ÉTIENNE GHYS

Les groupes hyperboliques

Astérisque, tome 189-190 (1990), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 722, p. 203-238
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1989-1990__32__203_0>

Séminaire BOURBAKI mars 1990
42ème année, 1989-90, n° 722

LES GROUPES HYPERBOLIQUES

par Étienne GHYS

La théorie combinatoire des groupes étudie les groupes infinis de *type fini*, c'est-à-dire possédant une partie génératrice finie. Jusqu'à une période assez récente, l'essentiel des méthodes utilisées par cette théorie provenait de la topologie. Le groupe est donné par une présentation et on étudie la topologie d'un polyèdre dont le groupe fondamental est le groupe donné (voir, par exemple [36]). Il y a cependant quelques exceptions dont la plus notable est l'étude par M. Dehn du groupe fondamental des surfaces pour laquelle il utilise une méthode très géométrique : il s'agit d'exploiter l'existence de métriques à courbure négative sur les surfaces compactes de genre supérieur ou égal à deux (voir [13]). Aujourd'hui, grâce aux idées de nombreux mathématiciens, ce sont les méthodes géométriques qui sont les plus fructueuses. Dans cet exposé, nous décrirons l'approche de M. Gromov ([21], [24], [25]) pour laquelle la notion de présentation passe au second plan.

L'article [25] pose les fondements de la théorie des groupes hyperboliques. Il s'agit d'une classe de groupes dont la définition sera donnée plus loin et qui généralise largement la classe des groupes fondamentaux des variétés compactes à courbure négative. Faute de place, il est impossible de rendre compte ici de l'intégralité de ces travaux. *On trouvera peu de démonstrations dans cet exposé.* Bien des aspects importants ne sont pas abordés comme les inégalités isopérimétriques ou la construction de flots géodésiques. Pour plus d'informations et de détails, le lecteur pourra consulter un certain nombre de prépublications ([3], [11], [12], [18], [38]) ainsi, bien sûr, que les articles originaux. Nous nous contenterons d'une description générale de la théorie en essayant de la placer dans son contexte. Nous insisterons par ailleurs sur un certain nombre de problèmes ouverts qui semblent importants pour le développement futur.

Ma compréhension de ce sujet est due en grande partie à un séminaire organisé à Berne par le troisième cycle romand. Je tiens à en remercier tous les participants et tout particulièrement Norbert A'Campo, André Haefliger et Pierre de la Harpe. Je remercie également Jean Barge et Christophe Bavard pour leurs conseils.

1. LA MÉTRIQUE DES MOTS ET SA GÉOMÉTRIE

1.1. Soit Γ un groupe de type fini et $S \subset \Gamma$ une partie génératrice finie. Si γ est un élément de Γ , sa *longueur par rapport à* S, notée $\|\gamma\|_S$, est la longueur minimale d'un mot en les éléments de S ou leurs inverses représentant γ. On définit la distance $d_S(\gamma_1, \gamma_2)$ entre deux éléments γ_1 et γ_2 de Γ comme étant égale à $\|\gamma_1^{-1}\gamma_2\|_S$. Le groupe Γ, muni de d_S, devient ainsi un espace métrique homogène car les translations à gauche de Γ sont évidemment des isométries.

L'inconvénient principal de cette métrique des mots est bien sûr qu'elle dépend du choix de S . Pour tenir compte de cette dépendance, on introduit la définition suivante, qui remonte à G.A. Margulis .

DÉFINITION.— *Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques. Une quasi-isométrie entre ces espaces est la donnée de deux applications $f : X_1 \to X_2$ et $g : X_2 \to X_1$ et de constantes $C \geq 0$ et $\lambda > 0$ vérifiant, pour tous x_1, x_1' de X_1 et x_2, x_2' de X_2 :*

$$d_2(f(x_1), f(x_1')) \leq \lambda\, d_1(x_1, x_1') + C \qquad d_1(g(x_2), g(x_2')) \leq \lambda\, d_2(x_2, x_2') + C$$
$$d_2(f \circ g(x_2), x_2) \leq C \qquad d_1(g \circ f(x_1), x_1) \leq C\ .$$

On dit alors que (X_1, d_1) et (X_2, d_2) sont quasi-isométriques.

Par exemple, les espaces (Γ, d_S) et $(\Gamma, d_{S'})$ sont toujours quasi-isométriques si S et S' sont deux parties génératrices finies. Il suffit de prendre pour λ la longueur maximale d'un élément d'une partie génératrice par rapport à l'autre et $C = 0$.

L'avantage de permettre une valeur non nulle pour C est le suivant. Une quasi-isométrie n'est pas nécessairement constituée d'applications continues : on n'impose aucune condition à petite distance. Par contre, il s'agit d'"homéomorphismes bi-Lipschitz à grande distance". Voici quelques exemples.

Deux espaces métriques bornés sont quasi-isométriques. On voit donc que la théorie que nous allons décrire néglige délibérément les groupes finis.

Les ensembles $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{R}$, munis de leurs métriques usuelles, sont quasi-isométriques: l'application $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ peut être le plongement naturel et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$ l'application "partie entière".

Plus généralement, on associe à un groupe Γ et à une partie génératrice finie S un *graphe de Cayley* $\mathcal{G}(\Gamma, S)$. Il s'agit du graphe dont les sommets sont les éléments de Γ et où une arête joint γ_1 à γ_2 si $d_S(\gamma_1, \gamma_2) = 1$. Ce graphe peut être muni d'une métrique naturelle, invariante par Γ, pour laquelle chaque arête est isométrique à un intervalle de longueur 1 de $\mathbf{R}$ et telle que la distance entre deux points est la plus petite longueur d'un chemin qui les joint. De même que dans le cas de $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{R}$, les espaces (Γ, d_S) et $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ sont quasi-isométriques. L'avantage de $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ est qu'il est connexe par arcs et même géodésique. Rappelons qu'un espace métrique (X, d) est *géodésique* si deux points quelconques x, y peuvent être joints par un *segment*, c'est-à-dire s'il existe un plongement isométrique $\sigma : [0, L] \to X$ avec $\sigma(0) = x$ et $\sigma(L) = y$. On note souvent $[x, y]$ l'image de σ même si, en général, cette image n'est pas déterminée par ses extrémités.

Une grande famille d'exemples de quasi-isométries est fournie par la proposition élémentaire suivante qui est implicitement connue depuis longtemps.

PROPOSITION.— *Soit Γ un groupe opérant par isométries, librement et proprement, sur l'espace métrique (X, d) supposé géodésique et propre (i.e. les boules fermées sont compactes). On suppose que le quotient X/Γ est compact. Alors, Γ est de type fini et (X, d) est quasi-isométrique à Γ muni de la distance d_S associée à n'importe quelle partie génératrice finie S.*

Exemples.— i) Le groupe fondamental d'une variété compacte V est quasi-isométrique au revêtement universel de V muni du relevé d'une métrique riemannienne quelconque de V. Par exemple, pour chaque entier n, tous les groupes fondamentaux des variétés compactes de dimension n à courbure -1 sont quasi-isométriques entre eux.

ii) un groupe de type fini Γ est quasi-isométrique à n'importe quel sous-groupe Γ_1 d'indice fini. Il suffit en effet de choisir une partie génératrice finie quelconque S pour Γ et de faire agir Γ_1 sur $\mathcal{G}(\Gamma, S)$. En particulier, deux groupes *commensurables*, c'est-à-dire possédant des sous-groupes d'indices finis isomorphes, sont quasi-isométriques.

iii) Si Γ est un sous-groupe discret d'un groupe de Lie G et si le quotient G/Γ est compact, alors Γ est quasi-isométrique au groupe G muni d'une métrique riemannienne invariante à droite quelconque. Il n'est pas difficile de trouver des exemples de sous-groupes discrets co-compacts non commensurables. Pour les groupes de type fini, la quasi-isométrie est donc une notion plus faible que la commensurabilité.

Ainsi, nous avons associé à chaque groupe de type fini Γ un espace métrique bien défini à quasi-isométrie près. L'étude de Γ se fera à travers celle de la géométrie de cet espace métrique.

1.2. Convenons de dire qu'une propriété d'un groupe de type fini est *géométrique* si elle est préservée par quasi-isométrie. Pour terminer ce paragraphe, nous allons donner deux sortes d'exemples. Tout d'abord, nous allons montrer qu'un grand nombre de propriétés bien connues, de nature algébrique, sont en fait géométriques. Ensuite, nous montrerons comment ce concept de propriété géométrique propose une nouvelle méthode pour étudier et classer les groupes : quels sont les groupes qui possèdent une géométrie donnée ?

PROPOSITION.— *La propriété d'être de présentation finie est géométrique.*

Ceci résulte du fait suivant que nous retrouverons plus loin. Soit S une partie génératrice finie du groupe Γ et n un entier naturel. On considère le polyèdre P_n de dimension 2 dont les sommets sont les éléments de Γ, dont les arêtes sont les couples (γ_0, γ_1) avec $d_S(\gamma_0, \gamma_1) \leq n$ et dont les 2-simplexes sont les triplets $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ avec $d_S(\gamma_i, \gamma_j) \leq n$ (pour $i, j = 0, 1, 2$). Alors, Γ est de présentation finie si et seulement si P_n est simplement connexe pour n assez grand. Il n'est pas difficile de vérifier la nature géométrique de cette caractérisation.

THÉORÈME.— *La propriété d'être virtuellement nilpotent est géométrique.*

Rappelons qu'une propriété est satisfaite virtuellement si elle est satisfaite par un sous-groupe d'indice fini. Ce théorème est un corollaire immédiat du résultat de M. Gromov ([23], [41]) selon lequel un groupe Γ est virtuellement nilpotent si et seulement si la fonction $e(n) = Card\{\gamma \in \Gamma\,,\ \|\gamma\|_S \leq n\}$ est à croissance polynomiale.

Soit Γ un groupe nilpotent de type fini. On sait que, à indice fini près, on peut toujours supposer Γ sans torsion [34]. Dans ce cas, il existe un groupe de Lie nilpotent simplement connexe $\Gamma \otimes \mathbf{R}$, canoniquement associé à Γ, qui contient Γ comme sous-groupe discret co-compact [34]. Ce groupe de Lie nilpotent $\Gamma \otimes \mathbf{R}$ n'est pas en général gradué mais on peut considérer le gradué associé $(\Gamma \otimes \mathbf{R})_{\mathrm{grad}}$ qui est un groupe de Lie nilpotent de même dimension. P. Pansu démontre le résultat suivant [33] :

THÉORÈME.— *Soit Γ_1 et Γ_2 deux groupes nilpotents de type fini, sans torsion. Si Γ_1 et Γ_2 sont quasi-isométriques, les groupes de Lie gradués associés $(\Gamma_1 \otimes \mathbf{R})_{\mathrm{grad}}$ et $(\Gamma_2 \otimes \mathbf{R})_{\mathrm{grad}}$ sont isomorphes.*

La démonstration, qu'il n'est pas possible de reproduire ici, est fondée sur les faits suivants. On se fixe une partie génératrice finie S_1 pour Γ_1 et on considère la suite d'espaces métriques $(\Gamma_1, \frac{1}{n}\, d_{S_1})$. Il s'avère que cette suite d'espaces converge, dans la topologie de Hausdorff-Gromov pointée [22] vers $(\Gamma_1 \otimes \mathbf{R})_{\mathrm{grad}}$ muni d'une "métrique de Carnot-Carathéodory" explicite [32]. Si l'on suppose que Γ_1 et Γ_2 sont quasi-isométriques, l'influence de la constante C intervenant dans la quasi-isométrie disparaît à la limite et $(\Gamma_1 \otimes \mathbf{R})_{\mathrm{grad}}$ et $(\Gamma_2 \otimes \mathbf{R})_{\mathrm{grad}}$ sont homéomorphes par un homéomorphisme bi-Lipschitz. P. Pansu généralise à ce contexte le théorème de Rademacher et montre qu'un tel homéomorphisme ne peut exister que si $(\Gamma_1 \otimes \mathbf{R})_{\mathrm{grad}}$ et $(\Gamma_2 \otimes \mathbf{R})_{\mathrm{grad}}$ sont isomorphes.

Voici un cas particulier (dont la démonstration utilise le théorème de M. Gromov sur la croissance et la première partie de la preuve du théorème précédent).

COROLLAIRE.— *La propriété d'être virtuellement abélien est géométrique.*

Problème.— *Donner une preuve "élémentaire" de ce corollaire.*

Peut-on aller plus loin que le théorème de P. Pansu ?

Problème.— *Soient Γ_1 et Γ_2 deux groupes nilpotents de type fini, sans torsion, quasi-isométriques. Peut-on affirmer que les groupes de Lie $(\Gamma_1 \otimes \mathbf{R})$ et $(\Gamma_2 \otimes \mathbf{R})$ qui les contiennent comme réseaux co-compacts sont isomorphes ?*

La propriété généralisant la nilpotence est bien sûr la résolubilité.

Problème.— *La propriété d'être virtuellement résoluble (resp. virtuellement polycyclique) est-elle géométrique ?*

Le cas de la moyennabilité, généralisant la résolubilité, est beaucoup plus facile à traiter.

PROPOSITION.— *La moyennabilité est une propriété géométrique.*

Ceci résulte du critère de moyennabilité de Følner [20]. Soit Γ un groupe de type fini, S une partie génératrice finie et A une partie finie quelconque de Γ. On appelle frontière de A, et on note $\mathrm{fr}(A)$, l'ensemble des éléments γ de A tels qu'il existe s de $S \cup S^{-1}$ avec $\gamma . s$ hors de A. Le groupe Γ est moyennable si et seulement si il existe une suite de parties finies A_n telle que $\mathrm{card}\,\mathrm{fr}(A_n) \,/\, \mathrm{card}\, A_n$ tende vers 0.

Examinons maintenant quelques propriétés "opposées" à la moyennabilité.

PROPOSITION.— *La propriété d'être virtuellement libre est géométrique.*

Nous donnons plus loin une indication sur la preuve : elle utilise la "technique hyperbolique".

Problème.— *Donner une démonstration "élémentaire" de ce dernier résultat.*

THÉORÈME.— *Si un groupe sans torsion Γ est quasi-isométrique à un produit libre de deux groupes sans torsion non triviaux, alors Γ est lui-même un produit libre non trivial.*

Il suffit d'utiliser le théorème de J. Stallings décrivant les groupes ayant une infinité de bouts et de constater que la notion de bouts d'un groupe est géométrique.

Voici encore un exemple de propriété "anti-moyennable" pour laquelle on aimerait disposer d'une définition géométrique.

Problème.— *La propriété T de Kazdan (voir* [27], [28]) *est-elle géométrique ?*

1.3. Nous venons de voir qu'un certain nombre de propriétés algébriques sont géométriques. Ceci suggère d'inverser la démarche et d'essayer de classer les groupes par leur géométrie. On se fixe un espace métrique (X, d). Quels sont les groupes de type fini quasi-isométriques à (X, d) ? Les premiers exemples à considérer sont bien sûr les espaces riemanniens symétriques. Seul le cas non compact nous intéresse. Commençons par le rang 1. Le premier résultat est une reformulation d'un exemple vu plus haut. Notons qu'il généralise le théorème de Bierberbach décrivant la structure des groupes cristallographiques.

THÉORÈME.— *Si un groupe de type fini est quasi-isométrique à un espace euclidien, il contient un sous-groupe abélien d'indice fini.*

THÉORÈME.— *Soit Γ un groupe quasi-isométrique à l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^n$ ($n \geq 3$). Alors, Γ est une extension finie d'un sous-groupe discret co-compact d'isométries de $\mathbf{H}^n$.*

Nous donnerons plus loin une indication sur la preuve de ce théorème. Dans le cas $n = 3$, il est dû à M. Gromov et D. Sullivan ([21] et [39]) (voir aussi la prépublication de J.W. Cannon et D. Cooper ([7] et [8]). Le cas $n \geq 4$ est dû à M. Gromov et P. Tukia ([21] et [42]). Le cas $n = 2$ n'est que partiellement résolu : d'après P. Tukia [43], le même énoncé est cependant valable si Γ est sans torsion.

Problème.— *Le problème précédent est-il valable si* $n = 2$?

Selon P. Pansu [33], la démonstration du théorème précédent s'étend aux autres espaces riemanniens symétriques non compacts de rang 1.

THÉORÈME.— *Soit* Γ *un groupe de type fini quasi-isométrique à l'espace hyperbolique complexe ou quaternonien ou au plan hyperbolique sur les octaves de Cayley. Alors,* Γ *est une extension finie d'un groupe discret cocompact d'isométries de cet espace symétrique.*

Problème.— *Quels sont les groupes quasi-isométriques aux espaces riemanniens symétriques de rang supérieur à* 1, *par exemple* $SL(3,\mathbf{R})/SO(3,\mathbf{R})$?

Ce type de question n'est pas seulement intéressant en ce qui concerne les espaces symétriques. Rappelons que huit variétés riemanniennes simplement connexes de dimension trois sont fondamentales pour la description des variétés compactes de dimension 3. Ce sont :

i) les espaces euclidiens, hyperboliques et sphériques : $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{H}^3$, $\mathbf{S}^3$;

ii) les produits $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ et $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$;

iii) trois groupes de Lie simplement connexes munis de métriques riemanniennes invariantes. Le premier est le groupe de Heisenberg, noté ici **Nil**, et formé des matrices réelles du type $\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le second, noté **Sol**, est le groupe résoluble formé des matrices $\begin{pmatrix} \exp(z) & 0 & x \\ 0 & \exp(-z) & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le troisième est le revêtement universel de $SL(2,\mathbf{R})$.

Ces variétés sont (presque) caractérisées par le fait que leurs groupes d'isométries opèrent transitivement sur les points (voir [35]). W. Thurston conjecture que toute variété compacte de dimension 3 peut se décomposer en "morceaux" uniformisables par l'une de ces géométries. Pour cette raison, le problème suivant mérite l'attention.

Problème.— *Quels sont les groupes quasi-isométriques à l'une de ces huit géométries ?*

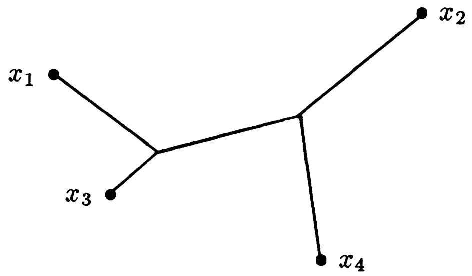
Nous avons déjà répondu à cette question dans le cas de $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{H}^3$, **Nil**. Le problème est facile dans le cas de $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$. Il est trivial et sans intérêt dans le cas de $\mathbf{S}^3$. Les cas de $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$, **Sol** et $\widetilde{SL}(2, \mathbf{R})$ restent ouverts. G. Mess m'a fait remarquer que $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ et $\widetilde{SL}(2, \mathbf{R})$ sont quasi-isométriques.

2. LES ESPACES MÉTRIQUES HYPERBOLIQUES

Conformément à la méthode que nous venons de décrire, nous allons présenter dans ce paragraphe la classe des espaces métriques hyperboliques, proches des variétés à courbure négative. Cette classe est invariante par quasi-isométrie et servira de base à la notion de groupe hyperbolique.

Considérons un arbre T, c'est-à-dire un graphe connexe sans cycle et associons à chaque arête a de T un réel strictement positif $\ell(a)$. On peut alors munir T d'une métrique d qui en fait un espace métrique géodésique et pour laquelle chaque arête a est isométrique à l'intervalle $[0, \ell(a)]$ de $\mathbf{R}$; on parle alors d'*arbre métrique.*

Dans un tel arbre métrique T, deux points quelconques sont joints par un unique segment. Considérons quatre points x_1, x_2, x_3, x_4 de T et les segments qui les joignent deux à deux. On obtient une figure du genre suivant :



On constate donc que, à une renumérotation des indices près, on a :

$$d(x_1, x_2) + d(x_3, x_4) = d(x_1, x_4) + d(x_2, x_3) \ .$$

On dira qu'un espace métrique est hyperbolique s'il vérifie une telle relation à une constante additive près. Plus précisément :

DÉFINITION.— *Un espace métrique (X, d) est hyperbolique s'il existe une constante $\delta \geq 0$ telle que :*

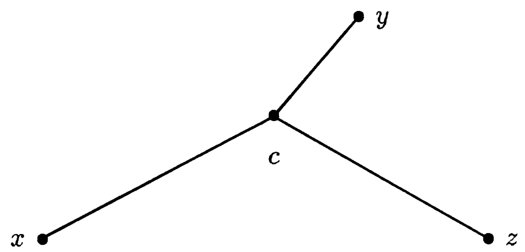
$$d(x_1, x_2) + d(x_3, x_4) \leq \max\{d(x_1, x_4) + d(x_2, x_3)\, ,\ d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4)\} + 2\delta$$

pour tout quadruplet $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ de points de X. On dira parfois que X est δ-hyperbolique si l'on veut préciser la valeur de δ.

Bien sûr, un arbre métrique est un espace métrique 0-hyperbolique. La réciproque est presque vraie : il n'est pas difficile de s'assurer qu'un espace métrique 0-hyperbolique *fini* est isométrique à une partie d'un arbre métrique. Pour les espaces métriques infinis, il faut faire appel à la notion plus générale d'arbre réel (voir [37]).

M. Gromov donne beaucoup de définitions équivalentes de l'hyperbolicité. Nous nous contenterons de deux d'entre elles qui ont l'avantage d'être très intuitives.

Considérons tout d'abord trois points x, y, z dans un arbre métrique :



On voit que la distance entre x et le "centre" c du triangle $\{x, y, z\}$ est $\frac{1}{2}\left(d(x,y) + d(x,z) - d(y,z)\right)$. Cette dernière quantité a un sens si x, y, z sont trois points d'un espace métrique quelconque. Elle se note $(y/z)_x$ et nous l'appellerons le *produit de Gromov de y et z relatif à x.* L'énoncé suivant n'est qu'une reformulation de la définition ; il montre un aspect "quasi-ultramétrique" des espaces métriques hyperboliques.

DÉFINITION.— *Un espace métrique (X, d) est hyperbolique s'il existe une constante $\delta \geq 0$ telle que, pour tous x_1, x_2, x_3, w de X, on ait :*

$$(x_1 \,|\, x_3)_w \geq \min\left((x_1 \,|\, x_2)_w \,,\, (x_2 \,|\, x_3)_w\right) - \delta \,.$$

Voici encore une définition (bien sûr équivalente aux précédentes !).

DÉFINITION.— *Un espace géodésique (X, d) est hyperbolique s'il existe une constante $\delta \geq 0$ telle que pour tout triplet (x, y, z) de points de X et tous choix de segments $[x, y]$, $[y, z]$, $[z, x]$, on ait la propriété suivante. Tout point de $[x, y]$ est à distance inférieure à δ d'un point de la réunion $[y, z] \cup [z, x]$. On exprime cette propriété en disant que les triangles de X sont δ-fins.*

Cette définition, la plus intuitive, permet de trouver une grande famille d'exemples.

PROPOSITION.— *Soit V une variété riemannienne simplement connexe complète à courbure sectionnelle inférieure à $-k^2 < 0$. Alors, V est un espace métrique hyperbolique.*

La preuve résulte des théorèmes de comparaison de Alexandrov-Toponogov qui montrent qu'un triangle de V est plus fin qu'un triangle correspondant de l'espace hyperbolique à courbure constante $-k^2$. Il faut encore vérifier que les triangles de ce dernier espace hyperbolique sont uniformément fins, mais ceci est élémentaire.

Bien sûr, les espaces métriques hyperboliques ne se limitent pas aux variétés à courbure négative. Par exemple, considérons la réunion disjointe de deux variétés V_1 et V_2 simplement connexes à courbure -1 et identifions un point x_1 de V_1 avec un point x_2 de V_2. L'espace X ainsi obtenu peut être muni d'une métrique géodésique pour laquelle les plongements de V_1 et V_2 sont isométriques. Il est facile d'analyser les triangles de X et de vérifier que cet espace est hyperbolique.

Plus généralement, on peut dégager une notion de polyèdre à courbure négative qui produit beaucoup d'exemples. Nous n'expliciterons que le cas de dimension 2. Soit P un polyèdre localement fini de dimension 2. On munit chaque face de P d'une métrique qui la rend isométrique à un triangle du plan hyperbolique $\mathbf{H}^2$. On suppose que ces métriques sont compatibles sur les arêtes. Le polyèdre P peut alors être muni d'une structure d'espace métrique géodésique en définissant la distance entre deux points par la borne inférieure des longueurs des chemins qui les joignent. Nous allons énoncer une condition simple qui garantit l'hyperbolicité de cet espace.

Soit p un sommet de P. Le "link" de p est un graphe dont chaque arête correspond à un triangle de P ayant p comme sommet. Ainsi, ce "link" est muni d'une métrique provenant de l'angle de ces triangles en p. Nous dirons que P est à *courbure inférieure à* -1 si, pour tout sommet p de P, toute courbe fermée simple dans le "link" de p est de longueur supérieure ou égale à 2π.

THÉORÈME.— *Soit P un polyèdre localement fini, de dimension 2, simplement connexe, équipé d'une métrique comme ci-dessus à courbure inférieure à -1. Alors, P est un espace métrique hyperbolique.*

2.2. Les espaces métriques hyperboliques ont presque toutes les propriétés des espaces hyperboliques $\mathbf{H}^n$. Un exemple important est donné par l'étude des quasi-géodésiques.

DÉFINITION.— *Soient (X,d) un espace métrique et $\lambda > 0$, $C \geq 0$ deux constantes. Une (λ, C)-quasi-géodésique est une application f (pas nécessairement continue) d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ vers X telle que :*

$$\frac{1}{\lambda}|t_2 - t_1| - C \leq d(f(t_1), f(t_2)) \leq \lambda\,|t_2 - t_1| + C$$

pour tous t_1, t_2 de I.

Par exemple, l'image d'un segment de X par une (λ, C)-quasi-isométrie est une (λ, C)-quasi-géodésique. Le comportement de ces (λ, C)-quasi-géodésiques est le même qu'en géométrie hyperbolique habituelle.

THÉORÈME.— *Pour tous $\delta \geq 0$, $\lambda > 0$, $C \geq 0$, il existe une constante K ayant la propriété suivante. Soit $f : I \to X$ une (λ, C)-quasi-géodésique d'un espace métrique géodésique δ-hyperbolique. Alors, si $[a, b]$ est un intervalle contenu dans I, la distance de Hausdorff entre $f([a, b])$ et n'importe quel segment $[f(a), f(b)]$ est inférieure à K.*

La démonstration s'inspire de la démonstration classique (voir, par exemple [40]). Notons que ce théorème est évident pour les arbres : une quasi-isométrie d'un arbre ne peut faire "d'allers et retours" trop longs et ne peut donc s'éloigner trop d'un segment.

Voici un corollaire important pour la théorie.

COROLLAIRE.— *Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques géodésiques quasi-isométriques. Si (X_1, d_1) est hyperbolique, il en est de même pour (X_2, d_2).*

Fixons en effet $f : X_1 \to X_2$ et $g : X_2 \to X_1$ les applications dont l'existence est assurée par la quasi-isométrie entre X_1 et X_2. On suppose X_1 δ-hyperbolique. Soient $[x, y]$, $[y, z]$, $[z, x]$ trois segments de X_2 joignant x, y, z. Les images $g([x, y])$, $g([y, z])$ et $g([z, x])$ sont trois (λ, C)-quasi-géodésiques qui sont à distance inférieure à K de segments $[g(x), g(y)]$, $[g(y), g(z)]$ et $[g(z), g(x)]$. La δ-hyperbolicité de X_1 permet de montrer que tout point de $g([x, y])$ est à distance inférieure à $4\delta + 2K$ de $g([y, z]) \cup g([z, x])$. En appliquant f, on obtient la $(\lambda(4\delta + 2K) + C)$-finesse du triangle x, y, z.

Ce corollaire montre bien la différence entre l'hyperbolicité et la courbure négative. Par exemple, le produit riemannien du plan hyperbolique $\mathbf{H}^2$ avec la sphère $\mathbf{S}^2$ est hyperbolique car quasi-isométrique à $\mathbf{H}^2$, mais ne peut pas être muni d'une métrique riemannienne à courbure négative. La notion d'hyperbolicité ne tient pas compte de la nature locale de la métrique. C'est pour cette raison que M. Gromov utilise dans [21] le terme "coarse hyperbolicity".

3. LES GROUPES HYPERBOLIQUES

3.1. Le lecteur aura deviné la définition suivante.

DÉFINITION.— *Un groupe de type fini* Γ *est hyperbolique si l'espace métrique* (Γ, d_S) *est hyperbolique pour une partie génératrice finie* S.

Il est clair maintenant que cette propriété ne dépend pas du choix de S ; l'hyperbolicité d'un groupe est une propriété géométrique.

Exemples : i) Un groupe libre est hyperbolique car son graphe de Cayley pour un système libre de générateurs est un arbre.

ii) Le groupe fondamental d'une variété compacte V à courbure négative est hyperbolique car il est quasi-isométrique au revêtement universel de V.

iii) Le groupe fondamental d'un polyèdre fini à courbure négative est hyperbolique.

iv) Un produit libre de deux groupe hyperboliques est hyperbolique (c'est un exercice facile).

La classe des groupes hyperboliques généralise l'importante notion de groupes à petite simplification $C'(1/6)$. Nous en rappelons rapidement la définition.

Soit $(S; R)$ une présentation d'un groupe Γ. Autrement dit, les éléments de R sont des mots en $S \cup S^{-1}$ et le groupe Γ est isomorphe au quotient du groupe libre de base S par le sous-groupe normal engendré par R. On suppose S et R finis. On peut toujours supposer que R est stable par passage à l'inverse et par permutations cycliques. Un mot m en $S \cup S^{-1}$ est une *pièce* si m est un préfixe commun à deux éléments distincts de R, c'est-à-dire si R contient deux éléments de la forme $r_1 = m\,m_1$ et $r_2 = m\,m_2$. Enfin, la longueur d'un mot w, c'est-à-dire le nombre de lettres qui le compose, est noté $|w|$.

DÉFINITION.— *Soit* λ *un réel positif et inférieur à* 1. *On dit que la présentation* $(S; R)$ *vérifie la condition* $C'(\lambda)$ *si pour toute pièce* m*, préfixe d'une relation* r *de* R*, on a :* $|m| < \lambda\,|r|$.

Un groupe est à petite simplification $C'(\lambda)$ *s'il possède une présentation* *vérifiant cette condition.*

Ces groupes sont très bien compris, tout spécialement lorsque $\lambda = 1/6$ (voir [16], [18], [29]). Cependant, cette notion souffre d'un certain nombre d'inconvénients. D'abord, il est difficile de déterminer si un groupe est $C'(\lambda)$ puisque cette condition peut être vérifiée pour une présentation et pas pour une autre. D'autre part, un groupe à petite simplification $C'(1/6)$ sans torsion a une dimension cohomologique inférieure à 2. Ces groupes ne rendent donc pas compte des groupes fondamentaux des variétés compactes à courbure négative de dimension supérieure ou égale à 3. La théorie des groupes hyperboliques remédie en partie à ces inconvénients. Signalons cependant (nous y reviendrons plus loin) que les groupes $C'(1/5)$ sont également intéressants mais n'entrent pas dans le cadre hyperbolique.

THÉORÈME.— *Un groupe à petite simplification* $C'(1/6)$ *est hyperbolique.*

On trouvera les détails de la démonstration dans [15] ou [18]. Disons simplement que l'idée est la suivante. La présentation $(S; R)$ de Γ permet de construire un 2-complexe fini P dont le groupe fondamental est Γ. La condition $C'(1/6)$ permet alors de montrer que le revêtement universel $\widetilde{P}$ de P est hyperbolique.

Signalons, pour compléter ces quelques exemples de groupes hyperboliques, que M. Gromov énonce un résultat qui montre que les groupes hyperboliques constituent la "majorité". Soit $N(p, q, n_1, \cdots, n_q)$ le nombre de présentations de groupes ayant p générateurs et q relateurs de longueurs $n_1, n_2, \cdots, n_q$. Soit $N_h(p, q, n_1, \cdots, n_q)$ le nombre de celles qui définissent un groupe hyperbolique. L'affirmation de "généricité" s'exprime par le fait que, p et q étant fixés, la proportion N_h/N tend vers 1 lorsque $n_1, n_2, \cdots, n_q$ tendent vers l'infini.

3.2. La première étape dans la compréhension des groupes hyperboliques est une construction due à I. Rips. Fixons toujours un groupe Γ et une partie génératrice finie S. Fixons par ailleurs un entier positif n. Le polyèdre de Rips $P_n(\Gamma)$ est le polyèdre dont les sommets sont les éléments de Γ et pour lequel $(k+1)$ éléments $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_k$ de Γ forment un k-simplexe s'ils sont distincts deux à deux et à distances relatives inférieures à n ; par exemple, le 1-squelette de $P_1(\Gamma)$ est le graphe de Cayley de (Γ, S). Il s'agit d'un polyèdre localement fini de dimension finie : les simplexes sont de dimension k inférieure au cardinal d'une boule de Γ de rayon n. L'action de Γ sur lui-même par translations à gauche se prolonge en une action de Γ sur $P_n(\Gamma)$. Cette action est propre, libre sur les sommets. Le stabilisateur de chaque point est fini et l'action est donc libre si Γ est sans torsion. Notons enfin que le quotient de $P_n(\Gamma)$ par cette action de Γ est compact.

Le théorème suivant est dû à I. Rips.

THÉORÈME.— *Si Γ est hyperbolique, $P_n(\Gamma)$ est contractile pour n assez grand.*

Avant d'esquisser la démonstration de ce théorème, donnons-en quelques corollaires.

Si Γ est sans torsion, l'espace quotient $P_n(\Gamma)/\Gamma$ est un espace d'Eilenberg-McLane qui est un polyèdre fini (après subdivision barycentrique). L'existence d'un tel espace est une propriété de finitude très intéressante (voir par exemple [4]). En particulier, Γ est de présentation finie et de dimension cohomologique finie.

Lorsque l'on ne fait pas d'hypothèse sur la torsion de Γ, on obtient les mêmes résultats "rationalisés".

COROLLAIRE.— *Soit Γ un groupe hyperbolique. Alors :* i) *Γ est de présentation finie.*

ii) *Γ ne possède qu'un nombre fini de classes de conjugaison d'éléments de torsion.*

ii) *La cohomologie rationnelle de Γ est de dimension finie.*

Esquissons la démonstration du théorème. Soit $Q \subset P_n(\Gamma)$ un sous-polyèdre fini. Nous nous proposons de construire une rétraction par déformation de Q sur un point. Parmi tous les sommets de Q, choisissons-en un, noté x, qui est plus éloigné de l'élément neutre e de Γ que tous les autres sommets *i.e.* pour tout sommet y de Q, on a :

$$d_S(e,y) \leq d_S(e,x) \ .$$

Supposons que (Γ, d_S) soit δ-hyperbolique et choisissons l'entier n supérieur à $4\delta + 2$. On suppose que $d_S(e,x) \geq n/2$ car, dans le cas contraire, Q serait un simplexe de $P_n(\Gamma)$ et il serait très facile de construire la rétraction cherchée. Soit x' un point de Γ situé sur un segment $[e,x]$ à distance $n/2$ de x (on suppose n pair pour simplifier). On a donc :

$$d_S(e,x') = d_S(e,x) - \frac{n}{2}.$$

La définition même de l'hyperbolicité, appliquée aux quatre points e, x, x', y montre le fait suivant. Si un sommet y de Q est à distance inférieure à n de x, ce même sommet est aussi à distance inférieure à n de x'.

On comprend alors comment procéder. Déplaçons le sommet x de Q vers le point x' et ne déplaçons pas les autres sommets de Q. Ceci produit une homotopie entre le plongement $Q \hookrightarrow P_n(\Gamma)$ et une application $j : Q \to P_n(\Gamma)$. On peut alors répéter l'opération sur le polyèdre $j(Q)$. Après un nombre fini d'étapes de ce genre, on aura construit une homotopie entre le plongement $Q \hookrightarrow P_n(\Gamma)$ et une application $j' : Q \to P_n(\Gamma)$ dont l'image est contenue dans la boule de centre e et de rayon $n/2$. L'application j' est alors homotope à une constante.

Signalons, pour terminer ce paragraphe, quelques questions soulevées par ce théorème.

Problème : *Un groupe hyperbolique contient-il un sous-groupe d'indice fini sans torsion ? Un groupe hyperbolique est-il résiduellement fini (rappelons qu'un groupe Γ est résiduellement fini si, pour tout γ non trivial dans Γ, il existe un sous-groupe d'indice fini qui ne contient pas γ) ?*

Problème : *La dimension cohomologique rationnelle d'un groupe* (resp. *la dimension cohomologique virtuelle*) *est-elle un invariant géométrique ? Voir* [2] *pour le cas hyperbolique.*

Le polyèdre $P_n(\Gamma)$ est certes contractile pour n assez grand mais il n'est pas muni d'une métrique naturelle. Il serait agréable de remplacer $P_n(\Gamma)$ par un espace convexe. Rappelons qu'un espace métrique (X, d) géodésique est *convexe* si pour toute paire de segments $\sigma : [a,b] \to X$ et $\sigma' : [a',b'] \to X$ la fonction distance $(t,s) \in [a,b] \times [a',b'] \mapsto d(\sigma(t), \sigma'(s))$ est convexe. Ceci entraîne bien sûr l'unicité du segment joignant deux points et démontre en particulier la contractibilité de X. Un exemple classique est fourni par les variétés simplement connexes complètes à courbure négative ou nulle.

Problème : *Soit Γ un groupe hyperbolique. Existe-t-il un espace métrique convexe (X,d), de dimension finie, tel que Γ opère proprement, par isométries de X, avec quotient compact ?*

4. LE BORD

4.1. Soit V une variété riemannienne complète, simplement connexe, à courbure sectionnelle inférieure à $-k^2 < 0$. On sait qu'il est possible de compactifier V en lui adjoignant un *bord* ∂V. Les points de ∂V correspondent aux points à l'infini des rayons géodésiques $[0,+\infty[\to V$ et deux tels rayons définissent le même point du bord s'ils sont à distance bornée. Le bord ainsi obtenu peut être naturellement muni d'une topologie ; il est homéomorphe à une sphère. Presque toute l'étude des variétés à courbure négative passe par l'étude de la géométrie de cette sphère sur laquelle agit le groupe d'isométries de V.

Cette construction ainsi que ses principales propriétés peuvent être généralisées au contexte des espaces et groupes hyperboliques.

Soit (X,d) un espace métrique δ-hyperbolique, géodésique et propre, muni d'un point base w. On dit qu'une suite (x_n) de points de X *tend vers un point à l'infini* si les produits de Gromov $(x_n \mid x_p)_w$ tendent vers l'infini lorsque n et p tendent vers l'infini. Deux telles suites (x_n) et (y_p) définissent le même point à l'infini si $(x_n \mid y_p)_w$ tend vers l'infini. L'ensemble des points à l'infini ainsi obtenu se note ∂X et s'appelle le *bord* de X. Il est facile de s'assurer que cette définition ne dépend pas du choix du point base w.

Cette définition ne diffère pas de celle que nous avons évoquée dans le cas des variétés à courbure négative. En effet, considérons un rayon géodésique issu de w, c'est-à-dire une application $g : [0,+\infty[\to X$ telle que $d(w,g(t)) = t$. La suite x_n définie par $x_n = g(n)$ vérifie évidemment la condition que $(x_n \mid x_p)_w$ tend vers l'infini. Réciproquement, si une suite de points x_n tend vers un point à l'infini, il n'est pas difficile de montrer qu'une suite de segments $[x_0, x_n]$ "tend" vers un rayon géodésique.

En d'autres termes, on peut aussi définir le bord de X comme l'ensemble des rayons où l'on identifie deux rayons s'ils sont à distance bornée.

Revenons à la première définition et montrons comment il est possible de définir une topologie sur ∂X. Si a et b sont deux points de ∂X, on pose :

$$(a \mid b)_w = \inf \varlimsup_{n,p \to \infty} (x_n \mid y_p)_w \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les suites (x_n) et (y_n) tendant respectivement vers a et b.

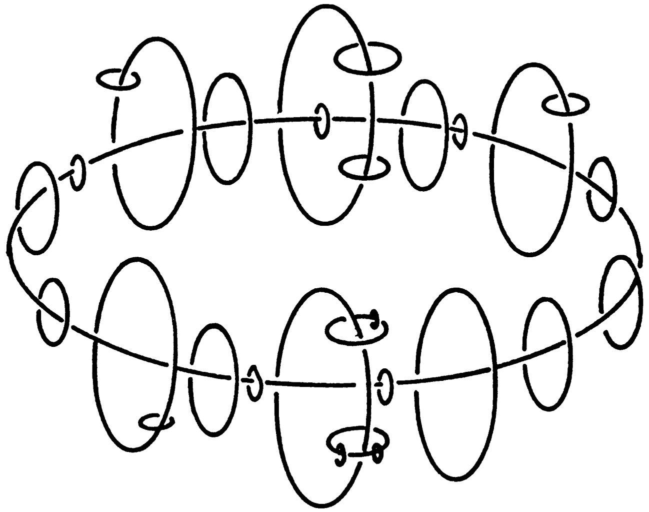
PROPOSITION.— *Les ensembles $\mathcal{U}_k = \{(a,b) \in (\partial X)^2 \,,\, (a|b)_w \geq k\}$ engendrent une structure uniforme sur ∂X. Pour la topologie correspondante, ∂X est compact.*

Exemples : i) Le bord d'une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure sectionnelle inférieure à $-k^2 < 0$ coïncide avec le bord usuel ; c'est donc une sphère.

ii) Le bord d'un arbre métrique localement fini coïncide avec l'ensemble de ses bouts (au sens de Freudenthal). En effet, dans ce cas, deux rayons de même origine ne sont à distance bornée que s'ils coïncident. Dans le cas général, l'ensemble $bt(X)$ des bouts de X et ∂X sont reliés de la façon suivante. Si (x_n) tend vers un point de ∂X, cette suite quitte tout compact et définit un bout. On obtient ainsi une application $\partial X \to bt(X)$ qui est surjective. Les fibres de cette surjection sont précisément les composantes connexes de ∂X (ce fait m'a été signalé par F. Paulin).

iii) Soit X l'espace obtenu en recollant deux disques de Poincaré sur un point. Le bord de X est la réunion disjointe de deux cercles.

iv) Il ne faut pas se laisser abuser par la simplicité des exemples précédents. Soit X l'espace obtenu en recollant deux surfaces compactes Σ_1 et Σ_2 à courbure -1 sur un point w et $\widetilde{X}$ le revêtement universel de X muni de la métrique géodésique naturelle. Il est clair que $\widetilde{X}$ est hyperbolique et que son bord s'identifie à l'ensemble des rayons géodésiques de $\widetilde{X}$ issus d'un point $\widetilde{w}$ situé au-dessus de w ou encore à l'ensemble des applications $g : [0, \infty[\to X$ localement isométriques et issues de w. Parmi ces applications, certaines ont leur image entièrement contenue dans Σ_1, produisant ainsi un cercle dans $\partial\widetilde{X}$. D'autres ont leur image contenue dans Σ_2. D'autres encore peuvent "osciller" entre Σ_1 et Σ_2 un certain nombre de fois avant de se stabiliser dans Σ_1 ou Σ_2. D'autres enfin peuvent osciller une infinité de fois entre Σ_1 et Σ_2. La figure suivante essaie de suggérer la structure de $\partial\widetilde{X}$.



Ainsi, la nouveauté par rapport aux variétés à courbure négative est le fait que le bord de X hérite d'une topologie plus complexe.

L'une des propriétés principales de ∂X est qu'il ne dépend que de la classe de quasi-isométrie de X. C'est l'idée importante de (la première partie de) la démonstration du théorème de rigidité de Mostow [31].

PROPOSITION.— *Une quasi-isométrie entre deux espaces métriques hyperboliques géodésiques et propres se prolonge en un homéomorphisme de leurs bords.*

La démonstration résulte du fait que l'image d'un rayon géodésique par une quasi-isométrie reste à distance bornée d'un rayon.

En particulier, si Γ est un groupe hyperbolique, on peut définir son *bord*

$\partial\Gamma$ comme étant le bord de l'espace métrique (Γ, d_S) (ou plus précisément du graphe de Cayley puisque nous supposons nos espaces géodésiques). Ce bord ne dépend pas du choix de la partie génératrice S.

On a ainsi associé à chaque groupe hyperbolique un espace compact $\partial\Gamma$. L'action de Γ sur lui-même par translations produit alors à l'infini une action de Γ sur $\partial\Gamma$ par homéomorphismes. C'est cette action qui permet de mieux comprendre la structure du groupe Γ.

Avant de montrer sur un exemple comment fonctionne ce programme, énonçons une proposition élémentaire.

PROPOSITION.— *Soit Γ un groupe hyperbolique*

i) *si $\partial\Gamma$ est vide, Γ est fini.*

ii) *$\partial\Gamma$ contient deux points si et seulement si Γ contient un sous-groupe cyclique infini d'indice fini.*

iii) *dans les autres cas, $\partial\Gamma$ est infini.*

Il s'agit d'abord de montrer que $\partial\Gamma$ contient au moins deux points dès que Γ est infini. Ceci résulte du fait suivant. Soit γ_n une suite infinie d'éléments distincts de Γ. Supposons, pour simplifier, que $d_S(e, \gamma_n)$ soit pair et soit α_n le milieu d'un segment $[e, \gamma_n]$. Il est clair que, par passage à une sous-suite, α_n^{-1} et $\alpha_n^{-1}\gamma_n$ définissent deux points différents de $\partial\Gamma$.

Si $\partial\Gamma$ contient exactement deux éléments, Γ a deux bouts et il est bien connu que Γ contient un sous-groupe cyclique d'indice fini.

Si $\partial\Gamma$ est fini, $\partial\Gamma$ coïncide avec l'ensemble des bouts de Γ et on sait qu'un groupe ne peut avoir que $0, 1, 2$ ou une infinité de bouts.

Voici, en application, une idée de démonstration d'un théorème déjà énoncé au premier paragraphe.

THÉORÈME.— *Un groupe Γ quasi-isométrique à un groupe libre est virtuellement libre.*

Pour simplifier, supposons Γ sans torsion. Ainsi, Γ est un groupe hyperbolique et son bord est homéomorphe à celui d'un groupe libre, c'est-à-dire un ensemble de Cantor. Il en résulte que Γ a une infinité de bouts. Les théorèmes de Stallings (sur les bouts) et de Grushko montrent alors que Γ est isomorphe à un produit libre $\Gamma_1 * \cdots \Gamma_k$ de groupes ayant au plus deux bouts. En choisissant convenablement la partie génératrice finie de Γ, on constate que le graphe de Cayley de chaque Γ_i se plonge géodésiquement dans celui de Γ. Chaque Γ_i est donc hyperbolique et son bord est contenu dans celui de Γ. Puisque Γ_i a au plus 2 bouts et que $\partial\Gamma_i$ est totalement discontinu, $\partial\Gamma_i$ contient au plus 2 points. Ceci montre que chaque Γ_i, étant sans torsion, est isomorphe à $\mathbf{Z}$. Ainsi, Γ est un groupe libre. Lorsque l'on ne fait plus d'hypothèse sur la torsion de Γ, la démonstration est un peu plus complexe mais utilise les mêmes idées.

Problème.— *Décrire la topologie de $\partial\Gamma$, tant du point de vue global que local (connexité locale si $\partial\Gamma$ est connexe, par exemple ?). Voir* [2].

4.2. Une fois la définition du bord mise au point, il n'est pas très difficile d'étendre les résultats bien classiques concernant la structure des isométries d'une variété à courbure négative. Nous ne ferons que citer le résultat obtenu dans le cas des groupes hyperboliques.

THÉORÈME.— *Soit γ un élément d'un groupe hyperbolique Γ. Deux cas sont possibles :*

i) *γ est d'ordre fini.*

ii) *L'action de γ sur $\partial\Gamma$ a précisément deux points fixes x_+ et x_-, l'un attractif et l'autre répulsif. Plus précisément, pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de x_+ (resp. x_-) et tout compact K de $\partial\Gamma - \{x_-\}$ (resp. $\partial\Gamma - \{x_+\}$, il existe un entier n_0 tel que $\gamma^n(K) \subset \mathcal{U}$ pour $n \geq n_0$ (resp. $n \leq n_0$).*

De plus, si a est un point de $\partial\Gamma$ et Γ_a le sous-groupe de Γ stabilisant a, alors Γ_a est fini ou contient un sous-groupe infini cyclique d'indice fini.

La méthode de F. Klein pour construire des groupes libres (le "lemme du ping-pong", voir [26]) entraîne le corollaire suivant qui décrit la structure des sous-groupes d'un groupe hyperbolique.

COROLLAIRE.— *Soit Γ_1 un sous-groupe d'un groupe hyperbolique. Alors, trois cas sont possibles :*

i) *Γ_1 est fini.*

ii) *Γ_1 contient un sous-groupe infini cyclique d'indice fini.*

iii) *Γ_1 contient un sous-groupe libre à deux générateurs.*

Jusqu'à présent, nous nous sommes contentés d'une topologie sur le bord ∂X. Ce bord est muni en fait d'une structure beaucoup plus riche : une structure quasi-conforme. Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Si a et b sont deux points du bord ∂X d'un espace métrique géodésique hyperbolique propre, on pose

$$\rho_\varepsilon(a,b) = \exp\left(-\varepsilon(a\,|\,b)_w\right).$$

Malheureusement, ρ_ε ne définit pas une distance sur ∂X : il ne vérifie qu'une inégalité quasi-ultramétrique :

$$\rho_\varepsilon(a,c) \leq (1+\varepsilon')\max\left(\rho_\varepsilon(a,b), \rho_\varepsilon(b,c)\right)$$

avec $\varepsilon' = \exp(\varepsilon\delta) - 1$.

Cependant, ρ_ε fait “presque” l'affaire. On pose :

$$d_\varepsilon(a,b) = \inf \sum \rho_\varepsilon(x_i, x_{i+i})$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les chaînes finies connectant a à b. On s'assure alors que, si ε est asez petit, ρ_ε et d_ε diffèrent peu :

$$(1-2\varepsilon')\,\rho_\varepsilon(a,b) \leq d_\varepsilon(a,b) \leq \rho_\varepsilon(a,b).$$

Pour ε assez petit, d_ε est donc une distance sur ∂X qui définit la topologie de ∂X.

Convenons de dire qu'un homéomorphisme f d'un espace métrique (X_1, d_1) vers (X_2, d_2) est K-quasi-conforme si, pour tout x de X_1, on a

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mathrm{Sup}\,\{d_2(f(x), f(y))\,|\,d_1(x,y) = r\}}{\mathrm{Inf}\,\{d_2(f(x), f(y))\,|\,d_1(x,y) = r\}} \leq K.$$

Nous savons qu'une isométrie d'un espace δ-hyperbolique X induit un homéomorphisme de ∂X. Il se trouve que cet homéomorphisme est $K(\varepsilon,\delta)$-quasi-conforme pour la métrique d_ε où $K(\varepsilon,\delta)$ est une constante tendant vers 1 lorsque ε tend vers 0. D'une certaine façon, on peut donc dire que l'action d'une isométrie à l'infini est “conforme”. De la même façon, on s'assure que l'homéomorphisme de ∂X induit par une quasi-isométrie de X est un homéomorphisme K-quasi-conforme pour une certaine constante K.

C'est dans ce sens que nous dirons que le bord d'un groupe hyperbolique est muni d'une structure quasi-conforme naturelle.

La nature locale de cette structure quasi-conforme pour un groupe hyperbolique général est encore mystérieuse et mérite sans conteste une étude approfondie. On trouvera dans [33] une description précise dans le cas des espaces riemanniens symétriques.

Nous avons énoncé plus haut le résultat selon lequel un groupe quasi-isométrique à $\mathbf{H}^n$ ($n \geq 3$) est une extension finie d'un groupe discret co-compact d'isométries de $\mathbf{H}^n$. La méthode d'approche est la suivante. Un tel groupe est bien sûr hyperbolique et son bord est quasi-conformément celui de $\mathbf{H}^n$, c'est-à-dire une sphère $\mathbf{S}^{n-1}$. L'action de Γ sur $\partial\Gamma$ mène à une action de Γ sur $\mathbf{S}^{n-1}$ qui est uniformément quasi-conforme. Lorsque $n = 3$, on montre que cette action est en fait conforme pour une certaine structure conforme mesurable. Le théorème d'Ahlfors-Behrs permet alors de conjuguer cette action à une action conforme de Γ sur $\mathbf{S}^2$, c'est-à-dire à un groupe Kleinien. Lorsque $n \geq 4$, la preuve de Gromov-Tukia est plus compliquée.

5. ASPECTS ALGORITHMIQUES

5.1. Nous allons décrire dans ce paragraphe un certain nombre de résultats dont l'origine est due à J. Cannon [5] et qui ont été développés par M. Gromov ([21], [25]) et par J. Cannon, D. Epstein, D. Holt, M. Paterson et W. Thurston [9]. Il s'agit d'adapter au contexte des groupes de type fini les idées et méthodes de la dynamique symbolique (M. Morse, R. Bowen, M. Manning).

Pour motiver ce qui va suivre, rappelons d'abord comment résoudre le problème des mots dans un groupe libre Γ de base $a_1, \cdots, a_n$. Tout élément de Γ s'écrit de manière *unique* comme un mot *réduit*, c'est-à-dire ne contenant pas de sous-mot du type $a_i \cdot a_i^{-1}$ ou $a_i^{-1} \cdot a_i$. Il est important de constater que, pour décider si un mot est réduit, il n'est pas nécessaire de le connaître dans son intégralité mais il suffit de vérifier si tous ses sous-mots de longueur 2 sont réduits.

M. Dehn montre qu'un phénomène analogue se produit pour le groupe fondamental d'une surface compacte orientable de genre $g \geq 2$, présenté de manière usuelle :

$$\Gamma = (a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g \,;\, a_1\, b_1\, a_1^{-1}\, b_1^{-1} \cdots a_g\, b_g\, a_g^{-1}\, b_g^{-1} = 1)\,.$$

Désignons par R l'unique relateur de cette présentation et soient $R_1 = R, R_2, \cdots, R_{2g}$ les $2g$ permutations cycliques du mot R. Supposons qu'un mot m en les $a_i^{\pm 1}$ soit de la forme $m_1\, w\, m_2$ où w est un préfixe de l'un des $R_i^{\pm 1}$, i.e. tel que $R_i^{\pm 1} = w \cdot w'$. Dans le groupe Γ, l'élément correspondant à m est égal à celui correspondant à $m_1\, w'^{-1}\, m_2$. Si la longueur de w est strictement supérieure à la moitié de celle de R, le mot $m_1\, w'^{-1}\, m_2$ est strictement plus court que m. On montre ainsi, par récurrence, que tout élément de Γ peut être représenté par un mot m en les $a_i^{\pm 1}$ *réduit au sens de Dehn*, c'est-à-dire vérifiant :

i) m est un mot réduit (*i.e.* ne contenant ni $a_i\, a_i^{-1}$ ni $a_i^{-1}\, a_i$) ;

ii) si w est un préfixe de $R_i^{\pm 1}$ avec $|w| > \frac{1}{2}\,|R|$, alors w n'est pas un sous-mot de m.

Le résultat important de M. Dehn est le suivant : un mot non trivial réduit au sens de Dehn représente un élément non trivial de Γ.

Ici encore, on observe que pour décider si un mot est réduit au sens de Dehn, il suffit de vérifier si tous ses sous-mots de longueur $2g$ le sont. Une mémoire de taille $2g$ suffit ...

Nous allons généraliser cette idée en deux étapes. Nous introduirons d'abord la notion que M. Gromov appelle *groupe Markovien* (voir aussi [19]). Puis nous dirons quelques mots sur la notion plus efficace de *groupe automatique.*

Soit $\mathcal{G}$ un graphe fini orienté muni d'un sommet privilégié $*$ et dont les arêtes sont étiquetées par les éléments d'un ensemble fini S. Deux arêtes différentes peuvent porter la même étiquette. Considérons un chemin fini de $\mathcal{G}$ d'origine $*$, c'est-à-dire une suite finie de sommets $x_0, x_1, \cdots, x_n$ telle qu'une arête orientée joigne x_i à x_{i+1} $(i = 0, 1, \cdots, n)$. On peut alors lire sur l'arête (x_i, x_{i+1}) un élément de S et on produit ainsi un mot m de n lettres en les éléments de S. L'ensemble $\mathcal{L}$ des mots ainsi obtenus sera appelé le *langage* de $\mathcal{G}$. C'est une partie de l'ensemble S^* de toutes les suites finies d'éléments de S. Une partie de S^* est un *langage de Markov* si elle est le langage d'un certain graphe de ce type.

Supposons maintenant que l'on considère un groupe Γ et que l'ensemble S soit une partie finie de Γ. Un élément de S^*, c'est-à-dire un mot en les éléments de S, définit par produit un élément de Γ. On a donc une application naturelle $\pi : S^* \to \Gamma$. Cette application est surjective si S engendre Γ comme monoïde.

DÉFINITION.— *On dit qu'un groupe Γ est Markovien s'il existe une partie finie S de Γ et un graphe fini $\mathcal{G}$, orienté, muni d'un point base et étiqueté par S dont le langage $\mathcal{L} \subset S^*$ soit tel que la restriction de π à $\mathcal{L}$ soit bijective. En d'autres termes, tout élément de Γ s'écrit de manière unique comme un mot en les éléments de S appartenant au langage de $\mathcal{G}$.*

Si, de plus, on peut choisir pour S n'importe quelle partie finie engendrant Γ comme monoïde et si l'application $\pi : \mathcal{L} \to \Gamma$ préserve les longueurs naturelles de part et d'autre (i.e. $|w| = \|\pi(w)\|_S$), on dira que Γ est fortement Markovien.

Par exemple, le lecteur n'aura aucun mal à construire un graphe $\mathcal{G}$, étiqueté par $S = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ et dont le langage est constitué des mots réduits de S^*. Ainsi, un groupe libre est Markovien.

A la terminologie près, le résultat suivant est dû à J. Cannon [5].

THÉORÈME.— *Tout groupe hyperbolique est fortement Markovien.*

Avant de donner quelques indications sur la preuve de ce théorème, explicitons un corollaire important.

COROLLAIRE.— *Soit Γ un groupe hyperbolique et S une partie génératrice finie quelconque. Soit $a_S(n)$ le nombre d'éléments de Γ de la longueur n par rapport à S. Alors, la série formelle $f(t) = \sum_{n\geq 0} a_S(n)\, t^n$ est une fraction rationnelle de la variable t.*

Ceci résulte du théorème précédent et de l'énoncé analogue pour le nombre $a(n)$ de chemins de longueur n dans un graphe fini, qui se calcule facilement en termes des puissances de la matrice d'incidence du graphe.

Nous commençons maintenant l'esquisse de la preuve du théorème de J. Cannon. Soit Γ un groupe engendré comme monoïde par la partie finie

S et m un élément de S^*, c'est-à-dire un mot en les éléments de S. On dit que m est minimal si m est un mot de longueur minimale représentant $\pi(m)$ de Γ , i.e. si $|m| = \|\pi(m)\|_S$. Les mots minimaux forment une partie $\mathcal{M}$ de S^*. Nous allons montrer que $\mathcal{M}$ est un langage de Markov.

Soit m un élément de $\mathcal{M}$. On lui associe l'ensemble $C(m)$ des mots w de S^* tels que mw soit un mot de $\mathcal{M}$. Nous disons que m et m' sont de même type si $C(m) = C(m')$. L'ensemble $\mathcal{G}$ des types forme un graphe orienté étiqueté par S ; on joint le type t_1 au type t_2 par une arête portant l'étiquette s si t_1 est le type d'un mot $s_1, \cdots, s_n$ de $\mathcal{M}$ et si t_2 est le type de $s_1, \cdots, s_n, s$, supposé appartenir aussi à $\mathcal{M}$. Le sommet privilégié $*$ de $\mathcal{G}$ est celui correspondant à la suite vide. Il est évident que les chemins de $\mathcal{G}$ issus de $*$ correspondent bijectivement aux mots de $\mathcal{M}$. Par conséquent, si $\mathcal{G}$ est fini, la partie $\mathcal{M}$ de S^* est un langage de Markov.

Supposons donc que Γ soit hyperbolique et montrons qu'il n'y a qu'un nombre fini de types. Soit R un entier ayant la propriété suivante. Si γ_1 et γ_2 sont deux éléments de Γ à distance 1, alors deux segments quelconques $[e, \gamma_1]$ et $[e, \gamma_2]$ sont à distance de Hausdorff inférieure à R. L'existence d'un tel R résulte immédiatement de l'hyperbolicité de Γ. Si γ est un élément de Γ, nous appellerons $(2R+1)$-*niveau* de γ la partie $N(\gamma)$ de la boule B de Γ de centre e de et rayon $2R+1$ formée des éléments ζ tels que $d_S(\gamma\zeta, e) < d(\gamma, e)$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de parties de B, la finitude du nombre de types et donc le fait que $\mathcal{M}$ est un langage de Markov résultent de l'affirmation suivante.

Si $\pi(m)$ et $\pi(m')$ ont même $(2R+1)$-niveau, ils ont même type.

Il s'agit de montrer, par récurrence sur $|w|$ que si mw est dans $\mathcal{M}$, il en est de même pour $m'w$. Si w est vide, c'est évident... Par récurrence, on suppose que mw, $m'w$ et mws sont dans $\mathcal{M}$ pour un certain s de S et il s'agit de montrer que $m'ws$ est dans $\mathcal{M}$. Soit $\alpha\beta$ un élément de $\mathcal{M}$ tel que $\pi(m'ws) = \pi(\alpha\beta)$ et $|\alpha| = |m'| - 1$. On vérifie facilement que la définition de R permet d'affirmer que $d_S(\pi(\alpha), \pi(m')) \leq 2R+1$. Il en résulte que $\pi(m')^{-1}\,\pi(\alpha)$ est dans le $(2R+1)$-niveau de $\pi(m')$ et donc dans celui de $\pi(m)$. En d'autres termes :

$$d_S(\pi(m'^{-1}\alpha), e) < d_S(\pi(m), e) = |m|.$$

On observe alors que : $\pi(mws) = \pi(m\,m'^{-1}\,\alpha\beta)$. Il en résulte que :

$$|mws| < |m| + |\beta|$$

$$|m| + |w| + 1 < |m| + |\beta|$$

$$|\beta| \geq |w| + 2\,.$$

Finalement : $|m'ws| \leq |\alpha| + 1 + |\beta| - 2 + 1 = |\alpha| + |\beta| = d_S(\pi(m'ws), e)$. Nous avons donc bien montré que $m'ws$ est minimal.

Ainsi, $\mathcal{M}$ est un langage de Markov. Ceci ne montre pas encore le théorème que nous avons en vue car l'application $\pi : \mathcal{M} \to \Gamma$ est bien sûr surjective mais certainement pas injective. Un élément de Γ peut en général s'écrire de plusieurs manières comme mot de longueur minimale. Pour sélectionner un unique mot de $\mathcal{M}$ représentant un élément de Γ, on choisit un ordre total quelconque sur S. Pour chaque élément de Γ, on sélectionne l'élément de $\pi^{-1}(\gamma)$ qui est le premier par ordre lexicographique. Cette méthode détermine une partie $\mathcal{L}$ de $\mathcal{M}$ pour laquelle $\pi : \mathcal{L} \to \Gamma$ est bien sûr bijective. Il n'est pas très difficile de déduire du fait que $\mathcal{M}$ est un langage de Markov qu'il en est de même pour $\mathcal{L}$. Ceci établit le théorème.

5.2. La notion de groupe Markovien a un grave inconvénient : le graphe étiqueté $\mathcal{G}$ ne détermine pas le groupe. Nous savons en effet, par définition, que tout élément du groupe s'écrit comme un mot en les générateurs appartenant au langage de $\mathcal{G}$, mais nous n'avons aucune information sur la manière de multiplier deux éléments du groupe. Voici un exemple. Les deux groupes $\Gamma_1 = (a, b, c \,|\, ab = ba\,,\ ac = ca\,,\ bc = cb)$ et $\Gamma_2 = (a, b, c \,|\, ac = ca\,,\ bc = cb\,,\ ab = bac)$ ne sont pas isomorphes (l'un est $\mathbf{Z}^3$ et l'autre le groupe de Heisenberg) ; cependant, tout élément de Γ_1 ou Γ_2 s'écrit de manière unique comme $a^m\, b^n\, c^p$ $(m, n, p \in \mathbf{Z})$. Il est donc facile de trouver un même langage de Markov pour Γ_1 et Γ_2.

Les groupes automatiques, introduits dans [9], n'ont pas cet inconvénient. Nous allons d'abord élargir la notion de langage de Markov par celle de *langage régulier.* Il s'agit d'un concept classique en informatique.

DÉFINITION.— *Un automate fini M est constitué des données suivantes :*

i) *un ensemble fini E dont les éléments sont appelés les états, dont l'un, noté $*$, est l'état initial. On dispose aussi d'une partition de E en deux parties O et N (pour "oui" et "non")* ;

ii) *un ensemble fini A, appelé alphabet* ;

iii) *une application de transition $(a, \varepsilon) \in A \times E \mapsto a \,.\, \varepsilon \in E$.*

Supposons que l'on se donne un élément de A^*, c'est-à-dire une suite finie $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ d'éléments de A. On peut alors définir une suite d'états par :

$$\varepsilon_1 = a_1 \cdot * \quad , \quad \varepsilon_2 = a_2 \cdot \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n = a_n \cdot \varepsilon_{n-1} \,.$$

L'ensemble $\mathcal{L}(M)$ des mots de A^* tels que le dernier état ε_n soit dans O est le *langage* de l'automate M. Une partie $\mathcal{L}$ de A^* est un *langage régulier* s'il existe un automate fini dont c'est le langage. L'avantage des langages réguliers par rapport aux langages de Markov est que, dans cette nouvelle situation, un préfixe d'un élément du langage n'est pas nécessairement dans ce langage.

Avant de pouvoir introduire la notion de groupe automatique, il nous faut encore donner une définition technique. Soient A_1 et A_2 deux ensembles finis. Un langage $\mathcal{L}$ sur (A_1, A_2) est une partie de $A_1^* \times A_2^*$. Une difficulté se présente car $A_1^* \times A_2^*$ contient des couples de mots de longueurs différentes et un langage sur (A_1, A_2) n'est pas un langage sur $A_1 \times A_2$. On introduit alors deux nouveaux symboles Fr_1 et Fr_2 et on pose $B = (A_1 \cup \{Fr_1\}) \times (A_2 \cup \{Fr_2\}) - \{(Fr_1, Fr_2)\}$. En complétant la composante la plus courte d'un élément de $A_1^* \times A_2^*$ à l'aide de Fr_1 ou Fr_2, on obtient deux mots de même longueur, c'est-à-dire un élément de B^*. Un langage $\mathcal{L}$ sur (A_1, A_2) se complète donc en un langage $\overline{\mathcal{L}}$ sur B. On dira que $\mathcal{L}$ est un langage régulier sur (A_1, A_2) si $\overline{\mathcal{L}}$ est régulier, c'est-à-dire s'il existe un automate d'alphabet B dont le langage est $\overline{\mathcal{L}}$. On dira aussi que cet automate est sur (A_1, A_2) et que son langage est $\mathcal{L}$.

DÉFINITION.— *Un groupe Γ est automatique s'il existe une partie finie $S = \{s_1, \cdots, s_n\}$ de Γ engendrant Γ comme monoïde et des automates finis $W, M_0, M_1, \cdots, M_n$ tels que :*

i) *l'alphabet de W est S et l'application $\pi : \mathcal{L}(W) \to \Gamma$ est surjective* ;

ii) *pour $0 \leq i \leq n$, M_i est un automate sur (S, S) et son langage est* *constitué des couples (m, m') de mots de S^* tels que m et m' sont dans $\mathcal{L}(W)$ et que $\pi(m) = \pi(m') \cdot s_i$. (Pour $i = 0$, on pose $s_o = e$, élément neutre de Γ.)*

En d'autres termes, tout élément de Γ s'écrit comme un mot en S appartenant à un langage régulier, mais on ne suppose pas *a priori* l'unicité de l'écriture (on pourrait en fait le supposer). Cependant, l'automate M_0 permet de décider si deux mots du langage de W définissent le même élément de Γ. Par ailleurs, les automates $M_1, M_2, \cdots, M_n$ permettent de multiplier à droite par $s_1, s_2 \cdots, s_n$ et décrivent donc la structure algébrique du groupe.

Il est bien connu que la présentation d'un groupe par générateurs et relations est particulièrement peu commode. L'idée développée dans [9] est que la donnée d'un groupe automatique par ses automates est remarquablement efficace et permet des calculs très rapides dans le groupe. Une partie de [9] consiste à mettre au point des méthodes de construction explicite d'automates de taille "raisonnable" (voir aussi [14]).

THÉORÈME.— *Un groupe hyperbolique est automatique.*

La démonstration est essentiellement la même que celle que nous avons esquissée plus haut pour montrer qu'un groupe hyperbolique est fortement Markov.

La classe des groupes automatiques dépasse de loin celle des groupes hyperboliques. Elle contient par exemple les groupes virtuellement abéliens de type fini et elle est stable par produits finis. Elle ne contient cependant pas les groupes nilpotents non abéliens. Malheureusement, la structure algébrique et géométrique de ces groupes automatiques est beaucoup moins bien comprise que celle des groupes hyperboliques (voir cependant [15] et [17]). Pour terminer ce paragraphe, nous énonçons deux problèmes qui illustrent notre manque de connaissance géométrique de ces groupes.

Problème.— *Peut-on développer une théorie du bord des groupes automatiques, analogue à celle développée dans ce cas hyperbolique ?*

Problème.— *Le groupe fondamental d'une variété compacte à courbure négative ou nulle est-il automatique ?*

6. VERS LES GROUPES SEMI-HYPERBOLIQUES

On aimerait aller plus loin... Beaucoup de groupes intéressants ne sont pas hyperboliques alors que la méthode géométrique devrait permettre de mieux les comprendre. Voici quelques exemples :

i) le groupe fondamental d'une variété compacte à courbure négative ou nulle ;

ii) les groupes à petite simplification $C'(1/5)$;

iii) les réseaux dans les groupes de Lie semi-simples, en particulier $SL(n, \mathbf{Z})$.

Il s'agirait de trouver une condition de nature métrique sur le graphe de Cayley qui soit invariante par quasi-isométrie et qui permette de rendre compte de ces exemples. La difficulté est claire : contrairement à la négativité stricte, la négativité au sens large de la courbure est une propriété instable et se comporte mal par quasi-isométrie.

Pour terminer cet exposé, nous voudrions décrire deux notions généralisant l'hyperbolicité et qui pourraient peut-être servir de base à ces "groupes semi-hyperboliques" que l'on aimerait définir.

La première est introduite par J. Cannon [6].

DÉFINITION.— *Soit S une partie génératrice finie du groupe Γ . On dit que Γ est presque convexe par rapport à S s'il existe des constantes k et $C > 0$ ayant la propriété suivante. Soient γ_1 et γ_2 deux éléments de Γ sur la sphère de centre e (élément neutre de Γ) et de rayon n et tels que $d_S(\gamma_1, \gamma_2) \leq k$. Alors, il existe un chemin de longueur inférieure à C dans le graphe de Cayley, joignant γ_1 à γ_2 et entièrement contenu dans la boule de centre e et de rayon n.*

J. Cannon montre que les groupes virtuellement abéliens sont presque convexes pour n'importe quelle partie génératrice finie. Il est par ailleurs très facile de s'assurer que les groupes hyperboliques sont presque convexes (pour tout S). Dans [9], les auteurs annoncent qu'il en est de même pour tous les groupes automatiques.

Problème.— *La presque convexité d'un groupe dépend-elle de la partie* *génératrice finie ? Est-ce une propriété géométrique ?*

Problème.— *Le groupe fondamental d'une variété compacte à courbure négative ou nulle est-il presque convexe ?*

Voici enfin une autre notion, dégagée par W. Thurston (voir [1], [9]). Convenons de dire qu'un chemin dans un groupe Γ muni d'une partie génératrice finie S est une application $c : \{0, 1, \cdots, n\} \to \Gamma$ telle que $d_S(c(i), c(i+1)) = 1$ $(i = 0, \cdots, n-1)$. L'origine de c est $c(0)$ et son extrémité est $c(n)$. Il est commode de prolonger c en une application $\overline{c} : \mathbf{N} \to \Gamma$ par $\overline{c}(i) = c(n)$ pour $i > n$.

DÉFINITION.— *Un groupe Γ muni d'une partie génératrice finie est peignable s'il est possible de choisir, pour tout γ de Γ , un chemin c_γ d'origine e et d'extrémité γ de telle sorte que la propriété suivante soit satisfaite. Il existe une constante C telle que, si $d_S(\gamma_1, \gamma_2) = 1$, on ait* $\sup_{i \in \mathbf{N}} d_S(\overline{c}_{\gamma_1}(i), \overline{c}_{\gamma_2}(i) \leq C$.

Bien sûr, un groupe hyperbolique est peignable puisqu'il suffit de choisir pour c_γ un chemin de longueur minimale joignant e à γ. Les groupes automatiques sont peignables mais la réciproque n'est pas connue. Les groupes peignables permettent une généralisation partielle du théorème de I. Rips décrit plus haut [1]. Cependant, d'après W. Thurston, $SL(3, \mathbf{Z})$ n'est pas peignable.

On voit donc que la définition de ce que devrait être un groupe semi-hyperbolique n'est pas claire...

Signalons pour terminer qu'il serait également intéressant de comprendre la géométrie d'un certain nombre de groupes non semi-hyperboliques. On ne connaît presque rien concernant la géométrie des groupes polycycliques par exemple, à part le fait que certains d'entre eux ne sont pas presque convexes [10].

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.M. ALONSO - *Combings of groups*, prépublication M.S.R.I. 04623-89.

[2] M. BESTVINA, G. MESS - *The boundary of negatively curved groups*, prépublication, 1990.

[3] B.H. BOWDITCH - *Notes on Gromov's hyperbolicity for path-metric spaces*, prépublication Université de Warwick, août 1989.

[4] K.S. BROWN - *Cohomology of groups*, Springer, 1982.

[5] J.W. CANNON - *The combinatorial structure of co-compact discrete hyperbolic groups*, Geom. Dedicata 16 (1984), 123-148.

[6] J.W. CANNON - *Almost convex groups*, Geom. Dedicata 22 (1987), 197-210.

[7] J.W. CANNON - *Negatively curved spaces and groups, the problem of constant negative curvature*, trois textes distribués au "Topical meeting on hyperbolic geometry and ergodic theory", Trieste, avril 1989.

[8] J.W. CANNON, D. COOPER - *A characterization of co-compact Kleinian groups and Kleinian groups of finite volume*, prépublication.

[9] J.W. CANNON, D.B.A. EPSTEIN, D.F. HOLT, M.S. PATERSON, W.P. THURSTON - *Word processing and group theory*, prépublication Université de Warwick, 1988.

[10] J.W. CANNON, W.J. FLOYD, M.A. GRAYSON, W.P. THURSTON - *Solvgroups are not almost convex*, Geom. Dedicata 31 (1989), 291-300.

[11] M. COORNAERT, T. DELZANT, A. PAPADOPOULOS - *Notes sur les groupes hyperboliques de Gromov*, publication IRMA Strasbourg, 1989.

[12] M.W. DAVIS and T. JANUSZKIEWICZ - *Hyperbolization of polyhedra*, preprint.

[13] M. DEHN - *Papers on group theory and topology*, translated and introduced by J. Stillwell, Springer, 1987.

[14] D.B.A. EPSTEIN - *Computers, groups and geometry*, Astérisque 163-164 (1988), 9-29.

[15] S.M. GERSTEN - *Problems on automatic groups*, prépublication M.S.R.I. 07023-89.

[16] S.M. GERSTEIN, H. SHORT - *Automatic groups and small cancellation theory*, à paraître dans Inventiones.

[17] S.M. GERSTEIN, H. SHORT - *Rational subgroups of biautomatic groups*, à paraître dans Annals of Mathematics.

[18] É. GHYS, P. DE LA HARPE (éditeurs) - *Sur les groupes hyperboliques*, d'après Mikhael Gromov, avec la collaboration de W. Ballman, A. Haefliger, E. Salem, R. Strebel et M. Troyanov, Progress in Mathematics, Volume 83, Birkhaüser, 1990.

[19] R.H. GILMAN - *Groups with a rational cross section*, in Combinatorial group theory and topology, Ann. of Math. Studies 111, Princeton University Press 1987, 175-183.

[20] F. GREENLEAF - *Invariant means on topological groups and their applications*, Van Nostrand, 1969.

[21] M. GROMOV - *Hyperbolic manifolds, groups and actions*, in Riemann surfaces and related topics, Ann. of Math. Studies 97, Princeton University Press 1980, 183-213.

[22] M. GROMOV - *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu, Cedic F. Nathan, 1981.

[23] M. GROMOV - *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Publ. Math. I.H.E.S. 53 (1981), 53-73.

[24] M. GROMOV - *Infinite groups as geometric objects*, proceed. I.C.M. Warszawa 1 (1984), 385-392.

[25] M. GROMOV - *Hyperbolic groups*, in "Essays in group theory", éd. S.M. Gersten, M.S.R.I. Pub. 8 (Springer, 1987), 75-263.

[26] P. DE LA HARPE - *Free groups in linear groups*, L'Enseignement mathématique 23 (1983), 129-144.

[27] P. DE LA HARPE, A. VALETTE - *La propriété T de Kazdan pour les groupes localement compacts*, à paraître dans Astérisque.

[28] D. KAZDAN - *On a connection between the dual space of a group with the structure of its closed subgroups*, Func. Anal. and its applications, 1:1 (1967), 71-74.

[29] R.C. LYNDON, P.E. SCHUPP - *Combinatorial group theory*, Springer, 1977.

[30] G.A. MARGULIS - *Groupes discrets d'isométries des variétés à courbure négative*, proceed. I.C.M. Vancouver, 1974, Vol. 2, 21-34.

[31] D. MOSTOW - *Rigidity of locally symmetric spaces*, Princeton University Press, 1972.

[32] P. PANSU - *Croissance des boules et des géodésiques fermées dans les nilvariétés*, Ergod. Th. Dynam. Sys. 3 (1983), 415-445.

[33] P. PANSU - *Métriques de Carnot-Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang* 1, Ann. of Math. 129 (1989), 1-60.

[34] M.S. RAGUNATHAN - *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer, 1972.

[35] P. SCOTT - *The geometries of* 3*-manifolds*, Bull. London Math. Soc. 15 (1983), 401-487.

[36] P.SCOTT, T. WALL - *Topological methods in group theory*, in "Homological group theory", Lecture Notes 36, London Math. Soc. 1979, 137-203.

[37] P.B. SHALEN - *Dendrology of groups : an introduction*, in "Essays in group theory", éd. S.M. Gerten, M.S.R.I. Pub. 8 (Springer, 1987), 265-319.

[38] H. SHORT (éditeur) - *Notes on negatively curved groups*, avec la collaboration de J.M. Alonso, T. Brady, D. Cooper, T. Delzant, V. Ferlini, M. Lusztig, M. Mihalik, M. Shapiro, prépublication M.S.R.I. 08023-89.

[39] D. SULLIVAN - *On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic notions*, in "Riemann surfaces and related topics", Ann. of Math. Studies 97, Princeton University Press 1980, 465-496.

[40] W.P. THURSTON - *The geometry and topology of* 3*-manifolds*, Lecture Notes, Princeton, 1978.

[41] J. TITS - *Groupes à croissance polynomiale*, Séminaire N. Bourbaki, février 1981, exposé 572, Lecture Notes in Math. 901 (1981), Springer-Verlag, 176-188.

[42] P. TUKIA - *On quasi-conformal groups*, J. d'Anal. Math. 46 (1986), 318-346.

[43] P. TUKIA - *Homeomorphic conjugates of Fuchsian groups*, J. reine angew. Math. 391 (1988), 1-54.

Étienne GHYS

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON
U.R.A. DO 746 du CNRS
46 allée d'Italie
69364 LYON CEDEX 07