LUC ILLUSIE

# Cohomologie de De Rham et cohomologie étale $p$-adique

*Astérisque*, tome 189-190 (1990), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 726, p. 325-374
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1989-1990__32__325_0>

Séminaire BOURBAKI juin 1990
42ème année, 1989-90, n° 726

# COHOMOLOGIE DE DE RHAM ET COHOMOLOGIE ÉTALE $p$-ADIQUE

[d'après **G. Faltings, J.-M. Fontaine et al.**]

par **Luc ILLUSIE**

Si $X$ est un schéma propre et lisse sur $\mathbf{C}$, la théorie de l'intégration fournit un *isomorphisme de périodes*

$$H^*_{DR}(X/\mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} H^*(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{C},$$

où $H^*_{DR}(X/\mathbf{C}) = H^*(X, \Omega^{\cdot}_{X/\mathbf{C}})$ est la cohomologie de de Rham de $X/\mathbf{C}$ et $X(\mathbf{C})$ désigne l'espace analytique associé à $X$. La théorie des *périodes p-adiques*, à laquelle cet exposé est consacré, permet, si $K$ est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ (plus généralement, un corps de caractéristique nulle, complet pour une valuation discrète, et de corps résiduel parfait de caractéristique $p > 0$), et si $X$ est un schéma propre et lisse sur $K$, de construire des isomorphismes analogues reliant la cohomologie de de Rham de $X/K$, $H^*_{DR}(X/K) = H^*(X, \Omega^{\cdot}_{X/K})$, avec les diverses structures naturelles dont elle peut être munie, et la cohomologie étale $p$-adique $H^*(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p)$ (où $\bar{K}$ est une clôture algébrique de $K$), munie de l'opération du groupe de Galois $G = Gal(\bar{K}/K)$.

Ce sujet a une assez longue histoire. Le point de départ est l'article de Tate [70]. Tate considère le cas où $X$ est une variété abélienne ayant bonne réduction (*i.e.* égale à la fibre générique d'un schéma abélien $\mathcal{X}$ sur l'anneau $V$ des entiers de $K$). L'action de $G$ sur $\bar{K}$ se prolonge par continuité au complété $\bar{K}^\wedge$. Tate calcule la cohomologie galoisienne continue de $G$ à valeurs dans $\bar{K}^\wedge$ (et ses twists $\bar{K}^\wedge(i)$ par des puissances du caractère cyclotomique), et par une étude du groupe $p$-divisible $\Gamma$ associé à $\mathcal{X}$, construit un isomorphisme canonique, $G$-équivariant,

$$\begin{aligned}(H^1(X,\mathcal{O}_X)\otimes_K\bar{K}^\wedge)\oplus\Big(H^0(X,\Omega^1_{X/K})\otimes_K\bar{K}^\wedge(-1)\Big)&\\ \xrightarrow{\sim} H^1(X_{\bar{K}},\mathbf{Q}_p)\otimes_{\mathbf{Q}_p}\bar{K}^\wedge&\end{aligned}$$

(où $G$ agit diagonalement sur le membre de droite). Il conjecture de plus l'existence de décompositions analogues en tout degré, pour $X$ un schéma propre et lisse arbitraire sur $K$ (voir 2.1.3 pour un énoncé précis, et un historique de cette conjecture, dite *conjecture de Hodge-Tate*, qui a été finalement démontrée, en toute généralité, par Faltings [19]). Dans le cas qu'il considère, Tate montre en outre que le groupe $p$-divisible $\Gamma$ est déterminé, à isogénie près, par la représentation de $G$ sur $H^1(X_{\bar{K}},\mathbf{Q}_p)$. Dans la même situation, le groupe $H^1_{DR}(X/K)$ se trouve muni d'une structure plus riche qu'il n'y paraît de prime abord. En effet, en plus de la filtration par $H^0(X,\Omega^1_{X/K})$ (*filtration de Hodge*), $H^1_{DR}(X/K)$ est muni d'une $K_0$-structure naturelle (où $K_0$ est le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt $W(k)$ du corps résiduel $k$), à savoir $M\otimes_{W(k)}K_0$, où $M$ est le module de Dieudonné de la fibre spéciale de $\Gamma$ : cela résulte de l'interprétation "cristalline" de $M$ donnée par Grothendieck (comme $H^1$ cristallin de $\mathcal{X}\otimes k$) ; cette $K_0$-structure $M\otimes_{W(k)}K_0$ est munie d'un automorphisme $\varphi$, semi-linéaire par rapport à l'automorphisme de Frobenius de $K_0$, déduit de l'opérateur $F$ sur $M$. Grothendieck montre de plus ([36], [37]) que $\Gamma$ est déterminé à isogénie près par $H^1_{DR}(X/K)$, muni de sa filtration de Hodge et de la $K_0$-structure précédente, avec son opérateur $\varphi$. Compte tenu du résultat de Tate mentionné plus haut, cela l'amène à poser la question (*loc. cit.*) (*problème du "foncteur mystérieux"*) de décrire un procédé algébrique permettant de passer directement de $H^1_{DR}(X/K)$ à $H^1(X_{\bar{K}},\mathbf{Q}_p)$ sans l'intermédiaire du groupe $p$-divisible $\Gamma$, et de généraliser ceci en dimension supérieure. Ce problème vient d'être, lui aussi, complètement résolu. Fontaine a réalisé le premier pas, décisif, en construisant une $K_0$-algèbre $B_{cris}$, munie de certaines structures additionnelles (action de $G$, opérateur semi-linéaire $\varphi$, filtration après extension des scalaires à $K$), permettant de définir un foncteur $D_{cris}$ ($D$ comme Dieudonné) de la catégorie des représentations $p$-adiques de $G$ vers la catégorie des "$\varphi$-modules filtrées sur $K$" ($K$-espaces vectoriels filtrés, munis d'une d'une $K_0$-structure, avec un endomorphisme semi-linéaire $\varphi$ (voir 1.3.5) : Fontaine montre que ce foncteur résout le problème de Grothendieck pour le $H^1$, et propose une conjecture précise en dimension supérieure (la *conjecture* $C_{cris}$), pour les schémas $X$ propres et lisses sur $K$ ayant bonne réduction (voir 2.2.2). Grosso modo, cette conjecture exprime que la représentation de Galois $H^m(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p)$ et la cohomologie de de Rham $H^m_{DR}(X/K)$, munie de toutes ses structures (notamment la $K_0$-structure fournie par la cohomologie cristalline, en vertu d'un résultat de Berthelot-Ogus [6]), se déterminent mutuellement. Démontrée d'abord par Fontaine-Messing pour dim $X < p$ et $K = K_0$, elle a été prouvée en général par Faltings [20]. Pour les schémas $X$ sur $K$ propres et lisses, mais n'ayant pas nécessairement bonne réduction, Fontaine a formulé une variante de la conjecture $C_{cris}$ , la *conjecture* $C_{DR}$, permettant de reconstituer $H^m_{DR}(X/K)$ à partir de $H^m(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p)$ (mais pas l'inverse), et impliquant la conjecture de Hodge-Tate : la conjecture $C_{DR}$ a été également démontrée par Faltings [20]. Dans le cas où $X/K$ a *réduction semi-stable* (voir 4.1.1), des discussions avec Jannsen (*cf.* [45]) ont conduit Fontaine à conjecturer l'existence d'un *opérateur de monodromie* $N$ sur $H^m_{DR}(X/K)$, analogue au "résidu de la connexion de Gauss-Manin" pour les variétés complexes, et à formuler une conjecture plus fine que $C_{DR}$, la *conjecture* $C_{st}$, qui affirme que dans ce cas, comme dans le cas de bonne réduction, $H^m_{DR}(X/K)$ et $H^m(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p)$ se déterminent mutuellement. L'opérateur $N$ a été construit par Hyodo-Kato [40], et la conjecture $C_{st}$ a été prouvée par Kato pour 2 dim $X < p - 1$ [48] ; le séminaire de Fontaine [Bures] a été consacré à ce sujet.

La théorie présentée ici a déjà de nombreuses applications. Nous en signalons — très brièvement — quelques-unes en 2.2, 2.3 et 2.4.

Ce rapport recoupe [29]. Le lecteur trouvera dans [29] de plus amples développements sur les représentations $p$-adiques et sur les motivations de la théorie de Hyodo-Kato, ainsi qu'un aperçu de quelques applications arithmétiques globales, dues à Fontaine-Mazur [32], et dont nous ne parlerons pas.

Jean-Pierre Wintenberger m'a beaucoup aidé dans la préparation de

cet exposé, je l'en remercie vivement. Je remercie également Spencer Bloch, Gerd Faltings, Jean-Marc Fontaine et Jean-Pierre Serre pour d'utiles commentaires et suggestions.

## SOMMAIRE

## 0. NOTATIONS

| | |
|---|---|
| $V$ | : anneau de valuation discrète complet |
| $K$ | : corps des fractions de $V$, supposé de caractéristique 0 |
| $k$ | : corps résiduel de $V$, supposé parfait de caractéristique $p > 0$ |
| $S$ | : $\operatorname{Spec} V$, $s = \operatorname{Spec} k$, $\eta = \operatorname{Spec} K$ |
| $\bar{K}$ | : une clôture algébrique de $K$ ; $\bar{\eta} = \operatorname{Spec} \quad \bar{K}$ ; $G = \operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$ |
| $\bar{V}$ | : normalisé de $V$ dans $\bar{K}$ ; $\bar{S} = \operatorname{Spec} \bar{V}$ |
| $\mathfrak{m}$ | : idéal maximal de $\bar{V}$ ; $\bar{k} = \bar{V}/\mathfrak{m}$ ; $\bar{s} = \operatorname{Spec} \quad \bar{k}$ |
| $\bar{V}^\wedge$ | : $\varprojlim \bar{V}/p^n\bar{V}$ |
| $\bar{K}^\wedge$ | : $\bar{V}^\wedge[1/p]$ : complété $p$-adique de $\bar{K}$ |
| $\mathfrak{m}^\wedge$ | : idéal maximal de $\bar{V}^\wedge$ |
| $W$ | : $W(k)$ ; $K_0 = W[1/p]$ ; $\sigma$ : l'automorphisme de Frobenius de $K_0$ |
| $W_n$ | : $W/p^nW$ |
| $A/p^n$ | : $A/p^nA$ |

## 1. LES ANNEAUX DE FONTAINE ET LES DIVERS TYPES DE REPRÉSENTATIONS $p$-ADIQUES

Nous ne donnerons qu'un résumé succinct de la théorie. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [29] et [Bures].

### 1.1. Représentations $\ell$-adiques

Soit $\ell$ un nombre premier $\neq p$. Par une *représentation $\ell$-adique* de $G$, on entend un $\mathbf{Q}_\ell$-espace vectoriel $H$ de dimension finie munie d'une action linéaire continue de $G$. On dit que la représentation $H$ est *non ramifiée* si l'inertie $I$ agit trivialement. C'est le cas par exemple si $H = H^n(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{Q}_\ell)$, où $X$ est un schéma propre et lisse sur $V$. Si le corps résiduel $k$ n'est pas trop gros, par exemple si $k$ est fini ou plus généralement si aucune extension finie de $k$ ne contient toutes les racines de l'unité d'ordre une puissance de $\ell$, on dispose d'un théorème de structure général, le *théorème de monodromie locale* de Grothendieck [68, Appendice] : si $\rho : G \to GL(H)$ est une représentation $\ell$-adique, $\rho$ est *quasi-unipotente*, ce qui signifie qu'il existe un sous-groupe ouvert $I_1$ de $I$ tel que $\rho(s)$ soit unipotent pour tout

$s \in I_1$. Il en résulte que la restriction de $\rho$ à $I_1$ se factorise à travers le quotient $\ell$-adique modéré $t_\ell : I \to \mathbf{Z}_\ell(1)(\bar{k})$, et qu'il existe un unique homomorphisme nilpotent (le "*logarithme de la monodromie*")

$$N : H(1) \to H$$

tel que $\rho(s)x = \exp(Nt_\ell(s))x$ pour tout $s \in I_1$. L'homomorphisme $N$ est $G$-équivariant : en particulier, si $k = \mathbf{F}_q$ et $F \in G$ relève un Frobenius géométrique de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, on a

$$NF = qFN. \tag{1.1.1}$$

Sans hypothèse sur $k$, les représentations $\ell$-adiques qu'on rencontre en pratique sont quasi-unipotentes : il en est ainsi de $H^n(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{Q}_\ell)$ et $H^n_c(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{Q}_\ell)$ pour $X_\eta$ de type fini sur $\eta$ ((SGA 7 1) et (SGA $4\frac{1}{2}$ Th. finitude)).

On définit de même la notion de représentation $p$-adique de $G$. Elles forment une catégorie beaucoup plus vaste et mystérieuse que celle des représentations $\ell$-adiques. Si $X$ est propre et lisse sur $S$, les représentations $H^n(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{Q}_p)$ peuvent être très ramifiées. D'autre part, les représentations $p$-adiques ne sont pas en général quasi-unipotentes : dans [54], Mazur, Tate et Teitelbaum construisent des formes modulaires sous $\Gamma_0(p)$, de poids $k \geq 3$, pour lesquelles la représentation $p$-adique associée, $G \to GL_2(\mathbf{Q}_p)$ est irréductible alors que la représentation $\ell$-adique admet un $N$ non trivial. La théorie de Fontaine, qu'on va exposer maintenant, permet néanmoins de dégager des classes importantes de représentations $p$-adiques, et aussi de formuler un analogue, pour l'instant conjectural, du théorème de monodromie locale $\ell$-adique (4.2.4).

### 1.2. Les anneaux de Fontaine

Fontaine construit des anneaux ("B" pour "Barsotti" ou "bivecteurs"$\cdots$)

$$B_{cris}(V) \subset B_{st}(V) \subset B_{DR}(V) \quad , \quad B_{HT}(V),$$

qui sont des $K_0$-algèbres munies de structures additionnelles. Quand il n'y aura pas de risque de confusion, nous omettrons $V$ de la notation.

**1.2.1.** $B_{DR}$ *et* $B_{HT}$

Commençons par le plus gros, $B_{DR}$, qui est aussi le plus aisé à décrire. Soit $A$ la limite projective de N copies de $\bar{V}/p\bar{V}$ suivant le Frobenius $x \mapsto x^p$. C'est une $k$-algèbre parfaite. Soit

$$\theta : W(A) \to \bar{V}^\wedge \tag{1.2.1.1}$$

l'homomorphisme associant à un vecteur de Witt $(a_0, a_1, \cdots)$ la limite, pour $m \to \infty$, de $b_{0m}^{p^m} + pb_{1m}^{p^{m-1}} + \cdots + p^m b_{mm}$, où $a_n \in A$ est écrit comme une suite $(a_{nm}, m \geq 0)$ avec $a_{nm} = a_{n,m+1}^p$ et $b_{nm} \in \bar{V}$ relève $a_{nm}$. L'homomorphisme $\theta$ est surjectif et son noyau est un idéal principal. Il en est de même de l'homomorphisme de $K$-algèbres qui s'en déduit :

$$\theta_K : W(A) \otimes_{W(k)} K \to \bar{K}^\wedge. \tag{1.2.1.2}$$

On pose

$$B_{DR}^+(V) = \varprojlim \, (W(A) \otimes_{W(k)} K)/(\operatorname{Ker} \theta_K)^n \quad , \quad B_{DR}(V) = \operatorname{Frac} B_{DR}^+(V).$$

La $K$-algèbre $B_{DR}$ est un corps de valuation discrète complet, d'anneau d'entiers $B_{DR}^+$, et de corps résiduel $\bar{K}^\wedge$. Le groupe de Galois $G$ opère continûment sur $B_{DR}$. Soit $(z_n \in \mu_{p^n}(\bar{K}), n \geq 0)$ un générateur de $\mathbf{Z}_p(1)$, d'image $\bar{z}$ dans $A$. La série

$$\log([\bar{z}]) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1}([\bar{z}] - 1)^n / n,$$

où $[\,]$ désigne le représentant de Teichmüller, converge dans $B_{DR}^+$ vers un élément $t$, qui est une *uniformisante.* On obtient ainsi un plongement, $G$-équivariant :

$$\mathbf{Z}_p(1) \to B_{DR}^+ \quad , \quad z \mapsto t.$$

Soit Fil la filtration $t$-adique de $B_{DR}$, *i.e.* $\operatorname{Fil}^i B_{DR} = t^i B_{DR}^+$, $(i \in \mathbf{Z})$. On a un isomorphisme $G$-équivariant :

$$\operatorname{gr} B_{\mathrm{DR}} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \bar{K}^\wedge(i),$$

où gr est le gradué associé. On note parfois $B_{\mathrm{HT}}$ cette dernière algèbre.

**1.2.2.** *L'anneau $B_{cris}$*

Soit $I$ l'idéal noyau de l'homomorphisme $\theta$ (1.2.1.1). Notons

$$B^+(V) = D_I(W(A))^\wedge$$

l'enveloppe à puissances divisées, $p$-complétée, de $I$ dans $W(A)$ (*cf.* [4] ou [5]). C'est une $W(k)$-algèbre. Avec les notations précédentes, on a $t \in B^+$ et l'on vérifie que $t^{p-1} \in pB^+$. On pose :

$$B^+_{cris}(V) = B^+(V)[1/p] \subset B_{cris}(V) = B^+(V)[1/t].$$

Ce sont des $K_0$-algèbres sur lesquelles $G$ opère continûment. L'automorphisme de Frobenius $\varphi$ de $W(A)$ se prolonge en un automorphisme $\sigma$-linéaire $\varphi$ de $B_{cris}$ tel que $\varphi t = pt$. Enfin, l'application naturelle $W(A) \to B^+_{DR}$ se prolonge en une injection, $G$-équivariante :

$$B_{cris} \otimes_{K_0} K \to B_{DR}.$$

Elle induit un isomorphisme sur les gradués associés pour la filtration Fil de $B_{DR}$ et la filtration induite, notée aussi Fil.

L'anneau $B_{cris}$ — ou plutôt les anneaux $B^+/p^n$ — ont une interprétation cristalline, qui "explique" leur rôle dans les théorèmes de comparaison : on a des isomorphismes

$$B^+/p^n \xrightarrow{\sim} H^*_{cris}(\mathrm{Spec}\,(\bar{V}/p\bar{V})/\mathrm{Spec}\, W_n),$$

compatibles aux actions naturelles de $G$ et $\varphi$ [25, §3].

Il est clair sur la définition que $B_{cris}$ ne dépend que de $W$, plus précisément que $B_{cris}(W) \xrightarrow{\sim} B_{cris}(V)$. On peut montrer que, de même, $B_{DR}(W) \xrightarrow{\sim} B_{DR}(V)$. En particulier, $B^+_{DR}(V)$ contient $\bar{K}$. On peut montrer que $\bar{K}$ est dense dans $B^+_{DR}(V)$ (pour la topologie "canonique", moins fine que celle définie par la valuation) [P. Colmez, Le corps des périodes $p$-adiques, CRAS 310 (1990), 321-324].

**1.2.3.** *L'anneau $B_{st}$*

Soit $\pi$ une uniformisante de $V$. Soit $x = (x_n\,, n \geq 0)$ une suite d'éléments de $\bar{V}$ tels que $x_n = x_{n+1}^p$ et $x_0 = \pi$ ; soit $\bar{x}$ son image dans $A$. On a $[\bar{x}] \otimes \pi^{-1} \in 1 + \operatorname{Ker} \theta_K$ (1.2.1.2), ce qui permet de définir :

$$u = \log([\bar{x}] \otimes \pi^{-1}) \in B_{DR}^+.$$

On note $B_{st}^+$ (resp. $B_{st}$) le sous-anneau de $B_{DR}$ engendré par $B_{cris}^+$ (resp. $B_{cris}$) et $u$. Il dépend de $\pi$, mais non du choix de $x$. Fontaine montre [27] que $u$ est transcendant sur $B_{cris}$, de sorte que $B_{st}^+$ (resp. $B_{st}$) est une algèbre de polynômes à une indéterminée sur $B_{cris}^+$ (resp. $B_{cris}$) (pour une meilleure définition de $B_{st}$, comme solution d'un problème universel, voir [29] et [27]). $B_{st}$ est stable par $G$ dans $B_{DR}$. On prolonge $\varphi$ à $B_{st}$ en posant $\varphi(u) = pu$. Enfin, on définit un opérateur de monodromie

$$N \ : \ B_{st} \to B_{st},$$

comme l'unique $B_{cris}$-dérivation telle que $Nu = 1$. On a, par construction,

$$N\varphi = p\varphi N$$

(à rapprocher de (1.1.1)). L'application naturelle

$$B_{st} \otimes_{K_0} K \to B_{DR}$$

est injective. On note encore Fil la filtration induite. On a $u \in \mathrm{Fil}^1$.

**1.2.4.** *Propriétés des anneaux B*

a) On a

$$H^0(G, B_{HT}) = H^0(G, B_{DR}) = K \quad , \quad H^0(G, B_{cris}) = H^0(G, B_{st}) = K_0.$$

Cela découle des résultats de Tate [70,§3] sur le calcul de $H^0(G, \bar{K}^\wedge(i))$, *cf.* 3.2.1.

b) On a

$$B_{cris} = \operatorname{Ker} N : B_{st} \to B_{st}$$

$$\mathbf{Q}_p = \left\{ x \in B_{cris} \,|\, \varphi x = x \,,\, x \otimes 1 \in \mathrm{Fil}^0 \right\}.$$

## 1.3. Les divers types de représentations $p$-adiques

La construction de base est la suivante. Notons $\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G)$ la catégorie des représentations $p$-adiques de $G$ (ses objets sont les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action linéaire continue de $G$, les flèches les applications linéaires $G$-équivariantes). Soit $i$ l'un des symboles *cris*, *st*, *DR*, *HT*. Pour $E \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G)$, Fontaine définit :

$$D_i(E) = \left(B_i \otimes_{\mathbf{Q}_p} E\right)^G \tag{1.3.1}$$

("$D$" comme "Dieudonné"). C'est un espace vectoriel sur $K_i = B_i^G$ ($K_i = K_0$ si $i = cris$ ou $st, K_i = K$ sinon), de dimension $\leq \dim E$ : d'après les résultats de Tate cités ci-dessus, l'application naturelle

$$a_i : B_i \otimes_{K_i} D_i(E) \longrightarrow B_i \otimes_{\mathbf{Q}_p} E \tag{1.3.2}$$

est injective ; on a d'ailleurs $\dim_{K_i} D_i(E) = \dim_{\mathbf{Q}_p}(E)$ si et seulement si $a_i$ est bijective. On dit que la représentation est *cristalline, semi-stable, de de Rham, de Hodge-Tate* si l'application $a_i$ correspondante est bijective. Il est clair que :

$$\text{cristalline} \Longrightarrow \text{semi-stable} \Longrightarrow \text{de de Rham} \Longrightarrow \text{de Hodge-Tate}.$$

**1.3.3.** La première classe de représentations à avoir été étudiée est celle des représentations de Hodge-Tate, à la suite du travail de Tate [70], *cf.* les rapports de Serre [63], [66]. Une représentation $E$ est de Hodge-Tate si et seulement si la représentation $\bar{K}^\wedge \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$ ($G$ agissant diagonalement) est somme (nécessairement directe) de représentations de la forme $\bar{K}^\wedge(i)$, $i \in \mathbf{Z}$. Pour $E$ de dimension 1, donnée par un caractère $\rho : G \to \mathbf{Q}_p^*$, il découle des résultats de Tate (*loc. cit.*) que $E$ est de Hodge-Tate si et seulement si la restriction de $\rho$ à un sous-groupe ouvert du groupe d'inertie $I$ coïncide avec une puissance du caractère cyclotomique $\chi : G \to \mathbf{Z}_p^*$ (donnant l'action de $G$ sur $\mathbf{Z}_p(1)$). Pour toute représentation $\rho : G \to GL(E)$ de Hodge-Tate, le sous-groupe (compact) $\rho(I)$, image de l'inertie, est *ouvert* dans son adhérence de Zariski $\rho(I)^{\mathrm{alg}}$ (*cf.* [62], [66]). Le type cristallin correspond à des propriétés plus fortes : pour $E$ de dimension 1, $E$ est cristalline si et seulement si la restriction du caractère correspondant à toute l'inertie est une puissance de $\chi$. Pour $E$ de dimension quelconque, si $E$ est cristalline, alors $\rho(I)^{\mathrm{alg}}$ est *connexe*, d'après un résultat de Fontaine [22] (ceci est encore vrai, d'ailleurs, si $E$ est semi-stable [28]).

**1.3.4.** Soit $X$ un schéma propre et plat sur $S = \operatorname{Spec} V$, de fibre générique $X_\eta$ lisse. Les résultats essentiels de la théorie (conjecturés par Fontaine, prouvés dans le cas général par Faltings, voir §2 pour des énoncés précis) sont que :

i) $H^*(X_{\bar\eta}, \mathbf{Q}_p)$, comme représentation de $G$, est de de Rham, et $D_{DR}(H^*(X_{\bar\eta}, \mathbf{Q}_p))$ est la cohomologie de de Rham de $X_{\bar\eta}$ sur $\eta$ ;

ii) si $X$ est lisse sur $S$, $H^*(X_{\bar\eta}, \mathbf{Q}_p)$ est cristalline et $D_{cris}(H^*(X_{\bar\eta}, \mathbf{Q}_p))$ est la cohomologie cristalline de $X_s$ sur $W(k)$, tensorisée avec $K_0$.

Il y a aussi une conjecture pour le cas semi-stable, voir §4.

**1.3.5.** Pour $i$ = *cris*, *st* ou *DR*, les $D_i(E)$ héritent de structures additionnelles importantes, qui méritent une étude indépendante. Observées d'abord sur la cohomologie de de Rham ou la cohomologie cristalline, elles sont d'ailleurs à l'origine de la définition des anneaux $B$.

Pour $E \in \operatorname{Rep}_{Q_p}(G)$, $D_{DR}(E)$ (resp. $D_{HT}(E)$) est, de façon naturelle, un $K$-espace vectoriel filtré (resp. gradué) (et $\operatorname{gr} D_{DR}(E) \subset D_{HT}(E)$). Cette structure est trop faible pour qu'on puisse espérer, lorsque $E$ est de de Rham (resp. de Hodge-Tate), récupérer $E$ à partir d'elle à l'aide de l'isomorphisme (1.3.2). Il en va différemment avec les représentations cristallines ou semi-stables.

Fontaine définit un *$(\varphi, N)$-module filtré sur $K$* comme un $K_0$-espace vectoriel $M$, muni d'une application $\sigma$-linéaire injective $\varphi : M \to M$, d'une application $K_0$-linéaire $N : M \to M$ telle que $N\varphi = p\varphi N$, et d'une filtration décroissante $\operatorname{Fil}^{\cdot} M_K$ sur $M_K := K \otimes_{K_0} M$, formée de sous-$K$-espaces vectoriels, telle que $\cup \operatorname{Fil}^i M_K = M_K$ et $\cap \operatorname{Fil}^i M_K = 0$. Les $(\varphi, N)$-modules filtrés sur $K$ forment, de manière évidente, une catégorie additive $\mathrm{MF}_K(\varphi, N)$. Quand $N = 0$, on dit simplement *$\varphi$-module filtré*, et l'on note $\mathrm{MF}_K$ la sous-catégorie pleine correspondante. Pour $E \in \operatorname{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G)$,

$D_{st}(E)$ (resp. $D_{cris}(E)$) est, de façon naturelle, objet de $\mathrm{MF}_K(\varphi, N)$ (resp. $\mathrm{MF}_K$): $\varphi$ et $N$ proviennent de $\varphi$ et $N$ sur $B_{st}$, et la filtration de la filtration $\mathrm{Fil}^{\cdot}$ sur $B_{DR}$ via l'inclusion $K \otimes_{K_0} D_{st}(E) \subset D_{DR}(E)$ (resp. $K \otimes_{K_0} D_{cris}(E) \subset D_{DR}(E)$). L'énoncé suivant découle facilement des propriétés des anneaux $B$ (1.2.4) :

**PROPOSITION 1.3.6.**— *Notons* $\mathrm{Rep}_{st}(G)$ *(resp.* $\mathrm{Rep}_{cris}(G)$*) la sous-catégorie pleine de* $\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G)$ *formée des représentations semi-stables (resp. cristallines). Alors le foncteur $D_{st}$ (resp. $D_{cris}$) induit un foncteur pleinement fidèle :*

$$D_{st} : \mathrm{Rep}_{st}(G) \longrightarrow \mathrm{MF}_K(\varphi, N) \qquad (\text{resp.} \quad D_{cris} : \mathrm{Rep}_{cris}(G) \longrightarrow \mathrm{MF}_K).$$

**1.3.7.** Nous dirons qu'un $(\varphi, N)$-module filtré $M$ sur $K$ et une représentation semi-stable $E$ sont *associés* si l'on a $M \simeq D_{st}(E)$. Il revient au même de dire qu'on a un isomorphisme

$$\alpha : B_{st} \otimes_{K_0} M \xrightarrow{\sim} B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$$

compatible aux diverses structures des deux membres (sur le membre de gauche, $\varphi$ opère par $\varphi \otimes \varphi$, $N$ par $N \otimes 1 + 1 \otimes N$, $g \in G$ par $g \otimes 1$, et $\mathrm{Fil}^{\cdot}$, après extension des scalaires à $K$, est donné par la filtration produit tensoriel ; sur le membre de droite, $\varphi$ opère par $\varphi \otimes 1$, $N$ par $N \otimes 1$, $g \in G$ par $g \otimes g$, et $\mathrm{Fil}^{\cdot}$ provient de la filtration de $K \otimes_{K_0} B_{st}$). Grâce à $\alpha$, $M$ et $E$ se déterminent mutuellement :

$$M \simeq D_{st}(E) \left(= \left(B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} E\right)^G\right),$$
$$E \simeq \left\{x \in B_{st} \otimes_{K_0} M \,\middle|\, Nx = 0, \varphi x = x, 1 \otimes x \in \mathrm{Fil}^0\right\}.$$

De même, un $\varphi$-module filtré $M$ sur $K$ et une représentation cristalline $E$ sont dits associés si l'on a $M \simeq D_{cris}(E)$, ce qui revient encore à dire qu'on a un isomorphisme

$$\alpha : B_{cris} \otimes_{K_0} M \xrightarrow{\sim} B_{cris} \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$$

compatible aux diverses structures, et grâce auquel $M$ et $E$ se déterminent mutuellement :

$$M \simeq D_{cris}(E) \left(= \left(B_{cris} \otimes_{\mathbf{Q}_p} E\right)^G\right),$$
$$E \simeq \left\{x \in B_{cris} \otimes_{K_0} M \,\middle|\, \varphi x = x\,,\, 1 \otimes x \in \mathrm{Fil}^0\right\}.$$

Nous renvoyons à [28] et [29] pour une description conjecturale de l'image essentielle de $D_{st}$ (resp. $D_{cris}$) (1.3.6) ("$(\varphi, N)$-modules filtrés faiblement admissibles").

## 2. LES CONJECTURES $C_{cris}$, $C_{DR}$, $C_{HT}$

Ces "conjectures" sont en fait, désormais, des théorèmes de Faltings [19], [20].

### 2.1. Les conjectures $C_{DR}$ et $C_{HT}$

**2.1.1.** Soit $X$ un schéma propre et lisse sur $K$. La cohomologie de de Rham de $X$, $H^*_{DR}(X/K) := H^*(X, \Omega^{\cdot}_{X/K})$, est l'aboutissement de la suite spectrale de Hodge,

$$E_1^{ij} = H^j(X, \Omega^i_{X/K}) \Longrightarrow H^*_{DR}(X/K),$$

qui, par la théorie de Hodge, dégénère en $E_1$ (voir [17] pour une démonstration algébrique élémentaire). Elle est munie de la filtration aboutissement, dite *filtration de Hodge*, $\mathrm{Fil}^{\cdot} H^*_{DR}(X/K)$, de gradué associé $\mathrm{gr}^i H^m_{DR}(X/K) = H^{m-i}(X, \Omega^i)$. Elle se relie à la cohomologie étale $p$-adique de $X_{\bar\eta}$ $(= X_{\bar K})$, $H^*(X_{\bar\eta}, \mathbf{Q}_p)$, munie de l'action naturelle de $G$, par le résultat suivant de Faltings, conjecturé par Fontaine [23] :

**THÉORÈME 2.1.2** [20] (*conjecture $C_{DR}$*).— *La représentation $H^*(X_{\bar\eta}, \mathbf{Q}_p)$ est de de Rham, et il existe un isomorphisme fonctoriel (de $K$-modules filtrés)*
$H^*_{DR}(X/K) \xrightarrow{\sim} D_{DR}(H^*(X_{\bar\eta}, \mathbf{Q}_p))$ (1.3.2). *En d'autres termes, il existe un isomorphisme fonctoriel*

$$\alpha_{DR} : B_{DR} \otimes_K H^*_{DR}(X/K) \xrightarrow{\sim} B_{DR} \otimes_{\mathbf{Q}_p} H^*(X_{\bar\eta}, \mathbf{Q}_p),$$

*compatible aux actions de $G$ et aux filtrations naturelles des deux membres.*

L'isomorphisme $\alpha_{DR}$ défini par Faltings est, en outre, compatible à la dualité de Poincaré et à la formation des classes de cycles et classes de Chern. Prenant le gradué associé, on en déduit :

**COROLLAIRE 2.1.3.** (*conjecture $C_{HT}$* ou *de Hodge-Tate*).— *Posons $H^*_{Hdg}(X/K) = \mathrm{gr}\, H^*_{DR}(X/K)$ $(= \oplus H^{*-i}(X, \Omega^i))$. La représentation $H^*(X_{\bar\eta}, \mathbf{Q}_p)$ est de Hodge-Tate, et il existe un isomorphisme fonctoriel (de $K$-modules gradués) $H^*_{Hdg}(X/K) \xrightarrow{\sim} D_{HT}(H^*(X_{\bar\eta}, \mathbf{Q}_p))$ . En d'autres termes, il existe un isomorphisme fonctoriel*

(2.1.3.1) $$\alpha_{HT} : B_{HT} \otimes_K H^*_{Hdg}(X/K) \xrightarrow{\sim} B_{HT} \otimes_{\mathbf{Q}_p} H^*(X_{\bar\eta}, \mathbf{Q}_p),$$

*compatible aux actions de $G$ et aux graduations naturelles des deux membres.*

Cet isomorphisme équivaut encore à la donnée, pour tout $m$, d'un isomorphisme $G$-équivariant

(2.1.3.2) $$\alpha_{HT} : \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} H^{m-i}(X, \Omega^i) \otimes_K \bar K^\wedge(-i) \xrightarrow{\sim} H^m(X_{\bar\eta}, \mathbf{Q}_p) \otimes \bar K^\wedge$$

("*décomposition de Hodge-Tate*").

L'existence de telles décompositions avait été conjecturée par Tate dans son séminaire au Collège de France [64], et, comme on l'a rappelé dans l'introduction, démontrée par lui, dans le cas des variétés abéliennes ayant bonne réduction [70]. Sa démonstration fut étendue peu après par Raynaud au cas de mauvaise réduction à l'aide du théorème de réduction semi-stable [SGA 7 IX] (voir [9] pour une présentation des arguments de Raynaud). Pendant plus de dix ans, il n'y eut aucun progrès sur ces questions. Puis, dans [24], Fontaine donna une nouvelle démonstration des résultats de Tate et Raynaud, et à peu près au même moment, Bloch et Kato [7] prouvèrent l'existence d'une décomposition de Hodge-Tate en tout degré $m$, mais dans le cas où $X$ a bonne réduction *ordinaire*, ce qui signifie que $X$ est la fibre générique d'un schéma propre et lisse $\mathcal{X}$ sur $S$ dont la fibre spéciale $Y$ vérifie $H^*(Y, d\Omega^i_Y) = 0$ pour tout $i$ : leur méthode, consistant à analyser la "suite spectrale des cycles évanescents"

(2.1.3.3) $$E_2^{ij} = H^i(\mathcal{X}_{\bar s}, R^j\Psi(\mathbf{Z}/p^n)) \Longrightarrow H^*(X_{\bar\eta}, \mathbf{Z}/p^n),$$

fournit de plus, dans ce cas, une filtration décroissante, $G$-équivariante, sur $H^m(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{Q}_p)$, de gradué $\mathrm{gr}^{m-i}H^m = H^{m-i,i}(-i)$, où $H^{m-i,i}$ est une représentation non ramifiée. La conjecture de Hodge-Tate fut ensuite démontrée dans le cas général par Faltings [19], alors qu'indépendamment, et presque simultanément, Fontaine et Messing en obtenaient une démonstration dans le cas de bonne réduction (avec certaines restrictions supplémentaires) comme conséquence de la conjecture $C_{cris}$, voir ci-dessous. La méthode de Faltings (voir n° 3) s'inspire des calculs de Tate [70]. Elle lui a permis, récemment, de prouver aussi la conjecture plus forte $C_{DR}$ [20].

## 2.2. La conjecture $C_{cris}$

**2.2.1.** Soit $X$ un schéma propre et lisse sur $K$, ayant *bonne réduction, i.e.* tel qu'il existe $\mathcal{X}$ propre et lisse sur $S$, de fibre générique $X$. La cohomologie de de Rham de $X$ sur $K$ possède alors une $K_0$-structure naturelle : d'après un théorème de Berthelot-Ogus [6], il existe en effet un isomorphisme canonique

$$H^*(Y/W) \otimes_W K \xrightarrow{\sim} H^*_{DR}(X/K), \tag{2.2.1.1}$$

où $Y = \mathcal{X}_s$ est la fibre spéciale de $\mathcal{X}$ et $H^*(Y/W)$ désigne la cohomologie cristalline de $Y$ par rapport à $W$ ([4] ; pour une introduction à la cohomologie cristalline, voir [41] ou [42]). De plus, l'endomorphisme de Frobenius absolu de $Y$ induit un endomorphisme $\sigma$-linéaire bijectif $\varphi$ de $H^*_{cris}(X) := H^*(Y/W) \otimes_W K_0$. Le $K$-espace vectoriel $H^m_{DR}(X/K)$, muni d'une part de la filtration de Hodge $\mathrm{Fil}^\cdot$ (2.1.1), d'autre part de la $K_0$-structure $H^m_{cris}(X)$ et de $\varphi$, est donc un $\varphi$-module filtré (1.3.5). Le résultat suivant montre que cette dernière structure ne dépend en fait que de $X$ (et non du modèle $\mathcal{X}$), ce qui avait été d'ailleurs vérifié antérieurement par Gillet et Messing [34] :

**THÉORÈME 2.2.2** [20] (*conjecture* $C_{cris}$).— *Sous les hypothèses de* 2.2.1, *la représentation* $H^*(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{Q}_p)$ *est cristalline, et canoniquement associée* (1.3.7) *au $\varphi$-module filtré* $H^*_{DR}(X/K)$ *défini ci-dessus : il existe un isomorphisme fonctoriel*

$$\alpha_{cris} : B_{cris} \otimes_{K_0} H^*_{cris}(X) \xrightarrow{\sim} B_{cris} \otimes_{\mathbf{Q}_p} H^*(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{Q}_p)$$

*compatible aux structures naturelles des deux membres (action de $G$, $\varphi$, et filtrations après extension des scalaires à $K$).*

Comme l'isomorphisme $\alpha_{DR}$ plus haut , l'isomorphisme $\alpha_{cris}$ construit par Faltings est compatible à la dualité de Poincaré et à la formation des classes de Chern et classes de cycles.

La conjecture $C_{cris}$, formulée, comme $C_{DR}$, par Fontaine dans [23], a d'abord été démontrée par Fontaine et Messing [31] dans le cas où dim $X < p$ et $K = K_0$. La démonstration donnée par Faltings est, là encore, une adaptation de la méthode qu'il avait suivie pour $C_{HT}$ [19] (voir n$^o$ 3). La méthode de Fontaine-Messing est toute différente ; nous en dirons quelques mots au n$^o$ 4.

Le théorème 2.2.2 a de nombreuses applications, détaillées dans [31]. Parmi les plus frappantes, citons :

a) la preuve de la *conjecture de l'inertie modérée* de Serre [65, 1.13, p. 278], donnant l'action de l'inertie modérée $\prod_{\ell \neq p} \mathbf{Z}_\ell(1)(\bar{k})$ sur la représentation semi-simplifiée de $H/pH$, où $H$ est un réseau de $H^*(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{Q}_p)$ stable sous $G$ ;

b) une généralisation du théorème de non existence de schémas abéliens sur Spec $\mathbf{Z}$ non triviaux ([1], [26]) : *si $X$ est un schéma propre et lisse sur $\mathbf{Q}$ ayant partout bonne réduction, alors $H^j(X, \Omega^i) = 0$ pour $i \neq j$ et $i + j \leq 3$* (en particulier, si dim $X \leq 3$, toute la cohomologie de $X$ est algébrique) [J.-M. Fontaine, Lettre à W. Messing du 15.1.86, à paraître dans Indo-French conf. on geometry, Bombay (1989)], [V.-A. Abrashkin, Modificatsia functora Fontaine-Laffaille, Izv. Akad. Nauk., seria mat. 53 (1989), 451-497]) ; la démonstration combine en fait un raffinement de 2.2.2 relatif à l'action de $G$ sur $H/p^nH$ ($H$ comme en a)) et des minorations de discriminants à la Odlyzko-Poitou-Serre.

## 2.3. Cycles de Hodge absolus

**2.3.1.** Supposons que $K$ soit le complété d'un corps de nombres $\mathcal{K}$ en une place $\mathfrak{p}$. Soit $\bar{\mathcal{K}}$ une clôture algébrique de $\mathcal{K}$, choisissons des plongements $\bar{\mathcal{K}} \to \bar{K}$ (ce qui identifie $G = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ à un groupe de décomposition de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$) et $t : \bar{\mathcal{K}} \to \mathbf{C}$. Si $\mathcal{X}$ est un schéma propre et lisse sur $\mathcal{K}$, notons

$X$ et $X_t$ les schémas sur $K$ et $\mathbf{C}$ respectivement obtenus par extension des scalaires via l'inclusion naturelle et $t$. La cohomologie de de Rham $H^m_{DR}(\mathcal{X}/\mathcal{K})$ et la "cohomologie de Betti" $H^m_B(X_t) := H^m(X_t(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$ sont alors reliées par deux types d'*isomorphismes de périodes.*

a) *Périodes classiques.* La théorie de l'intégration classique fournit un isomorphisme canonique :

$$\alpha_{B,t} : H^m_{DR}(\mathcal{X}/\mathcal{K}) \otimes_{\mathcal{K},t} \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} H^m_B(X_t) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}.$$

(Quand il n'en pourra résulter de confusion, nous écrirons $\alpha_B$ au lieu de $\alpha_{B,t}$.)

b) *Périodes p-adiques.* On a $H^m_{DR}(X/K) \simeq H^m_{DR}(\mathcal{X}/\mathcal{K}) \otimes_{\mathcal{K}} K$. D'autre part, en vertu du théorème de changement de base propre (SGA 4 XII) et du théorème de comparaison entre cohomologie étale et cohomologie classique (SGA 4 XI), on a des isomorphismes canoniques (déduits de $\bar{\mathcal{K}} \to \bar{K}$ et $t$)

$$H^m(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p) \xrightarrow{\sim} H^m(X_t, \mathbf{Q}_p) \xrightarrow{\sim} H^m_B(X_t) \otimes \mathbf{Q}_p.$$

Grâce à ces isomorphismes, l'isomorphisme $\alpha_{DR}$ de 2.1.2 se récrit

$$\alpha_{DR} : H^m_{DR}(\mathcal{X}/\mathcal{K}) \otimes_{\mathcal{K}} B_{DR} \xrightarrow{\sim} H^m_B(X_t) \otimes_{\mathbf{Q}} B_{DR}.$$

Plus généralement, soient $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_1, \cdots, \mathcal{X}_N)$ une famille finie de schémas propres et lisses sur $\mathcal{K}$, et $T = T_{DR}(\mathcal{X}/\mathcal{K})$ (resp. $T_B(X_t)$) une "construction tensorielle", donnée par $H^{a_1}_{DR}(\mathcal{X}_1/\mathcal{K}) \otimes \cdots \otimes H^{a_N}_{DR}(\mathcal{X}_N/\mathcal{K}) \otimes H^{b_1}_{DR}(\mathcal{X}_1/\mathcal{K})^\vee \otimes \cdots \otimes H^{b_N}_{DR}(\mathcal{X}_N/\mathcal{K})^\vee$ (resp. l'analogue avec $H^{\cdot}_B(-_t)$). Alors on a un isomorphisme de périodes classiques:

$$T_{DR}(\mathcal{X}/\mathcal{K}) \otimes_{\mathcal{K}} \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} T_B(X_t) \otimes \mathbf{C}$$

et un isomorphisme de périodes $p$-adiques

$$T_{DR}(\mathcal{X}/\mathcal{K}) \otimes_{\mathcal{K}} B_{DR} \xrightarrow{\sim} T_B(X_t) \otimes B_{DR}.$$

**2.3.2.** Avec les notations précédentes, soit $x \in T_{DR}(\mathcal{X}/\mathcal{K})$ un *cycle de Hodge pour t* : cela signifie, par définition (*cf.* [15], [56]) que $x \in \mathrm{Fil}^0 T_{DR}$

et que $\alpha_B(x) \in T_B(x_t)$. Si les $\mathcal{X}_i$ sont des variétés abéliennes ou des espaces projectifs, on sait, par un théorème de Deligne [15], que, pour tout autre choix $t'$, on a encore $\alpha_{B,t'}(x) \in T_B(x_{t'})$. Sous les mêmes hypothèses, on a de plus

$$\alpha_B(x) = \alpha_{DR}(x). \tag{2.3.2.1}$$

Ce résultat a été prouvé indépendamment par Blasius (sa démonstration — simplifiée — est expliquée par Ogus dans [58]) et par Wintenberger [72].

Soit $W_\mathfrak{p}$ le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K_0)$ formé des éléments ayant pour image dans $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ une puissance entière du Frobenius du corps (fini) $k$. Il découle du théorème de Berthelot-Ogus (2.2.1.1) que, lorsque tous les $\mathcal{X}_i$ ont bonne réduction, $W_\mathfrak{p}$ opère de façon naturelle sur $T_{DR}(X/K) \otimes \bar{K}$ [6]. Il résulte de (2.3.2.1) (et de la compatibilité (*cf.* 4.3.5) entre $\alpha_{cris}$ et $\alpha_{DR}$) qu'alors $W_\mathfrak{p}$ *fixe* les images des cycles de Hodge. Comme application, Ogus [58] obtient un analogue $p$-adique de la formule de Chowla-Selberg [35], décrivant l'action de $W_\mathfrak{p}$ sur $H^1_{DR}(X_{\bar{K}}/\bar{K})$ pour $\mathcal{X}$ une courbe elliptique à multiplication complexe définie sur $\mathcal{K}$ et ayant bonne réduction en $\mathfrak{p}$, en termes de valeurs de fonctions $\Gamma$ $p$-adiques. La démonstration d'Ogus, par réduction à une formule analogue pour les courbes de Fermat, s'inspire de celle de Gross [35] pour la formule classique ; elle utilise des calculs de Coleman [R.F. Coleman, On the Frobenius matrices of Fermat curves, preprint (1990)].

Signalons également, comme application de (2.3.2.1), la description que donne Wintenberger [71] du foncteur module de Dieudonné filtré pour les motifs de type $CM$ sur $\bar{\mathbf{Q}}$, généralisant un théorème (non publié) de Kottwitz (*cf.* aussi [A. Reimann and T. Zink, Der Dieudonnémodul einer polarisierten abelschen Mannigfaltigkeit von $CM$-typ, Ann. of Math 128 (1988), 461-482]).

## 2.4. Nombres de Tamagawa de motifs

Faute de place, nous ne donnerons que quelques références : le sujet mériterait, à lui seul, un exposé Bourbaki ! La théorie classique des nombres de Tamagawa relie groupes algébriques et valeurs de fonctions $L$, voir [11] pour un exposé d'ensemble. Dans [8], Bloch et Kato développent, à l'aide des techniques de Fontaine et Messing [31], une théorie analogue, encore largement conjecturale, pour les motifs sur $\mathbf{Q}$ (disons, au sens de Grothendieck, voir [67] pour une introduction récente et une liste de références) ; typiquement, il s'agit des diverses réalisations — de Rham, Betti, $\ell$-adiques, cristallines, etc. — de "$H^m(X, \mathbf{Z}(r))$" pour $X$ propre et lisse sur $\mathbf{Q}$. Pour un tel motif $M$, ils construisent notamment des groupes locaux $A(\mathbf{Q}_p)$ jouant le rôle des groupes de points dans le cas des groupes algébriques, et proposent une "conjecture de Tamagawa", qui précise les conjectures de Deligne [14] et Beilinson [3] sur $L(M, 0)$ (voir aussi [61]). Ils la vérifient (partiellement) dans certains cas particuliers (fonction zêta de Riemann, courbes elliptiques à multiplication complexe); un ingrédient clé est une ré-interprétation de l'homomorphisme de Coates-Wiles à l'aide de l'anneau $B_{cris}$. De nouveaux développements, dans le cadre des "motifs mixtes", ont été donnés dernièrement par Fontaine et Perrin-Riou [33].

## 3. LA MÉTHODE DE FALTINGS ([19], [20])

### 3.1. Plan

Nous nous bornerons à esquisser les principales étapes de la démonstration de la conjecture de Hodge-Tate pour $X_\eta$, avec $X$ propre et lisse sur $S$ et $X_{\bar{\eta}}$ intègre. Nous ne dirons que quelques mots, en 3.6, du cas de mauvaise réduction et des variantes $C_{cris}$ et $C_{DR}$.

La méthode consiste en la construction : i) d'une théorie de cohomologie $X \mapsto H^*(\widetilde{X}, \mathcal{O}^\wedge)$, à valeurs dans les $\bar{V}^\wedge$-modules munis d'une action semi-linéaire continue de $G$ ; ii) de transformations naturelles compatibles à l'action de $G$

$$H^*(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{Z}_p) \otimes \bar{V}^\wedge \xrightarrow{(1)} H^*(\widetilde{X}, \mathcal{O}^\wedge) \xleftarrow{(2)} \oplus H^{*-i}(X, \Omega^i) \otimes_V (\rho^i \bar{V}^\wedge)(-i),$$

où $\rho$ est un certain élément de $\bar{V}$, voir 3.3.2. Si $U = \operatorname{Spec} R$ est un ouvert affine de $X$ tel que $U_{\bar{\eta}}$ soit intègre, notons $\bar{R}$ le normalisé de $R$ dans un revêtement universel de $U_{\bar{\eta}}$ ; le groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{R}/R)$ opère sur $\bar{R}$, et *a fortiori* son sous-groupe géométrique $\Delta = \mathrm{Gal}(\bar{R}/R_{\bar{\eta}})$ $(\Gamma/\Delta = G)$.

Considérons la cohomologie galoisienne "continue"

$$H^*(\Delta, \bar{R}^\wedge) := \varprojlim H^*(\Delta, \bar{R}/p^n\bar{R}),$$

qui est formée de $\bar{V}^\wedge$-modules avec opération semi-linéaire de $G$. Utilisant des techniques inspirées de Tate [70], Faltings montre (voir 3.3) que, pour $U$ assez petit, on peut "à $\mathfrak{m}$-torsion près" remplacer, pour le calcul de cette cohomologie, $\bar{R}$ par l'extension de $R \otimes_V \bar{V}$ obtenue en adjoignant toutes les racines $p^n$-ièmes de certaines unités de $R$, et $\Delta$ par le groupe de Galois géométrique correspondant, qui est un $\mathbf{Z}_p(1)^d$ : on trouve un isomorphisme ($G$-équivariant) :

$$H^i(\Delta, \bar{R}^\wedge) \otimes \mathbf{Q}_p \xrightarrow{\sim} \Omega^i_{R/V} \otimes_V \bar{K}^\wedge(-i). \tag{3.1.1}$$

Grâce à une variante (voir 3.4.4.2) du théorème des bons voisinages d'Artin (SGA 4 XI), Faltings montre en outre qu'il existe suffisamment de tels $U$ pour lesquels la cohomologie galoisienne $H^*(\Delta, \bar{R}/p^n)$ s'identifie à la cohomologie étale $H^*(U_{\bar{\eta}}, \bar{R}/p^n)$. Un procédé de globalisation standard (voir 3.4, 3.5) fournit alors la définition de $H^*(\widetilde{X}, \mathcal{O}^\wedge)$ et de la transformation (1). Une suite exacte de différentielles globale (voir 3.4.3) permet de définir (2), et l'on déduit de (3.1.1) que $(2) \otimes \mathbf{Q}_p$ est un isomorphisme. Il ne reste plus qu'à montrer que $(1) \otimes \mathbf{Q}_p$ est un isomorphisme, ce qui se fait par un argument global (voir 3.5.2), utilisant la compatibilité de $(2)^{-1} \circ (1)$ à la dualité de Poincaré.

### 3.2. Revêtements presque étales et extensions absorbant la ramification

**3.2.1.** Le point de départ est le résultat suivant de Tate [70, 3.2]. Soient $K_\infty = K(\mu_{p^\infty}) \subset \bar{K}$ la sous-extension $p$-cyclotomique maximale, $V_\infty$ le normalisé de $V$ dans $K_\infty$, $\mathfrak{m}_\infty$ l'idéal maximal de $V_\infty$. Tate montre que $V_\infty$ absorbe déjà pratiquement toute la ramification de $\bar{V}$ sur $V$. Plus précisément, soit $L$ une extension galoisienne finie de $K_\infty$ contenue dans $\bar{K}$, de groupe $H$, $B$ le normalisé de $V_\infty$ dans $L$. Tate prouve que :

a) $\mathfrak{m}_\infty . \Omega^1_{B/V_\infty} = 0$ ;

b) $\mathfrak{m}_\infty . H^i(H, B^\wedge) = 0$ pour tout $i > 0$, où $H^i(H, B^\wedge)$

$:= \varprojlim H^i(H, B/p^n B)$.

Rappelons brièvement son argument. On peut supposer $V = W(k)$. On connaît alors explicitement (c'est élémentaire) la ramification (*i.e.* groupes de ramification et différente) de $K_n = K(\mu_{p^n})$ sur $K$ (*cf.* par exemple [CL, IV §4]). L'extension $L$ de $K_\infty$ est réunion d'extensions $L_n$ de $K_n$, galoisiennes de groupe $H$ pour $n$ assez grand. À l'aide du théorème de Herbrand, une étude des groupes de ramification de $L_n$ sur $K$ montre que, pour $n \to \infty$, la valuation de la différente $\mathcal{D}_{L_n/K_n}$ de $L_n/K_n$ est majorée par $cp^{-n}$, où $c$ est une constante. L'assertion a) en résulte. Comme $v_{K_n}\left(Tr_{L_n/K_n}(B_n)\right) = \left[v_{L_n}\left(\mathcal{D}_{L_n/K_n}\right)/e\right]$, où $B_n$ est le normalisé de $K_n$ dans $L_n$ et $e$ l'indice de ramification de $L_n/K_n$ (constant pour $n \gg 0$), on en déduit aussi que $Tr_{B/V_\infty}(B) \supset \mathfrak{m}_\infty$. Pour $a \in \mathfrak{m}_\infty$, soit $b \in B$ tel que $Tr(b) = a$. Si $M$ est un $B$-module sur lequel $H$ opère semi-linéairement, on a une application $u_b : M \to M^H$, $m \mapsto Tr_H(bm)$, où $Tr_H = \sum_{s \in H} s$. L'application $u_b$ est fonctorielle en $M$, et induit sur $M^H$ la multiplication par $a$. Il en résulte que $a$ annule $H^i(H, M)$ pour tout $i > 0$, d'où b).

**3.2.2.** Faltings généralise ceci à des algèbres lisses (ou formellement lisses) sur $V$ "assez petites", mais de dimension relative quelconque. Il introduit à cet effet la notion suivante, qui joue un rôle essentiel dans toute la théorie.

Rappelons qu'une algèbre $B$ de type fini sur un anneau $A$ est nette (= non ramifiée) sur $A$ si $\Omega^1_{B/A} = 0$, ce qui s'exprime aussi par le fait que l'immersion diagonale $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} B \otimes_A B$ est ouverte, ou encore que $B$ est facteur direct de $B \otimes_A B$ comme $B \otimes_A B$-module via $m : B \otimes_A B \to B$, $m(x \otimes y) = xy$, *i.e.* qu'il existe un idempotent $e_{B/A} \in B \otimes_A B$ définissant une section $(B \otimes_A B)$-linéaire de $m$, *cf.* par exemple [59, III §4].

Plaçons-nous maintenant dans la catégorie $\mathcal{C}$ des $V_\infty$-algèbres sans $p$-torsion (on pourrait remplacer $V_\infty$ par $\bar{V}$, voire par un anneau de base normal dans lequel $p = ux^n$, $u$ une unité, pour une infinité de $n$). Faltings dit qu'un homomorphisme $A \to B$ de $\mathcal{C}$ est un *revêtement presque étale* ("almost étale covering") si :

i) $B[1/p]$ est un revêtement fini étale de $A[1/p]$ (*i.e.* net et projectif de type fini comme $A[1/p]$-module)

ii) $Tr(B) \subset A$, où $Tr : B[1/p] \to A[1/p]$ est l'homomorphisme trace

iii) $\mathfrak{m}_\infty . e_{B/A} \subset Im\, B \otimes_A B \to (B \otimes_A B)[1/p]$, où $e_{B/A} \subset (B \otimes_A B)[1/p]$ est l'idempotent diagonal défini par i).

Par exemple, l'extension $B$ de $V_\infty$ de 3.2.1 est un revêtement presque étale.

On vérifie facilement que, si $B$ est un revêtement presque étale de $A$, $\mathfrak{m}_\infty$ annule $Tor_q^A(B, M)$ et $Ext_A^q(B, M)$ pour tout $A$-module $M$ et tout $q > 0$. D'autre part, du point de vue des relèvements infinitésimaux, les revêtements presque étales se comportent, à peu de choses près, comme les morphismes étales :

**3.2.2.1.** Si $B$ est un revêtement presque étale de $A$ et $B = A + \mathfrak{m}_\infty B$, tout morphisme de $A$-algèbres $B \to C/I$, où $C$ est une $A$-algèbre et $I$ un idéal nilpotent, se relève de manière unique en $B \to C$ (en d'autres termes, $B$ est une $A$-algèbre formellement étale ($EGA\ O_{IV}$ 19.10.2)).

**3.2.2.2.** Si $I \subset A$ est nilpotent, pour tout revêtement presque étale $B_0$ de $A_0 = A/I$ tel que $B_0 = A_0 + \mathfrak{m}_\infty B_0$, il existe un revêtement presque étale $B$ de $A$ tel que $B_0 = (B \otimes_A A_0)/(p - \text{torsion})$.

En outre, on a des propriétés analogues à 3.2.1 a) et b). Convenons de dire qu'un morphisme de $V_\infty$-modules est un *$\mathfrak{m}_\infty$-isomorphisme* (ou un *isomorphisme modulo $\mathfrak{m}_\infty$-torsion*) si son noyau et son conoyau sont annulés par $\mathfrak{m}_\infty$ (rappelons que $\mathfrak{m}_\infty^2 = \mathfrak{m}_\infty$). Soit $B$ un revêtement presque étale de $A$. Alors :

**3.2.2.3.** L'application $\Omega_A^1 \otimes_A B \to \Omega_B^1$ est un $\mathfrak{m}_\infty$-isomorphisme.

**3.2.2.4.** Si un groupe fini $H$ opère sur $B$ de manière que $B[1/p]$ soit un revêtement galoisien de $A[1/p]$ de groupe $H$, pour tout $B$-module $M$ sur lequel $H$ opère semi-linéairement, on a $\mathfrak{m}_\infty . H^i(H, M) = 0$ pour tout $i > 0$.

La démonstration de 3.2.2.4 est analogue à celle de 3.2.1 b). Celle de 3.2.2.1 à 3.2.2.3 repose sur l'annulation par $\mathfrak{m}_\infty$ de la cohomologie de Hochschild $H^*(B/A, L)$ en degré $> 0$ ($L$ un $(B \otimes_A B)$-module), conséquence de iii).

Le résultat principal de la théorie est le suivant :

**THÉORÈME 3.2.3.**— *Soit* $U = \operatorname{Spec}(R)$ *étale sur* $\operatorname{Spec} V\left[T_1^{\pm 1}, \cdots, T_d^{\pm 1}\right]$, *via* $T_i \mapsto u_i \in R^*$.

*Soient*

$$R_n = (R \otimes_V V_n)\left[u_1^{p^{-n}}, \cdots, u_d^{p^{-n}}\right], \ R_\infty = \varinjlim R_n, \ U_\infty = \operatorname{Spec} R_\infty,$$

*où* $V_n$ *est l'anneau des entiers de* $K_n = K(\mu_{p^n})$. *Alors, si* $U' \to U$ *est fini, avec* $U'$ *normal,* $U'_\eta$ *étale sur* $U_\eta$*, le normalisé de* $U_\infty \times_U U'$ *est un revêtement presque étale de* $U_\infty$.

**COROLLAIRE 3.2.4.**— *Supposons* $U_{\bar\eta}$ *intègre. Soit* $\bar U_{\bar\eta}$ *un revêtement universel de* $U_{\bar\eta}$ (*) *et soit* $\bar U$ *le normalisé de* $U_\infty$ *dans* $\bar U_{\bar\eta}$. *Alors* $\bar U \to (U_\infty)_{\bar S}$ *est limite projective de revêtements presque étales :*

$$\begin{tikzcd}
 & & \bar U \arrow[d] & \bar U_{\bar\eta} \arrow[l] \arrow[dd] \\
 & U_\infty \arrow[d] & (U_\infty)_{\bar S} \arrow[l, "(3)"'] \arrow[d] & \\
U \arrow[d] & U_{S_\infty} \arrow[l] \arrow[d] & U_{\bar S} \arrow[l, "(2)"'] \arrow[d] & U_{\bar\eta} \arrow[l] \arrow[d] \\
S & S_\infty \arrow[l] & \bar S \arrow[l, "(1)"'] & \bar\eta . \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

(N.B. Les carrés sont cartésiens ; d'après 3.2.1, (1), donc aussi (2) et (3) sont limites projectives de revêtements presque étales.)

La démonstration de 3.2.3 est ardue. On remplace $U$ par son hensélisé $U_{(x)} = \operatorname{Spec} R_{(x)}$ en un point $x$ de la fibre spéciale $U_s$, et l'on raisonne par récurrence sur $\dim U_{(x)}$ $(= d + 1 - \dim\{\bar x\})$. Pour $\dim U_{(x)} = 1$, $R_{(x)}$ est un anneau de valuation discrète hensélien, dont le corps résiduel est une extension finie séparable de $k(T_1, \cdots, T_d)$. Pour $d = 0$, le résultat à prouver découle de celui de Tate (3.2.1). Dans le cas général, la méthode de Tate, utilisant les groupes de ramification et le théorème de Herbrand,

(*) On prend ici la limite projective du pro-objet défini dans (SGA 1 V).

ne s'applique plus. Toutefois, si $U' = \mathrm{Spec}(R')$, et $R'_n$ est le normalisé de $R_n \otimes R'$, Faltings montre, par un calcul direct sur les différentielles, que les valuations des différentes de $R'_n$ sur $R_n$ tendent vers 0 quand $n \to \infty$. Le cas où dim $U_{(x)} = 2$ se ramène au précédent par localisation aux points maximaux de la fibre spéciale de $U'_{(x)}$. Quand dim $U_{(x)} \geq 3$, on applique l'hypothèse de récurrence à une section hyperplane convenable de $U_{(x)}$, et l'on utilise 3.2.2.1. La démonstration s'inspire ici de celle du théorème de pureté de Zariski-Nagata (SGA 1 X 3.1) donnée par Grothendieck dans (SGA 2 X §3).

### 3.3. Cohomologie galoisienne et différentielles : calculs locaux

**3.3.1.** On se place dans la situation de 3.2.4. On pose $\bar{R} = \mathcal{O}(\bar{U})$, $R_{\bar{V}} = R \otimes_V \bar{V}$. Soient $\Gamma$ et $\Delta$ les groupes fondamentaux respectifs de $U_\eta$ et $U_{\bar{\eta}}$ (associés à $\bar{U}_{\bar{\eta}}$), de sorte que $G = \Gamma/\Delta$.

Faltings montre qu'on peut "presque" calculer $H^*(\Delta, \bar{R}/p^n)$ comme représentation de $G$. En effet, soit $T = \mathbf{Z}_p(1)^d$ le groupe de Galois de $(U_\infty)_{\bar{S}}$ sur $U_{\bar{S}}$ ($(z_1, \cdots, z_d) \in (\mu_{p^n})^d$ agissant par $u_i^{p^{-n}} \mapsto z_i u_i^{p^{-n}}$), $H$ celui de $\bar{U}$ sur $(U_\infty)_{\bar{S}}$. Considérons la suite spectrale de Hochschild-Serre :

$$E_2^{r,s} = H^r(T, H^s(H, \bar{R}/p^n)) \Longrightarrow H^{r+s}(\Delta, \bar{R}/p^n)$$

(qui est $G$-équivariante). Comme $\bar{U} \to (U_\infty)_{\bar{S}}$ est limite projective de revêtements presque étales (3.2.4), il résulte de 3.2.2.4 que $\mathfrak{m} \,.\, H^s(H, \bar{R}/p^n) = 0$ pour $s > 0$. Comme d'autre part, $H^0(H, \bar{R}) =$ $\mathcal{O}(U_\infty)_{\bar{S}} = R_{\bar{V}}\,[u_1^{p^{-\infty}}, \cdots, u_d^{p^{-\infty}}]$, on obtient un isomorphisme canonique, $G$-équivariant,

(3.3.1.1)

$$H^i(\Delta, \bar{R}/p^n) \xrightarrow{\sim} H^i(T, R_{\bar{V}}\,[u_1^{p^{-\infty}}, \cdots, u_d^{p^{-\infty}}]/p^n) \quad (\mathrm{mod}\,\mathfrak{m} - \mathrm{torsion}).$$

De la décomposition (stable par $T$, et équivariante sous $G$)

$$(R_{\bar{V}}/p^n)\left[u_1^{p^{-\infty}}, \cdots, u_d^{p^{-\infty}}\right] = (R_{\bar{V}}/p^n) \oplus (\oplus (R_{\bar{V}}/p^n) u_1^{a_1} \cdots u_d^{a_d}),$$

où la seconde somme est étendue aux $a = (a_1, \cdots, a_d) \in \mathbf{Z}[1/p]^d$ tels que $a \neq 0$ et $0 \leq a_i < 1$, on déduit (à l'aide, par exemple, de résolutions de

Koszul) un isomorphisme $G$-équivariant :

(3.3.1.2) $H^*(\Delta, \bar{R}/p^n) \xrightarrow{\sim} \Lambda((R_{\bar{V}}/p^n)(-1)^d) \oplus \mathbf{r}_n \qquad (\bmod\, \mathfrak{m} - \text{torsion}).$

où $\mathbf{r}_n$ est annulé par $p^{1/(p-1)}$. Passant à la limite projective sur $n$, on obtient finalement un isomorphisme $G$-équivariant de $R^{\wedge}_{\bar{V}}$-modules

(3.3.1.3) $\qquad H^*(\Delta, \bar{R}^{\wedge}) \xrightarrow{\sim} \Lambda(R^{\wedge}_{\bar{V}}(-1)^d) \oplus \mathbf{r} \qquad (\bmod\, \mathfrak{m}^{\wedge} - \text{torsion}),$

où $\mathbf{r}$ est annulé par $p^{1/(p-1)}$ (Faltings montre même qu'on peut se débarrasser du mod $\mathfrak{m}^{\wedge}$-torsion).

**3.3.2.** Considérons la suite exacte :

(3.3.2.1) $\qquad \Omega^1_{U_{\bar{S}}/U} \otimes \mathcal{O}_{\bar{U}} \xrightarrow{i} \Omega^1_{\bar{U}/U} \longrightarrow \Omega^1_{\bar{U}/U_{\bar{S}}} \longrightarrow 0$

définie par les morphismes $\bar{U} \to U_{\bar{S}} \to U$ de 3.2.4. Comme $\bar{U} \to (U_\infty)_{\bar{S}}$ est limite projective de revêtements presque étales, il résulte de 3.2.2.3 (et (3.3.2.3) ci-dessous) que $i$ est injective et que mod $\mathfrak{m}$-torsion, la suite exacte (3.3.2.1) est scindée (comme suite de $\mathcal{O}_U$-modules). Elle s'identifie en effet, mod $\mathfrak{m}$-torsion, à la suite déduite par extension des scalaires de la suite exacte analogue relative aux morphismes $(U_\infty)_{\bar{S}} \to U_{\bar{S}} \to U$. Pour la même raison, l'homomorphisme naturel $\Omega^1_{U/S} \otimes \mathcal{O}_{\bar{U}} \to \Omega^1_{\bar{U}/\bar{S}}$ induit une flèche

(3.3.2.2)

$\Omega^1_{U/S} \otimes (\mathcal{O}_{\bar{U}}[1/p]/\mathcal{O}_{\bar{U}}) \longrightarrow \Omega^1_{\bar{U}/U_{\bar{S}}} \quad , \quad d\log u_i \otimes p^{-n} \longmapsto \text{image de } d\log u_i^{p^{-n}},$

qui est un $\mathfrak{m}$-isomorphisme. D'autre part, d'après un résultat de Fontaine [24], l'application $d\log : \mu_{p^\infty} \to \Omega^1_{\bar{S}/S}$ induit un isomorphisme :

(3.3.2.3) $\qquad (\mathcal{O}_{\bar{S}}[1/p]/\rho^{-1}\mathcal{O}_{\bar{S}})(1) \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{\bar{S}/S},$

où $\rho \in \bar{V}$ est un élément de valuation $(1/(p-1)) + v(\mathcal{D}_{V/W(k)})$ ($v$ normalisée par $v(p) = 1$) (c'est aussi une conséquence du résultat de Tate (3.2.1) : le fait que $\bar{S} \to S_\infty$ soit limite projective de revêtements presque étales permet de se ramener à établir l'analogue de (3.3.2.3) avec $S$ et $\bar{S}$ remplacés respectivement $W(k)$ et $W(k)(\mu_{p^\infty})$, où l'on conclut par un calcul direct élémentaire). Prenant l'image inverse de (3.3.2.1) par (3.3.2.2) et tenant compte de (3.3.2.3), on obtient, après application du foncteur module de Tate $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p, -)$, une suite exacte canonique de $\bar{R}^\wedge$-modules

$$(3.3.2.4) \qquad 0 \longrightarrow \bar{R}^\wedge \longrightarrow E \longrightarrow \Omega^1_{R/V} \otimes \rho\bar{R}^\wedge(-1) \longrightarrow 0.$$

Le groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{U}/U)$ opère de façon naturelle sur cette suite. On en déduit un homomorphisme de $R^\wedge_{\bar{V}}$-modules, équivariant sous $G = \Gamma/\Delta$,

$$(3.3.2.5) \qquad \Omega^1_{R/V} \otimes \rho\bar{V}^\wedge(-1) \longrightarrow H^1(\Delta, \bar{R}^\wedge).$$

Le calcul de (3.3.1.3) montre que celui-ci est un isomorphisme modulo $p$-torsion. Il en est de même des flèches déduites de (3.2.2.5) par application de $\Lambda^i$ :

$$(3.3.2.6) \qquad \Omega^i_{R/V} \otimes \rho^i\bar{V}^\wedge(-i) \longrightarrow H^i(\Delta, \bar{R}^\wedge).$$

La même conclusion vaut pour la flèche de pro-objets donnant naissance à (3.3.2.6), avec $\bar{V}^\wedge$ (resp. $\bar{R}^\wedge$) remplacé par $\bar{V}/p^\cdot$ (resp. $\bar{R}/p^\cdot$), et "modulo $p$-torsion" par "modulo $p$-torsion bornée" (où $\bar{V}/p^\cdot$ (resp. $\bar{R}/p^\cdot$) désigne le système projectif des $\bar{V}/p^n\bar{V}$ (resp. $\bar{R}/p^n\bar{R}$)).

### 3.4. Globalisation : cycles évanescents cohérents

**3.4.1.** On fixe un schéma $X$ lisse sur $S$, de dimension relative $d$. On suppose, pour simplifier, $X_{\bar{\eta}}$ intègre, de point générique $\xi$, et l'on fixe un point géométrique $\bar{\xi}$ localisé en $\xi$. Si $U$ est un ouvert (de Zariski) de $X$, on note $\bar{U}_{\bar{\eta}}$ le revêtement universel de $U_{\bar{\eta}}$ correspondant à $\bar{\xi}$ et $\bar{U}$ le normalisé de $U$ dans $\bar{U}_{\bar{\eta}}$. On pose $\Gamma(U) = \pi_1(U_\eta, \bar{\xi})$, $\Delta(U) = \pi_1(U_{\bar{\eta}}, \bar{\xi})$, de sorte que $G = \Gamma(U)/\Delta(U)$. On dit que $U$ est *petit* si $U$ est affine, $U = \mathrm{Spec}\, R$, avec $R$ étale sur $V\left[T_1^{\pm 1}, \cdots, T_d^{\pm 1}\right]$ (via $T_i \mapsto u_i \in R^*$).

**3.4.2.** Soit $\widetilde{X}$ la catégorie suivante. Un objet $F = ((F_U), (r_{U_1 U_2}))$ de $\widetilde{X}$ est la donnée, pour chaque ouvert de Zariski $U$ de $X$, d'un faisceau *étale* $F_U$ sur

$U_{\bar\eta}$, et pour chaque inclusion $U_2 \subset U_1$, d'un morphisme $r_{U_1U_2} : F_{U_1}\big|(U_2)_{\bar\eta} \to F_{U_2}$, de manière que $r_{U_2U_3} \circ r_{U_1U_2} = r_{U_1U_3}$ et $r_{UU} = Id$. On impose que, pour tout hyperrecouvrement (ouvert de Zariski) tronqué $U_1 \overrightarrow{\longrightarrow} U_0 \to U$, la suite $F_U \to j_{0*}F_{U_0} \overrightarrow{\longrightarrow} j_{1*}F_{U_1}$ soit exacte, $j_i$ désignant la flèche de $(U_i)_{\bar\eta}$ dans $U_{\bar\eta}$. Une flèche $f : L \to M$ de $X$ est un système de flèches $f_U : L_U \to M_U$, compatibles aux $r_{U_1U_2}$. La catégorie $\widetilde{X}$ est un topos. Si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $X$, en astreignant les $U$ à appartenir à $\mathcal{B}$, on obtient un topos équivalent, noté encore $\widetilde{X}$ (définir $F_U$ comme limite inductive des Ker $\left(j_{0*}F_{U_0} \rightrightarrows j_{1*}F_{U_1}\right)$ suivant les hyperrecouvrements $U. \to U$ avec $U_i$ somme d'ouverts $\in \mathcal{B}$).

Tout faisceau étale $E$ sur $X$ induit un faisceau, noté $\widetilde{j}^*E$ (ou $E|\widetilde{X}$), sur $\widetilde{X}$, défini par $U \mapsto E|U_{\bar\eta}$. D'autre part, $G$ opère par transport de structure sur $\widetilde{X}$, et si $X_G$ désigne le topos zariskien des $G$-faisceaux sur $X$, on a un foncteur $G$-équivariant

$$\psi : \widetilde{X} \longrightarrow X_G, \tag{3.4.2.1}$$

associant à $F$ le faisceau $U \mapsto \Gamma(U_{\bar\eta}, F_U)$. Comme par définition $\Gamma(\widetilde{X}, F) = \Gamma(X_{\bar\eta}, F_X)$, on a un isomorphisme ($G$-équivariant)

$$\Gamma(X, \psi F) = \Gamma(\widetilde{X}, F). \tag{3.4.2.2}$$

Enfin, si $E$ est un faisceau étale sur $X$, on a

$$\psi(E|\widetilde{X}) = \varepsilon_* j_* j^* E, \tag{3.4.2.3}$$

où $j : X_{\bar\eta} \to X$ est la flèche naturelle, et $\varepsilon$ la projection du topos étale sur le topos zariskien.

**3.4.3.** En associant à un petit ouvert $U$ de $X$ (3.4.1) le faisceau localement constant sur $U_{\bar\eta}$ de valeur $\bar R$, défini par l'action naturelle de $\Delta(U)$ sur $\bar R$, où $\bar R$ est le normalisé de $R = \mathcal{O}(U)$ dans le revêtement universel $U_{\bar\eta}$, on vérifie qu'on définit un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ de $\widetilde{X}$. Si $M$ est un faisceau localement libre sur $X$, on notera $M \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ le faisceau $U \mapsto M(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{O}(\widetilde{U})$ sur $X$.

La suite exacte de pro-objets donnant naissance à (3.3.2.4)

$$0 \longrightarrow \bar{R}/p^{\cdot} \longrightarrow E_{\cdot} \longrightarrow \Omega^1_{R/V} \otimes \rho\bar{R}/p^{\cdot}(-1) \longrightarrow 0$$

est fonctorielle en le petit ouvert $U$. Elle définit une suite exacte de pro-$\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$-modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{X}}/p^{\cdot} \longrightarrow \mathcal{E}_{\cdot} \longrightarrow \Omega^1_{X/S} \otimes \rho\mathcal{O}_{\widetilde{X}}/p^{\cdot}(-1) \longrightarrow 0. \tag{3.4.3.1}$$

Comme

$$\psi(\Omega^1_{X/S} \otimes \rho\mathcal{O}_{\widetilde{X}}/p^{\cdot}) = \Omega^1_{X/S} \otimes \rho\bar{V}/p^{\cdot},$$

le triangle déduit de (3.4.3.1) par application de $R\psi$ fournit une flèche

$$\Omega^1_{X/S} \otimes \rho\bar{V}/p^{\cdot}(-1)[-1] \longrightarrow R\psi(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}/p^{\cdot}) \tag{3.4.3.2}$$

dans la catégorie dérivée $D(\mathcal{O}_X \otimes_V \bar{V}_{\cdot})$ des (pro-) $\mathcal{O}_X \otimes_V \bar{V}$-modules sur $X$ (munis d'une action semi-linéaire de $G$). Utilisant le produit $R\psi(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}/p^{\cdot}) \overset{L}{\otimes} R\psi(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}/p^{\cdot}) \to R\psi(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}/p^{\cdot})$ et la flèche d'anti-symétrisation

$$\Omega^i_{X/S} \longrightarrow (\Omega^1_{X/S})^{\otimes i} \quad , \quad x_1 \wedge \cdots \wedge x_i \mapsto \sum \varepsilon(s) x_{s(1)} \otimes \cdots \otimes x_{s(i)},$$

on déduit de (3.4.3.2) une flèche

$$\oplus\, \Omega^i_{X/S} \otimes \rho^i\bar{V}/p^{\cdot}(-i)[-i] \longrightarrow R\psi(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}/p^{\cdot}) \tag{3.4.3.3}$$

(dans $D(\mathcal{O}_X \otimes_V \bar{V}_{\cdot})$). La flèche

$$\Omega^i_{X/S} \otimes \rho^i\bar{V}/p^{\cdot}(-i) \longrightarrow R^i\psi(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}/p^{\cdot}) \tag{3.4.3.4}$$

induite par (3.4.3.3) sur $\mathcal{H}^i$ est $i!$-fois la flèche qu'on obtiendrait en appliquant $\Lambda^i$ à (3.4.3.4) pour $i = 1$. Passant à la limite projective, *i.e.* appliquant $R\varprojlim$ à (3.4.3.3), on obtient une flèche

$$\oplus\, \Omega^i_{X/S} \otimes \rho^i\bar{V}^\wedge(-i)[-i] \longrightarrow R\psi(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}^\wedge) \tag{3.4.3.5}$$

dans la catégorie dérivée des $\mathcal{O}_X \otimes_V \bar{V}^\wedge$-modules sur $X$ munis d'une action semi-linéaire de $G$, avec $R\psi(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}^\wedge) := R\varprojlim R\psi(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}/p^{\cdot})$. L'un des résultats principaux de Faltings est le suivant :

**THÉORÈME 3.4.4.**— *La flèche* (3.4.3.5) $\otimes \mathbf{Q}_p$ *est un isomorphisme.*

La démonstration repose sur les calculs locaux de 3.3 et une variante du théorème des bons voisinages d'Artin. Si $U$ est un ouvert de $X$ et $\mathcal{L}$ un faisceau localement constant de torsion sur $U_{\bar{\eta}}$ de valeur $L$, la suite spectrale des foncteurs composés $H^r(\Delta(U), H^s(\bar{U}_{\bar{\eta}}, L)) \Longrightarrow H^*(U_{\bar{\eta}}, \mathcal{L})$ fournit une flèche

$$H^r(\Delta(U), L) \longrightarrow H^r(U_{\bar{\eta}}, \mathcal{L}) \tag{3.4.4.1}$$

de la cohomologie galoisienne vers la cohomologie étale. Convenons de dire que $U$ est *génériquement un* $K(\pi,1)$*-cohomologique* (ou simplement, par abus, un $K(\pi,1)$) si pour tout $\mathcal{L}$ comme ci-dessus, (3.4.4.1) est un isomorphisme. Faltings établit la variante suivante du théorème d'Artin (SGA 4 XI) :

*Lemme* 3.4.4.2 [19, 2.1].— *Les $U$ qui sont des $K(\pi,1)$ forment une base d'ouverts de $X$.*

Pour prouver 3.4.4, on peut donc remplacer $X$ par un petit ouvert qui est un $K(\pi,1)$. La conclusion découle alors des calculs de 3.3.2 (une puissance fixe de $p$ annule le cône de (3.4.3.3)).

Appliquant $R\Gamma(X,-)$ et tenant compte de (3.4.2.2), on déduit de (3.4.3.5) une flèche

$$\oplus\, R\Gamma(X, \Omega^i_{X/S}) \otimes \rho^i \bar{V}^\wedge(-i)[-i] \longrightarrow R\Gamma(\widetilde{X}, \mathcal{O}^\wedge_{\widetilde{X}}) \tag{3.4.3.6}$$

dans la catégorie dérivée $D(\bar{V}^\wedge)$ des $\bar{V}^\wedge$-modules (avec action semi-linéaire de $G$), où $R\Gamma(\widetilde{X}, \mathcal{O}^\wedge_{\widetilde{X}}) := R\varprojlim R\Gamma(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}/p^\cdot)$.

**COROLLAIRE 3.4.5.**— *La flèche* (3.4.3.6) $\otimes \mathbf{Q}_p$ *est un isomorphisme.*

## 3.5. Cycles évanescents discrets et cycles évanescents cohérents.

Les hypothèses et notations de 3.4.1 sont en vigueur.

**3.5.1.** L'étape suivante est de comparer $R\psi(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}/p^\cdot)$ au complexe des cycles évanescents (*) usuel $R\Psi(\mathbf{Z}/p^\cdot) = \bar{i}^* R\bar{j}_* \bar{j}^* \mathbf{Z}/p^\cdot$, où $\bar{i} : X_{\bar{s}} \to X_{\bar{S}}$ et $\bar{j}$ :

(*) On dit plutôt "proches", de nos jours

$X_{\bar\eta} \to X_{\bar S}$ sont les inclusions. La flèche évidente $(\mathbf{Z}/p^{\cdot})|\widetilde{X} \to \mathcal{O}_{\widetilde{X}}/p^{\cdot}$ donne par application de $R\psi$ une flèche

$$(3.5.1.1) \qquad R\psi(\mathbf{Z}/p^{\cdot}) \otimes \bar{V}/p^{\cdot} \longrightarrow R\psi(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}/p^{\cdot})$$

dans la catégorie dérivée $D(X, \bar{V}.)$ des pro-$\bar{V}$-modules (zariskiens) sur $X$ (munis d'une action semi-linéaire de $G$), où $R\psi(\mathbf{Z}/p^{\cdot}) = R\varepsilon_* Rj_* j^*(\mathbf{Z}/p^{\cdot})$ (*cf.* (3.4.2.2)) (la restriction de $R\psi(\mathbf{Z}/p^{\cdot})$ à $X_s$ n'est autre que $R\varepsilon_* R\Psi(\mathbf{Z}/p^{\cdot})$, où $\varepsilon$ désigne par abus le composé $(X_{\bar s})_{et} \to (X_s)_{et} \to (X_s)_{zar}$). Appliquant $R\Gamma(X, -)$, on en déduit une flèche

$$(3.5.1.2) \qquad R\Gamma(X_{\bar\eta}, \mathbf{Z}/p^{\cdot}) \otimes \bar{V}^{\wedge}/p^{\cdot} \longrightarrow R\Gamma(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}/p^{\cdot})$$

de $D(\bar{V}.)$, catégorie dérivée des pro-$\bar{V}$-modules avec action semi-linéaire de $G$, $G$ agissant diagonalement sur le premier membre, puis, par application de $R\varprojlim$, une flèche

$$(3.5.1.3) \qquad R\Gamma(X_{\bar\eta}, \mathbf{Z}_p)) \otimes \bar{V}^{\wedge} \longrightarrow R\Gamma(\widetilde{X}, \mathcal{O}^{\wedge}_{\widetilde{X}})$$

de $D(\bar{V}^{\wedge})$ (notation de (3.4.3.6)). On ne sait rien dire de (3.5.1.1), mais Faltings établit le théorème de comparaison suivant :

**THÉORÈME 3.5.2.**— *Si $X$ est* propre *sur $S$, la flèche* (3.5.1.3) $\otimes \mathbf{Q}_p$ *est un isomorphisme.*

La démonstration est "formelle". Posons

$$H^*_{et}(X) := H^*(X_{\bar\eta}, \mathbf{Z}_p) \otimes \bar{V}^{\wedge}[1/p] \quad , \quad H^*_{Fal}(X) := H^*(\widetilde{X}, \mathcal{O}^{\wedge}_{\widetilde{X}})[1/p] \quad ,$$

$$H^*_{Hdg}(X) := \oplus H^{*-i}(X, \Omega^i) \otimes \bar{V}^{\wedge}(-i)[1/p].$$

Ce sont des "théories de cohomologie" dont les restrictions aux $X$ propres (et lisses) sur $S$ sont à valeurs dans les $\bar{K}^{\wedge}$-espaces vectoriels de dimension finie, munis d'une action semi-linéaire continue de $G$. D'après (3.4.5), on a un isomorphisme fonctoriel

$$(3.5.2.1) \qquad H^*_{Hdg}(X) \xrightarrow{\sim} H^*_{Fal}(X),$$

déduit de (3.4.3.6) $\otimes \mathbf{Q}_p$ par division par $i!$ sur le $i$-ième composant et application de $H^*$ à l'isomorphisme ainsi obtenu. On veut montrer que la flèche

$$(3.5.2.2) \qquad H^*_{et}(X) \longrightarrow H^*_{Fal}(X)$$

définie par (3.5.1.3) est un isomorphisme. Il revient au même de montrer que la flèche composée de (3.5.2.2) et de l'inverse de (3.5.2.1),

$$(3.5.2.3) \qquad \beta : H^*_{et}(X) \longrightarrow H^*_{Hdg}(X)$$

est un isomorphisme. Il suffit pour cela de vérifier que $\beta$ est compatible aux cup-produits (ce qui est facile), et aux morphismes "traces" $H^{2d}_{et}(X)(d) \to \bar{K}^\wedge$, $H^{2d}_{Hdg}(X)(d) \to \bar{K}^\wedge$ définissant les dualités de Poincaré sur les deux membres. La compatibilité de $\beta$ aux morphismes traces découle elle-même de la compatibilité de $\beta$ aux classes de cycles lisses. Faltings vérifie cette dernière à l'aide d'une extension de la théorie aux couples $(X, D)$, $D$ un diviseur à croisements normaux dans $X$.

**COROLLAIRE 3.5.3.**— *Si $X$ est propre (et lisse) sur $S$, $X_{\bar{\eta}}$ vérifie $C_{HT}$* (2.1.3).

*Remarque* 3.5.4.— Faltings montre en fait que (sous la même hypothèse) :

a) la flèche (3.5.1.2) induit sur $H^*$ un $\mathfrak{m}$-isomorphisme ;

b) l'isomorphisme $\beta$ (3.5.2.3) est compatible aux isomorphismes de Künneth, aux classes de cycles éventuellement singuliers, et aux classes de Chern de fibrés vectoriels.

### 3.6. Variantes et compléments

**3.6.1.** *La conjecture $C_{cris}$*

a) Faltings définit d'abord, pour tout petit ouvert $U = \mathrm{Spec}(R)$ de $X$ (comme en 3.4.1), un anneau $B_{cris}$, noté $B(R)$. On part de $\bar{R}$, normalisé de $R$ dans le revêtement universel de $U_{\bar{\eta}}$, et l'on pose, par analogie avec 1.2.2,

$$B^+(R) = D_I\Big(W\big(\varprojlim_F \bar{R}/p\bar{R}\big)\Big)^\wedge,$$

où la limite projective est celle d'une famille de copies de $\bar{R}/p\bar{R}$ indexée par $\mathbf{N}$ suivant les applications $F : x \mapsto x^p$, $I$ est l'idéal défini par la suite exacte

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow W\Big(\varprojlim_F \bar{R}/p\bar{R}\Big) \xrightarrow{\theta} \bar{R}^\wedge \longrightarrow 0,$$

avec $\bar{R}^\wedge$ = complété $p$-adique de $\bar{R}$,

$$\theta(s_0, s_1, \cdots) = \lim_m r_{0m}^{p^m} + p r_{1m}^{p^{m-1}} + \cdots + p^m r_{mm},$$

$s_n = \lim s_{nm}$, $r_{nm}$ relevant $s_{nm}$ dans $\bar{R}$, et enfin $D_I(-)^\wedge$ est l'enveloppe à puissances divisées de $I$, $p$-complétée (on peut montrer que $F$ est surjectif, d'où la surjectivité de $\theta$). Le groupe de Galois $\Gamma(U) = \mathrm{Gal}(\bar{R}/R)$ opère continûment sur $B^+(R)$. L'automorphisme de Frobenius de $\varprojlim_F \bar{R}/p\bar{R}$ se prolonge en un automorphisme $\varphi$ de $B^+(R)$. La construction est fonctorielle en $R$, en particulier $B^+(R)[p^{-1}]$ est une algèbre sur $B^+_{cris} = B^+(V)[p^{-1}]$, et contient donc, de façon naturelle $\mathbf{Z}_p(1)$. On pose

$$B(R) = B^+(R)\left[p^{-1}, t^{-1}\right],$$

où $t$ est l'image d'un générateur de $\mathbf{Z}_p(1)$. Les actions de $\Gamma(U)$ et de $\varphi$ s'étendent à $B(R)$. En outre, $B(R) \otimes_{K_0} K$ a une filtration naturelle $F^{\cdot}$ provenant de la filtration $J$-adique de $B^+(R) \otimes_{W(k)} K$ définie par le noyau $J$ du composé $B^+(R) \otimes_{W(k)} V \to \bar{R}^\wedge \otimes_{W(k)} V \to \bar{R}^\wedge$, dont le gradué s'identifie à $\oplus_{n \in \mathbf{Z}} \bar{R}^\wedge(n)[1/p]$. On notera $B^+(R^\wedge)$, $B(R^\wedge)$ les anneaux obtenus par les mêmes constructions effectuées à partir du complété $p$-adique de $R$.

b) Paraphrasant 3.4.3, on définit des faisceaux $B^+/(I^{[n]} + p^m B^+)$ sur $\widetilde{X}$, en associant à $U = \operatorname{Spec} R$ le faisceau localement constant sur $U_{\bar{\eta}}$ défini par $B^+(R^\wedge)/(I^{[n]} + p^m B^+(R^\wedge))$ muni de l'action $\Delta(U)$. On a une flèche naturelle de $D(B^+(V)/p^{\cdot})$

$$R\Gamma(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{Z}/p^{\cdot}) \overset{L}{\otimes} B^+(V)/I^{[n]} \longrightarrow R\Gamma(\widetilde{X}, \mathbf{Z}/p^{\cdot} \otimes B^+/I^{[n]}). \tag{3.6.1.1}$$

Il résulte de 3.5.4 a) que, pour $X$ *propre*, (3.6.1.1) est un $\mathfrak{m}_B$-isomorphisme, où $\mathfrak{m}_B$ est la préimage de l'idéal maximal $\mathfrak{m}^\wedge$ de $\bar{V}^\wedge$ par $B^+(V) \to \bar{V}^\wedge$. On en déduit un isomorphisme

$$H^*(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{Z}_p) \otimes B(V) \longrightarrow H^*(\widetilde{X}, B^\wedge) \tag{3.6.1.2}$$

(où le second membre désigne $\Big(\varprojlim_n \varprojlim_m H^*(\widetilde{X}, \mathbf{Z}/p^m \otimes B^+/I^{[n]})\Big)[1/p, 1/t]$), compatible à toutes les structures.

c) Soit $Y = X_s = X \otimes_V k$ la fibre spéciale de $X$. Faltings construit une transformation naturelle (compatible à toutes les structures)

$$(3.6.1.3) \qquad H^*(Y/W) \otimes_W B(V) \longrightarrow H^*(\widetilde{X}, B^\wedge)$$

où $H^*(Y/W) = \varprojlim H^*_{cris}(Y/W_n(k))$ est la cohomologie cristalline.

i) Supposons d'abord $V = W(k)$. Pour $R$ comme ci-dessus, l'anneau $B^+(R)$ est une algèbre sur $B^+(V)$, mais non sur $R$. Cependant, $B^+(R^\wedge)/I = \bar{R}^\wedge$ contient $R$, et comme $R$ est lisse sur $V$, on peut choisir un relèvement, et même un système compatible de relèvements $r : R \to B^+(R^\wedge)/I^{[m]}$ de cette inclusion, qui sont des homomorphismes de $V$-algèbres. Si $E$ est un cristal localement libre sur $X$ (donné par un module localement libre avec une connexion intégrable topologiquement $p$-nilpotente $\nabla$), on peut “évaluer” $E$ sur $B^+(R^\wedge)/I^{[m]}$, *i.e.* former $E(B^+(R^\wedge)/I^{[m]}) := E(R) \otimes_{R,r} B^+(R^\wedge)/I^{[m]}$ : à un système transitif d'isomorphismes près, donnés par $\nabla$, le résultat ne dépend pas du choix de $r$. Pour $U$ variable, les $E(B^+(R^\wedge)/I^{[m]})$ forment un faisceau $E \otimes B^+/I^{[m]}$ sur $\widetilde{X}$. De plus, si $x$ est une section globale horizontale de $E$ (*i.e.* telle que $\nabla x = 0$), l'image $x \otimes 1$ de $x$ dans $E(B^+(R^\wedge)/I^{[m]})$ ne dépend pas du choix de $r$, et est en outre invariante par $\Gamma(U)$ (et *a fortiori* par $\Delta(U)$) : $x$ définit donc une section globale $\widetilde{x}$ de $E \otimes B^+/I^{[m]}$. On obtient ainsi un système d'homomorphismes fonctoriels $G$-équivariants

$$(3.6.1.4) \qquad H^0_{cris}(X/V, E) \longrightarrow H^0(\widetilde{X}, E \otimes B^+/I^{[m]}) \quad , \quad x \longmapsto \widetilde{x}.$$

Rappelons maintenant qu'on dispose de la résolution du cristal $\mathcal{O}_{X/V}$ par le “linéarisé” du complexe de de Rham, $L(\Omega^\cdot_{X/V}) = \varprojlim pr_{1*} pr_2^* \Omega^\cdot_{X/V}$, où $pr_i$ sont les deux projections du $n$-ième $PD$-voisinage infinitésimal de $X$ dans $X \times X$ ([4], [5]) : les composantes de $L(\Omega^\cdot_{X/V})$ sont des (pro-) cristaux localement libres sur $X$, acycliques pour $u_*$ où $u$ est la projection du topos cristallin sur le topos zariskien. Soit $U_\cdot \to X$ un hyperrecouvrement de $X$ formé de petits ouverts. Le complexe simple associé au bicomplexe

$\Gamma_{cris}(U., L(\Omega^{\cdot}_{X/V}))$ calcule $R\Gamma(Y/W)$. Par (3.6.1.4), $\Gamma_{cris}(U., L(\Omega^{\cdot}_{X/V}))$ s'envoie dans $\Gamma(\widetilde{U}., L(\Omega^{\cdot}_{X/V}) \otimes B^+/I^{[m]})$ et ce dernier complexe s'envoie dans $R\Gamma(\widetilde{U}., L(\Omega^{\cdot}_{X/V}) \otimes B^+/I^{[m]})$, qui s'identifie à $R\Gamma(\widetilde{U}., B^+/I^{[m]})$ donc finalement à $R\Gamma(\widetilde{X}, B^+/I^{[m]})$. Le composé de ces flèches

$$R\Gamma(Y/W) \longrightarrow R\Gamma(\widetilde{X}, B^+/I^{[m]}) \tag{3.6.1.5}$$

donne naissance à (3.6.1.3).

ii) Dans le cas général, Faltings définit (3.6.1.3) par une variante des constructions précédentes, utilisant la théorie des cristaux convergents de Berthelot-Ogus [57].

Le résultat essentiel est que, pour $X$ *propre*, (3.6.1.3) *est un isomorphisme.* Contrairement à 3.4.5, dont la vérification est locale, la démonstration que donne ici Faltings est globale, analogue à celle de (3.5.2). Il s'agit de voir que la transformation naturelle

$$H^*(Y/W) \otimes B(V) \longrightarrow H^*(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{Z}_p) \otimes B(V), \tag{3.6.1.6}$$

composée de (3.6.1.3) et de l'inverse de (3.6.1.2), est un isomorphisme. Il suffit pour cela de vérifier, comme le fait Faltings, qu'elle est compatible à la dualité de Poincaré, ou encore à la formation des classes de cycles et classes de Chern, ce qui se ramène à un calcul explicite de cocycles pour la première classe de Chern. On pourrait aussi vérifier que, par extension des scalaires à $K$ et passage au gradué pour les filtrations naturelles des deux membres, (3.6.1.6) induit l'isomorphisme de Hodge-Tate $\alpha_{HT}$ (2.1.3.2) inverse de $\beta$ (3.5.2.3) (à un signe près en chaque degré peut-être) ; cette vérification, toutefois, n'est pas faite dans [20].

d) Faltings établit aussi, dans [20], d'importants raffinements du théorème de comparaison (3.6.1.6) : versions à coefficients (généralisation de la théorie de Fontaine-Laffaille [30]), versions relatives, variantes dans le cas "ouvert" (complément d'un diviseur à croisements normaux relatifs)... Il y a des applications à des théorèmes de dégénérescence de suites spectrales de Hodge vers de Rham généralisant ceux de [17] et [44], et à la classification des groupes commutatifs finis et plats d'ordre une puissance de $p$ sur $X^\wedge$, pour $X$ lisse sur $V = W(k)$ et $p > 2$, en termes de "cristaux de Dieudonné filtrés".

**3.6.2.** *La conjecture $C_{DR}$*

Si l'on part d'un schéma $X_K$ propre et lisse sur $K$, on peut, d'après un théorème de Nagata [55], trouver un schéma $X$ propre et plat sur $S$ tel que $X \otimes K = X_K$. Travaillant avec la topologie "rigide" sur $X$ au lieu de la topologie de Zariski (ou de la topologie étale), Faltings construit dans [20, VIII], un faisceau d'anneaux $B_{DR}$ sur un topos $\widetilde{X}_{rig}$ convenable, et des transformations naturelles de $H^*_{DR}(X_K/K) \otimes B_{DR}(V)$ et $H^*(X_K, \mathbf{Z}_p) \otimes B_{DR}(V)$ vers $H^*(\widetilde{X}_{rig}, B_{DR})$ ; un argument global analogue aux précédents montre encore que ce sont des isomorphismes. La définition du faisceau $B_{DR}$, très délicate, utilise la théorie des champs modulaires $\mathcal{M}_{g,t}$ de courbes stables de genre $g$ privées de $t$ points, généralisation de celle de Deligne-Mumford [18]. Le recours à cette théorie apparaît dans la construction de "petits" ouverts $\operatorname{Spec} R$ de $X$ (pour la topologie rigide), munis d'éléments $u_i \in R \cap (R \otimes_V K)^*$ tels que les $d\log u_i$ engendrent $\Omega^1_{R/V} \otimes_R K$ et que $\bar{R}$ puisse être "contrôlé" par $R\left[u_i^{p^{-\infty}}\right] \otimes_V \bar{V}$: construction par récurrence sur la dimension, utilisant les fibrations élémentaires d'Artin (SGA 4 XI). Certains arguments de [19] et [20] doivent être légèrement corrigés (notamment [19, III 1.1, 1.2, 3.3] et [20, VIII, b)]). Par ailleurs, la définition des transformations naturelles évoquées ci-dessus, et de leurs analogues dans le cadre de "Hodge-Tate" n'est pas explicitée. Compte tenu de l'importance de ces résultats, on ne peut que souhaiter qu'en paraisse au plus tôt une démonstration détaillée.

Ajoutons que, dans le cas des courbes modulaires, Faltings a établi une variante de la décomposition de Hodge-Tate à coefficients dans certains systèmes locaux [G. Faltings, Hodge-Tate structures and modular forms, Math. Ann. 278 (1987), 133-149]. Une généralisation a été proposée par Hyodo [38].

## 4. LA CONJECTURE $C_{st}$

### 4.1. L'opérateur de monodromie de Hyodo-Kato

**4.1.1.** Soit $X$ un $S$-schéma *semi-stable.* On entend par là que, localement pour la topologie étale, $X$ est isomorphe à $S[t_1, \cdots, t_m]/(t_1 \cdots t_r - \pi)$, où $\pi$ est une uniformisante de $V$ ; il revient au même de dire que $X$ est régulier, $X_\eta$ est lisse et la fibre spéciale $Y = X_s$ est un diviseur à croisements normaux réduit dans $X$.

Quand $Y$ est singulier, et même si $X/S$ est propre, la cohomologie cristalline (usuelle) de $Y/W$ est pathologique. Hyodo et Kato ont défini dernièrement une cohomologie cristalline modifiée, possédant, elle, de bonnes propriétés. Leur construction s'inspire de celle des structures de Hodge limites de Steenbrink [69] (voir [29] pour un aperçu de cette théorie). Ils définissent un système projectif de $W_n$-modules, que nous noterons $H^*_{st}(Y/W_n)$ (bien qu'ils dépendent en fait de $X$), munis d'un endomorphisme de Frobenius $\varphi$, $\sigma$-linéaire, et d'un *opérateur de monodromie* $N$, linéaire, liés par la relation

$$N\varphi = p\varphi N \tag{4.1.1.1}$$

(à rapprocher de (1.1.1)) ; pour $X/S$ lisse, $H^*_{st}(Y/W_n)$ est la cohomologie cristalline usuelle $H^*(Y/W_n)$, $\varphi = \varphi$ et $N = 0$. Posons $H^*_{st}(Y/W) := \varprojlim H^*_{st}(Y/W_n)$. Alors, si $X/S$ est *propre*, $H^*_{st}(Y/W)$ est de type fini sur $W$, $\varphi \otimes \mathbf{Q}_p$ est bijectif, $N \otimes K_0$ est nilpotent, et Hyodo et Kato construisent, pour toute uniformisante $\pi$ de $V$, un isomorphisme ($K$-linéaire)

$$\rho_\pi : H^*_{st}(Y/W) \otimes_W K \xrightarrow{\sim} H^*_{DR}(X_K/K). \tag{4.1.1.2}$$

La dépendance de $\rho_\pi$ en $\pi$ s'exprime par $\rho_\pi = \rho_{\pi u} \exp(\log(u)N)$, où $u \in V^*$ et log est le logarithme usuel. Quand $X/S$ est lisse, (4.1.1.2) coïncide avec l'isomorphisme de Berthelot-Ogus (2.2.1.1) (et ne dépend pas de $\pi$). Noter aussi que, dans le cas général, l'endomorphisme $N$ de $H^*_{DR}(X_K/K)$ déduit de l'endomorphisme $N$ de $H^*_{st}(Y/W)$ via $\rho_\pi$ ne dépend pas du choix de $\pi$.

**4.1.2.** La philosophie qui sous-tend les constructions de Hyodo-Kato est que, du point de vue du calcul différentiel, les morphismes "à réduction semi-stable" se comportent à peu près comme les morphismes lisses, pourvu que l'on remplace les complexes de de Rham usuels par des complexes de de Rham à pôles logarithmiques appropriés. La théorie de Hodge mixte de Deligne ([12], [13]) a popularisé l'usage de tels complexes, mais ce n'est que depuis peu — essentiellement depuis l'article de Hyodo [39] — qu'on s'est rendu compte qu'on pouvait aussi les utiliser avec fruit dans des situations de caractéristique mixte. Le fait d'avoir à travailler alors avec des diviseurs à croisements normaux non nécessairement relatifs à une base, le souci d'obtenir des constructions stables par changement de base (à cet égard, la définition de "semi-stable" en 4.1.1 ne l'est pas!) ont amené à dégager des structures additionnelles permettant de définir de bons complexes logarithmiques. Les fondements de cette théorie sont exposés par Kato [47] ; elles généralisent des constructions proposées par Deligne [16] et Faltings [21]. Signalons d'ailleurs que les applications (*cf.* [49], [50])dépassent déjà largement la seule définition de $H^*_{st}$ (nouveaux points de vue sur les dégénérescences de groupes $p$-divisibles et de variétés abéliennes, et sur les compactifications de Chai-Faltings [10]).

La définition de base est la suivante. Soit $X$ un schéma muni de la topologie étale (on pourrait partir plus généralement d'un espace — voire d'un topos — localement annelé ...). Kato définit une *structure pré-logarithmique* sur $X$ comme un couple $(M, a)$ formé d'un faisceau de monoïdes (commutatifs, à élément unité) $M$ sur $X$ et d'un morphisme multiplicatif (transformant 1 en 1) $a : M \to \mathcal{O}_X$. Soit $M'$ le sous-faisceau $a^{-1}(\mathcal{O}_X^*)$ de $M$ ; on dit que $(M, a)$ est une *structure logarithmique* (ou *log-structure*) si $a$ induit un isomorphisme de $M'$ sur $\mathcal{O}_X^*$. Un schéma muni d'une structure logarithmique s'appelle un *schéma logarithmique* (ou *log-schéma*). Les morphismes sont définis de la manière évidente. Il y a une notion naturelle de structure logarithmique associée à une structure pré-logarithmique, et d'image directe (resp. inverse) par $f : X \to Y$. La structure logarithmique initiale (ou triviale) (resp. finale) sur $X$ est $(\mathcal{O}_X^* \hookrightarrow \mathcal{O}_X)$ (resp. $\mathcal{O}_X \xrightarrow{Id} \mathcal{O}_X$). Les exemples les plus utiles sont:

a) Supposons $X$ noethérien régulier (resp. lisse sur $Y$), et soit $D \subset X$ un diviseur à croisements normaux réduit (resp. relatif à $Y$) : on prend

$M = \mathcal{O}_X \cap j_* \mathcal{O}_U^* \hookrightarrow \mathcal{O}_X$, où $j : U = X - D \to X$ est l'inclusion.

b) La donnée d'un monoïde $P$ et d'un homomorphisme $u : P \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ définit une log-structure sur $X$, associée à la pré-log-structure $P_X \to \mathcal{O}_X$ déduite de $u$ (où $P_X$ est le faisceau constant de valeur $P$ sur $X$). L'exemple a) est localement de ce type: $\mathbf{N}^r \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $(n_i) \mapsto \prod t_i^{n_i}$, où $t_1 \cdots t_r$ est une équation locale de $D$.

On peut définir dans ce cadre les notions d'immersion fermée, de morphismes étale, lisse, etc., et les propriétés usuelles (telles que caractérisations infinitésimales) s'étendent ; la théorie obtenue contient celle des plongements toroïdaux [52].

Si $f : (X, L) \to (Y, M)$ est un morphisme de log-schémas, on définit un $\mathcal{O}_X$-module de différentielles logarithmiques $\Omega^1_{X/Y}(\log L/M)$ (noté aussi, en abrégé $\omega^1_{X/Y}$) et $d : \mathcal{O}_X \to \omega^1_{X/Y}$, $d\log : M \to \omega^1_{X/Y}$ liés par $a(u) d\log u = da(u)$, avec les propriétés et la caractérisation universelle qu'on devine. On en déduit un *complexe de de Rham* $\omega^{\cdot}_{X/Y}$, où $\omega^i_{X/Y} = \Lambda^i \omega^1_{X/Y}$, avec la différentielle extérieure définie de la manière habituelle. Par exemple, si $M$ est la structure triviale, si le morphisme sous-jacent $X \to Y$ est lisse, et $L$ est la log-structure associée à un diviseur à croisements normaux relatifs $D \subset X$ comme en a), $\omega^{\cdot}_{X/Y}$ est le complexe logarithmique usuel $\Omega^{\cdot}_{X/Y}(\log D)$. La formation de ces complexes de de Rham est compatible aux changements de base. En caractéristique $p$, on a une théorie d'isomorphismes de Cartier, généralisant ceux considérés dans [39], [44], [21].

Enfin, on peut définir des notions de site et topos cristallin d'un log-schéma, et généraliser les résultats fondamentaux de [4] sur la comparaison entre cohomologie cristalline et cohomologie de de Rham.

**4.1.3.** Revenons à la situation de 4.1.1. Munissons $X$ (resp. $S = \operatorname{Spec} V$) de la log-structure $M$ (resp. $N$) associée au diviseur $Y$ (resp. $s = \operatorname{Spec} k$) (le morphisme $(X, M) \to (S, N)$ est alors "lisse"), et $Y$ (resp. $s$) de la structure image inverse $M_1$ (resp. $N_1$). Notons d'autre part $L_n$ la log-structure sur $\operatorname{Spec} W_n$ assciée à $\mathbf{N} \to W_n$, $1 \mapsto 0$. On a donc un morphisme "lisse" $(Y, M_1) \to (s, N_1)$ et une "immersion fermée" $(s, N_1) \to (\operatorname{Spec} W_n, L_n)$

(l'identité pour $n = 1$). On pose

$$H^*_{st}(Y/W_n) := H^*((Y, M_1)/(\operatorname{Spec} W_n, L_n), \mathcal{O}_{Y/W_n})$$

(cohomologie cristalline à valeurs dans le faisceau structural). On a ainsi

$$H^*_{st}(Y/k) \xrightarrow{\sim} H^*(Y, \omega^{\cdot}_{Y/s})$$

(avec les notations de 4.1.2). En général, on a

$$H^*_{st}(Y/W_n) \xrightarrow{\sim} H^*(Y, C_n),$$

où $C_n$ est un certain complexe de $W_n$-modules sur $Y$, bien défini dans la catégorie dérivée (l'image directe dérivée du faisceau structural par la projection du topos cristallin de $(Y, M_1)/(W_n, L_n)$ sur le topos étale de $Y$). Supposons que $X/S$ se déduise par changement de base par une immersion fermée $S \hookrightarrow \operatorname{Spec} W[t]$ de

$\mathcal{Z} = \operatorname{Spec} W[t_1, \cdots, t_m] \to \operatorname{Spec} W[t]$, $t \mapsto t_1 \cdots t_r$, soit $\mathcal{Y}/W$ déduit de $\mathcal{Z}$ par le changement de base $t \mapsto 0$, et $\mathcal{Y}_n = \mathcal{Y} \otimes \mathbf{Z}/p^n$ (donc $Y = \mathcal{Y}_1$) :

$$\begin{array}{ccccccccc} Y & \hookrightarrow & X & \hookrightarrow & \mathcal{Z} & \hookleftarrow & \mathcal{Y} & \hookleftarrow & \mathcal{Y}_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ s & \hookrightarrow & S & \hookrightarrow & \operatorname{Spec} W[t] & \hookleftarrow & \operatorname{Spec} W & \hookleftarrow & \operatorname{Spec} W_n; \end{array}$$

munissons $\mathcal{Z}$ (resp. $\operatorname{Spec} W[t]$) de la log-structure définie par le diviseur $(t_1 \cdots t_r)$ $(= \mathcal{Y})$ (resp. $(t)$), et $\mathcal{Y}_n$ (resp. $W_n$) de la log-structure image inverse (c'est donc $L_n$ sur $W_n$). On a alors $C_n = \omega^{\cdot}_{\mathcal{Y}_n/(W_n, L_n)}$. En général, l'opérateur de monodromie $N$ est défini comme l'opérateur bord relatif à un certain triangle distingué $C_n[-1] \to D_n \to C_n \to$. Dans la situation précédente, ce triangle est donné par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \omega^{\cdot -1}_{\mathcal{Y}_n/(W_n, L_n)} \xrightarrow{d\log t\wedge} \omega^{\cdot}_{\mathcal{Y}_n/W_n} \longrightarrow \omega^{\cdot}_{\mathcal{Y}_n/(W_n, L_n)} \longrightarrow 0,$$

où, au centre, on considère la log-structure triviale sur $W_n$. Dans le cas général, la définition du triangle se fait par des techniques de descente plus ou moins standard. Hyodo et Kato donnent de tout ceci des descriptions canoniques en termes de complexes de de Rham-Witt (généralisant [43]) ; voir [29] pour une introduction.

La construction de l'isomorphisme $\rho_\pi$ (4.1.1.2) suit assez fidèlement celle de Berthelot-Ogus [6] ; un point-clé est que (sous des hypothèses de log-lissité convenables et sur des bases assez générales) l'endomorphisme de Frobenius de la cohomologie cristalline est une isogénie.

### 4.2. La conjecture $C_{st}$

**4.2.1.** Fixons une uniformisante $\pi$ de $V$ et notons $B_{st}$ l'anneau de Fontaine correspondant (1.2.3). Soit $X$ un $S$-schéma *propre* et *semi-stable* (4.1.1), soit $X_K$ sa fibre générique. Le $K_0$-espace vectoriel de dimension finie

$$H^m_{st}(X_K) := H^m_{st}(Y/W) \otimes_W K_0$$

(notations de 4.1.1) est muni de l'opérateur $\sigma$-linéaire bijectif $\varphi$ et de l'endomorphisme $K_0$-linéaire nilpotent $N$, liés par $N\varphi = p\varphi N$. L'isomorphisme (4.1.1.2) fait de $H^*_{st}(X_K)$ une $K_0$-structure sur $H^*_{DR}(X_K/K)$. Avec la filtration de Hodge $\mathrm{Fil}^\cdot$, elle définit sur $H^*_{st}(X_K)$ une structure de $(\varphi, N)$-module filtré (1.3.5).

Une structure analogue sur la réalisation de de Rham d'un 1-motif sur $K$ à réduction semi-stable a été définie indépendamment par Raynaud, par des techniques rigides analytiques [60]. Toutefois, dans le cas d'un 1-motif associé à une courbe sur $K$ à réduction semi-stable, la comparaison avec la construction de Hyodo-Kato reste à faire.

Fontaine a proposé la conjecture suivante :

**Conjecture 4.2.2** (*Conjecture $C_{st}$*).— *Sous les hypothèses de* 4.2.1, *la représentation $H^*(X_{\bar\eta}, \mathbf{Q}_p)$ est semi-stable* (1.3.2), *et canoniquement associée* (1.3.7) *au $(\varphi, N)$-module filtré $H^*_{DR}(X_K/K)$ défini ci-dessus : il existe un isomorphisme fonctoriel*

$$\alpha_{st} : B_{st} \otimes_{K_0} H^*_{st}(X_K) \xrightarrow{\sim} B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} H^*(X_{\bar\eta}, \mathbf{Q}_p)$$

*compatible aux structures naturelles des deux membres (action de $G$, $\varphi$, $N$, et filtrations après extension des scalaires à $K$).*

La validité de cette conjecture entraînerait notamment que la structure de $(\varphi, N)$-module filtré $H^*_{DR}(X_K/K)$ ne dépend pas du "modèle" semi-stable $X$ (contrairement au cas de bonne réduction [34], on ne sait pas le vérifier directement).

La méthode de Faltings n'a pas permis pour l'instant de prouver 4.2.2. Par contre, par une adaptation au cadre logarithmique de la méthode de Fontaine-Messing [31], Kato a réussi à établir le résultat suivant :

**THÉORÈME 4.2.3** [48].— *La conjecture $C_{st}$ est vraie si* $\dim X_K < (p-1)/2$.

De plus, $H^*_{st}$ vérifie une dualité de Poincaré et l'isomorphisme $\alpha_{st}$ construit par Kato y est compatible.

**4.2.4.** Désignons maintenant par $X$ un schéma propre et lisse sur $K$. Si l'on est optimiste, on peut espérer qu'il existe une extension finie $K'$ de $K$ telle que $X_{K'}$ admette un modèle propre et semi-stable $\mathcal{X}$ sur l'anneau des entiers de $K'$. C'est le cas si $\dim X \leq 1$, par le théorème de réduction semi-stable d'Artin-Deligne-Mumford ([18], [2]), et l'analogue en égale caractéristique nulle et dimension quelconque est vrai également par Mumford [52]. Compte tenu de 4.2.2, ceci amène à faire la conjecture suivante :

**Conjecture 4.2.5** (*Conjecture de monodromie p- adique*).— *Pour $X$ propre et lisse sur $K$, la représentation $H^*(X_{\bar\eta}, \mathbf{Q}_p)$ est potentiellement semi-stable, i.e. il existe une extension finie $L \subset \bar K$ de $K$ telle que la représentation correspondante de* $\mathrm{Gal}(\bar K/L)$ *soit semi-stable.*

## 4.3. La méthode de Fontaine-Messing-Kato

**4.3.1.** Nous reprenons les hypothèses et notations de 4.2.1 et 4.1.3. Nous poserons en outre $V_n = V/p^nV$, $S_n = \operatorname{Spec} V_n$, $X_n = X \times_S S_n$, $\bar X = X \times_S \bar S$, $\bar V_n = \bar V/p^n\bar V$, $\bar S_n = \operatorname{Spec} \bar V_n$, $\bar X_n = \bar X \times_{\bar S} \bar S_n$ (et nous écrirons $Y$, $\bar Y$ au lieu de $X_1$, $\bar X_1$). La démonstration de 4.2.3 se fait en trois étapes.

**4.3.2.** *Interprétation cristalline de* $\left(B^+_{st} \otimes_{K_0} H^*_{st}(X_K)\right)_{N=0}$

Soit $\bar N$ la log-structure sur $\bar S$ limite inductive des images inverses des log-structures canoniques (*i.e.* associées au point fermé) sur les Spec $V'$, où $V'$ parcourt les anneaux d'entiers d'extensions finies de $K$ contenues dans $\bar{K}$. Soit $\bar{N}_n$ la log-structure image inverse de $\bar{N}$ sur $\bar{S}_n$ et $\bar{M}_n$ celle sur $\bar{X}_n$ déduite de $M$ sur $X$ par le changement de base $(\bar{S}_n, \bar{N}_n) \to (S, N)$. (Noter que, bien que $\bar{X}_n$ soit singulier du point de vue des log-schémas, $(\bar{X}_n, \bar{M}_n) \to (\bar{S}_n, \bar{N}_n)$ est un morphisme lisse !) Kato construit un isomorphisme canonique ($G$-équivariant)

$$(4.3.2.1) \qquad \left(B_{st}^{+} \otimes_{K_0} H_{st}^{m}(X_K)\right)_{N=0} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q} \otimes \varprojlim_{n} H^m((\bar{X}_n, \bar{M}_n)/W_n),$$

où l'indice $N = 0$ indique le noyau de $N$ (opérant par $N \otimes 1 + 1 \otimes N$), et $H^m((\bar{X}_n, \bar{M}_n)/W_n)$ est la cohomologie cristalline (à valeurs dans le faisceau structural) du log-schéma $(\bar{X}_n, \bar{M}_n)$ relativement à $W_n$, muni de la log-structure triviale. Les ingrédients de la démonstration sont : a) une interprétation cristalline de $B_{st}^{+}$ analogue à celle de $B_{cris}^{+}$ signalée en 1.2.2 ; b) l'isomorphisme de Hyodo-Kato (4.1.1.2) (ou plutôt les techniques, évoquées en 4.1.3, permettant de le construire).

**4.3.3.** *Cycles évanescents et faisceaux* $s_n^{\log}(r)$

Dans la méthode de Fontaine-Messing [31], le coeur de la démonstration consiste en la construction de certains faisceaux $S_n(r)$ sur le site "syntomique-étale" de $\bar{X}$, servant de pont entre les faisceaux de Tate usuels $(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})(r)$ sur $X_{\bar{\eta}}$ et le noyau de $\varphi - p^r$ sur la cohomologie cristalline. Kato transpose ceci au cadre logarithmique. Pour $0 \le r < p$, il construit un système projectif de complexes de $G$-faisceaux étales $s_n^{\log}(r)$ sur $\bar{X}$, concentrés sur $\bar{Y}$, donnant lieu à des triangles distingués

$$(4.3.3.1) \qquad s_n^{\log}(r) \longrightarrow Ru_* J^{[r]}_{\bar{X}_n/W_n} \xrightarrow{1-p^{-r}\varphi} Ru_* \mathcal{O}_{\bar{X}_n/W_n} \longrightarrow,$$

où $u$ est le morphisme du topos cristallin de $(\bar{X}_n, \bar{M}_n)/W_n$ vers le topos étale de $\bar{X}$ et $J^{[r]}_{\bar{X}_n/W_n}$ désigne la $r$-ième puissance divisée de l'idéal $J_{\bar{X}_n/W_n} = \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{\bar{X}_n/W_n} \to \mathcal{O}_{\bar{X}_n})$. On a en particulier des suites exactes longues, $G$-équivariantes

$$(4.3.3.2) \qquad \begin{aligned} \cdots \longrightarrow H^m(\bar{X}, s_n^{\log}(r)) &\longrightarrow H^m((\bar{X}_n, \bar{M}_n), J^{[r]}) \\ &\xrightarrow{1-p^{-r}\varphi} H^m((\bar{X}_n, \bar{M}_n), \mathcal{O}) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Notons

$$\bar{Y} \overset{\bar{i}}{\hookrightarrow} \bar{X} \overset{\bar{j}}{\hookleftarrow} X_{\bar{\eta}}$$

les inclusions. Le point clé dans la comparaison avec la cohomologie étale de $X_{\bar{\eta}}$ est le résultat suivant :

**THÉORÈME 4.3.3.3** [48].— *Pour $0 \leq r < p-1$, il existe un système projectif d'isomorphismes*

$$s_n^{\log}(r) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq r}\bar{i}_*\bar{i}^*R\bar{j}_*(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}(r))$$

*dans la catégorie dérivée des $G$-faisceaux étales sur $\bar{X}$, où $\tau$ est la troncation canonique.*

La variante "sans pôles logarithmiques" de 4.3.3.3 a été établie par Kurihara [53], à l'aide de résultats antérieurs de Bloch-Kato [7] et Kato [46] sur le calcul des cycles évanescents $p$-adiques. Dans le cas de réduction semi-stable, Kato utilise, à leur place, ceux de Hyodo [39].

Par le théorème de changement de base propre, on déduit de 4.3.3.3 un isomorphisme

$$H^m(\bar{X}, s_n^{\log}(r)) \xrightarrow{\sim} H^m(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{Z}/p^n(r)) \tag{4.3.3.4}$$

pour $0 \leq m \leq r < p-1$. Cet isomorphisme est $G$-équivariant, et compatible aux produits (il y a un produit naturel $s_n^{\log}(r)\overset{L}{\otimes}s_n^{\log}(s) \to s_n^{\log}(r+s)$ pour $0 \leq r+s < p$).

**4.3.4.** *Définition de $\alpha_{st}$ et fin de la démonstration*

Soit $0 \leq m \leq r < p-1$. On déduit de (4.3.3.2) et (4.3.3.4) une flèche

$$H^m(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{Z}/p^n(r)) \longrightarrow H^m((\bar{X}_n, \bar{M}_n)/W_n)_{\varphi=p^r},$$

d'où, par application de $\mathbf{Q} \otimes \varprojlim$, une flèche ($G$-équivariante)

$$H^m(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{Q}_p)(r) \longrightarrow \mathbf{Q} \otimes \varprojlim H^m((\bar{X}_n, \bar{M}_n)/W_n)_{\varphi=p^r}.$$

Grâce à (4.3.2.1), cette flèche se récrit

$$H^m(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{Q}_p)(r) \longrightarrow \left(B_{st}^+ \otimes_{K_0} H_{st}^m(X)\right)_{N=0,\varphi=p^r}.$$

Tensorisant par $\mathbf{Q}_p(-r)$ (*cf.* 1.2.2, 1.2.3), on obtient une flèche

$$H^m(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{Q}_p) \longrightarrow \left(B_{st}^+ \otimes_{K_0} H_{st}^m(X)\right)_{N=0,\varphi=1}$$

(qui, pour $m$ fixé, ne dépend pas du choix de $r$). Par extension des scalaires, on en déduit finalement

$$\text{(4.3.4.1)} \qquad \beta_{st} : B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} H^m(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{Q}_p) \longrightarrow B_{st} \otimes_{K_0} H_{st}^m(X),$$

compatible à $\varphi$, $N$, et à l'action de $G$. On vérifie que $\beta_{st}$ est compatible à la dualité de Poincaré (ce qui nécessite l'hypothèse $2d < p-1$, où $d = \dim X_K$), d'où par l'argument habituel, la bijectivité de $\beta_{st}$. Une généralisation au cas logarithmique d'un résultat de Kato-Messing [51] permet de montrer que la flèche obtenue par extension des scalaires à $B_{DR}$ est compatible aux filtrations, et cela termine la démonstration ($\alpha_{st}$ est l'inverse de $\beta_{st}$).

**Problème 4.3.5.**— On dispose, finalement, de plusieurs isomorphismes de périodes $p$-adiques, obtenus par diverses méthodes :

(1) la décomposition de Hodge-Tate (2.1.3.2) pour $m = 1$ et $X$ une variété abélienne sur $K$, donnée par Tate [70] et Raynaud (*cf.* [9]) ;

(2) les décompositions analogues données par Fontaine [24] et Coleman [R.F. Coleman, Hodge-Tate periods and $p$-adic abelian integrals, Inv. math. 78 (1984), 351-379] ;

(3) la décomposition de Hodge-Tate (2.1.3.2) donnée par Bloch et Kato [7] pour $X$ ayant bonne réduction ordinaire, et sa généralisation par Hyodo [39] au cas de réduction semi-stable ordinaire ;

(4) la décomposition de Hodge-Tate (2.1.3.2) donnée par Faltings [19] (l'inverse de l'isomorphisme $\beta$ (3.5.2.3) dans le cas de bonne réduction) ;

(5) l'isomorphisme $\alpha_{cris}$ (2.2.2) construit par Fontaine et Messing [31], pour $\dim X < p$ et $K = K_0$ ;

(6) l'isomorphisme $\alpha_{cris}$ (2.2.2) construit par Faltings [20] (voir (3.6.1) ;

(7) l'isomorphisme $\alpha_{DR}$ (2.1.2) (voir 3.6.2) ;

(8) l'isomorphisme $\alpha_{st}$ (4.2.2) construit par Kato [48], pour $X_K$ ayant réduction semi-stable et $2 \dim X_K < p - 1$.

Il serait intéressant de comparer ces isomorphismes. A la connaissance du rapporteur, les seules compatibilités à figurer dans la littérature sont la comparaison entre les deux décompositions (2) dans Coleman *loc. cit.*, et la comparaison entre (1) et (2) dans [24].

(Ajouté en juillet 1990) Faltings m'informe qu'il vient de vérifier les compatibilités entre (1), (4), (6) et (7) (celle entre (1) et (4) vient d'être également vérifiée, indépendamment, par Wintenberger).

## BIBLIOGRAPHIE

[1] V.-A. ABRASHKIN - *Galois moduli of period p group schemes over a ring of Witt sectors*, Math. USSR Izvestia 31 (1988), 1-46.

[2] M. ARTIN and G. WINTERS - *Degenerate fibers and reduction of curves*, Topology 10 (1971), 373-383.

[3] A. BEILINSON - *Higher regulators and values of L-functions*, Soviet Math. 30 (1985), 2036-2070.

[4] P. BERTHELOT - *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$*, Lecture Notes in Math. 407, Springer-Verlag, 1974.

[5] P. BERTHELOT et A. OGUS - *Notes on crystalline cohomology*, Math. Notes, Princeton University Press, 1978.

[6] P. BERTHELOT and A. OGUS - *F-isocrystals and de Rham cohomology* I, Inv. Math. 72 (1983), 159-199.

[7] S. BLOCH and K. KATO - *p-adic étale cohomology*, Pub. Math. IHES 63 (1986), 107-152.

[8] S. BLOCH and K. KATO - *L-functions and Tamagawa numbers of motives*, à paraître dans Grothendieck Festschrift, Progress in Math., Birkhäuser, 1990.

[9] F. BOGOMOLOV - *Sur l'algébricité des représentations $\ell$-adiques*, C.R.A.S. Paris 290 (1980), 701-703.

[10] C.-L. CHAI and G. FALTINGS - *Semi-abelian degeneration and compactification*, preprint, 1989.

[11] L. CLOZEL - *Nombres de Tamagawa des groupes semi-simples*, d'après

Kottwitz, Sém. Bourbaki, Nov. 1988, exp. n° 702, Astérisque 177-178 (1989), 61-82.

[12] P. DELIGNE - *Théorie de Hodge* II, Publ. Math. IHES 40 (1972), 5-57.

[13] P. DELIGNE - *Théorie de Hodge* III, Publ. Math. IHES 44 (1974), 5-77.

[14] P. DELIGNE - *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales* Proc. Symp. Pure Math. 33 (1979), AMS, 313-346.

[15] P. DELIGNE - *Hodge cycles on abelian varieties* dans Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties, Lecture Notes in Math. 900, Springer-Verlag, 1982.

[16] P. DELIGNE - Lettre à L. Illusie, 1.6.1988.

[17] P. DELIGNE et L. ILLUSIE - *Relèvements modulo $p^2$ et décomposition du complexe de de Rham*, Inv. Math. 72 (1987), 247-270.

[18] P. DELIGNE et D. MUMFORD - *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. Math. IHES 36 (1969), 75-109.

[19] G. FALTINGS - *p-adic Hodge theory*, Journal of the AMS 1 (1988), 255-299.

[20] G. FALTINGS - *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations*, preprint, 1988.

[21] G. FALTINGS - *F-isocrystals on open varieties, results and conjectures*, à paraître dans Grothendieck Festchrift, Progress in Math., Birkhäuser, 1990.

[22] J.-M. FONTAINE - *Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate*, dans Journées de géométrie algébrique de Rennes (III), Astérisque 65 (1979), 3-80.

[23] J.-M. FONTAINE - *Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate*, Ann. of Math. 115 (1982), 529-577.

[24] J.-M. FONTAINE - *Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux*, Inv. Math. 65 (1982), 379-409.

[25] J.-M. FONTAINE - *Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p-adiques*, dans Algebraic Geometry Tokyo-Kyoto, Lecture Notes in Math. 1016, Springer-Verlag (1983), 86-108.

[26] J.-M. FONTAINE - *Il n'y a pas de variété abélienne sur* $\mathbf{Z}$, Inv. Math. 81 (1985), 515-538.

[27] J.-M. FONTAINE - *Le corps des périodes p-adiques*, preprint, à paraître dans [Bures].

[28] J.-M. FONTAINE - *Représentations p-adiques semi-stables*, preprint, à paraître dans [Bures].

[29] J.-M. FONTAINE et L. ILLUSIE - *p-adic periods, a survey*, Indo-French conf. on geometry, Bombay, 1989, à paraître.

[30] J.-M. FONTAINE et G. LAFFAILLE - *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Sc. ENS 15 (1982), 547-608.

[31] J.-M. FONTAINE and W. MESSING - *p-adic periods and p-adic étale cohomology*, Contemporary Mathematics 67 (1987), 179-207.

[32] J.-M. FONTAINE et B. MAZUR - *Représentations ℓ-adiques potentiellement semi-stables*, preprint, à paraître dans [Bures].

[33] J.-M. FONTAINE et B. PERRIN-RIOU - *Cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L (autour de Bloch-Kato)*, en préparation.

[34] H. GILLET and W. MESSING - *Cycle classes and Riemann-Roch for crystalline cohomology*, Duke Math. J. 55 (1987), 501-538.

[35] B. GROSS - *On the periods of Abelian integrals and a formula of Chowla and Selberg*, Inv. Math. 45 (1978), 193-211.

[36] A. GROTHENDIECK - *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux*, Actes Congrès Int. Math. Nice 1970, I, Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[37] A. GROTHENDIECK - *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné*, Presses de l'Université de Montréal, 1974.

[38] O. HYODO - *On variation of Hodge-Tate structures*, preprint, 1987.

[39] O. HYODO - *A note on p-adic étale cohomology in the semi-stable reduction case*, Inv. Math. 91 (1988), 543-557.

[40] O. HYODO and K. KATO - *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles*, preprint, à paraître dans [Bures].

[41] L. ILLUSIE - *Report on crystalline cohomology*, Proc. Symp. Pure Math. XXIX (1975), 459-478.

[42] L. ILLUSIE - *Cohomologie cristalline, d'après P. Berthelot*, Sém. Bourbaki, exp. n° 456, Lecture Notes in Math. 514, Springer-Verlag, 1976.

[43] L. ILLUSIE - *Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline*, Ann. Sc. ENS 12 (1979), 501-661.

[44] L. ILLUSIE - *Réduction semi-stable et décomposition de complexes de de Rham à coefficients*, Duke Math. J. 60 (1990), 139-185.

[45] U. JANNSEN - *On the $\ell$-adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology*, preprint, 1988.

[46] K. KATO - *On p-adic vanishing cycles (application of ideas of Fontaine-Messing)*, Advanced Studies in Pure Math. 10 (1987), 207-251.

[47] K. KATO - *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, Algebraic analysis, Geometry and Number Theory, The Johns Hopkins Univ. Press (1989), 191-224.

[48] K. KATO - *Semi-stable reduction and p-adic étale cohomology*, preprint, à paraître dans [Bures].

[49] K. KATO - *Logarithmic degeneration and Dieudonné theory*, preprint, 1989.

[50] K. KATO - *Toric singularities*, preprint, 1990.

[51] K. KATO and W. MESSING - *Syntomic cohomology and p-adic étale cohomology*, preprint, 1989.

[52] G. KEMPF, F. KNUDSEN, D. MUMFORD and B. SAINT-DONAT - *Toroidal embeddings* I, Lecture Notes in Math. 339, Springer-Verlag, 1973.

[53] M. KURIHARA - *A note on p-adic étale cohomology*, Proc. Japan Academy 63 (1987), 275-278.

[54] B. MAZUR, J. TATE and J. TEITELBAUM - *On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer*, Inv. Math. 84 (1986), 1-48.

[55] M. NAGATA - *Imbedding of an abstract variety in a complete variety*, J. Math. Kyoto 2 (1962), 1-10.

[56] A. OGUS - *Hodge cycles and crystalline cohomology*, dans Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties, Lecture Notes in Math. 900, Springer-Verlag, 1982.

[57] A. OGUS - *F-isocrystals and de Rham cohomology* II - *convergent isocrystals*, Duke Math. J. 51 (1984), 765-850.

[58] A. OGUS - *A p-adic analogue of the Chowla-Selberg formula*, preprint, 1990.

[59] M. RAYNAUD - *Anneaux locaux henséliens*, Lecture Notes in Math 169, Springer-Verlag, 1970.

[60] M. RAYNAUD - *Réalisation de de Rham des 1-motifs*, à paraître dans [Bures].

[61] M. RAPOPORT, N. SCHAPPACHER, P. SCHNEIDER (eds) - *Beilinson's conjectures on special values of L functions*, Perspectives in Math. 4, Academic Press, New York, 1988.

[62] S. SEN - *Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules*, Ann. of Math. 97 (1973), 160-170.

[63] J.-P. SERRE - *Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p-divisibles*, Proc. of a Conf. on local fields, Driebergen 1966, Springer-Verlag (1967), 118-131.

[64] J.-P. SERRE - Résumé des cours 1965-66, dans Annuaire du Collège de France, Paris, 1967, 49-58.

[65] J.-P. SERRE - *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Inv. Math. 15 (1972), 259-331.

[66] J.-P. SERRE - *Groupes algébriques associés aux modules de Hodge-Tate*, Journées de géométrie algébrique de Rennes 1978, III, Astérisque 65 (1979), 155-188.

[67] J.-P. SERRE - *Motifs*, Journées arithmétiques de Luminy 1989, à paraître dans Astérisque.

[68] J.-P. SERRE and J. TATE - *Good reduction of abelian varieties*, Ann. of Math. 88 (1968), 492-517.

[69] J. STEENBRINK - *Limits of Hodge structures*, Inv. Math. 31 (1976), 229-257.

[70] J. TATE - *p-divisible groups*, dans Proc. of a conf. on local fields, Driebergen (1967), 158-183.

[71] J.-P. WINTENBERGER - *Torseur entre cohomologie étale p-adique et cohomologie cristalline ; le cas abélien*, soumis à Duke Math. J.

[72] J.-P. WINTENBERGER - *Théorème de comparaison p-adique pour les schémas abéliens*, en préparation.

[CL] J.-P. SERRE - *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1962.

[SGA 1] *Revêtements étales et groupe fondamental*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1960-61, dirigé par A. Grothendieck, Lecture Notes in Math. 224, Springer-Verlag, 1971.

[SGA 2] *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1961-62, dirigé par A. Grothendieck, North Holland Pub. Comp., Amsterdam, 1968.

[SGA 4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963-64, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier, Lecture Notes in Math. 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972-73.

[SGA 7] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967-69, I, dirigé par A. Grothendieck, Lecture Notes in Math. 288, Springer-Verlag, 1972.

[SGA $4\frac{1}{2}$] *Cohomologie étale*, par P. Deligne, Lecture Notes in Math. 569, Springer-Verlag, 1977.

[Bures] *Périodes p-adiques*, Séminaire dirigé par J.-M. Fontaine à l'IHES, janvier-mai 1988, actes en préparation.

Luc ILLUSIE

Université de Paris-Sud
Arithmétique et géométrie algébrique
CNRS URA D0752
Bâtiment 425
F-91405 Orsay Cedex