groupe de type fini, par conséquent on peut mettre sur l'espace des représentations $R = Hom(\pi, GL(r, \mathbf{C}))$ une structure naturelle de variété algébrique affine. Soit en effet $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_k\}$ un système de générateurs pour π ; le groupe π s'écrit $\mathcal{L}/\mathcal{N}$, où $\mathcal{L}$ est le groupe libre à k générateurs, et $\mathcal{N}$ le groupe des relations entre ces générateurs, qu'on supposera lui-même engendré par ℓ générateurs. On voit que l'application $R \to GL(r, \mathbf{C})^k$ définie par $\rho \mapsto (A_i = \rho(\gamma_i))_{i=1,\cdots,k}$ identifie R à la sous-variété fermée de $GL(r, \mathbf{C})^k$ définie par l'image réciproque de l'élément neutre de $GL(r, \mathbf{C})^\ell$ par le morphisme $GL(r, \mathbf{C})^k \to GL(r, \mathbf{C})^\ell$ associé à ces relations. On peut vérifier que la structure ainsi définie est indépendante de la présentation de π. Sur la variété R, le groupe $GL(r, \mathbf{C})$ agit par conjugaison, et puisque ce groupe est réductif, l'algèbre des invariants $\mathcal{O}(R)^{GL(r,\mathbf{C})}$ est une algèbre de type fini d'après Hilbert, ce qui définit une variété affine

$$M_B(r) = R/GL(r, \mathbf{C})$$

L'ensemble des points fermés de $M_B(r)$ correspond à l'ensemble des orbites fermées de $GL(r, \mathbf{C})$: on vérifie que ces orbites fermées sont celles des représentations semi-simples. L'inclusion $\mathcal{O}(R)^{GL(r,\mathbf{C})} \hookrightarrow \mathcal{O}(R)$ définit un morphisme $R \to M_B(r)$ qu'on peut décrire de la manière suivante : toute représentation ρ a une filtration croissante $\rho_1 \subset \rho_2 \subset \cdots \subset \rho_k = \rho$ telle que $gr_i(\rho) = \rho_i/\rho_{i-1}$ soit irréductible ; on associe à ρ le point défini par la représentation semi-simple $gr(\rho) = \oplus_{i=1}^k gr_i(\rho)$.

Remarquons que cet espace de module, dit de Betti, pourrait se définir sur un espace topologique quelconque, pourvu que le groupe de Poincaré soit de type fini.

Géométrie projective invariante [27]

Soient G un groupe réductif opérant linéairement sur un espace vectoriel W, $\mathbf{P}(W)$ l'espace projectif des droites de W, $A \subset \mathbf{P}(W)$ un sous-schéma fermé G-invariant. Un point $x \in A$ est dit *semi-stable* sous l'action de G s'il existe un polynôme homogène G-invariant sur W non nul en x. Les points $x \in A$ semi-stables sous l'action de G constituent un ouvert A^{ss}. Un point $x \in A^{ss}$ est dit *stable* s'il est semi-stable et si le morphisme $g \mapsto gx : G \to A^{ss}$ est propre. On peut alors construire une variété projective B et un morphisme $\pi : A^{ss} \to B$, G-équivariant et satisfaisant à la propriété universelle attendue des quotients : pour tout morphisme G-équivariant $f : A^{ss} \to C$ dans une variété C, il existe un morphisme et un seul $g : B \to C$ tel que $g \circ \pi = f$; de plus , cette propriété reste vraie par changement de base. Ce morphisme π est surjectif, affine, et envoie deux fermés G-invariants disjoints sur deux fermés disjoints. De plus, la réunion A^s des orbites des points stables est l'image réciproque d'un ouvert B^s de B.

Il existe un critère commode pour déterminer quels sont les points semi-stables et stables sous l'action de G. Soit $\lambda : \mathbf{C}^* \to G$ un sous-groupe à un paramètre de G ; on peut alors écrire $W = \oplus_{n \in \mathbf{Z}} W_n$, où W_n est le sous-espace vectoriel des vecteurs $v \in W_n$ tels que $\lambda(t).v = t^n v$. Un point $x \in \mathbf{P}(W)$ se représente par un vecteur $v = \sum_n v_n$; soit $\mu(\lambda, x) = inf\{n, v_n \neq 0\}$. On a alors l'équivalence :

$$x \textit{ est semi-stable (resp. stable)} \Leftrightarrow \textit{pour tout } \lambda, \mu(\lambda, x) \leq 0 \quad (\textit{resp.} < 0)$$

On peut par exemple utiliser ce résultat pour trouver les points semi-stables de la grassmannienne $\mathbf{Gr} = Grass(H \otimes \mathbf{C}^r, s)$ des espaces vectoriels quotients K de dimension s de $H \otimes \mathbf{C}^r$ sous l'action de $SL(H)$: il s'agit des quotients K satisfaisant à la condition suivante : pour tout sous-espace vectoriel H' l'image K' de $H' \otimes \mathbf{C}^r$ dans K satisfait à l'inégalité

$$\frac{dim\ K'}{dim\ H'} \geq \frac{dim\ K}{dim\ H}.$$

L'espace de modules des faisceaux cohérents

Un faisceau algébrique cohérent F sur X est dit de dimension d si son support est de dimension d. Un tel faisceau est dit *équidimensionnel* de dimension d s'il n'a pas de sous-module cohérent de dimension $< d$. Pour $d = n$, il s'agit des faisceaux sans torsion ; pour $d = 1$, il s'agit de faisceaux de dimension un localement de Cohen-Macaulay. Le polynôme de Hilbert d'un faisceau algébrique cohérent F de dimension d s'écrit

$$P_F(m) = \chi(F(m)) = \sum_{i=0}^{d} C^i_{m+i-1}\ \chi_i$$

où $\chi_i = \chi(F\ |_{Y_i})$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de la restriction de F à une intersection Y_i de i sections hyperplanes en position générale. Le coefficient $r = \chi_d$ s'appelle la *multiplicité*. Dans le cas où F est sans torsion, on a $r = \text{rang}(F).\deg(X)$; le nombre $\frac{\chi_{d-1}}{r}\deg(X)$ ne diffère de la pente, définie dans la section 2, que par une constante indépendante de F.

On dit qu'un faisceau algébrique cohérent F de dimension d , de multiplicité r est *semi-stable* (resp. *stable*) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(a) le faisceau F est équidimensionnel

(b) pour tout sous-module cohérent non nul $F' \subset F$ de multiplicité $r' < r$ on a

$$\frac{P_{F'}}{r'} \leq \frac{P_F}{r} \qquad (resp. <)$$

Dans ces inégalités, les polynômes sont ordonnés par ordre lexicographique sur les coefficients, en commençant par le terme de plus haut degré. On définit de même la notion de faisceau μ-semi-stable (resp. μ-stable) en remplaçant le polynôme de Hilbert par le coefficient χ_{d-1}. On a évidemment les implications

$$\begin{array}{ccc} \mu-\text{stable} & \Rightarrow & \text{stable} \\ & & \Downarrow \\ \mu-\text{semi}-\text{stable} & \Leftarrow & \text{semi}-\text{stable} \end{array}$$

Pour les faisceaux cohérents sans torsion, on retrouve évidemment les définitions de Gieseker [12] et Maruyama [24].

Lemme 6.— *La famille des faisceaux μ-semi-stables de polynôme de Hilbert donné P est limitée.*

Cet énoncé est classique [23] pour les faisceaux sans torsion. Dans le cas général, on peut considérer F comme un faisceau de modules sur le sous-schéma S de X défini par l'annulateur de F ; ce sous-schéma est équidimensionnel de dimension d et de degré borné. D'après Chow, la famille des sous-schémas ainsi obtenue est limitée.

On peut alors considérer, S étant maintenant fixé, une projection finie $\pi : S \to \mathbf{P}_d$ telle que $\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_d}(1)) = \mathcal{O}_S(1)$. Le faisceau $\pi_*(F)$ est alors un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_d}$-modules sans torsion de même polynôme de Hilbert que F. Ce faisceau n'est peut-être pas μ-semi-stable, mais la pente de ses sous-modules est majorée. Ceci suffit en fait pour obtenir une famille limitée ; il en résulte que la famille des faisceaux F est elle-même limitée.

Fixons un polynôme Q de degré d, et considérons la catégorie $\mathcal{C}(Q)$ des faisceaux semi-stables F tels que $\frac{P_F}{r} = Q$, où r désigne la multiplicité de F. Il est facile de vérifier qu'on obtient ainsi une catégorie abélienne ; en plus elle est évidemment noethérienne et artinienne, ce qui permet de définir dans cette catégorie la notion de filtration de Jordan-Hölder : on entend par là une filtration

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_k = F$$

telle que le gradué $gr_i(F) = F_i/F_{i-1}$ soit stable ; le gradué $gr(F) = \oplus gr_i(F)$ est alors bien défini à isomorphisme près. Deux faisceaux semi-stables F et G de $\mathcal{C}(Q)$ sont dit S-équivalent si les gradués $gr(F)$ et $gr(G)$ sont isomorphes.

Soit P un polynôme de degré d. On considère le foncteur $\underline{M}_X(P)$ qui associe à la variété algébrique S l'ensemble $\underline{M}_X(P)(S)$ des classes d'isomorphisme de familles de faisceaux semi-stables sur X de polynôme de Hilbert P.

Théorème 5.— *1. Il existe pour le foncteur $\underline{M}_X(P)$ un espace de modules grossier $M_X(P)$, dont les points sont les classes de S-équivalence de faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert P.*

2. La variété algébrique $M_X(P)$ est projective.

3. Il existe un ouvert $M_X^s(P)$ de $M_X(P)$ dont les points correspondent aux classes d'isomorphisme de faisceaux stables.

La propriété de module grossier de $M_X(P)$ signifie qu'il existe un morphisme fonctoriel $f : \underline{M}_X(P)(S) \to \mathrm{Mor}(S, M_X(P))$ satisfaisant à la propriété universelle suivante : pour toute autre variété algébrique N, et tout morphisme fonctoriel $g : \underline{M}_X(P)(S) \to Mor(S, N)$ il existe un morphisme et un seul φ tel que $g_F = \varphi \circ f_F$ pour toute famille F de $\underline{M}_X(P)(S)$.

Esquisse de démonstration. On choisit d'abord un entier N assez grand pour que, n étant donné $\geq N$ les propriétés suivantes soient vraies :

(i) tout faisceau semi-stable F de polynôme de Hilbert P, $F(n)$ est engendré par ses sections, et on a $H^q(F(n)) = 0$ si $q > 0$.

(ii) pour tout faisceau semi-stable F de multiplicité r, de polynôme de Hilbert $P_F = P$, et tout sous-module $F' \subset F$ non nul et de multiplicité r', on a

$$\frac{h^0(F'(n))}{r'} \leq \frac{h^0(F(n))}{r}, \quad \text{et, en cas d'égalité} \quad \frac{P_{F'}}{r'} = \frac{P_F}{r}.$$

L'assertion a) résulte des théorèmes A et B de Serre appliqués à la famille limitée du lemme 6. L'assertion b), qui traduit la semi-stabilité, n'est pas évidente, car la famille des sous-faisceaux F' qui intervient dans cet énoncé n'est pas limitée.

L'entier N étant ainsi choisi, soit H un espace vectoriel complexe de dimension $P(N)$; on pose, pour tout entier $k \geq 0, A_k = H^0(\mathcal{O}_X(k))$. Considérons le schéma projectif de Hilbert et Grothendieck [15] **Hilb** $=$ *Hilb* $(H \otimes \mathcal{O}_X(-N), P)$ des $\mathcal{O}_X$-modules cohérents quotients du faisceau localement libre $H \otimes \mathcal{O}_X(-N)$ et de polynôme de Hilbert P. D'après sa construction, ce schéma se plonge, pour k assez grand, dans la grassmannienne

Gr $= Grass(H \otimes A_k, P(N+k))$ des espaces vectoriels quotients de $H \otimes A_k$ de dimension $P(N+k)$, en associant au faisceau quotient F l'espace vectoriel $H^0(F(N+k))$; ceci définit une polarisation de **Hilb**. Le groupe $SL(H)$ opère sur **Hilb** et sur **Gr** ; l'action provient de la représentation linéaire de $SL(H)$ dans $\Lambda^{P(N+k)}(H \otimes A_k))$, via le plongement de Plücker. En utilisant le critère du paragraphe précédent, il n'est pas difficile d'identifier les points semi-stables pour l'action de ce groupe, pourvu que k soit assez grand :

Lemme 7.— *Pour une polarisation convenable de* **Hilb**, *on a l'équivalence, pour un point $F \in$* **Hilb** *:*

(a) le point F est semi-stable sous l'action de $SL(H)$;

(b) Pour tout sous-espace vectoriel non nul $H' \subset H$, on a, pour le sous-faisceau F' de F engendré par $H' \otimes \mathcal{O}_X(-N)$:

$$\frac{P_{F'}}{dim\ H'} \geq \frac{P}{dim\ H}$$

On considère le quotient de Mumford **M'**= **Hilb**$^{ss}/SL(H)$ de l'ouvert **Hilb**^{ss} des points semi-stables de **Hilb** sous l'action de $SL(H)$. A tout couple (F, α) formé d'un faisceau semi-stable F de polynôme de Hilbert P et d'un isomorphisme $\alpha : H \cong H^0(F(N))$, on associe un point de **Hilb**. Si on désigne par F' le sous-faisceau de F engendré par un sous-espace non nul H' de H, on a alors $dim\ H' \leq dim\ H^0(F'(N))$, d'où il découle en utilisant la propriété (ii) ci-dessus

$$\frac{dim\ H'}{r'} \leq \frac{dim\ H}{r} \quad \text{et en cas d'égalité } \frac{P_{F'}}{r'} = \frac{P_F}{r}.$$

Il en résulte que

$$\frac{P_{F'}}{dim\ H'} \geq \frac{P_F}{dim\ H}$$

D'après le lemme 7, ceci signifie que le point défini par (F, α) appartient à l'ouvert **Hilb**^{ss}. Il est clair que si l'on change l'isomorphisme α, on obtiendra un point dans la même orbite, et par suite le même point dans le quotient **M'**. Il n'est pas difficile de voir que cette construction fournit en fait un morphisme fonctoriel

$$\underline{M}_X(P)(S) \to Mor(S, \mathbf{M'})$$

Réciproquement, on pourrait espérer que si l'entier N et la polarisation sont bien choisis, les points F de $\mathbf{Hilb}^{ss}$ définissent des faisceaux semi-stables, et que le morphisme d'évaluation $H \to H^0(F(N))$ est un isomorphisme. Si la deuxième assertion est claire, il n'en est pas de même de la première : on rencontrait déjà ce genre de difficulté dans les travaux de Gieseker et Maruyama pour les faisceaux sans torsion. Cependant, il est possible de prouver que les points F de **Hilb** correspondant à des faisceaux semi-stables, et tels que le morphisme d'évaluation $H \to H^0(F(N))$ soit un isomorphisme définissent un sous-schéma à la fois ouvert et fermé $\mathbf{H}^{ss}$ de $\mathbf{Hilb}^{ss}$, invariant par $SL(H)$. Le quotient de Mumford $\mathbf{M} = M_X(P) = \mathbf{H}^{ss}/SL(H)$ a alors un sens ; c'est une variété projective dont on vérifie facilement la propriété de module grossier annoncée.

L'espace de modules de Dolbeault

Comme pour les faisceaux cohérents, on définit les notions de semi-stabilité et de stabilité pour les faisceaux de Higgs en introduisant le polynôme de Hilbert : un faisceau de Higgs (F, θ) de multiplicité r est semi-stable s'il est équidimensionnel, et si pour tout sous-module de Higgs non nul $F' \subset F$ de multiplicité r', on a

$$\frac{P_{F'}}{r'} \leq \frac{P_F}{r}.$$

De même, on définit la notion de filtration de Jordan-Hölder et de S-équivalence.

Pour simplifier, on se limite ici au cas des faisceaux sans torsion ; leur polynôme de Hilbert P est donc de degré n. Par famille de faisceaux de Higgs, de polynôme de Hilbert P, paramétrée par une variété algébrique S , on entend la donnée d'un faisceau algébrique cohérent F sur $S \times X$, et d'un morphisme $\theta : F \to \Omega^1_{S\times X/S} \otimes F$, induisant au-dessus de chaque point $s \in S$ un faisceau de Higgs (F_s, θ_s) de polynôme de Hilbert P. (Le faisceau $\Omega^1_{S\times X/S}$ désigne, selon l'usage, le faisceau des formes différentielles relatives de degré 1). On considère le foncteur $\underline{M}_{Higgs}(P)$ qui associe à S l'ensemble des classes d'isomorphisme de familles de faisceaux de Higgs semi-stables sur X, de polynôme de Hilbert P, paramétrées par S. Le résultat suivant généralise le théorème 5.

Théorème 6.— *Soit P un polynôme de degré n.*

1. Il existe, pour le foncteur $\underline{M}_{Higgs}(P)$ un espace de modules grossier, noté $M_{Higgs}(P)$, dont les points sont les classes de S-équivalence de faisceaux de Higgs semi-stables.

2. La variété $M_{Higgs}(P)$ est quasi-projective.

3. Dans $M_{Higgs}(P)$, il existe un ouvert dont les points sont les classes d'isomorphisme de faisceaux de Higgs stables.

Cet énoncé est en fait une conséquence du théorème 5. Considérons le fibré tangent $T(X)$, et le fibré en espaces projectifs associé (au sens de Grothendieck) $Z = \mathbf{P}(T(X) \oplus \mathcal{O}_X)$; c'est une complétion lisse de la variété $T^*(X)$ des vecteurs cotangents ; on désigne par $\pi : Z \to X$ la projection canonique, et par D le diviseur à l'infini. Sur la variété Z, le fibré inversible $\pi^*(\mathcal{O}_X(a)) \otimes \mathcal{O}(D)$ est très ample si a est un entier assez grand. Pour simplifier nous supposerons $a = 1$, cas auquel on peut se ramener en changeant au besoin la polarisation de X ; ceci modifie le polynôme de Hilbert, mais non les notions de semi-stabilité et stabilité.

Lemme 8.— *Il y a équivalence entre la catégorie des faisceaux de Higgs semi-stables sans torsion sur X, et la catégorie des faisceaux semi-stables de dimension n sur Z, dont le support ne rencontre pas le diviseur à l'infini D.*

Démonstration : Soit $\mathcal{A} = Sym\ T(X)$ l'algèbre symétrique associé au faisceau des champs de vecteurs $T(X)$; on a $T^*(X) = Spec\ \mathcal{A}$. Se donner un faisceau de Higgs sur X revient à se donner un $\mathcal{A}$-module cohérent ; à un tel module F on associe un faisceau cohérent G sur $T^*(X)$ en posant

$$G = \pi^{-1}(F) \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{A}} \mathcal{O}_{T^*}$$

Le support du faisceau G est propre au-dessus de X ; si F est sans torsion, G est équidimensionnel de dimension n. Réciproquement, étant donné un tel module cohérent sur T^* on obtient un faisceau de Higgs F sans torsion sur X en posant $F = \pi_*(G)$. Les deux opérations sont inverses l'une de l'autre ([17], exercice 5.17) ; les polynômes de Hilbert sont inchangés et les sous-modules de Higgs de F correspondent aux sous-modules cohérents de G. Par suite, les notions de semi-stabilité se correspondent ; même chose pour la stabilité. D'où le lemme.

Les modules cohérents sur T^* dont le support est propre sur X peuvent être considérés comme des modules cohérents sur Z dont le support ne rencontre pas le diviseur à l'infini D. Il en résulte que si l'on considère l'ouvert $\mathcal{U}$ de $M_Z(P)$ des classes d'équivalence de faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert P dont le support ne rencontre pas Z, on obtient une variété algébrique quasi-projective qui satisfait à la propriété de module grossier demandée. On prendra donc $M_{Higgs}(P) = \mathcal{U}$.

Désignons par P_0 le polynôme de Hilbert de $\mathcal{O}_X$. Soit r un entier ; l'espace de modules $M_{Higgs}(rP_0)$ contient comme sous-schéma à la fois ouvert et fermé les classes de S-équivalence de faisceaux semi-stables de rang r et de classes de Chern nulles. Comme Simpson, on désignera par $M_{Dol}(r)$ cette composante. On sait d'après le corollaire 2 du théorème 4 que les points de cette composante sont en fait représentés par des somme directe de fibrés de Higgs μ-stables de classes de Chern $c_i = 0$.

L'espace de modules de de Rham

Il s'agit de construire une variété algébrique qui paramètre les fibrés plats sur X. Se donner un tel fibré revient à se donner un couple (E, D)

formé d'un fibré vectoriel algébrique E et d'une connexion régulière D : $\mathcal{O}(E) \to \Omega^1 \otimes E$ satisfaisant à la condition d'intégrabilité $D^2 = 0$. Une connexion régulière s'identifie à un scindage de la suite exacte de fibrés vectoriels algébriques

$$0 \to \Omega^1 \otimes E \to J^1E \to E \to 0$$

où J^1E désigne le fibré des jets d'ordre 1. Pour E fixé, on peut regarder l'espace de ces connexions intégrables comme un sous-schéma fermé de l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}(J^1E, \Omega^1 \otimes E)$: les équations définissant ce sous-schéma traduisent les conditions de scindage et d'intégrabilité.

Lemme 9.— *La famille des fibrés vectoriels algébriques sous-jacents aux fibrés plats de rang r est limitée.*

Démonstration. Il suffit de montrer que la famille des fibrés plats irréductibles est limitée. Soit (E, D) un tel fibré ; considérons la filtration de Harder-Narasimhan $(F_i)_{i=1,\cdots,k}$ de E, et désignons par μ_i la pente de $gr_i = F_i/F_{i-1}$. La connexion induit un opérateur $\mathcal{O}_X$-linéaire

$$F_i \to \Omega^1 \otimes E/F_i$$

non nul si $1 \leq i < k$, car sinon F_i serait un sous-module invariant par D, donc localement libre d'après Deligne ([5], théorème 2.23), ce qui définirait un sous-fibré plat, ce qui est contraire à notre hypothèse d'irréductibilité. On a alors $\mu_{min}(F_i) \leq \mu_{max}(\Omega^1) + \mu_{max}(E/F_i)$, c'est-à-dire $\mu_i - \mu_{i+1} \leq \mu_{max}(\Omega^1)$. Par suite, $\mu_{max}(E) - \mu_{min}(E) \leq r\mu_{max}(\Omega^1)$. Puisque le polynôme de Hilbert est fixé, une variante déjà invoquée du lemme 6 suffit pour conclure que la famille des fibrés E est limitée.

Un fibré plat E sur X a une filtration croissante F_i par des sous-fibrés plats, telle que $gr_i = F_i/F_{i-1}$ soit irréductible ; le gradué $gr(E) = \oplus_i gr_i$ est, à isomorphisme près, indépendant de la filtration. Deux fibrés plats E et F sont dits S-équivalents si les fibrés plats semi-simples $gr(E)$ et $gr(F)$ sont isomorphes. Soit r un entier. On considère pour toute variété algébrique S, l'ensemble $\underline{M}_{DR}(r)(S)$ des faisceaux algébriques cohérents F sur $S \times X$, munis d'une connexion relative $D : F \to \Omega^1_{S\times X/S} \otimes F$ satisfaisant à la condition d'intégrabilité $D^2 = 0$ et tels que pour tout $s \in S, F_s$ soit de rang r.

Théorème 7.— *1. Il existe pour le foncteur $\underline{M}_{DR}(r)$ un espace de modules grossier $M_{DR}(r)$, dont les points sont les classes de S-équivalence de fibrés plats.*

2. La variété $M_{DR}(r)$ est une variété quasi-projective.

3. Les classes d'isomorphismes de fibrés plats irréductibles s'identifient à un ouvert de $M_{DR}(r)$.

Esquisse de démonstration. Soient comme ci-dessus, $P = rP_0$, N un entier assez grand, et H un espace vectoriel complexe de dimension $P(N)$. Considérons l'ensemble des triplets (E, α, D), formés d'un fibré vectoriel algébrique E, d'un isomorphisme $\alpha : H \to H^0(E(N))$ et d'une connexion intégrable D sur E. On peut définir une variété algébrique quasi-projective relative

$$\mathbf{A} \to \mathbf{Hilb}(H \otimes \mathcal{O}(-N), P)$$

qui paramètre tous ces triplets. On va expliquer comment on peut munir cette variété $\mathbf{A}$ d'une polarisation.

On désigne par $\mathcal{D}$ l'algèbre des opérateurs différentiels scalaires sur X ; elle est munie de deux structures évidentes de $\mathcal{O}_X$-modules. La donnée d'une connexion intégrable sur le faisceau localement libre E équivaut à celle d'une structure de $\mathcal{D}$-module : étant donnée une telle structure, on retrouve la connexion D en posant $< Ds, \xi >= \xi.s$ pour tout champ de vecteurs local ξ et toute section locale s de E; la compatibilité avec le crochet fournit la règle de Leibniz et la condition d'intégrabilité.

Considérons le sous-$\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{D}_i$ défini par les opérateurs différentiels d'ordre $\leq i$. Etant donné un $\mathcal{D}$-module E on a un morphisme $\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} E \to E$, où dans le produit tensoriel, $\mathcal{D}_i$ est muni de la structure de $\mathcal{O}_X$-module à droite; en composant avec le morphisme d'évaluation, ceci permet d'associer à tout point (E, α, D) de $\mathbf{A}$ un module quotient du module $\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} (H \otimes \mathcal{O}_X(-N))$. On obtient ainsi un plongement

$$\mathbf{A} \to \mathbf{H}_i = \mathbf{Hilb}(\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} (H \otimes \mathcal{O}_X(-N)), P)$$

Le groupe $SL(H)$ opère sur $\mathbf{H}_i$ et $\mathbf{A}$ est un sous-schéma localement fermé de $\mathbf{H}_i$ invariant par $SL(H)$. Le lemme 7 permet encore de déterminer (pour une polarisation convenable) l'ouvert $\mathbf{H}_i^{ss}$ des points semi-stables sous l'action de $SL(H)$: Simpson démontre que pour N et $i \geq r$, on a $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{H}_i^{ss}$ ([31], lemme 4.5). On obtient alors un morphisme

$$A \to \mathbf{H}_i^{ss}/SL(H)$$

Sous les mêmes conditions, il démontre en fait que $\mathbf{A}$ est l'image réciproque d'un sous-schéma localement fermé de $\mathbf{H}_i^{ss}/SL(H)$: ce sous-schéma satisfait à la propriété de module grossier demandée dans l'énoncé ; ceci fournit donc la construction de l'espace de modules $M_{DR}(r)$.

Comparaison des trois espaces de modules

Les trois variétés algébriques $M_B(r)$, $M_{Dol}(r)$ et $M_{DR}(r)$ ont même ensemble de points fermés ; cependant, elles diffèrent comme variétés algébriques. C. Simpson démontre cependant le résultat suivant :

Théorème 8.—*(1) Soient $M_B^{an}(r)$ et $M_{Dol}^{an}(r)$ les espaces* $\mathbf{C}$*-analytiques sous-jacents à $M_B(r)$ et $M_{Dol}(r)$ respectivement . On a un isomorphisme*

$$M_B^{an}(r) \cong M_{Dol}^{an}(r)$$

(2) Pour la topologie usuelle, les espaces topologiques sous-jacent à $M_B(r)$ et $M_{Dol}(r)$ sont homéomorphes.

Un exemple : le cas r=1

Etudions le cas des fibrés de rang $r = 1$ sur une surface de Riemann X. On a $M_B = H^1(X, \mathbf{C}^*) = \mathbf{C}^{*2g}$. C'est donc une variété affine de dimension 2g. La variété M_{DR} se projette sur la jacobienne $Jac(X)$ des fibrés inversibles de degré 0 ; le morphisme $M_{DR} \to Jac(X)$ est le fibré en espaces affines de fibre $\Omega^1(X)$, qu'on peut décrire de la manière suivante : considérons la suite exacte de groupes abéliens

$$0 \to \Omega^1(X) \to H^1(X, \mathbf{C}^*) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$$

La dernière flèche a pour image la jacobienne ; du point de vue $\mathbf{C}$-analytique, ceci permet de voir $H^1(X, \mathbf{C}^*)$ comme espace total d'un fibré en espaces affines au-dessus de $Jac(X)$, de groupe structural $\Omega^1(X)$. La variété $Jac(X)$ étant projective, ce fibré est en fait algébrique d'après les théorèmes de comparaison de Serre, et l'espace total $H^1(X, \mathbf{C}^*)$ hérite ainsi d'une structure de variété algébrique : c'est M_{DR} . Comme Serre l'avait remarqué, cette variété algébrique n'est pas affine bien qu'analytiquement isomorphe à $\mathbf{C}^{*2g}$: on a $M_B \neq M_{Dol}$.

Enfin si on écrit $\mathbf{C}^* = \mathbf{U} \times \mathbf{R}_+^*$, $\mathbf{U}$ désignant le groupe de nombres complexes de module 1, l'inclusion $H^1(X, \mathbf{U}) \hookrightarrow H^1(X, \mathbf{C}^*)$ induit un isomorphisme $H^1(X, \mathbf{U}) \cong Jac(X)$, et par suite un scindage

$$H^1(X, \mathbf{C}^*) \cong Jac(X) \times \Omega^1(X)$$

La variété M_{Dol} est la variété algébrique produit $Jac(X) \times \Omega^1(X)$ et on a $M_{Dol}^{an} \neq M_B^{an} = M_{DR}^{an}$: en effet, M_{Dol}^{an}, qui contient des sous-variétés analytiques compactes de dimension > 0 n'est pas une variété de Stein.

Remarque.

On peut construire un morphisme plat de variétés algébriques $\mathcal{W} \to A^1$ au-dessus de la droite affine, dont la fibre au-dessus du point $\lambda \neq 0$ est isomorphe à $M_{DR}(r)$ et dont la fibre au-dessus de l'origine 0 isomorphe à $M_{Dol}(r)$, en introduisant pour un fibré vectoriel algébrique E la notion, dûe à Deligne, de λ-connexion : il s'agit d'opérateurs $\mathbf{C}$-linéaires $E \to \Omega^1 \otimes E$ tels que $D(fs) = \lambda df s + f Ds$ pour f fonction régulière locale, et s section locale de E, et tels que $D^2 = 0$: autrement dit, il s'agit d'opérateurs différentiels d'ordre 1 de symbole $\lambda id_{\Omega^1 \otimes E}$. Ainsi, la variété de modules $M_{Dol}(r)$ peut être vue comme une spécialisation de $M_{DR}(r)$.

6. L'action de $\mathbf{C}^*$

Etant donnée une famille $(F_s, \theta_s)_{s \in S}$ de faisceaux de Higgs semi-stables de polynômes de Hilbert P paramétrée par une variété algébrique S, on obtient une nouvelle famille de faisceaux de Higgs semi-stables en considérant $(E_s, t\theta_s)_{(t,s) \in \mathbf{C}^* \times S}$; ceci définit un morphisme $\mathbf{C}^* \times S \to M_{Higgs}(P)$. La variété $M_{Higgs}(P)$ a été obtenue en quotientant par l'action d'un groupe $SL(H)$ un ouvert U d'un schéma de Hilbert paramétrant un faisceau de Higgs universel (F, θ) ; on peut donc prendre $S = U$: on obtient ainsi un morphisme équivariant $\mathbf{C}^* \times U \to M_{Higgs}(P)$, qui donne par passage au quotient un morphisme

$$\mathbf{C}^* \times M_{Higgs}(P) \to M_{Higgs}(P)$$

On vérifie qu'on obtient ainsi une action du groupe $\mathbf{C}^*$ sur $M_{Higgs}(P)$.

Points fixes

Pour simplifier, on se limite à l'étude des points fixes de $\mathbf{C}^*$ sur la variété $M_{Dol}(r)$.

Proposition 4.— *Un point* p *de* $M_{Dol}(r)$ *est fixe sous l'action de* $\mathbf{C}^*$ *si et seulement si on peut le représenter par un fibré de Higgs* (E, θ) *s'écrivant* $E = \oplus_{i=1}^{k} F_i$, *où les* F_i *sont des sous-fibrés algébriques de* E *tels que*

$$\theta(F_i) \subset \Omega^1 \otimes F_{i-1}.$$

Démonstration. Rappelons que chaque point p de $M_{Dol}(r)$ peut se représenter par une somme directe $(E, \theta) = \oplus_j (E_j, \theta_j)$ de fibrés de Higgs stables de classes de Chern nulles, et ceci de manière unique à isomorphisme près. Si un tel point p est fixe sous l'action de $\mathbf{C}^*$, on doit avoir $(E, \theta) \cong (E, t\theta)$ pour tout $t \in \mathbf{C}^*$; choisissons t non racine de l'unité, et désignons par g un tel isomorphisme. Pour tout champ de vecteurs local ξ au-dessus d'un ouvert U, considérons le morphisme $\theta_\xi =< \xi, \theta >$. Sur U, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\theta_\xi} & E \\ g \big\downarrow & & \big\downarrow g \\ E & \xrightarrow{t\theta_\xi} & E \end{array}$$

Le polynôme caractéristique de g a évidemment ses coefficients constants ; soit λ une valeur propre de g, de multiplicité ρ, et $V_\lambda = \operatorname{Ker}(g - \lambda id_E)^\rho$. C'est un sous-fibré de rang ρ de E, et on a $\theta_\xi(V_\lambda) \subset V_{t\lambda}$. Il en résulte que, ou bien $\theta_\xi(V_\lambda) = 0$ pour tout champ de vecteurs local ξ, ou bien $t\lambda$ est encore valeur propre de g. Soit Λ l'ensemble des valeurs propres de g, et $\Lambda_i \subset \Lambda$ l'ensemble des valeurs propres λ telles que $t\lambda, \cdots, t^{i-1}\lambda \in \Lambda$, et telles que $t^i\lambda \notin \Lambda$. On obtient ainsi une partition de Λ; on pose $F_0 = 0$ et pour $i > 0$,

$$F_i = \oplus_{\lambda \in \Lambda_i} V_\lambda.$$

On a $\theta(F_i) \subset \Omega^1 \otimes F_{i-1}$. Réciproquement, étant donnée une décomposition $E = \oplus_{i=1}^k F_i$ telle que $\theta(F_i) \subset \Omega^1 \otimes F_{i-1}$, on prend $g_t \mid_{F_i} = t^{k-i} id_{F_i}$. Il est clair que g_t définit un isomorphisme $(E, \theta) \cong (E, t\theta)$.

Variations de structures de Hodge

On appelle *variation (complexe) de structure de Hodge* (de poids m) sur X la donnée d'une somme directe $V = \oplus_{p+q=m} V^{p,q}$ de fibrés vectoriels de classe C^∞, d'une connexion plate D sur V

$$\begin{array}{ccc} A^0(V^{p,q}) & \to & A^1(V^{p,q}) \oplus A^{1,0}(V^{p-1,q+1}) \oplus A^{0,1}(V^{p+1,q_1}) \\ s & \mapsto & Ds = (\nabla s, \theta s, \theta^* s) \end{array}$$

et d'une forme hermitienne h sur V ; ces données doivent satisfaire aux conditions suivantes :

(1) la décomposition de V en somme directe est orthogonale par rapport à la forme hermitienne h;

(2) la forme hermitienne $(-1)^p$ h est positive non dégénérée sur $V^{p,q}$;

(3) la connexion D est compatible avec h.

La notion de variation de structures de Hodge fut d'abord introduite par P.A. Griffiths ([14]) qui imposait en plus des données précédentes l'existence d'une conjugaison sur le fibré vectoriel V. L'exemple fondamental provient de l'étude des structures de Hodge associées aux familles de variétés projectives lisses plongées dans $\mathbf{P}_N$. Plus précisément, soit $f : Y \to X$ un morphisme lisse de variétés projectives, muni d'un plongement dans le projectif relatif $X \times \mathbf{P}_N$; on considère le fibré vectoriel V de classe C^∞ associé au système local $R^m f_*(\mathbf{C})_\mathbf{0}$, partie primitive de l'image directe ; la décomposition de Hodge fournit un isomorphisme

$$V = R^m f_*(\mathbf{C})_0 \otimes_\mathbf{C} C_X^\infty \cong \oplus_{p+q=m} R^q f_*(\Omega^p_{Y/X})_0 \otimes_{\mathcal{O}_X} C_X^\infty$$

(où l'indice 0 indique la partie primitive, et C_X^∞ le faisceau des fonctions de classe C^∞ sur X). On désigne par ω la forme kählérienne relative associée au plongement dans le projectif relatif au-dessus de X. La forme hermitienne h sur V est définie sur la fibre Y_x par la formule

$$h(\alpha, \beta) = i^{m^2} \int_{Y_x} \alpha \wedge \overline{\beta} \wedge \omega^{n-m}$$

pour α et $\beta \in Harm^m(Y_x)_0$, espace des formes harmoniques primitives de degré m sur Y_x, qu'on peut identifier avec la fibre au point x du système local $R^m f_*(\mathbf{C})_0$. La connexion D est celle qui provient du système local, c'est-à-dire la connexion de Gauss-Manin, et la forme différentielle θ est celle qui est fournie par le théorème de transversalité de Griffiths.

Théorème 9.— *Les points fixes de $\mathbf{C}^*$ dans la variété $M_{Dol}(r)$ correspondent aux fibrés de Higgs qui proviennent de variations de structures de Hodge.*

Démonstration (esquisse). Considérons une variation de structure de Hodge $(V = \oplus_{p+q=m} V^{p,q}, D, h)$, et la métrique hermitienne K donnée sur $V^{p,q}$ par $(-1)^p\ h$. La connexion ∇ est hermitienne pour K, et la forme différentielle θ^* est l'adjointe de θ pour cette métrique. On vérifie en écrivant la condition d'intégrabilité $D^2 = 0$ dans la somme directe

$$A^2(V) = \oplus_{\substack{r+s=2 \\ p+q=m}} A^{r,s}(V^{p,q})$$

que l'opérateur $D'' = \nabla^{0,1} + \theta$ définit une structure de Higgs sur V, et puisque $\theta(V^{p,q}) \subseteq \Omega^1(V^{p-1,q+1})$, d'après la proposition 5 un point fixe (V, θ) pour l'action de $\mathbf{C}^*$.

Pour la réciproque, on se ramène d'abord au cas d'un point fixe stable (E, θ) ; il s'agit de montrer qu'il existe alors une métrique de Yang et Mills dans laquelle la somme directe $E = \oplus_{i=1}^k F_i$ de la proposition 4 est orthogonale. Il faut constater que dans l'équation de la chaleur (7)

$$H^{-1}\frac{\partial H}{\partial t} = -i\Lambda F_H^{\perp}$$

si on part d'une métrique hermitienne initiale K dans laquelle la somme directe ci-dessus est orthogonale, il en est de même de la solution $t \mapsto H_t$, et de la limite H_∞. On obtient ainsi un fibré harmonique, et en changeant alternativement les signes de la métrique sur les facteurs F_i on obtient une variation de structure de Hodge de poids $k-1$.

Le morphisme de Hitchin

Soit P un polynôme de degré n. On considère le morphisme, déjà envisagé par Hitchin ([19,20])

$$\gamma : M_{Higgs}(P) \to \oplus_{i=1}^r H^0(Sym^i(\Omega_X^1))$$

construit en associant au faisceau de Higgs (E, θ) les coefficients $s_i(\theta)$ du polynôme caractéristique $t^r + \sum_{i=1}^r s_i(\theta)t^{r-i}$. En effet, E est sans torsion et en dehors d'un fermé de codimension ≥ 2, θ peut être vue localement comme une matrice dont les coefficients sont des formes différentielles régulières ; on peut alors calculer les coefficients $s_i(\theta)$ du polynôme caractéristique, qui se prolongent évidemment en sections régulières sur X.

Proposition 5.— *Le morphisme γ est propre.*

Démonstration. On considère une courbe lisse C, munie d'un point marqué O, et on pose $U = C - \{O\}$. Il s'agit de montrer que si $s \mapsto \alpha(s) =$

$(E_s, \theta_s) : U \to M_{Higgs,X}(P)$ est un morphisme tel que $\gamma \circ \alpha$ s'étend à C, il en est de même de α. Posons $\alpha_i = s_i(\alpha)$; cette section s'étend à C ; considérons la fonction $a : C \times T^* \to Sym^r(\Omega^1_X)$ définie par $a(s,t) = t^r + \sum_{i=1}^r t^{r-i}\alpha_i$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $a(s, \theta_s)$ est nul pour $s \neq 0$.

Considérons, avec les notations de la section 5, le faisceau semi-stable F_s sur Z défini par $\alpha(s) = (E_s, \alpha_s)$; le morphisme $F_s \to Sym^r(\Omega^1_X) \otimes F_s$, associé à a est nul comme on vient de le voir : il en résulte que le support de F_s est contenu dans le fermé $V(a)$ des zéros de a. Or, on sait que l'espace de modules $M_Z(P)$ est propre : ainsi $F_0 = lim_{s \to 0} F_s$ existe. Par platitude, le support de F_0 est lui aussi contenu dans $V(a)$. Puisque qu'en fait $V(a) \subset C \times T^*$, le support de F_0 ne rencontre pas le diviseur à l'infini D. Ainsi, le morphisme α s'étend à C.

Corollaire 1.— *Soit (F, θ) un faisceau de Higgs semi-stable de polynôme de Hilbert P ; alors $lim_{t \to 0}(F, t\theta)$ existe dans $M_{Higgs}(P)$, et c'est un point fixe pour l'action de $\mathbf{C}^*$.*

Corollaire 2.— *Toute représentation linéaire du groupe fondamental de X peut être déformée continûment en une représentation qui provient d'une variation de structure de Hodge.*

Démonstration. Topologiquement (pour la topologie usuelle), on a $M_B(r) \cong M_{Dol}(r)$, et donc toute composante connexe de $M_B(r)$ contient un point qui provient d'une variation de structure de Hodge. Dans l'espace des représentations R, les composantes connexes sont des fermés de Zariski disjoints. Dans le quotient $M_B(r)$, leurs images sont encore des fermés disjoints, et ce sont obligatoirement les composantes connexes. Par suite, dans chaque composante connexe de R, il y a des points correspondant à des variations de structure de Hodge.

7. Fibrés de Higgs sur les courbes

Si X est une courbe, Hitchin calcule dans ([19]) les nombres de Betti de l'espace de modules $M_{Higgs}(P)$, pour les fibrés de Higgs de rang 2 et de degré impair. Dans ce cas, tous les points sont stables, et cet espace de modules est lisse. Il utilise pour ceci l'action de $\mathbf{C}^*$; c'est une idée classique, que reprend Simpson pour étudier l'irréductibilité de l'espace de module $M_{Dol}(r)$, bien que dans ce cas cette variété soit singulière.

Théorème 10.—*Soit X une courbe de genre $g \geq 2$. Alors l'espace de modules $M_{Dol}(r)$ est une variété irréductible de dimension $2(r^2(g-1)+1)$.*

On a aussi le même résultat pour $M_B(r)$ et $M_{DR}(r)$. On aura besoin des résultats suivants, qui sont vrais si la variété X est de dimension n. Soient (E,θ) un fibré de Higgs de rang r, $(E^*, -\check{\theta})$ le fibré de Higgs dual : $\check{\theta}$ est la forme différentielle régulière à valeurs dans $End(E^*)$ obtenue à partir de θ par transposition.

(a) On a $H^{2n}_{Dol}(\mathcal{O}_X) = \mathbf{C}$; l'accouplement $E \times E^* \to \mathcal{O}_X$ est compatible avec les structures de Higgs et induit une dualité, dite de Poincaré-Serre

$$H^q_{Dol}(E) \cong H^{2n-q}_{Dol}(E^*)^*$$

(b) La caractéristique d'Euler-Poincaré de E, définie par la formule $\chi_{Dol}(E) = \sum_i (-1)^i dim H^i_{Dol}(E)$ est liée à la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi_{top}(X)$ par la relation

$$\chi_{Dol}(E) = r\chi_{top}(X)$$

La démonstration du théorème 10 se décompose en deux : irréductibilité locale, et connexité : c'est l'objet des propositions 6 et 7 qui suivent.

Proposition 6.— *Si X est une courbe, l'espace analytique $M^{an}_{Dol}(r)$ est localement irréductible.*

Cet énoncé est une conséquence de la description locale de $M^{an}_{Dol}(r)$. Soient (E,θ) un fibré de Higgs sur la courbe X, somme directe de fibrés de Higgs stables de degré 0, $End(E)$ le fibré de Higgs des endomorphismes de E, et $End_0(E)$ le fibré des endomorphismes de trace nulle. On dispose d'une forme quadratique $q : \alpha \mapsto \alpha \wedge \alpha = \frac{1}{2}[\alpha, \alpha]$

$$H^1_{Dol}(End(E)) \to H^2_{Dol}(End_0(E)).$$

Considérons le cône $\Gamma \subset H^1_{Dol}(End(E))$ d'équation $q(\alpha) = 0$. Le groupe $\mathrm{Aut}(E)$ des automorphismes de Higgs est un groupe linéaire qui opère sur Γ par conjugaison ; du point de vue analytique, au voisinage du point p $\in M^{an}_{Dol}(r)$ défini par (E, θ), on a un isomorphisme de germes d'espaces analytiques

$$\varphi : \ (\Gamma/\mathrm{Aut}(E), 0) \cong (M^{an}_{Dol}(r), p).$$

Ceci résulte de la théorie générale des déformations de Schlessinger et Stasheff, Deligne, Goldman et Millson ([13]). L'espace $H^2_{Dol}(End_0(E))$ est, dans la dualité de Poincaré-Serre, le dual de l'espace des endomorphismes de Higgs de E de trace nulle ; en particulier, quand (E, θ) est stable, cet espace est nul, et le groupe des automorphismes, réduit à $\mathbf{C}^*$, opère trivialement. Ceci fournit la lissité de $M_{Dol}(r)$ au voisinage d'un point p stable ; de plus, la dimension au voisinage d'un tel point est donnée par dim $H^1_{Dol}(End(E)) = -\chi_{Dol}(End(E) + 2 = 2r^2(g-1) + 2$. Si E est somme directe de fibrés de Higgs stables de degré 0 :

$$E = \oplus_i E_i^{r_i}$$

le morphisme q peut se calculer en termes de matrices en choisissant une base de $H^1_{Dol}(Hom(E_i, E_j))$, et l'énoncé se ramène à prouver un résultat du type suivant : si $a_1, \cdots, a_k, b_1, \cdots, b_k$ sont des matrices carrées, la variété algébrique définie par l'équation

$$\sum_{i=1}^{k} [a_i, b_i] = 0$$

est irréductible ([31]).

Proposition 7.— *Si X est une courbe, la variété $M_{Dol}(r)$ est connexe.*

C'est ici qu'intervient l'action de $\mathbf{C}^*$. Rappelons (cf. section 5) que $\mathcal{M} = M_{Dol}(r)$ se plonge dans un espace projectif $\mathbf{P}(W)$ (espace projectif des droites d'un espace vectoriel W) et que l'action de $\mathbf{C}^*$ s'étend en une action linéaire $\mathbf{C}^* \to GL(W)$. Ecrivons $W = \oplus_\alpha W_\alpha$, où W_α désigne le sous-espace propre relatif au caractère $t \mapsto t^\alpha$. L'ensemble des points fixes de l'action est la réunion disjointe des variétés linéaires $\mathbf{P}(W_\alpha)$. Pour $z \in \mathbf{P}(W)$ désignons par z_0 (resp. z_∞) la limite de tz quand $t \to 0$ (resp. $t \to \infty$) et $\alpha_0(z)$ (resp. $\alpha_\infty(z)$) l'unique entier α tel que $z_0 \in \mathbf{P}(W_\alpha)$ (resp. $z_\infty \in \mathbf{P}(W_\alpha)$. On a $\alpha_0(z) \leq \alpha_\infty(z)$, l'égalité n'ayant lieu que si z est un point fixe. D'après le théorème de propreté (proposition 5), z_0 appartient à $\mathcal{M}$ si $z \in \mathcal{M}$. Considérons d'autre part le sous-schéma fermé $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ correspondant aux classes de fibrés de Higgs $(E, 0)$, où E est un fibré semi-stable de degré 0 : il s'identifie à la variété de Narasimhan et Seshadri ([28]) et est donc propre et irréductible. Chacun de ses points est évidemment invariant par $\mathbf{C}^*$.

Lemme 10.— *Soit $y \in \mathcal{M}$ un point fixe . Si $y \notin \mathcal{N}$, il existe $z \in \mathcal{M}$ distinct de y et tel que $z_\infty = y$.*

Voici comment cet énoncé entraîne la connexité : supposons qu'il existe une composante connexe $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$ qui ne rencontre pas $\mathcal{N}$. Soit α' le plus petit des nombres $\alpha_0(z')$, pour $z' \in \mathcal{M}'$. Cette borne inférieure est atteinte en un point fixe $y \in \mathcal{M}'$; ce point n'appartient pas à $\mathcal{N}$. D'après le lemme, il existe donc $z \in \mathcal{M}$ distinct de y et tel que $z_\infty = y$. On a alors $z \in \mathcal{M}'$, et $\alpha_0(z) < \alpha_\infty(z) = \alpha'$, ce qui fournit une contradiction. Par suite $\mathcal{M}$ est connexe.

Démonstration du lemme 10. Soit (E, θ) un représentant de y ; on peut supposer qu'il s'agit d'un fibré de Higgs stable. D'après la proposition 4, il s'écrit $E = \oplus_{i=1}^k F_i$, où F_i est un sous-fibré de E tel que $\theta(F_i) \subseteq \Omega^1 \otimes F_{i-1}$. Par hypothèse, $y \notin \mathcal{N}$, donc $\theta \neq 0$; alors $k \geq 2$. Puisque (E, θ) est stable, on a $\deg(F_1) < 0$ et $\deg(F_k) > 0$. Par suite, le fibré $Hom(F_k, F_1)$ est de degré < 0, et il existe un élément non nul η dans $\mathrm{Ext}^1(F_k, F_1)$. Considérons l'extension G_t définie par l'élément $t^k\eta$: on a donc une suite exacte

$$0 \to F_1 \to G_t \to F_k \to 0.$$

On munit le fibré vectoriel $E_t = G_t \oplus (\oplus_{1<i<k} F_i)$ d'une structure de fibré de Higgs en considérant le morphisme $\theta_t : E_t \to \Omega^1 \otimes E_t$ défini par les

conditions suivantes : $\theta_t \mid_{G_t}$ est le morphisme composé $G_t \to F_k \to \Omega^1 \otimes F_{k-1} \hookrightarrow \Omega^1 \otimes E_t$ et si $1 < i < k$, $\theta_t \mid_{F_i} = \theta \mid_{F_i}$.

Remarquons que pour $t = 0$, on récupère le fibré de Higgs (E, θ). La stabilité étant une propriété ouverte, (E_t, θ_t) est encore un fibré de Higgs stable. D'autre part, si $t \neq 0$, on construit un isomorphisme $\varphi_t : (E_t, \theta_t) \to (E_1, \frac{1}{t}\theta_1)$ en posant, pour $1 < i < k$, $\varphi_t \mid_{F_i} = t^i id_{F_i}$, et de sorte que $\varphi_t \mid_{G_t}$ rende commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & F_1 & \to & G_t & \to & F_k & \to 0 \\ & {\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_t} & & \downarrow{\scriptstyle t^k} & \\ 0 \to & F_1 & \to & G_1 & \to & F_k & \to 0 \end{array}$$

Il en résulte que, dans $\mathcal{M}$, $\lim_{t \to 0}(E_1, \frac{1}{t}\theta_1) = (E, \theta)$. Il reste à vérifier que (E, θ) n'est pas S-équivalent à (E_1, θ_1). Mais puisqu'il est stable, il suffit de vérifier que ces deux fibrés de Higgs ne sont pas isomorphes. Ceci est dû au fait que (E, θ) étant stable, il n'a pas d'autre automorphisme que les homothéties : ainsi les sous-fibrés F_i construits dans la proposition 4 sont intrinsèquement attachés à (E, θ). S'il existait un tel isomorphisme, E_1 devrait contenir un sous-fibré F'_k jouant le même rôle que F_k. Vu la définition de θ_1, ce sous-fibré , de même rang que F_k, devrait être contenu dans G_1, et tel que $F_1 \cap F'_k = 0$. Il définirait donc un scindage de la suite exacte définissant G_1, ce qui est absurde puisque $\eta \neq 0$.

L'un des objectifs de Simpson est de généraliser le calcul des nombres de Betti de la variété $M_{Higgs}(P)$, fait par Hitchin en rang 2 et degré 1 sur les courbes, au moins quand cette variété est lisse : comme pour la variété de Narasimhan et Seshadri sur les courbes [1], on peut espérer obtenir des formules de récurrence permettant théoriquement de calculer ces nombres de Betti. Une tentative est faite dans ce sens dans [33] ; ceci nécessite une meilleure compréhension de la structure de la variété des points fixes, et du comportement de l'action au voisinage des points fixes.

Bibliographie

[1] **M.F. Atiyah et R. Bott.** *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Phil. Trans. R. Soc. London **A308** (1982), 523-615.

[2] **F.A. Bogomolov.** *Holomorphic tensors and vector bundles on projectives varieties*, Math. USSR Izvestija **13** (1979), 499-555.

[3] **R. Bott and S.S. Chern.** *Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeros of their holomorphic cross-sections*, Acta Mathematica **114** (1968), 71-112.

[4] **K. Corlette.** *Flat G-bundles with canonical metrics*, J. Diff. Geom. **28** (1988), 361-382.

[5] **P. Deligne.** *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Maths **163** (1970) Springer.

[6] **S.K. Donaldson.** *Infinite determinants, stable bundles and curvature*, Duke Math. Journal **54.1** (1987), 231-247.

[7] **S.K. Donaldson.** *Anti-self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. London Math. Soc.(3)**50** (1985), 1-26.

[8] **S.K. Donaldson.** *Twisted harmonic maps and self-duality equations*, Proc. London Math. Soc **55** (1987), 127-131.

[9] **S.K. Donaldson.** *A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri*, J. Differential Geom. **18** (1983), 269-277.

[10] **J. Eells et J.H. Sampson.** *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. of Math. **86** (1964), 109-160.

[11] **H. Flenner.** *Restrictions of semistable bundles on projective varieties*, Comment. Math. Helvetici **59** (1984), 635-650.

[12] **D. Gieseker.** *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface*, Ann. of Math. **106** (1970), 45-60.

[13] **W. Goldman et J. Millson.** *The deformation theory of representation of fundamental groups of compact Kähler manifolds*, Preprint, University of Maryland.

[14] **P.A. Griffiths.** *Periods of integrals on algebraic manifolds III,* Publ. Math. I.H.E.S. **38** (1970), 125-180.

[15] **A. Grothendieck.** *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique,IV : les schémas de Hilbert.* Séminaire Bourbaki, Exposé **221** (1960-61).

[16] **R.S. Hamilton.** *Harmonic mappings of riemannian manifolds,* Lecture Notes in math. **471** (1975) Springer.

[17] **R. Hartshorne.** *Algebraic geometry,* Springer (1977).

[18] **A. Hirschowitz.** *Sur la restriction des faisceaux semi-stables* , Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. **14** (1980), 199-207.

[19] **N.J. Hitchin.** *The self-duality equations on a Riemann surface,* Proc. London, Math. Soc.(3)**55** (1987), 59-126.

[20] **N.J. Hitchin.** *Stable bundles and integrable systems,* Duke Math. J. **54** (1987), 91-114.

[21] **M. Lübke.** *Chern classen von Hermite-Einstein-Vecktorbündeln*, Math. Annalen **260** (1982), 133-141

[22] **C. Margerin.** *Fibrés stables et métriques d'Hermite-Einstein, d'après S.K. Donaldson, K.K. Uhlenbeck et S.T. Yau,* Séminaire Bourbaki, Exposé **683** (1987).

[23] **M. Maruyama.** *On boundedness of families of torsion free sheaves,* J. Math. Kyoto University **21-4** (1981), 673-701.

[24] **M. Maruyama.** *Moduli of stable sheaves,* J. Math. Kyoto University, I **17-1** (1977) 91-126 ; II **18-3** (1978) 557-614.

[25] **V.B. Mehta et A. Ramanathan.** *Semistable sheaves on projective varieties and their restriction to curves*, Math. Annalen **258** (1982), 213-224

[26] **V.B. Mehta et A. Ramanathan.** *Restriction of stable sheaves and representation of the fundamental group*, Invent. math. **77** (1984), 163-172

[27] **D. Mumford et J. Fogarty.** *Geometric invariant theory,* Springer (1982).

[28] **M.S. Narasimhan et C.S. Seshadri.** *Stable and unitary vector bundles on compact Riemann surfaces*, Ann. of maths **82** (1965), 540-567.

[29] **C.T. Simpson.** *Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization,* Journal of the Amer. Math. Soc. **1** (1988), 867-918.

[30] **C.T. Simpson.** *Higgs bundles and local systems,* Preprint, Princeton University.

[31] **C.T. Simpson.** *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth variety,* Preprint, Princeton University.

[32] **C.T. Simpson.** *Non abelian Hodge theory,* Preprint, Princeton University.

[33] **C.T. Simpson.** *The ubiquity of variations of Hodge structures,* Preprint, Princeton University.

[34] **C.T. Simpson.** *Harmonic bundles on non compact curves,* Preprint, Princeton University.

[35] **C.T. Simpson.** *Report on twistor space and the mixed Hodge structure on the fundamental group,* Preprint, Princeton University.

[36] **K.K. Uhlenbeck et S.T. Yau.** *On the existence of hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles,* Comm. Pure and Appl. Math. **39-S** (1986), 257-293.

[37] **A. Weil.** *Variétés kählériennes,* Paris, Hermann (1958).

J. Le Potier
U.F.R. de Mathématiques et U.A. 212
Université Paris 7
2, Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05