GUY HENNIART

Représentations des groupes réductifs p-adiques

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 736, p. 193-219
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__193_0>

Séminaire BOURBAKI Février 1991
43ème année, 1990-91, n° 736

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES RÉDUCTIFS p-ADIQUES

par Guy HENNIART

1. INTRODUCTION, PRÉSENTATION DES RÉSULTATS ET HISTORIQUE

1.1. Soient k un corps de nombres et $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe sur k, par exemple le groupe GL_n. Généralisant la notion classique de forme modulaire, on est amené à considérer des représentations, dites automorphes, du groupe des points de $\mathbf{G}$ à valeurs dans l'anneau $\mathbf{A}_k$ des adèles de k ; la situation classique correspond à $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_2$ et $k = \mathbf{Q}$. Le groupe $\mathbf{G}(\mathbf{A}_k)$ est un produit restreint des groupes $\mathbf{G}(k_v)$ où v parcourt les places de k et k_v est le complété de k en v, ce qui conduit à étudier les représentations de $\mathbf{G}(k_v)$. Quand v est une place archimédienne, $\mathbf{G}(k_v)$ est un groupe de Lie et la théorie de ses représentations est extrèmement élaborée (et présente d'ailleurs d'autres motivations et intérêts). En particulier, on sait les classifier en examinant la restriction à un sous-groupe compact maximal K : c'est la théorie dite des K-types (*cf.* [Vo]). Lorsque v est une place non archimédienne, de caractéristique résiduelle p, alors k_v est une extension finie du corps $\mathbf{Q}_p$ des nombres p-adiques, et le problème se pose de classifier ou construire les représentations irréductibles de $\mathbf{G}(k_v)$ (la bonne notion étant celle de représentation lisse, *cf.* 1.2), par exemple en termes de restriction à des sous-groupes compacts maximaux.

Le présent exposé vise à présenter les résultats obtenus récemment sur ce problème, les plus complets et spectaculaires concernant le groupe GL_n.

L'étude des représentations de $\mathbf{G}(k_v)$ mène à bien des problèmes autres que la classification ou la construction de toutes ces représentations. Par exemple, on se demande lesquelles de ces représentations sont unitarisables, les représentations unitaires étant celles qui interviennent dans le cas global des représentations automorphes pour les corps de nombres. On a aussi toute une théorie duale des distributions, notamment les distributions invariantes (par conjugaison) sur $\mathbf{G}(k_v)$. Là aussi, les progrès récents ont été spectaculaires, mais les techniques sont très différentes et, par manque de place et de temps, nous n'avons pu présenter ici ces résultats.

1.2. Soit donc F un corps commutatif localement compact non archimédien. Notons p sa caractéristique résiduelle. Si F est de caractéristique nulle, F est une extension finie du corps $\mathbf{Q}_p$ des nombres p-adiques ; si F est de caractéristique p, F est isomorphe au corps des séries de Laurent formelles à coefficients dans le corps résiduel de F, un corps fini.

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif connexe défini sur F. Nous pensons le plus souvent à l'exemple $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$. Le groupe $G = \mathbf{G}(F)$ est localement compact et totalement discontinu. Une représentation *lisse* π de G est un homomorphisme π de G dans $\mathrm{GL}(V)$ où V est un espace vectoriel complexe, de sorte que chaque vecteur de V ait un stabilisateur ouvert dans G ; elle est dite *irréductible* si tout sous-espace de V stable par $\pi(G)$ est $\{0\}$ ou V. On sait que dans le cas où π est irréductible, le centre Z de G agit sur V par un *caractère, i.e.* un homomorphisme continu dans $\mathbf{C}^\times$, appelé *caractère central* de π, et que π est *admissible*, c'est-à-dire que, pour tout sous-groupe ouvert H de G, l'espace V^H des points de V fixés par $\pi(H)$ est de dimension finie. Si H est en outre compact modulo Z, la restriction de π à H est semi-simple et ses composants isotypiques sont de dimension finie. Le plus souvent (c'est le cas en particulier pour $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$, $n > 1$), les seules représentations lisses irréductibles de dimension finie de G sont de dimension 1, c'est-à-dire des caractères, de sorte qu'il s'agit en général ici de représentations de *dimension infinie.* Cependant, l'admissibilité entraîne que l'on peut faire une étude *algébrique* du *dual admissible* de G, c'est-à-dire de l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles de G. Des références pour la théorie générale des représentations lisses de G sont [BZ1, Cas].

1.3. Un procédé général pour obtenir des représentations lisses de G est celui d'*induction*. Soit H un sous-groupe fermé de G et $\rho : H \to \mathrm{GL}(W)$ une représentation lisse de H. Soit $I(\rho)$ l'espace des fonctions f de G dans W vérifiant les conditions suivantes :

i) il existe un sous-groupe ouvert K de G tel que $f(gk) = f(g)$ pour $g \in G$, $k \in K$.

ii) il existe une partie compacte C de G telle que f soit nulle hors de HC.

iii) pour $h \in H$ et $g \in G$, on a $f(hg) = \rho(h)f(g)$.

Alors G agit par translations à droite sur l'espace $I(\rho)$ et on obtient une représentation *lisse* de G dite *induite compacte* de ρ et notée $\mathrm{ind}_H^G\rho$.

Cette construction est utilisée principalement dans deux cas. Le premier est celui où H est un sous-groupe *parabolique* P de G (dans le cas de $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$, il s'agit simplement du stabilisateur d'un drapeau dans F^n). Alors $P\backslash G$ est compact de sorte que la condition ii) est vide. On prend pour ρ une représentation lisse irréductible de P, triviale sur le radical unipotent de P, de sorte que ρ provient d'une représentation d'un sous-groupe de Lévi de G, qui dans le cas de GL_n est un produit de groupes $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ avec $\sum n_i = n$. Alors $\mathrm{ind}_H^G\rho$ est de longueur finie et ses sous-quotients irréductibles donnent des éléments du dual admissible de G. On appelle *cuspidales* les représentations lisses irréductibles de G qui ne peuvent être obtenues ainsi par induction à partir de sous-groupes paraboliques propres de G. On voit donc que modulo la connaissance du dual admissible des sous-groupes de Lévi propres de G (qui sont de dimension sur F strictement inférieure à celle de G) et l'étude de la décomposition des représentations induites à G, on a réduit la détermination du dual admissible de G à celle de sa partie *cuspidale, i.e.* formée des classes de représentations cuspidales. Cette réduction est l'analogue pour F de la classification de Langlands des représentations des groupes réductifs réels. Noter que dans le cas où l'on considère en même temps tous les groupes $\mathrm{GL}_n(F)$, pour $n \geq 1$, une étude fine de l'induction parabolique donne naissance à une algèbre de Hopf extrêmement intéressante, introduite par J. Bernstein et A. Zelevinski [BZ2, Ze] ; voir l'exposé de Rodier au Séminaire Bourbaki [Ro].

1.4. Le second cas où le procédé d'induction est utilisé est celui où H est un sous-groupe ouvert de G, contenant le centre Z de G et compact modulo Z. En ce cas, toute représentation lisse irréductible ρ de H est de dimension finie et triviale sur un sous-groupe ouvert ; c'est donc à peu de choses près une représentation d'un groupe fini. De plus, la représentation lisse $\pi = \mathrm{ind}_H^G \rho$ de G est *admissible* si et seulement si elle est somme directe d'un nombre fini de représentations cuspidales de G [Bu2] ; et si π est irréductible, alors π est admissible et cuspidale. On dispose même d'un critère d'irréductibilité pour π qui s'exprime de la même façon que pour les groupes finis : pour que π soit irréductible, il suffit que, pour $g \in G-H$, les restrictions à $H \cap gHg^{-1}$ des représentations ρ et $\rho^g : x \mapsto \rho(g^{-1}xg)$ n'aient aucun constituant commun.

On sait qu'une représentation cuspidale a ses coefficients matriciels à support compact modulo Z ; même plus, le caractère (trace) de π est à support dans la réunion des sous-groupes compacts modulo Z [De]. Il est donc raisonnable de conjecturer que toute représentation cuspidale de G est obtenue comme composant d'une représentation admissible induite à partir d'un sous-groupe ouvert compact modulo Z, voire même est une telle induite. Récemment, L. Corwin d'une part [Co4], et C. Bushnell et Ph. Kutzko d'autre part [BK] ont annoncé une preuve du résultat suivant :

THÉORÈME 1.— *Soit π une représentation (lisse irréductible) cuspidale de $\mathrm{GL}_n(F)$. Alors π est l'induite d'une représentation admissible d'un sous-groupe ouvert compact modulo le centre.*

En fait, le résultat ne se réduit pas à ce simple constat d'existence. De manière plus précise et plus intéressante, on sait dresser une liste de paires (H, ρ) où H est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_n(F)$, compact modulo le centre, et ρ une représentation lisse irréductible de H, de sorte que toute représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_n(F)$ soit induite à partir de l'une des paires (H, ρ) et l'on sait dire quand deux telles paires (H, ρ) et (H', ρ') induisent à G des représentations cuspidales isomorphes. On peut donc parler d'une véritable *paramétrisation du dual cuspidal* de G.

On peut d'ailleurs exprimer le résultat d'une manière qui ressemble plus à la théorie des K-types dans le cas des groupes de Lie : si π est une représentation cuspidale de G, il existe une paire (H, ρ) dans la liste, unique à conjugaison près par les éléments de G, telle que la restriction π à H contienne ρ (comme constituant), et π est alors l'induite de ρ.

Ces deux manières d'exprimer le résultat correspondent en fait à deux méthodes d'approche différente, qui chacune sont l'aboutissement d'une série de travaux brièvement rappelés au n° 1.7.

1.5. Dans la première méthode, qui est celle suivie par Corwin, la démonstration se déroule en deux étapes. On commence par construire des paires (H, ρ) comme plus haut telles que l'induite de ρ à $\mathrm{GL}_n(F)$ soit cuspidale, et on détermine quelles paires (H, ρ) donnent la même représentation. Le problème à ce stade est surtout de deviner suffisamment de paires (H, ρ). Il s'agit ensuite de prouver qu'on obtient ainsi *toutes* les représentations cuspidales de $\mathrm{GL}_n(F)$. Pour cela, on utilise un argument de comptage (qui remonte à la thèse de J.B. Tunnell [Tu] pour $n = 2$) et la comparaison avec les représentations des formes intérieures de $\mathrm{GL}_n(F)$. Un élément π du dual admissible de $\mathrm{GL}_n(F)$ possède un invariant $a(\pi) \in \mathbf{N}$ appelé *conducteur* de π, et on sait qu'à conducteur et caractère central donné, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments cuspidaux dans le dual. L'argument de comptage consiste à prouver que les paires (H, ρ) fournissent bien le nombre voulu d'éléments cuspidaux. Encore faut-il connaître ce nombre !

Pour cela, on considère un corps gauche D de centre F et de degré n^2 sur F. Le centre du groupe localement compact $D^\times$ s'identifie au centre Z de $\mathrm{GL}_n(F)$ et de plus $D^\times$ est compact modulo Z, ce qui fait que le dual admissible $\widehat{D^\times}$ de $D^\times$ est formé de représentations de dimension finie. Si on note P_D l'idéal de la valuation de D, tout élément τ de $\widehat{D^\times}$ est trivial sur un groupe de la forme $(1 + P_D^i) \cap D^\times$, où i est un entier positif, et le *conducteur* de τ est l'entier $j + n - 1$, où j est le plus petit tel entier. Par voie globale, utilisant une version de la formule des traces pour GL_n et ses formes intérieures, on établit [Rg, DKV] l'existence d'une bijection entre le dual admissible $\widehat{D^\times}$ de $D^\times$ et l'union disjointe des parties cuspidales des duaux admissibles des $\mathrm{GL}_d(F)$, quand d parcourt les diviseurs de n, cette bijection étant compatible avec les caractères centraux et les conducteurs au sens où, si π est un élément cuspidal du dual de $\mathrm{GL}_n(F)$ et si $\tau \in \widehat{D^\times}$ correspond à π par cette bijection, alors π et τ ont même caractère central et même conducteur.

Or, de la même façon qu'on a deviné des représentations cuspidales de $\mathrm{GL}_n(F)$, on devine et construit des éléments de $\widehat{D^\times}$ et pour $D^\times$ la situation est suffisamment simple pour que l'on trouve ainsi tout $\widehat{D^\times}$. (À vrai dire, on commence par analyser et construire $\widehat{D^\times}$, ce qui aide à deviner des représentations cuspidales de $\mathrm{GL}_n(F)$, *cf.* la remarque ci-dessous.) Comparant le nombre de représentations des $\mathrm{GL}_d(F)$ et de $D^\times$ ainsi obtenues (à conducteur et caractère central donnés), on voit qu'on a obtenu tout le dual cuspidal de $\mathrm{GL}_n(F)$.

Remarque.— Dans les cas simples, par exemple si n est premier ou premier à p, les paramètres décrivant les paires (H, ρ) pour $\mathrm{GL}_n(F)$ sont

— une extension E de degré n de F contenue dans $M_n(F)$

— un caractère additif de E

— un caractère multiplicatif de $E^\times$. (Ces données doivent vérifier quelques compatibilités.)

Or le corps gauche D contient une extension de F isomorphe à E, unique à conjugaison près. On conçoit donc bien qu'on puisse transférer les paramètres de $\mathrm{GL}_n(F)$ à $D^\times$ et vice versa. Il resterait à décrire explicitement en ces termes concrets la bijection de [DKV].

1.6. On voit que cette méthode est assez contournée et n'explique pas au fond la paramétrisation obtenue. Il est sans doute aussi dommage d'utiliser une théorie globale difficile pour obtenir un résultat local.

D'autre part, la prépublication [Co4] est extrémement technique et difficile à lire, et je ne prétends pas avoir réussi à suivre tous les calculs et comprendre tous les détails, ou les compléter aux endroits obscurs.

Dans le §3, nous nous attacherons à décrire la méthode utilisée par Bushnell et Kutzko, qui présente à mon avis les avantages suivants :

- Elle est purement locale et n'utilise ni comparaison avec un autre groupe, ni argument de comptage.
- Elle est conceptuellement claire, et partant susceptible de généralisations (*cf.* §4). En particulier, nous verrons comment le concept nouveau de *strate simple* est la clef de la classification.
- Il s'agit à proprement parler non d'une détermination du dual cuspidal de $\mathrm{GL}_n(F)$ mais en fait d'une classification de *tout* le dual admissible de $\mathrm{GL}_n(F)$ à l'aide de la restriction aux sous-groupes ouverts compacts modulo le centre. Cette méthode est indépendante, dans sa majeure partie, des techniques de Bernstein et Zelevinski mentionnés plus haut.

Par manque de place, nous ne pouvons au §3 que décrire l'enchaînement des idées et résultats et non pas donner une idée des démonstrations. Le §2 est consacré à des généralités et l'étude de cas simples et l'on essaie d'y faire sentir en quoi le cas général est si compliqué.

1.7. Pour terminer cette introduction, un brin d'historique n'est pas superflu.

Dans le cas $p \neq 2$, on savait depuis longtemps (*cf.* [GGPS, JL]) construire le dual cuspidal de $\mathrm{GL}_2(F)$ grâce à la représentation de Weil.

Dans les années 70, R. Howe a proposé d'attaquer le cas général en examinant la restriction aux sous-groupes ouverts compacts modulo le centre [Ho1], et il a décrit [Ho2], dans le cas dit *modéré* où n est premier à p, une construction de représentations cuspidales de $\mathrm{GL}_n(F)$ à partir de représentations de sous-groupes ouverts compacts modulo le centre, ces dernières représentations étant paramétrées par certains caractères multiplicatifs d'extensions de degré n de F. Que l'on obtienne ainsi tout le dual cuspidal de $\mathrm{GL}_n(F)$ pour n premier à p fut prouvé ultérieurement par A. Moy [My1], par l'argument de comptage (introduit pour $n = 2$ par J.B. Tunnell [Tu]). Entretemps, Ph. Kutzko [Ku1] avait déterminé le dual admissible de $\mathrm{GL}_2(F)$ pour tout p, par une méthode locale et Carayol [Ca] avait introduit la notion de représentation très cuspidale des sous-groupes compacts modulo le centre maximaux de $\mathrm{GL}_n(F)$ (ces représentations sont très faciles à décrire explicitement) et montré que par induction, elles donnent des représentations cuspidales de G ; de plus, il montrait, à nouveau par comptage, que pour n premier, on obtenait tout le dual cuspidal de $\mathrm{GL}_n(F)$.

Il fallait pourtant attaquer le cas général. Dans [Wa], J.-L. Waldspurger parvenait à trouver une généralisation commune aux constructions de Howe et Carayol, et à analyser ainsi une bonne partie du dual admissible de $\mathrm{GL}_n(F)$, mais ses constructions ne donnaient pas tout le dual. En 1985, A. Moy [My2] proposait la notion de K-type minimal, dont l'existence était prouvée peu après par C. Bushnell [Bu2, *cf.* aussi HM1] qui en tirait une démonstration locale du fait que pour n premier, les constructions de Carayol donnent tout le dual cuspidal. Kutzko obtint ensuite une variante toujours locale mais plus directe de ce résultat [Ku2].

Dans un autre ordre d'idées, R. Howe [Ho3] avait introduit des isomorphismes d'algèbres de Hecke dont nous verrons des exemples plus loin (de tels isomorphismes interviennent aussi dans [Wa]), et dans [HM2] R. Howe et A. Moy tirent de la considération de tels isomorphismes une construction locale de tout le dual cuspidal de $\mathrm{GL}_n(F)$ quand n est premier ou premier à p.

Enfin, le résultat de Corwin [Co4] est l'aboutissement d'une série d'articles [Co1, Co2, Co3] traitant des cas de plus en plus généraux tant pour $\mathrm{GL}_n(F)$ que pour $D^\times$, tandis que le travail de Bushnell et Kutzko [BK] couronne l'ensemble [Bu2, Ku2, Wa, KM1, KM2].

2. GÉNÉRALITÉS ET QUELQUES CAS SIMPLES DE CONSTRUCTION

2.1. Dans ce §2, nous montrons comment analyser la restriction aux sous-groupes compacts modulo le centre des représentations lisses de $\mathrm{GL}_n(F)$, de manière de plus en plus fine et dans des cas de plus en plus compliqués. Par commodité, nous utilisons la terminologie de [BK] qui servira au §3.

On note R l'anneau des entiers de F, P son idéal maximal, $\widetilde{F}$ le corps résiduel R/P, q le cardinal de $\widetilde{F}$; on fixe une uniformisante $\widetilde{\omega}$ de F et un caractère additif ψ de F trivial sur P mais non sur R.

On fixe un entier $n \geq 2$ et un espace vectoriel V de dimension n sur F. On note $A = \mathrm{End}_F(V)$ l'anneau des endomorphismes de V, G le groupe des éléments inversibles de A, et Z son centre. Tout sous-groupe de G compact modulo Z est contenu dans un sous-groupe de G compact modulo Z et maximal pour ces propriétés. Cependant, contrairement au cas archimédien, deux tels sous-groupes maximaux ne sont pas conjugués. On peut les décrire à l'aide de *chaînes de réseaux* dans V.

Un *réseau* L dans V est un sous-R-module de V, libre de rang n. Une *chaîne de réseaux* est une suite décroissante de réseaux $\mathcal{L} = (L_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ telle qu'il existe un entier $e \in \mathbf{Z}$, appelé période de $\mathcal{L}$, et vérifiant $L_{i+e} = \widetilde{\omega}\, L_i$ pour $i \in \mathbf{Z}$. Deux chaînes de réseaux sont dites *équivalentes* si elles diffèrent par une translation des indices et on note $[\mathcal{L}]$ la classe d'équivalence de $\mathcal{L}$.

Soit $\mathcal{L}$ une chaîne de réseaux dans V. L'anneau $A_{\mathcal{L}} = \{g \in A \,|\, g\,L_i \subset L_i \text{ pour } i \in \mathbf{Z}\}$ est un R-ordre héréditaire de A [Re], de radical de Jacobson $P_{\mathcal{L}} = \{g \in A \,|\, g\,L_i \subset L_{i+1}, \text{ pour } i \in \mathbf{Z}\}$ et le stabilisateur $H_{\mathcal{L}} = \{g \in G \,|\, \exists j \in \mathbf{Z}\, g\,L_i = L_{i+j} \text{ pour } i \in \mathbf{Z}\}$, de $\mathcal{L}$ dans G est un sous-groupe ouvert de G, compact modulo Z. Comme $H_{\mathcal{L}}$, $A_{\mathcal{L}}$ et $P_{\mathcal{L}}$ ne dépendent que de $[\mathcal{L}]$. Soit e la période de $\mathcal{L}$; pour tout $i \in \mathbf{Z}$, L_i/L_{i+e} est un $\widetilde{F}$-espace vectoriel et la suite

$$O = L_{i+e}/L_{i+e} \subset L_{i+e-1}/L_{i+e} \subset \cdots \subset L_{i+1}/L_{i+e} \subset L_i/L_{i+e}$$

forme un drapeau de cet espace vectoriel. On dit que $\mathcal{L}$ est *uniforme* si la dimension sur $\widetilde{F}$ de L_i/L_{i+1} ne dépend pas de i ; il revient au même de dire que $A_{\mathcal{L}}$ est un ordre principal, *i.e.* que $P_{\mathcal{L}}$ est un $A_{\mathcal{L}}$-module à gauche libre ; si on pose $f = \dim_{\widetilde{F}}(L_i/L_{i+1})$, on a $ef = n$. Si $\mathcal{L}$ est *uniforme*, $H_{\mathcal{L}}$ est un sous-groupe compact modulo Z maximal de G. Réciproquement, tout sous-groupe compact modulo Z maximal H de G est de la forme $H_{\mathcal{L}}$, où $\mathcal{L}$ est une chaîne de réseaux uniforme dont la classe d'équivalence est déterminée par H. Des sous-groupes $H_{\mathcal{L}}$ et $H_{\mathcal{L}'}$, où $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont uniformes, sont conjugués si et seulement si $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ ont même période.

Étant donnée une représentation lisse irréductible π de G, le but du jeu sera de regarder la restriction de π à ces groupes $H_{\mathcal{L}}$ et de prouver que pour $H_{\mathcal{L}}$ bien choisi, cette restriction contient une représentation ρ d'un sous-groupe de $H_{\mathcal{L}}$ d'un type bien particulier. La notion de "type bien particulier" progresse par raffinements successifs, au point qu'au plus haut degré de distillation, on sache notamment que si π est cuspidale, alors π est induite par ρ.

2.2. Soit $\mathcal{L} = (L_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ une chaîne de réseaux dans V, de période e. On dispose d'une filtration de $H_{\mathcal{L}}$ par les groupes
$H^0_{\mathcal{L}} = \{g \in G \,|g\, L_i = L_i \text{ pour } i \in \mathbf{Z}\}$ et, pour $i \geq 1$, $H^i_{\mathcal{L}} = 1 + P^i_{\mathcal{L}}$. Toute représentation lisse irréductible ρ de $H_{\mathcal{L}}$ est triviale sur $H^i_{\mathcal{L}}$ pour i assez grand ; si i est le plus petit entier ≥ 1 tel que cela se produise, on appelle $\frac{i-1}{e}$ le *niveau* de ρ.

Le groupe $H^0_{\mathcal{L}}/H^1_{\mathcal{L}}$ est isomorphe au groupe fini $\prod_{i=1}^e \mathrm{GL}_{\widetilde{F}}(L_{i-1}/L_i)$ dont les représentations sont connues depuis longtemps [Gr]. Pour des entiers m et r vérifiant $2m \geq r > m \geq 1$, le groupe $H^m_{\mathcal{L}}/H^r_{\mathcal{L}}$ est abélien, isomorphe au groupe additif $P^m_{\mathcal{L}}/P^r_{\mathcal{L}}$ par l'application $1 + x \mapsto x$. Si ρ est une représentation lisse irréductible de $H_{\mathcal{L}}$ triviale sur $H^r_{\mathcal{L}}$, sa restriction à $H^m_{\mathcal{L}}$ se décompose en une somme de caractères de $H^m_{\mathcal{L}}/H^r_{\mathcal{L}}$, conjugués les uns des autres sous l'action de $H_{\mathcal{L}}/H^r_{\mathcal{L}}$. Ces caractères correspondent donc à des caractères de $P^m_{\mathcal{L}}/P^r_{\mathcal{L}}$. Mais le groupe des caractères de $P^m_{\mathcal{L}}/P^r_{\mathcal{L}}$ s'identifie à $P^{1-r}_{\mathcal{L}}/P^{1-m}_{\mathcal{L}}$: à tout élément $b \in P^{1-r}_{\mathcal{L}}$, on associe le caractère $\psi_b : x \mapsto \psi \circ \mathrm{Tr}(bx)$ de $P^m_{\mathcal{L}}$, qui est trivial sur $P^r_{\mathcal{L}}$ et ne dépend que de b modulo $P^{1-m}_{\mathcal{L}}$. De plus, l'action par conjugaison de $H_{\mathcal{L}}$ sur les caractères $P^m_{\mathcal{L}}/P^r_{\mathcal{L}}$ se transfère en l'action par conjugaison de $H_{\mathcal{L}}$ sur $P^{1-r}_{\mathcal{L}}/P^{1-m}_{\mathcal{L}}$.

DÉFINITION [BK].— *Une* strate *dans A est un quadruplet $([\mathcal{L}], r, m, b)$ où $\mathcal{L}$ est une chaîne de réseaux dans V, r et m deux entiers avec $r > m$, et b un élément de $P^{-r}_{\mathcal{L}}$. Deux strates $([\mathcal{L}], r, m, b)$ et $[\mathcal{L}], r, m, b')$ sont* équivalentes *si on a $b \equiv b'$ modulo $P^{-m}_{\mathcal{L}}$. Une strate de la forme $([\mathcal{L}], r, r-1, b)$ est dite* fondamentale *si $r \geq 1$ et si $b + P^{1-r}_{\mathcal{L}}$ ne contient aucun élément nilpotent de A.*

2.3. Soient π une représentation lisse irréductible de G et $s = ([\mathcal{L}], r, m, b)$ une strate dans A avec $2m \geq r > 1$. On dira que π *contient* s si la restriction de π à $H^{m+1}_{\mathcal{L}}$ contient comme constituant le caractère ψ_b correspondant à b. Les strates fondamentales ont été introduites par Moy [My2] qui conjecturait le résultat suivant, prouvé peu après par Bushnell [Bu1].

THÉORÈME 2.— *Soit π une représentation lisse irréductible de G. Alors, ou bien (cas a)) π contient une strate fondamentale $([\mathcal{L}], r, r-1, b)$, ou bien (cas b)) il existe une chaîne de réseaux $\mathcal{L}$ telle que $\pi \mid H^0_{\mathcal{L}}$ contienne une représentation triviale sur $H^1_{\mathcal{L}}$ correspondant à une représentation cuspidale du groupe fini $H^0_{\mathcal{L}}/H^1_{\mathcal{L}}$.*

Remarque.— Bien sûr, les représentations cuspidales des groupes linéaires sur les corps finis sont celles qu'on ne peut obtenir par induction à partir des sous-groupes paraboliques propres. On les connaît toutes (*cf.* [Md]).

Si $([\mathcal{L}], r, r-1, b)$ est une strate fondamentale et e la période de $\mathcal{L}$, alors $b^e/\widetilde{\omega}^m$ appartient à $A_{\mathcal{L}}$ et on note ϕ_b la réduction modulo P de son polynôme caractéristique.

THÉORÈME 3.— *Plaçons-nous dans le cas a) du théorème 2.*

a) [Bu1, HM1] *Le niveau r/e et le polynôme ϕ_b ne dépendent pas de la strate fondamentale $([\mathcal{L}], r, r-1, b)$ contenue dans π. Le niveau est le plus petit niveau des strates contenues dans π.*

b) [Ku2] *Si le polynôme ϕ_b est produit de 2 facteurs de degré > 1 premiers entre eux dans $\widetilde{F}[X]$ (on dit alors que la strate est* scindée*) alors π n'est pas cuspidale.*

Le théorème 2 se prouve (en très gros) en partant d'une strate non fondamentale $([\mathcal{L}], r, r-1, b)$ contenue dans π et en modifiant la chaîne de réseaux suivant des directions indiquées par le drapeau formé des noyaux des itérés d'un élément nilpotent dans $b + P_{\mathcal{L}}^{-r}$; cela donne aussi l'assertion concernant le niveau du théorème 3 a). Pour le théorème 3 b), on relève la factorisation de ϕ_b en une factorisation fg dans $R[X]$ du polynôme caractéristique de $y = b^e/\widetilde{\omega}^m$, et utilisant la décomposition de V en $\operatorname{Ker} f(y) \oplus \operatorname{Ker} g(y)$, on prouve que π a un coefficient matriciel à support non compact modulo Z. En fait, on peut montrer que π est l'induite d'une représentation lisse irréductible du sous-groupe de Lévi de G correspondant à cette décomposition de V.

Remarque.— On peut analyser aussi, c'est plus facile, les cas b) du théorème 2.

2.4. Le jeu se poursuit en raffinant la notion de strate fondamentale.

DÉFINITION.— *Une strate* $([\mathcal{L}], r, r-1, \alpha)$ *est dite alfalfa* (*cf.* [KM1]) *si* $r \geq 1$ *et*

i) $\alpha \notin P_{\mathcal{L}}^{1-r}$.

ii) $E = F[\alpha]$ *est un corps et* $H_{\mathcal{L}}$ *contient* $E^{\times}$.

iii) α *est* minimal, *i.e. la valuation normalisée* $v(\alpha)$ *de* α *dans* E *est première à l'indice de ramification* $e(E/F)$ *et le corps résiduel de* E *est engendré sur* $\widetilde{F}$ *par la classe de* $\alpha^{e(E/F)}\widetilde{\omega}^{-v(\alpha)}$.

La strate est dite très cuspidale (*cf.* [Ca]) *si elle est alfalfa et que* E *est de degré* n *sur* F.

Remarquons qu'une strate alfalfa est nécessairement fondamentale, non scindée.

THÉORÈME 4 [Ca] .— a) *Soit* $s = ([\mathcal{L}], r, r-1, \alpha)$ *une strate très cuspidale et* ρ *une représentation de* $H_{\mathcal{L}}$ *contenant* s. *Alors l'induite à* G *de* ρ *est irréductible, donc cuspidale.*

b) *Soit* $\mathcal{L}$ *une chaîne de réseaux de période 1 et* ρ *une représentation de* $H_{\mathcal{L}}$ *triviale sur* $H_{\mathcal{L}}^1$ *et correspondant à une représentation cuspidale de* $H_{\mathcal{L}}^0/H_{\mathcal{L}}^1$ *(isomorphe à* $\mathrm{GL}_n(\widetilde{F})$*). Alors l'induite à* G *de* ρ *est irréductible, donc cuspidale.*

c) *Soit* π *une représentation cuspidale de* G *obtenue par les procédés de* a) *ou* b). *Alors, le couple* $(H_{\mathcal{L}}, \rho)$ *est déterminé à conjugaison près.*

Ce résultat provient du critère d'irréductibilité de 1.4. Par exemple pour a), si ρ n'est pas irréductible, on voit qu'il existe $g \in G - H_{\mathcal{L}}$ tel que ψ_α et $\psi_{g\alpha g^{-1}}$ aient même restriction à $H_{\mathcal{L}}^r \cap g^{-1} H_{\mathcal{L}}^r g$. Mais pour une strate très cuspidale, cela implique facilement que g appartient à $H_{\mathcal{L}}$. On prouve b) et c) de manière analogue. Les représentations ρ intervenant dans a) et b) sont faciles à décrire explicitement. On peut donc les dénombrer à conducteur et caractère central donnés, et l'argument de comptage donne le corollaire suivant :

COROLLAIRE.— *Supposons n premier. Soit π une représentation cuspidale de G. Alors, il existe un caractère χ de $F^\times$ tel que $\pi \otimes (\chi \circ \det)$ soit obtenu par les constructions a) ou b) du théorème* 4.

2.5. Si n n'est pas premier, on n'a pas fini, hélas.

PROPOSITION 1 [Ku2].— *Soit $s = ([\mathcal{L}], r, r-1, b)$ une strate fondamentale* non scindée. *Alors, il existe une strate alfalfa $([\mathcal{L}], r, r-1, \alpha)$ qui apparaît dans toute représentation lisse irréductible de G contenant s.*

La strate s étant non scindée, le polynôme ϕ_b est une puissance d'un polynôme irréductible de $\widetilde{F}[X]$, et l'idée est de choisir α semi-simple tel que $\phi_\alpha = \phi_b$. On est donc ramené, au moins si on s'intéresse au dual cuspidal de G, à étudier les représentations lisses irréductibles de G contenant une strate alfalfa.

Supposons un instant que n soit premier, et soit π une représentation lisse irréductible de G contenant la strate alfalfa $s = ([\mathcal{L}], r, r-1, \alpha)$. Alors, ou bien $\alpha \in F$, auquel cas il existe un caractère χ de $F^\times$ tel que $a(\pi \otimes (\chi \circ \det)) < a(\pi)$, ou bien $F[\alpha]$ est de degré n, auquel cas la strate est très cuspidale et π est cuspidale induite à partir de $H_{\mathcal{L}}$. Procédant par conducteurs croissants, on obtient la preuve locale [Ku2] du corollaire précédent. (Celle de [Bu1] utilise la notion de strate fondamentale et l'équation fonctionnelle des fonctions Zêtas attachées à π.)

2.6. La situation se complique déjà beaucoup quand n est le produit de p par un nombre premier [KM2, Co2]. Cependant, la situation est favorable dans le cas modéré où n est premier à p. Décrivons brièvement dans notre langage les résultats de Howe et Moy [HM2].

Soit $s = ([\mathcal{L}], r, r-1, \alpha)$ une strate alfalfa dans V. Posons $E = F[\alpha]$ et notons G' le centralisateur de α dans G, de sorte que G' est isomorphe à $\mathrm{GL}(m, E)$, avec $m[E : F] = n$. Alors, on peut trouver un sous-groupe compact ouvert H de G contenant $H_{\mathcal{L}}$ et un caractère ψ'_α de H prolongeant

ψ_α tels que, d'une part, toute représentation lisse de G qui contienne s contienne aussi (par restriction à H) le caractère ψ'_α et que, d'autre part, l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G,\psi'_\alpha)$ (*cf.* 3.1) dont les représentations décrivent les représentations lisses de G contenant ψ'_α soit isomorphe à l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G',1)$ dont les représentations décrivent les représentations lisses de G' contenant la représentation triviale de $H^r_{\mathcal{L}} \cap H$. Comme, dans ce cas modéré, le groupe $H^r_{\mathcal{L}} \cap H$ est de la forme $H^m_{\mathcal{L}'}$, où $\mathcal{L}'$ est une chaîne de R_E-réseaux dans le E-espace vectoriel V, on dispose bien d'un procédé de récurrence qui permet une description du dual cuspidal de G. (On traite de la même façon le cas b) du théorème 2.)

2.7. Plaçons-nous dans le cas où n est le produit de deux nombres premiers [KM2] en suivant ici l'exposition de [BK], p. 15-16. On part d'une représentation lisse irréductible de G contenant une strate alfalfa

$([\mathcal{L}],r,r-1,\alpha)$. On choisit une telle strate de sorte que π contienne la strate $([\mathcal{L}],r,m,\alpha)$ avec $m/e(\mathcal{L})$ *minimal.* Supposons pour fixer les idées $m > \left[\frac{r}{2}\right]$ (il faut adapter le raisonnement pour $m = \left[\frac{r}{2}\right]$). Alors la restriction de π à $H^m_{\mathcal{L}}$ contient un caractère $\psi_{\alpha'}$ se restreignant à ψ_α sur $H^{m+1}_{\mathcal{L}}$, *i.e.* $\alpha' = \alpha + b$ avec $b \in P^{-m}_{\mathcal{L}}$. Remarquons que la strate $([\mathcal{L}],r,m-1,\alpha+b)$ n'est pas alfalfa. Posons $E = F[\alpha]$ et $B = \mathrm{End}_E(V) \subset A$; alors $\mathcal{L}$ est une chaîne de R_E-réseaux dans le E-espace vectoriel V ; notant $H'_{\mathcal{L}}$ le stabilisateur de $\mathcal{L}$ dans $B^\times$, on a $H'^i_{\mathcal{L}} = H^i_{\mathcal{L}} \cap B^\times$ pour $i \geq 0$. La restriction de ψ_b à $H'^m_{\mathcal{L}}$ définit une strate $([\mathcal{L}],m,m-1,b')$ dans B. Le point (difficile) prouvé dans [KM2] est qu'on peut s'arranger pour que cette strate soit *fondamentale* dans B. Si elle est scindée, alors π n'est pas cuspidale (*cf.* théorème 3.b)) et sinon, on peut supposer que la strate est alfalfa dans B, et alors $\alpha + b$ engendre un corps. Si ce corps est de degré n sur F, la situation redevient semblable au cas très cuspidal : π est nécessairement cuspidale induite à partir de $H_{\mathcal{L}}$. Comme n est produit de deux nombres premiers, on a gagné dès que $[F[\alpha+b]:F] > [F[\alpha]:F] > 1$. On pourrait espérer que ce procédé reste valable pour n quelconque, *i.e.* que l'on puisse travailler avec la strate $([\mathcal{L}],m,m-1,b')$ dans B. Mais ce n'est hélas pas possible : on doit retourner à F comme corps de base et travailler avec la strate $([\mathcal{L}], r, m-1, \alpha + b)$ dans A. Le même phénomène se présente aussi dans [Co4], ce qui explique pourquoi l'approche directe de [Co4] semble plus compliquée que [Co2].

3. LE CAS GÉNÉRAL : STRATES SIMPLES ET ALGÈBRES DE HECKE

3.1. Abordons maintenant le cas de GL_n où n est quelconque, suivant [BK]. On étudie les algèbres de Hecke attachées aux représentations des sous-groupes ouverts compacts de $G = \mathrm{GL}_n(F)$, et en particulier l'entrelacement de ces représentations ; cela mène à l'entrelacement des strates, et les strates simples (concept fondamental dégagé dans [BK]) sont celles dont l'entrelacement, plus facile à déterminer, permet d'effectuer l'analyse dont la difficulté a été soulignée en 2.7.

Commençons par définir les algèbres de Hecke adéquates. On fixe une mesure de Haar dg sur G (G est unimodulaire). On note $\mathcal{H}(G)$ l'algèbre des fonctions localement constantes à support compact sur G, munie de la loi de convolution

$$\phi\psi(g) = \int_G \phi(h)\, \psi(h^{-1}g)\, dh.$$

Si π est une représentation lisse de G sur l'espace V, l'algèbre $\mathcal{H}(G)$ agit sur V par la formule $\pi(\phi)(v) = \int_G \phi(h)\, \pi(h)(v) dh$ pour $\phi \in \mathcal{H}(G)$ et $v \in V$.

Fixons un sous-groupe ouvert compact H de G et une représentation lisse irréductible (donc de dimension finie) $\rho : H \to \mathrm{GL}(W)$. (On a une variante de tout ce qui va suivre pour les sous-groupes compacts modulo Z.) On dispose alors d'un idempotent e_ρ dans $\mathcal{H}(G)$ défini par
$e_\rho(x) = \mathrm{vol}(K)^{-1} \dim(\rho) \operatorname{tr} \rho(x^{-1})$ pour $x \in H$ et $e_\rho(x) = 0$ pour $x \notin H$. Alors $e_\rho\, \mathcal{H}(G)\, e_\rho$ est une sous-algèbre de $\mathcal{H}(G)$ et a e_ρ pour élément unité. Si π est comme plus haut, la restriction de π à H est semi-simple et $\pi(e_\rho)$ est la projection sur le composant isotypique $V(\rho)$, qui est donc un module sur $e_\rho\, \mathcal{H}(G)\, e_\rho$. On a une bijection naturelle, asociant $V(\rho)$ à V, entre les classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles
$\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ vérifiant $V(\rho) \neq 0$ et les classes d'isomorphisme de modules

simples sur $e_\rho\,\mathcal{H}(G)\,e_\rho$.

3.2. Au vrai, il est commode d'utiliser une autre algèbre $\mathcal{H}(G,\rho)$ attachée à ρ, qui est équivalente à $e_\rho\,\mathcal{H}(G)\,e_\rho$ au sens de Morita. On l'appelle l'*algèbre d'entrelacement* de ρ. Notons $\rho^\vee$ la représentation contragrédiente de ρ ; on a $\rho^\vee(g) = {}^t\rho(g^{-1})$ pour $g \in G$. L'espace $\mathcal{H}(G,\rho)$ est formé des fonctions localement constantes à support compact de G dans $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(W^*)$, satisfaisant à $\Phi(hgh') = \rho^\vee(h) \circ \Phi(g) \circ \rho^\vee(h')$ pour h, h' dans H et g dans G. La loi d'algèbre est la loi de convolution

$$\Phi\,\Phi'(g) = \int_G \Phi(a) \circ \Phi'(a^{-1}\,g)\,dx.$$

Il existe un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{H}(G,\rho)\otimes_{\mathbf{C}}\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(W)$ sur $e_\rho\,\mathcal{H}(G)\,e_\rho$ associant à $\Phi \otimes (w \circ w^*)$ pour $\Phi \in \mathcal{H}(G,\rho)$, $w \in W$ et $w^* \in W^*$) la fonction $g \mapsto \dim\rho\ \mathrm{Tr}(w \otimes \Phi(g) w*)$.

Pour $g \in G$, on note ${}^gH$ le groupe gHg^{-1} et ${}^g\rho : {}^gH \to \mathrm{GL}(W)$ la représentation $x \mapsto \rho(g^{-1}xg)$. On note $\mathrm{Hom}({}^g\rho, \rho)$ l'espace des endomorphismes ϕ de W vérifiant $\phi \circ {}^g\rho(x) = \rho(x) \circ \phi$ pour $x \in H \cap {}^gH$. On dit que g entrelace ρ (avec elle-même) si cet espace est non nul. Le support des fonctions de $\mathcal{H}(G,\rho)$ est donné par l'entrelacement de ρ.

PROPOSITION.— *Soit $g \in G$. On a un isomorphisme canonique entre* $\mathrm{Hom}({}^g\rho,\rho)$ *et l'espace des fonctions Φ de $\mathcal{H}(G,\rho^\vee)$ qui s'annulent hors de HgH.*

Remarque.— Le cas où H est compact $\bmod Z$ et où $\mathrm{Hom}({}^g\rho,\rho) = 0$ pour $g \notin H$ *i.e.* $\mathcal{H}(G,\rho^\vee)$ de dimension 1 est précisément celui où $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$ est irréductible et cuspidale *cf.* 1.4.

3.3. Grossièrement dit, l'analyse d'un élément π du dual admissible de G s'effectue en partant d'une paire (H,ρ) relativement simple intervenant dans π, par exemple une paire correspondant (2.2) à une strate alfalfa (2.4) $([\mathcal{L}], r, r-1, \alpha)$ et en affinant l'observation, *i.e.* en grossissant H, par exemple en passant à une strate $([\mathcal{L}], r, m, \beta)$ avec $r/2 \leq m < r-1$.

La notion d'entrelacement se transporte aux strates de manière compatible avec l'assignement $b \mapsto \psi_b$ de 2.2. Un élément g de G *entrelace* la strate $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, b)$ et la strate $\Omega' = ([\mathcal{L}'], r', m', b')$ si $g^{-1}(b + P_{\mathcal{L}}^{-m})\, g \cap (b' + P_{\mathcal{L}'}^{-m'})$ est non vide ; on note $\mathcal{I}_G(\Omega)$ l'ensemble des éléments de G entrelaçant Ω avec elle-même.

On s'intéresse essentiellement, *cf.* 2.4, aux strates *pures* $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, \beta)$, *i.e.* telles que $([\mathcal{L}], r, r-1, \beta)$ vérifie les deux premières conditions de la définition 2.4 (si elle vérifie en outre la troisième, Ω sera dite *minimale*). Fixons donc Ω *pure* et notons E le corps $F[\beta]$ et B le sous-anneau $\mathrm{End}_E(V)$ de A. Les réseaux de la chaîne $\mathcal{L}$ sont stables par l'action de l'anneau d'entiers R_E de E et on obtient ainsi une chaîne $\mathcal{L}(E)$ de réseaux dans le E-module V ; on utilisera pour cette chaîne les notations $B_{\mathcal{L}(E)}$, $P_{\mathcal{L}(E)}$, etc. de 2.2.

L'entrelacement de Ω amène à étudier l'application $a_\beta : x \mapsto \beta x - x\beta$ de A dans A. Pour $k \in \mathbf{Z}$, on note $N_k(\Omega)$ l'ensemble des éléments x de $A_{\mathcal{L}}$ tels que $a_\beta(x)$ appartienne à $P_{\mathcal{L}}^k$; c'est un sous-anneau ouvert de $A_{\mathcal{L}}$, qui est aussi un bimodule sur $B_{\mathcal{L}(E)}$, et on a $N_k(\Omega) \subset B_{\mathcal{L}(E)} + P_{\mathcal{L}}$ pour k assez grand. On note $k_0(\Omega)$ le plus petit entier k tel que $N_{k+1}(\Omega) \subset B_{\mathcal{L}(E)} + P_{\mathcal{L}}$.

L'intérêt de $k_0(\Omega)$ vient de la propriété d'exactitude suivante. Fixons une *corestriction* s relative à E/F, c'est-à-dire un morphisme de (B,B)-bimodules de A dans B tel que $s(B_{\mathcal{L}(E)}) = A_{\mathcal{L}'} \cap B$ pour toute chaîne $\mathcal{L}'$ de réseaux dans A stables par R_E (la corestriction reflète la restriction à B des caractères $\psi_{b'}$ définis par les strates $([\mathcal{L}'], r', m', b')$ de A).

Lemme.— Soit $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, \beta)$ une strate pure *et $E = F[\beta]$. Soit k un entier, $k \geq k_0(\Omega)$. Alors la suite suivante est exacte*

$$0 \longrightarrow N_k(\Omega)/B_{\mathcal{L}(E)} \xrightarrow{a_\beta} P_{\mathcal{L}}^k \xrightarrow{s} P_{\mathcal{L}(E)}^k \longrightarrow 0.$$

3.4. DÉFINITION.— *Une strate pure $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, \beta)$ dans A est dite* simple *si $m < -k_0(\Omega)$.*

Les strates *minimales* sont les strates simples $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, \beta)$ telles que $k_0(\Omega) \leq -r$. Si $m = r - 1$, les strates simples ne sont autres que les strates *alfalfa*.

L'importance des strates simples est attestée par le résultat technique fondamental suivant :

THÉORÈME [BK §2].— *Soit* $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, \beta)$ *une strate pure dans* A.

a) *Parmi les strates pures* $([\mathcal{L}], r, m, \omega)$ *équivalentes à* Ω*, les strates* simples *sont celles pour lesquelles* $[F[\omega] : F]$ *est* minimal.

b) *Supposons* Ω *simple. Si* $\Omega' = ([\mathcal{L}], r', m', b')$ *est simple et entrelacée avec* Ω*, alors* Ω' *est* conjuguée *de* Ω *par un élément de* $H_{\mathcal{L}}$.

c) *Supposons* Ω *simple, et posons* $k = k_0(\Omega)$, $N = N_k(\Omega)$. *Alors*

$$\mathcal{I}_G(\Omega) = (1 + P_{\mathcal{L}(E)}^{-(m+k)} N)\, B^{\times}\, (1 + P_{\mathcal{L}(E)}^{-(m+k)} N).$$

On voit que a) donne une caractérisation simple des strates simples et que c) détermine l'entrelacement d'une strate simple d'une façon qui permet d'espérer une réduction à B.

Une strate simple $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, \beta)$ se comporte bien vis-à-vis du processus de raffinement : Posons $E = F[\beta]$, $B = \mathrm{End}_E(V)$ et fixons comme plus haut une corestriction s relative à E/F. Prenons $b \in P_{\mathcal{L}}^{-m}$ et considérons la strate raffinée $\Omega' = ([\mathcal{L}], r, m-1, \beta + b)$. On a une *strate dérivée* dans B : $(([\mathcal{L}(E)], m, m-1, s(b))$. Si la strate dérivée est *scindée*, alors une représentation lisse irréductible de G qui contient la strate Ω' est induite à partir d'un sous-groupe parabolique propre et en particulier ne saurait être cuspidale. Si à l'opposé la strate dérivée est simple dans B (c'est-à-dire alfalfa), alors Ω' est équivalente à une strate simple dans A.

On montre aussi que les strates simples s'obtiennent par raffinements successifs de ce genre à partir de strates alfalfa.

3.5. Cependant l'analyse du dual admissible de G est plus compliquée que ce schéma de raffinement de strates. En effet, la strate $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, \beta)$ ne saurait définir une représentation d'un sous-groupe de G que si $m \geq \frac{r}{2}$; passer au-delà impose de modifier la construction. La classification de [BK] repose néanmoins sur les strates simples $([\mathcal{L}], r, 0, \beta)$ dans A, mais le chemin est plus contourné. Nous le décrivons brièvement ci-après. Pour une strate simple $\Omega = ([\mathcal{L}], r, 0, \beta)$, on définit en 3.6 des sous-anneaux filtrés $j(\Omega)$ et $h(\Omega)$ de $A_{\mathcal{L}}$, des sous-groupes filtrés $J(\Omega)$ et $H(\Omega)$ de $H_{\mathcal{L}}$ et des ensembles de caractères $\mathcal{C}(\Omega, k)$ (pour $0 \leq k \leq r-1$) des groupes $H(\Omega)^{k+1}$. Ces objets sont définis directement si Ω est minimal (*i.e.* $k_0(\Omega) \leq -r$) et par référence à une strate $(([\mathcal{L}], r, -k_0(\Omega), \gamma)$ simple et équivalente à $([\mathcal{L}], r, -k_0(\Omega), \beta)$ sinon (la strate $\Omega' = ([\mathcal{L}], r, 0, \gamma)$ est alors simple elle aussi). On vérifie, mais ce n'est pas évident, que ces objets existent et ne dépendent que de Ω et non des choix effectués. En 3.6, nous considérons une strate simple $\Omega = ([\mathcal{L}], r, 0, \beta)$ et fixons un choix de Ω'.

3.6. Gardons les notations E et B (*cf.* 3.4), et posons $m = -k_0(\Omega)$. Si Ω est minimale, on pose $h(\Omega) = B_{\mathcal{L}(E)} + P_{\mathcal{L}}^{[r/2]+1}$ et $j(\Omega) = B_{\mathcal{L}(E)} + P_{\mathcal{L}}^{[(r+1)/2]}$. Sinon, on pose $h(\Omega) = B_{\mathcal{L}(E)} + h(\Omega') \cap P_{\mathcal{L}}^{[m/2]+1}$ et
$j(\Omega) = B_{\mathcal{L}(E)} + j(\Omega') \cap P_{\mathcal{L}}^{[(m+1)/2]}$.

Ce sont des sous-anneaux de $A_{\mathcal{L}}$ filtrés par $h^m = h \cap P_{\mathcal{L}}^m$ et $j^m = j \cap P_{\mathcal{L}}^m$. On pose $H(\Omega) = h(\Omega)^\times$, $J(\Omega) = j(\Omega)^\times$ et $H^m = 1 + h^m$, $j^m = 1 + j^m$ pour $m \geq 1$.

Soit $0 \leq k \leq r-1$. Si Ω est minimale, on note $\mathcal{C}(\Omega, k)$ l'ensemble des caractères θ de $H(\Omega)^{k+1}$ satisfaisant à

i) $\theta \,|\, (H(\Omega)^{k+1} \cap H_{\mathcal{L}}^{[n/2]+1} = \psi_\beta$.

ii) $\theta \,|\, (H(\Omega)^{k+1} \cap B^\times$ se factorise par le déterminant $B^\times \to E^\times$.

Supposons Ω non minimale. Si $k \geq m$, on pose $\mathcal{C}(\Omega, k) = \mathcal{C}(\Omega', k)$. Sinon, $\mathcal{C}(\Omega; k)$ est formé des caractères θ de $H(\Omega)^{k+1}$ vérifiant ii) et

iii) θ est normalisé par $H_{\mathcal{L}(E)}$.

iv) Pour $k' = \max(k, [m/2])$, la restriction de θ à $H(\Omega)^{k'+1}$ est de la forme $\theta_0 \cdot \psi_{\beta-\gamma}$ avec $\theta_0 \in \mathcal{C}(\Omega', k')$.

On peut facilement calculer l'entrelacement de $\theta_0 \in \mathcal{C}(\Omega, k)$ [BK, Thm 4.7].

3.7. Soit θ un caractère dans $\mathcal{C}(\Omega, 0)$. Alors il existe une unique représentation irréductible $\eta(\theta)$ de $J^1(\Omega)$ dont la restriction à $H^1(\Omega)$ contienne θ. De plus, $\eta(\theta)$ s'étend de manière canonique (à torsion près par $\chi \circ \det_B$ où χ est un caractère de $R_E^\times/1 + P_E$) en une représentation $\kappa(\theta)$ de $J(\Omega)$.

Remarque.— Dans les cas simples mentionnés au §2, et dans [Co4], de telles extensions s'obtiennent par la représentation de Weil. Cependant, cela mène à des difficultés techniques, par exemple si $p = 2$. Dans [BK] est utilisée une approche inspirée de [Wa].

On peut enfin définir la notion de *type simple.* On part d'une strate simple $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, \beta)$ comme plus haut et on suppose $\mathcal{L}$ *uniforme.* Alors $J(\Omega)/J^1(\Omega)$ est isomorphe à $H_{\mathcal{L}(E)}/H^1_{\mathcal{L}(E)}$, c'est-à-dire au produit de e copies de $\mathrm{GL}_f(R_E/P_E)$ (avec $ef = \dim_E(V)$). Étant donnée une représentation cuspidale σ_0 de $\mathrm{GL}_f(R_E/P_E)$, on peut voir $\sigma = \sigma_0 \otimes \cdots \otimes \sigma_0$ comme une représentation de $J(\Omega)$ triviale sur $J^1(\Omega)$.

DÉFINITION.— *Un* type simple *est soit une représentation de* $J(\Omega)$ *de la forme* $\kappa(\theta) \otimes \sigma$ *où* $\theta \in \mathcal{C}(\Omega, 0)$ *et* σ *comme ci-dessus, soit une représentation de* $H^0_{\mathcal{L}}$ *où* $\mathcal{L}$ *est* uniforme, *triviale sur* $H^1_{\mathcal{L}}$ *et de la forme* σ *comme ci-dessus.*

Remarque.— Dans le deuxième cas de cette définition, on peut avoir $f = 1$; alors $H^0_{\mathcal{L}}$ est ce qu'on appelle un *sous-groupe d'Iwahori* de G.

3.8. On peut enfin énoncer les résultats fondamentaux.

On prend une représentation de $J(\Omega)$ qui est un type simple. On fixe un sous-corps L de A contenant E, non ramifié de degré f sur E, et on pose $C = \mathrm{End}_L(V)$.

THÉORÈME.— *L'algèbre* $\mathcal{H}(J(\Omega), \lambda)$ *est canoniquement isomorphe à l'algèbre d'entrelacement de la représentation triviale d'un sous-groupe d'Iwahori de* $C^\times$.

Remarquons que les représentations de ces algèbres sont très bien connues [Bo, KL] et que cet isomorphisme peut se décrire par des conditions de support.

COROLLAIRE.— *Soit* π *une représentation lisse irréductible de* G *dont la restriction à* $J(\Omega)$ *contient* λ.

Si $[L : F] = n$, *alors* π *est cuspidale induite par une extension de* λ *au normalisateur dans* G *de* $J(\Omega)$ *(qui est compact modulo* Z*).*

Sinon π *n'est pas cuspidale.*

On peut, enfin, décrire les représentations de G contenant un type simple. On sait que [BZ1, Cas] si π est une représentation lisse irréductible de G, il existe un sous-groupe de Lévi de G, $L \simeq \prod_{i=1}^{s} \mathrm{GL}_{n_i}(F)$, et des représentations cuspidales π_i de $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ pour $i = 1, \cdots, s$, tels que π soit une sous-représentation de l'induite parabolique de $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_s$. L'ensemble $\{\pi_1 \cdots \pi_s\}$ est déterminé par π ; appelons-le le *support* de π. Il est dit *simple* si les n_i sont tous égaux et si pour $i > 1$, π_i est équivalente à $\pi_1 \otimes (\chi_i \circ \det)$ où χ_i est un caractère non ramifié de $F^\times$.

THÉORÈME.— *Une représentation lisse irréductible de G contient un type simple si et seulement si son support est simple.*

COROLLAIRE.— *Toute représentation cuspidale π de G est induite à partir d'un sous-groupe compact modulo Z. Plus précisément, π contient un type simple λ représentation d'un sous-groupe J et la paire (λ, J) est unique à conjugaison près ; de plus, π est l'induite d'une unique extension de λ au normalisateur de J dans G.*

4. GROUPES AUTRES QUE GL_n

4.1. Parlons en premier des groupes proches de GL_n et d'abord de ses formes intérieures anisotropes. Si D est un corps gauche de centre F, Corwin a donné [Co3] une classification des représentations de $D^\times$, comme il est inhérent à la méthode de comptage. Il est clair d'autre part (mais ce n'est pas écrit) que les méthodes de [BK] s'appliquent dans le cas de $D^\times$, qui est plus facile que celui de $\mathrm{GL}_n(F)$, et fournissent une classification analogue. En fait, certaines idées de [BK] ont été utilisées par E.W. Zink pour compléter son approche originale [Zi], qui fournit une autre classification du dual admissible de $D^\times$,liée à une bonne connaissance des classes de conjugaison dans U_D^1/U_D^i pour $i > 1$, et sans doute plus proche de la correspondance conjecturale [La, He] avec les représentations du groupe de Galois absolu de F.

On devrait pouvoir traiter de même le cas de $\mathrm{GL}_m(D)$, mais cela reste à écrire.

Le cas de PGL_n se réduit immédiatement au cas de GL_n : les représentations lisses de $\mathrm{PGL}_n(F)$ sont celles de $\mathrm{GL}_n(F)$ qui sont triviales sur le centre. On peut étudier le cas de SL_n en restreignant à $\mathrm{SL}_n(F)$ les représentations de $\mathrm{GL}_n(F)$, et Bushnell et Kutzko annoncent qu'ils savent en particulier prouver que toute représentation cuspidale de $\mathrm{SL}_n(F)$ est induite à partir d'un sous-groupe compact ouvert ; voir [KS] pour le cas où n est premier.

4.2. Pour les groupes proches de GL_2 et certains autres groupes de petit rang, la construction explicite des représentations est un problème abordé depuis longtemps. Parmi les travaux récents en petit rang, et sans prétention d'exhaustivité, mentionnons les classifications de A. Moy [My3].

Prenons donc un groupe réductif connexe général $\mathbf{G}$ sur F. Alors la structure des sous-groupes compacts maximaux de $\mathbf{G}(F)$ est élucidée dans [BT], et dans [PR] sont introduites des filtrations, dites standard, sur ces groupes et d'autres sous-groupes compacts de $\mathbf{G}(F)$, les sous-groupes parahoriques (pour $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$, ils correspondent aux stabilisateurs des chaînes de réseaux). L'analogue des représentations très cuspidales de Carayol conduit à la notion de représentation P-cuspidale de $\mathbf{G}(F)$, due à L. Morris [Mo1, *cf.* aussi Hi].

Cependant, si l'on veut obtenir une généralisation aux groupes classiques des résultats de R. Howe [Ho1] pour GL_n dans le cas modéré, on est amené [Mo2] à définir des filtrations attachées aux tores modérés, qui ne sont pas toutes des filtrations standard. Enfin, si l'on veut obtenir le cas général, les tores modérés ne peuvent suffire et Morris a dégagé pour un groupe classique $\mathbf{G}$ [Mo3] (en caractéristique résiduelle impaire) la bonne notion de chaîne de réseaux et de filtrations de l'ordre héréditaire et des sous-groupes compacts associés : les chaînes de réseaux doivent, en gros, être union de deux chaînes se déduisant l'une de l'autre par dualité par rapport à la forme définissant $\mathbf{G}$, et les filtrations reflètent subtilement cette décomposition. Morris définit aussi la notion de *strate fondamentale* et prouve que toute représentation lisse irréductible de $\mathbf{G}(F)$ contient une strate fondamentale. L'investigation devrait se poursuivre selon les lignes de [BK].

Si les isomorphismes d'algèbres de Hecke de 3.7 s'avéraient généraux, cela serait particulièrement intéressant puisque, au moins pour G déployé à centre connexe, les représentations de l'algèbre de Hecke relative à la représentation triviale d'un sous-groupe d'Iwahori ont été classifiées par Kazhdan et Lusztig [KL] à l'aide de techniques de **K**-homologie.

4.3. Signalons enfin que, même pour $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$, l'histoire n'est pas finie, puisque les célèbres conjectures de Langlands [La, He] impliquent un lien très précis entre les représentations de degré n du groupe de Galois absolu de F et le dual admissible de $\mathrm{GL}_n(F)$, les représentations galoisiennes irréductibles correspondant au dual cuspidal. Seuls les cas $n \leq 3$ ont été complètement traités jusqu'à maintenant, et l'on est en droit d'attendre une correspondance explicite pour n quelconque.

BIBLIOGRAPHIE

[BZ1] J. BERNSTEIN et A. ZELEVINSKI - *Representations of the group* $\mathrm{GL}(n, F)$ *where* F *is a local non-Archimedean field*, Usp. Mat. Nauk **31** (1976), 5-70.

[BZ2] J. BERNSTEIN et A. ZELEVINSKI - *Induced representations of reductive p-adic groups*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **10** (1977), 441-472.

[Bo] A. BOREL - *Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup*, Invent. Math. **35** (1976), 233-259.

[BT] F. BRUHAT et J. TITS - *Groupes réductifs sur un corps local* I, Publ. Math. I.H.E.S. **41** (1972), 5-251.

[Bu1] C. BUSHNELL - *Hereditary orders, Gauss sums, and supercuspidal representations of* GL_N, J. reine angew. Math. **375/376** (1987), 184-210.

[Bu2] C. BUSHNELL - *Induced representations of locally profinite groups*, prépublication 1990, à paraître au J. of Algebra.

[BK] C. BUSHNELL et Ph. KUTZKO - *The admissible dual of* GL_N *via compact open subgroups*, prépublication 1990, §§1 à 8, annoncé par *The admissible dual of* GL_N *via restriction to compact open subgroups*, à paraître dans les comptes rendus de la Conférence "Harmonic analysis on reductive groups", Bowdoin, 1989.

[Ca] H. CARAYOL - *Représentations cuspidales du groupe linéaire*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **17** (1984), 191-225.

[Cas] W. CASSELMAN - *Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups*, prépublication.

[Co1] L. CORWIN - *Representations of division algebras over local fields*, I, Adv. in Math. **13** (1974), 259-267 ; II, Pacific J. Math **101** (1982), 49-70.

[Co2] L. CORWIN - *Supercuspidal representations of* $\mathrm{GL}_{pp'}(F)$, *F p-adic*, prépublication.

[Co3] L. CORWIN - *The unitary dual for the multiplicative group of arbitrary division algebras over local fields*, J.A.M.S. **2** (1989), 565-598.

[Co4] L. CORWIN - *A construction of the supercuspidal representations of* $\mathrm{GL}_n(F)$, *F p-adic*, prépublication, dernière version novembre 1989.

[De] P. DELIGNE - *Le support du caractère d'une représentation supercuspidale*, C.R.A.S. Paris **283** (1976), 155-157.

[DKV] P. DELIGNE, D. KAZHDAN et M.-F. VIGNERAS - *Représentations des algèbres centrales simples p-adiques* **in** Représentations des groupes réductifs sur un corps local, Hermann, Paris (1984).

[GGPS] I. GELFAND, I. GRAEV, I.PIATETSKI-SHAPIRO - *Representations and automorphic functions*, Saunders (1969).

[Gr] J.A. GREEN - *The characters of the finite general linear groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **80** (1955), 402-447.

[He] G. HENNIART - *Les conjectures de Langlands locales pour* $\mathrm{GL}(n)$ **in** Journées Arithmétiques de Metz, Astérisque **94** (1982), 67-85.

[Hi] H. HIJIKATA - *Some supercuspidal representations induced from parahoric subgroups* **in** Automorphic forms in several variables, Progress in Math. **46** (1984), 160-178.

[Ho1] R. HOWE - *Some qualitative results on the representation theory of* GL_n *over a p-adic field*, Pacific J. Math. **73** (1977), 497-538.

[Ho2] R. HOWE - *Tamely ramified supercuspidal representations of* GL_n, Pacific J. Math. **73** (1977), 365-381.

[Ho3] R. HOWE - (With the collaboration of A. Moy) *Harish-Chandra homomorphisms for p-adic groups* CBMS Regional Conference Series in Math. **59**, AMS (1985).

[HM1] R. HOWE et A. MOY - *Minimal K-types for* $\mathrm{GL}(n)$, Astérisque **171-172** (1989), 257-273.

[HM2] R. HOWE et A. MOY - *Hecke algebra isomorphisms for* GL_N, J. of Algebra **131** (1990), 388-424.

[JL] H. JACQUET et R.P. LANGLANDS - *Automorphic forms on* GL(2), L.N. **114**, Springer, 1971.

[KL] D. KAZHDAN et G. LUSZTIG - *Proof of the Deligne-Langlands conjecture for Hecke algebras*, Invent. Math. **87** (1987), 153-215.

[Ku1] Ph. KUTZKO - *On the supercuspidal representations of* GL_2, I, II, Amer. J. Math. **100** (1978), 43-60 et 705-716.

[Ku2] Ph. KUTZKO - *Towards a classification of the supercuspidal representations of* GL_N, J. London Math. Soc. **37** (1988), 265-274.

[KM1] Ph. KUTZKO et D. MANDERSCHEID - *On intertwining operators for* $\mathrm{GL}_N(F)$, *F a non-Archimedean local field*, Duke Math. J. **57** (1988), 275-293.

[KM2] Ph. KUTZKO et D. MANDERSCHEID - *On the supercuspidal representations of* GL_N, *N the product of two primes*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **23** (1990), 39-88.

[KS] Ph. KUTZKO et P. SALLY Jr. - *All supercuspidal for* SL_p *over a p-adic field are induced* **in** Representation theory of p-adic groups, Progress in Math. **40** (1983), 185-196.

[La] R.P. LANGLANDS - *Problems in the theory of automorphic forms*, **in** Lectures in Modern Analysis III, LN **170** (1970), 18-86.

[Md] I. MACDONALD - *Symmetric functions and Hall Polynomials*, Oxford (1979).

[Mo1] L. MORRIS - *P-cuspidal representations*, Proc. London Math. Soc. **57** (1988), 329-356 ; *P-cuspidal representations of level one*, Proc. London Math. Soc. **58** (1989), 550-558.

[Mo2] L. MORRIS - *Tamely ramified supercuspidal representations of some classical groups*, prépublication, et *Tamely ramified supercuspidal representations of the classical groups* I et II, prépublications.

[Mo3] L. MORRIS - *Fundamental G-strata for classical groups*, prépublication IAS, 1990.

[My1] A. MOY - *Local constants and the tame Langlands correspondence*, Amer. J. Math. **108** (1986), 863-930.

[My2] A. MOY - *A conjecture on minimal K-types for* GL_n *over a p-adic field*, Contemporary Math. **86** (1989), 249-254.

[My3] A. MOY - *Representations of $U(2,1)$ over a P-adic field*, J. Reine Angew. Math. **372** (1987), 178-208 ; *Representations of* GSp_4 *over a P-adic field* I, II, Comp. Math. **66** (1988), 237-328 ; *Minimal K-types for G_2 over a P-adic field*,Trans. AMS **305** (1988), 517-529.

[PR] G. PRASAD, M.S. RAGHUNATHAN - *Topological central extensions of semisimple groups over local fields* I, Ann. Math. **119** (1988), 143-201.

[Re] I. REINER - *Maximal orders*, Academic Press, Londres 1976.

[Ro] F. RODIER - *Représentations de* $\mathrm{GL}_n(F)$ *où F est un corps p-adique*, Sém. Bourbaki, exposé n° 587, février 1982, Astérisque **92-93** (1982), 201-219.

[Rg] J. ROGAWSKI - *Representations of* $\mathrm{GL}(n)$ *and division algebras over a p-adic field*, Duke Mat. J. **50** (1983), 161-196.

[Tu] J.B. TUNNELL - *On the local Langlands conjectures for* GL(2), Invent. Math. **46** (1978), 179-200.

[Vo] D. VOGAN - *Representations of real reductive Lie groups*, Birkhäuser (1981).

[Wa] J.-L. WALDSPURGER - *Algèbres de Hecke et induites de représentations cuspidales pour* $\mathrm{GL}(N)$, J. reine angew. Math. **370** (1986), 127-191.

[Ze] A. ZELEVINSKI - *Induced representations of reductive p-adic groups* II : *On irreducible representations of* $\mathrm{GL}(n)$, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **13** (1980), 165-210.

[Zi] E.W. ZINK - *Representation theory of local division algebras* I, II, prépublications Karl-Weierstraß Institut für Math., Berlin 1990.

Guy HENNIART

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
Département de Mathématiques
et URA D 752 du CNRS
Bâtiment 425
F-91405 ORSAY