

# *Astérisque*

CHRISTIAN GÉRARD

**Complétude asymptotique des systèmes à  $N$   
corps à courte portée**

*Astérisque*, tome 189-190 (1990), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 721, p. 179-201

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1989-1990\\_\\_32\\_\\_179\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1989-1990__32__179_0)

© Société mathématique de France, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

COMPLÉTUDE ASYMPTOTIQUE DES SYSTÈMES  
À N CORPS À COURTE PORTÉE  
[d'après I.M.Sigal et A.Soffer]

par Christian Gérard

1. INTRODUCTION

Le Problème à N corps quantique concerne les propriétés d'un système de N particules *non relativistes* en interaction. Ce système de N particules est décrit par un Hamiltonien de Schrödinger de la forme suivante:

$$(1) \quad H = \sum_{i=1}^N -\frac{\Delta_{x_i}}{2m_i} + \sum_{i < j} V_{ij}(x_i - x_j).$$

Ici  $m_i$  est la masse de la particule  $i$ ,  $x_i$  est sa position qui est un point dans  $\mathbf{R}^\nu$ , ( $\nu = 3$  dans le cas physique) et  $V_{ij}(x_i - x_j)$  est le potentiel d'interaction entre les particules  $i$  et  $j$ .  $H$  agit donc sur l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbf{R}^{N\nu})$ . Un autre exemple important est celui des Hamiltoniens *atomiques*, où certaines particules sont supposées de masse infinie et donc fixes (comme par exemple les noyaux des atomes ou des molécules) :

$$(2) \quad \tilde{H} = \sum_{i=1} -\frac{\Delta_{x_i}}{2m_i} + \sum_{i,k} \frac{e_i e_k}{|x_i - X_k|} + \sum_{i < j} \frac{e_i e_j}{|x_i - x_j|}.$$

Ici  $e_i$  désigne la charge de la particule  $i$  et  $X_k$  la position de la particule  $k$  de masse infinie. Ce type de Hamiltoniens a posé beaucoup de problèmes aux physiciens depuis la naissance de la Mécanique Quantique. Le premier est que dès que N est plus grand que 2 (ou que 1 pour les Hamiltoniens atomiques, c'est à dire dès l'atome d'Hélium !) il n'existe plus

S.M.F.

de solutions explicites de l'équation de Schrödinger, même si les potentiels d'interaction sont de type Coulombien. Ceci a donné lieu à un grand nombre d'approximations permettant de calculer le niveau fondamental  $\inf_{\psi \in L^2(\mathbf{R}^{3N})} \langle \tilde{H}\psi, \psi \rangle$  (approximations de Hartree-Fock et de Thomas-Fermi par exemple cf. Landau-Lifschitz [LL]). On peut en mentionner un autre, qui est de définir  $H$  comme un opérateur autoadjoint non borné sur  $L^2(\mathbf{R}^{N\nu})$  avec un domaine  $D(H)$ . Il est assez surprenant de constater que ce problème n'a été résolu rigoureusement que dans les années cinquante par Kato [Ka] pour l'atome d'Hélium et par Combes [Com] dans les années soixante-dix pour le cas général. D'un point de vue plus théorique, il est important de comprendre, ne serait-ce que pour justifier *a posteriori* l'introduction de ces Hamiltoniens, comment établir rigoureusement certaines propriétés de base des systèmes quantiques formés d'un grand nombre de particules. La propriété la plus fondamentale est certainement la *stabilité de la matière*, qui se traduit mathématiquement par le fait que le Hamiltonien atomique  $\tilde{H}$  est borné inférieurement (uniformément sur toutes les positions des noyaux) par  $-C_0(N+K)$ , où  $N$  est le nombre d'électrons et  $K$  le nombre de noyaux. Cette propriété est démontrée rigoureusement depuis les années soixante-dix (Dyson-Lenard [DL], Lieb-Thirring [LT]). Nous renvoyons à l'article de revue très récent de Lieb [L] pour une introduction à ces problèmes. A noter qu'il y a beaucoup de propriétés physiquement tout à fait raisonnables des systèmes Coulombiens que l'on ne sait pas démontrer mathématiquement.

Une autre classe de problèmes concerne l'évolution d'un système quantique à  $N$  particules pour des temps grands. Cette évolution est décrite par l'équation de Schrödinger dépendant du temps:

$$(3) \quad i\partial_t u_t = H u_t$$

$$(4) \quad u|_{t=0} = u.$$

On note symboliquement cette évolution par  $e^{-itH}u$ . Si  $H$  admet une réalisation autoadjointe, cette équation a une solution pour tous temps. C'est le cas par exemple si:

$$V_{ij} \in L^r(\mathbf{R}^\nu) + L^\infty_\epsilon(\mathbf{R}^\nu)$$

pour  $r > \nu/2$  (cf. Reed-Simon [RS]). Ici l'indice  $\epsilon$  veut dire que la composante dans  $L^\infty$  doit être prise de norme arbitrairement petite.  $H$  est alors autoadjoint sur l'espace de Sobolev  $H^2(\mathbf{R}^{N\nu})$ . En particulier pour des interactions Coulombiennes, l'évolution est définie pour tous temps: il n'y a pas de trajectoires de collision pour le problème quantique. Cette différence importante avec le problème à  $N$  corps *classique* peut être vue comme une manifestation du principe d'incertitude.

Si  $u$  est dans l'espace spectral ponctuel de  $H$ ,  $\mathcal{H}_{pp}(H)$ , l'évolution  $e^{-itH}u$  est une évolution triviale: la composante de  $u$  sur chaque vecteur propre  $\phi_j$  de  $H$  est simplement multipliée par  $e^{-it\lambda_j}$ , où  $\lambda_j$  est la valeur propre associée à  $\phi_j$ . Le problème central de la théorie du *scattering* consiste à décrire l'évolution d'un état  $u$  qui appartient à l'espace spectral continu  $\mathcal{H}_c(H) = \mathcal{H}_{pp}(H)^\perp$ . L'intuition physique suggère que le système de  $N$  particules va se désintégrer en des amas de particules stables qui se déplacent chacun comme des particules libres. Aucun autre type de comportement n'a encore été observé dans la réalité. La traduction de cette propriété en des termes mathématiques est ce qu'on appelle la *complétude asymptotique*. Cette propriété n'est pas aussi évidente qu'elle le paraît. Elle est par exemple liée à l'absence de spectre *singulier continu*, c'est à dire d'états dont la probabilité de présence dans un compact tend vers 0 seulement *en moyenne*. En d'autres termes les particules décrites par un tel état quantique peuvent se rapprocher les unes des autres à des temps arbitrairement grands. On connaît pour les problème à deux corps des exemples de potentiels dus à Pearson (cf. [Pe]) dans  $C_0^\infty(\mathbf{R}^\nu \setminus \{0\})$  tel que le spectre de  $H$  soit purement singulier continu dans  $]0, +\infty[$ .

## 2. LES OPÉRATEURS D'ONDE

La première réduction à faire pour étudier le Hamiltonien  $H$  est de séparer le mouvement du centre de masse des particules. En effet  $H$  est invariant par les translations d'ensemble du système. L'espace de configuration du mouvement (classique) dans le référentiel du centre de masse est

l'espace :

$$X = \{x \in \mathbf{R}^{N\nu} \mid \sum_i m_i x_i = 0\}.$$

Une première difficulté est qu'il n'y a plus de coordonnées naturelles sur  $X$ . On peut tourner cette difficulté en introduisant la forme quadratique sur  $\mathbf{R}^{N\nu}$  suivante :

$$q(x, y) = \sum_i 2m_i x_i \cdot y_i.$$

On remarque que  $\sum_{i=1}^N -\frac{\Delta_{x_i}}{2m_i}$  est en fait l'opérateur de Laplace-Beltrami sur  $\mathbf{R}^{N\nu}$  associé à  $q$ , que l'on notera dans la suite simplement  $-\Delta_{|X}$  et qui est complètement intrinsèque. L'espace  $X$  est simplement l'orthogonal pour  $q$  de l'espace de configuration du mouvement du centre de masse :

$$X^\perp = \{x \in \mathbf{R}^{N\nu} \mid x_i = x_j \forall i, j\}.$$

Si on pose  $V(x) = \sum_{i < j} V_{ij}(x_i - x_j)$ ,  $V$  est en fait une fonction sur  $X$ , et on peut écrire, en décomposant  $L^2(\mathbf{R}^{N\nu})$  comme  $L^2(X) \otimes L^2(X^\perp)$  :

$$(5) \quad H = \mathbf{1}_{|X} \otimes -\Delta_{|X^\perp} + (-\Delta_{|X} + V(x)) \otimes \mathbf{1}_{|X^\perp}.$$

Le premier terme correspond à l'énergie cinétique du centre de masse. C'est le deuxième terme  $-\Delta_{|X} + V(x)$  que l'on notera dorénavant  $H$ .

La principale difficulté d'un Hamiltonien à  $N$  corps est que le potentiel  $V$  ne tend pas vers 0 à l'infini sur  $X$ , sauf si  $N = 2$ . En effet  $V$  ne tend pas vers 0 le long des sous espaces  $\{x_i = x_j\}$ . Pour décrire de façon précise la géométrie de ces espaces ainsi que les décompositions possibles en paquets de particules on introduit les notions suivantes: on note  $\mathcal{A}$  l'ensemble des partitions de  $\{1, \dots, N\}$ , ou l'ensemble des décompositions possibles en paquets de particules. Sur  $\mathcal{A}$ , on a une relation d'ordre naturelle en disant que  $a \subset b$  si  $a$  est une partition plus fine que  $b$ . La partition la plus fine est bien sûr  $\{\{1\}, \dots, \{N\}\}$ , notée  $a_{min}$ , qui correspond à l'éclatement total du système. La partition la plus grossière  $\{1, \dots, N\}$ , qui correspond au cas où le système reste stable, est notée  $a_{max}$ . On note d'autre part  $(ij)$  la partition formée de la paire  $\{i, j\}$  et des singletons  $\{k\}$  pour  $k \neq i, j$ . Pour  $a \in \mathcal{A}$ ,  $a = \{A_1, \dots, A_k\}$ , on pose:

$$(6) \quad X_a = \{x \in X \mid x_i = x_j \text{ si } (ij) \subset a\}$$

On vérifie facilement que si  $a \subset b$  on a  $X_b \subset X_a$ . C'est en fait cet ordre sur les  $X_a$  qui est le plus important (cf Remarque 2.1). Si on pose  $X^a = X_a^\perp$ , on a :

$$(7) \quad X^a = \{x \in X \mid R_i^a(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \in A_i} m_j x_j = 0\}.$$

On définit l'interaction entre amas par :

$$(8) \quad I_a(x) = \sum_{(ij) \in \mathcal{I}_a} V_{ij}(x).$$

On pose alors  $H_a = H - I_a$ . Comme les termes d'interaction dans  $H_a$  ne dépendent que des variables sur  $X^a$ , on peut décomposer  $H_a$  comme :

$$(9) \quad H_a = \mathbf{1}_{|X^a} \otimes -\Delta_{|X_a} + (-\Delta_{|X^a} + V^a(x^a)) \otimes \mathbf{1}_{|X_a}.$$

Ici  $V^a = V - I_a$  est une fonction sur  $X^a$ . Le premier terme représente l'énergie cinétique des centres de masse des amas de  $a$ , et le deuxième représente l'énergie interne des amas de  $a$ . On note  $H^a$  le Hamiltonien :

$$-\Delta_{|X^a} + V^a(x^a)$$

agissant sur  $L^2(X^a)$ . On note finalement par  $T_a$  le Hamiltonien  $-\Delta_{|X_a}$ .

**Remarque 2.1.**— *On peut définir une classe de Hamiltoniens à N corps généralisés (cf. Agmon [Ag]) en oubliant la structure de particules, et en introduisant a priori une famille de sous espaces vectoriels  $X_a$  pour  $a \in \mathcal{A}$  dans un espace vectoriel de dimension finie  $X$  avec la relation d'ordre sur  $\mathcal{A}$   $a \subset b$  si  $X_b \subset X_a$ . Dans cette classe de Hamiltoniens rentrent par exemple les Hamiltoniens atomiques ainsi que des systèmes à N corps où on ajoute des interactions entre des groupes de particules: par exemple on peut admettre des interactions qui ont lieu uniquement quand trois particules sont proches les unes des autres. Tous les résultats décrits dans la suite s'étendent directement aux Hamiltoniens d'Agmon.*

$H^a$  décrit un nouveau système à N corps formé de la collection des amas de  $a$ , avec uniquement leurs interactions internes. Les  $H^a$  pour  $a \neq a_{max}$

sont appelés les *sous systèmes* de  $H$ . Les valeurs propres de  $H^a$  pour  $a \neq a_{max}$  sont appelés les *seuils* de  $H$ . On notera  $\Sigma$  l'ensemble des seuils. Sous les hypothèses (H)  $\Sigma$  est un ensemble fermé dénombrable ([M,PSS,FH]). Les seuils correspondent à des niveaux d'énergie où de nouvelles possibilités de désintégration apparaissent. Citons par exemple le célèbre théorème HVZ (Hunziker, Van Winter, Zhislin):

**THÉORÈME 2.2.**— *Le spectre essentiel de  $H$  est égal à  $[\inf \Sigma, +\infty[$ .*

Ainsi  $\inf \Sigma$  est le niveau d'énergie minimal pour pouvoir désintégrer le système. De même, 0 est le niveau d'énergie minimal où le système peut se 'casser' en  $N$  morceaux indépendants. D'autre part les seuils sont de façon générale des niveaux d'énergie où le système a un comportement plus pathologique. Par exemple sous les hypothèses (H), les seuils sont les seuls points d'accumulation possibles pour les valeurs propres (éventuellement plongées) de  $H$ . Ce sont aussi les points où la multiplicité du spectre continu change. Enfin ce sont des niveaux où les estimations de propagation (voir Sect. 6) ne sont plus valables. Ceci vient du fait qu'un système à un niveau d'énergie de seuil peut se trouver dans une configuration formée de paquets stables ayant des impulsions relatives nulles. Dans le cas des potentiels à courte portée (voir plus bas), ces états peuvent être éliminés par un argument de densité qui provient du lemme évident suivant:

**Lemme 2.3.**— it Pour  $u \in \mathcal{H}_c(H)$ ,  $E_\Delta(H)u$  tend vers 0 quand l'intervalle  $\Delta$  tend vers un point  $\{\lambda_0\}$ .

Dans le cas à longue portée, il semble qu'il soit nécessaire d'invoquer un autre mécanisme pour obtenir la désintégration de ces états. L'un de ces mécanismes pourrait être la *diffusion*, par analogie avec le problème à deux corps.

Un comportement asymptotique élémentaire pour  $e^{-itH}u$  pour  $t \rightarrow \pm\infty$  est décrit par trois types de données :

- une décomposition en paquets, i. e un élément  $a$  de  $\mathcal{A}$ .
- une fonction  $u_a$  dans  $L^2(X_a)$  qui décrit le mouvement relatif des centres de masse des paquets.

- une fonction propre  $\psi^a$  de  $H^a$  dans  $L^2(X^a)$  qui décrit l'état stable de chaque paquet de particules.

La donnée d'une décomposition  $a \in \mathcal{A}$  et d'une fonction propre  $\psi^a$  (modulo multiplication par une constante) s'appelle un *canal de réaction*. On le note par la lettre grecque  $\alpha = (a, m)$ , où  $m$  est le numéro de la valeur propre  $\epsilon_\alpha$  de  $H^a$  (avec multiplicité). On note alors  $\psi^\alpha$  la fonction propre de  $H^a$  associée au canal  $\alpha$ .

Le mouvement relatif des centres de masse des paquets dépend fortement de la décroissance à l'infini des potentiels  $V_{ij}$ . Si les potentiels  $V_{ij}(x)$  décroissent à l'infini comme  $\langle x \rangle^{-\rho}$  pour  $\rho > 1$  (potentiels à courte portée), on peut approximer l'évolution relative des paquets par une évolution libre donnée par le Laplacien  $T_a$ . Si les potentiels  $V_{ij}$  décroissent comme  $\langle x \rangle^{-1}$  ou plus lentement, il faut corriger l'évolution libre pour tenir compte de la décroissance plus lente des interactions à l'infini. Nous reviendrons sur les problèmes posés par les potentiels à longue portée dans la Section 7. Dans toute la suite, on ne considèrera que des potentiels à courte portée.

Donnons d'abord les hypothèses sur les potentiels: on a vu qu'on pouvait considérer  $V_{ij}(x_i - x_j)$  comme une fonction  $V_a$  sur  $X^a$  pour  $a = (ij)$ . On suppose que  $V_a$  vérifie les conditions suivantes :

(H.i)  $V_a(x^a)(-\Delta^a + 1)^{-1}$  est compact sur  $L^2(X^a)$ .

(H.ii)  $\langle x \rangle^\mu V_a(x^a)(-\Delta^a + 1)^{-1}$  est borné.

(H.iii)  $\langle x \rangle^{1+\mu} \nabla V_a(x^a)(-\Delta^a + 1)^{-1}$  est borné.

(H.iv)  $(x^a \cdot \nabla)^2 V_a(x^a)(-\Delta^a + 1)^{-1}$  est borné.

On dira que les potentiels sont à courte portée si  $\mu > 1$ . Notons que l'hypothèse (H.iv) n'est pas strictement nécessaire pour obtenir les résultats que nous allons décrire : la complétude asymptotique est vraie sans elle (voir le récent travail de Graf [G] ) et l'absence de spectre singulier continu aussi sous des hypothèses plus faibles (voir [BGM]).

Pour des potentiels à *courte portée* les *opérateurs d'onde* sont définis de la manière suivante :

**DÉFINITION 2.4.**— *Pour un canal  $\alpha$ , on définit les opérateurs d'onde*



$\Omega_\alpha^\pm$  par : pour  $u_a \in L^2(X_a)$

$$\Omega_\alpha^\pm u_a = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-it(T_a + \epsilon_\alpha)} u_a \otimes \psi^\alpha$$

Le résultat qui suit est standard:

**THÉORÈME 2.5.**— (i) *Sous les hypothèses (H), pour  $\mu > 1$ , les opérateurs d'onde  $\Omega_\alpha^\pm$  existent.*

(ii) *pour  $\alpha \neq \beta$ ,  $Im\Omega_\alpha^\pm \perp Im\Omega_\beta^\pm$ .*

Le point (i) du Théorème ci-dessus signifie que pour toute évolution asymptotique  $e^{-it(T_a + \epsilon_\alpha)} u_a \otimes \psi^\alpha$  donnée, il existe un état  $u$  tel que  $e^{-itH} u$  soit asymptotique à cette évolution. Le point (ii) signifie simplement qu'un état  $u$  ne peut avoir deux évolutions asymptotiques différentes quand  $t \rightarrow \pm\infty$ , ou en d'autres termes que la classification asymptotique adoptée est suffisamment fine.

La *complétude asymptotique* correspond au fait que toutes les évolutions possibles sont décrites par la classification asymptotique :

**DÉFINITION 2.6.**— *Le système à  $N$  corps  $H$  est asymptotiquement complet si :*

$$\bigoplus_\alpha Im\Omega_\alpha^\pm = \mathcal{H}_c(H).$$

Comme on l'a dit dans l'introduction, la complétude asymptotique entraîne (et est en fait beaucoup plus forte) l'absence de spectre singulier continu. Cette propriété est en fait une conséquence de l'estimation de Mourre (cf [M,PSS,FH] Section 6) valide sous les hypothèses (H).

### 3. LA DÉSINTÉGRATION ASYMPTOTIQUE

Pour démontrer la complétude asymptotique, Sigal et Soffer (cf. [SS1]) ont introduit une description intermédiaire du comportement asymptotique, la *désintégration asymptotique* (asymptotic clustering). Donnons d'abord une caractérisation équivalente de la complétude asymptotique:

**PROPOSITION 3.1.**— *Le système à  $N$  corps  $H$  est asymptotiquement complet si et seulement si :  $\forall u \in \mathcal{H}_c(H)$  et  $\forall \epsilon > 0$ , il existe un ensemble fini  $\Sigma_\epsilon$  de canaux et pour  $\alpha \in \Sigma_\epsilon$  des vecteurs  $u_{\alpha,\epsilon} \in L^2(X_\alpha)$  tels que :*

$$(10) \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left\| e^{-itH} u - \sum_{\alpha \in \Sigma_\epsilon} e^{-it(T_\alpha + \epsilon_\alpha)} u_{\alpha,\epsilon} \otimes \psi^\alpha \right\| \leq \epsilon.$$

Pour définir la propriété de désintégration asymptotique, on compare l'évolution totale à des évolutions plus grossières que celles utilisées dans la complétude asymptotique.

**DÉFINITION 3.2.**— *Le système à  $N$  corps  $H$  se désintègre asymptotiquement à l'énergie  $E$  si il existe un intervalle  $\Delta$  autour de  $E$  tel que  $\forall u \in \text{Im} E_\Delta(H) \cap \mathcal{H}_c(H)$ , il existe des vecteurs  $\psi_{a,E}^\pm \in L^2(X)$  tels que :*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left\| e^{-itH} u - \sum_a e^{-itH_a} \psi_{a,E}^\pm \right\| = 0.$$

Cette propriété exprime le fait que le système va se désintégrer en un certain nombre de paquets pour lesquels on a une évolution plus simple donnée par le Hamiltonien  $H_a$ . Par contre elle ne dit rien sur la stabilité des paquets. L'idée est que si les paquets sont instables, ils vont à leur tour se désintégrer en sous-paquets, jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des paquets stables. Cette intuition est traduite dans le Théorème suivant :

**THÉORÈME 3.3.**— *Si le système à  $N$  corps  $H$  se désintègre asymptotiquement à toutes les énergies en dehors des seuils ainsi que tous les sous systèmes  $H^a$ , le système est asymptotiquement complet.*

**Démonstration :** soit  $\psi \in \mathcal{H}_c(H)$ . Grâce au Lemme 2, et au fait que l'ensemble  $\Sigma$  est fermé et dénombrable, on peut trouver un compact  $\Delta$  évitant les seuils tel que :

$$(11) \quad \left\| \psi - E_\Delta(H)\psi \right\| \leq \epsilon.$$

En notant  $\phi = E_\Delta(H)\psi$ , on peut trouver un nombre fini d'intervalles  $\Delta_i$  tels que  $H$  se désintègre asymptotiquement sur  $\Delta_i$ . On peut écrire :  $\phi = \sum \phi_i$ ,

avec  $\phi_i \in \text{Im} E_{\Delta_i}(H) \cap \mathcal{H}_c(H)$ . Comme  $H$  se désintègre asymptotiquement, il existe des  $\phi_{a,i}^{\pm}$  tels que :

$$(12) \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left\| e^{-itH} \phi_i - \sum_a e^{-itH_a} \phi_{a,i}^{\pm} \right\| = 0.$$

En posant  $\phi_a^{\pm} = \sum_i \phi_{a,i}^{\pm}$ , on a :

$$(13) \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left\| e^{-itH} \phi - \sum_a e^{-itH_a} \phi_a^{\pm} \right\| = 0.$$

Notons par  $P_a$  la projection sur le spectre ponctuel de  $H^a \otimes \mathbf{1}_{X_a}$ . On a :

$$(14) \quad P_a = \sum_{\text{canaux de } a} P_{\alpha} \otimes \mathbf{1}_{X_a}.$$

Ici  $P_{\alpha}$  désigne le projecteur spectral de  $H^a$  sur la valeur propre  $\epsilon_{\alpha}$ . En écrivant  $u_{\alpha}^{\pm} = \langle \psi^{\alpha}, \phi_a^{\pm} \rangle_{X_a}$ , et  $\psi_a^{\pm} = (\mathbf{1} - P_a) \phi_a^{\pm}$ , on a :

$$(15) \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left\| e^{-itH} \phi - \sum_{\alpha} e^{-it(T_a + \epsilon_{\alpha})} u_{\alpha}^{\pm} - \sum_a e^{-itH_a} \psi_a^{\pm} \right\| = 0.$$

Le point important est que  $\psi_a^{\pm}$  est orthogonal aux fonctions propres de  $H^a$ , ce qui permet d'appliquer la propriété de désintégration asymptotique à chaque terme

$$e^{-itH_a} \psi_a^{\pm} = e^{-itT_a} e^{-itH^a} \psi_a^{\pm}.$$

En regroupant les termes, on arrive après un nombre fini d'étapes à l'équation (10). Par exemple en collectant les termes ne contenant que des  $e^{-itT_a}$  on obtient un terme  $e^{-itH_{a_{\min}}}$ , qui correspond à une composante où le système est complètement séparé.

#### 4. L'ENSEMBLE DE PROPAGATION

Pour démontrer la propriété de désintégration asymptotique, Sigal et Soffer utilisent la voie la plus directe, qui est de démontrer l'existence

d'opérateurs d'onde semblables à ceux de la définition 2.3, mais avec la dynamique perturbée figurant à droite (cf (19)). L'existence de ces opérateurs d'onde (appelés opérateurs d'onde de *Deift-Simon*) est beaucoup plus difficile à démontrer que celle des opérateurs d'onde standard: dans le cas de deux corps elle est par exemple équivalente à la complétude asymptotique. Un outil essentiel pour démontrer l'existence de ces opérateurs d'onde est une majoration géométrique d'un ensemble de l'espace des phases  $T^*(X)$  appelé *ensemble de propagation*. Cet ensemble dépend d'un paramètre  $E$  qui est le niveau d'énergie considéré et sera noté  $PS_E$ .

Commençons par donner la définition de  $PS_E$ : on utilise des localisations dans l'espace des phases sous forme d'opérateurs pseudodifférentiels de symbole:

$$j(x, \xi) = j(x, \xi, \gamma), \quad \gamma = \hat{x} \cdot \xi.$$

Ici  $\hat{x}$  est égal à  $\frac{x}{\langle x \rangle}$ . On suppose que  $j$  est à support compact en  $\xi$  et  $\gamma$  et vérifie des estimations en  $x$  du type:

$$(16) \quad |\partial_x^\alpha j(x, \xi)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{-|\alpha|}, \quad \forall \alpha \in N^n.$$

La quantification de  $j(x, \xi)$  a peu d'importance, on peut par exemple adopter la quantification de Weyl. On notera  $J(x, D_x)$  le quantifié de  $j(x, \xi)$  et  $\text{supp} J$  le support de  $j$ , que l'on peut supposer conique en  $x$ .

**DÉFINITION 4.1.**— Soit  $E$  un niveau d'énergie donné. On dit que un ouvert  $\mathcal{F}$  conique en  $x$  de  $T^*(X)$  n'est pas dans  $PS_E$  si il existe un opérateur pseudodifférentiel satisfaisant les estimations (16) tel que  $\mathcal{F} \subset \text{supp} J$  et un intervalle  $\Delta$  autour de  $E$  tels que :

$$(17) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \|\langle x \rangle^{-1/2} J(x, D_x) e^{-itH} u\|^2 dt \leq C \|u\|^2$$

pour tout  $u$  dans  $\text{Im} E_\Delta(H) \cap \mathcal{H}_c(H)$ .

La condition (17) signifie que la probabilité de présence totale dans  $\mathcal{F}$  (pondérée par le poids  $\langle x \rangle^{-1}$ ) est finie. Le facteur  $\langle x \rangle^{-1/2}$  dans (17) est essentiel: par exemple une conséquence de l'estimation de Mourre pour  $H$

(cf. Mourre [M], Perry-Sigal-Simon [PSS], Froese-Herbst [FH]) est que pour tout niveau  $E$  en dehors des seuils, il existe un intervalle  $\Delta \ni E$  tel que:

$$(18) \quad \forall s > 0 \int_{-\infty}^{+\infty} \|\langle x \rangle^{-1/2-s} e^{-itH} u\|^2 dt \leq C \|u\|^2$$

pour tout  $u$  dans  $ImE_\Delta(H) \cap \mathcal{H}_c(H)$ . (18) traduit approximativement le fait que  $e^{-itH} u$  s'éloigne de l'origine dans  $X$  (c'est à dire d'une configuration où toutes les particules sont proches), à vitesse constante si  $u$  est localisé en énergie en dehors des seuils. On peut raffiner la définition de  $PS_E$  en  $PS_E^\pm$  définis en intégrant dans (17) entre 0 et  $\pm\infty$ .

La majoration géométrique de  $PS_E$  démontrée par Sigal et Soffer est la suivante: la première remarque (connue depuis longtemps) est que pour un niveau d'énergie  $E$  donné seuls les seuils correspondant à des canaux *ouverts* sont importants: un canal  $\alpha$  est dit *ouvert* si on a  $E \geq \epsilon_\alpha$ , où  $\epsilon_\alpha$  est le seuil associé au canal  $\alpha$ . La raison en est que le système sur le niveau d'énergie  $E$  ne peut pas se désintégrer sur un canal fermé  $\beta$  associé à une décomposition en amas  $b$ : en effet la conservation de l'énergie entraîne que :

$$E = \epsilon_\beta + D_{x_b}^2.$$

On peut en effet négliger le terme d'interaction  $I_b(x)$  qui est petit si les amas de  $b$  sont bien séparés.

Le Théorème clé de Sigal et Soffer est alors le suivant:

**THÉORÈME 4.2.**—  $PS_E$  est inclus dans :  $\bigcup_{\alpha \text{ ouvert}} \{(x, \xi) \mid x \in X_\alpha, x_\alpha \|\xi_\alpha, \xi_\alpha^2 = E - \epsilon_\alpha\}$  .

On a ici identifié  $X$  avec  $X^*$  à l'aide de la forme quadratique  $q$  et on note  $\xi_\alpha$  la projection orthogonale de  $\xi$  sur  $X_\alpha^*$  pour la forme quadratique  $\hat{q}$  duale de  $q$ . La signification de cette majoration est la suivante: l'impulsion relative  $\xi_\alpha$  des amas de  $a$  n'est restreinte que par la condition énergétique  $\xi_\alpha^2 = E - \epsilon_\alpha$ , et pour  $t$  grand, la position relative des amas devient parallèle à l'impulsion relative, comme dans le mouvement d'une particule libre. Les impulsions et positions internes des amas ne sont pas décrites car elles sont gouvernées par le mouvement purement quantique  $e^{-itH^a}$ . Le Théorème

(4.2) est valable aussi pour des potentiels à *longue portée*. Nous donnerons dans la section 6 les idées essentielles de la preuve du Théorème 4.2).

## 5. LES OPÉRATEURS D'ONDE DE DEIFT-SIMON ET LA COMPLÉTUDE ASYMPTOTIQUE

Dans cette section nous allons démontrer le Théorème suivant:

**THÉORÈME 5.1.**— *Le système  $H$  se désintègre asymptotiquement à toutes les énergies en dehors des seuils.*

Ce résultat entraîne la complétude asymptotique grâce au Théorème 3.3 et au fait qu'on peut appliquer le Théorème 5.1 aux sous systèmes  $H^a$ .

Pour définir les opérateurs d'onde de *Deift-Simon* Sigal et Soffer ont introduit une partition de l'unité approchée de l'espace des phases qui permet de 'découpler' les canaux de réaction.

**PROPOSITION 5.2.**— *Pour toute énergie  $E$  en dehors des seuils, il existe une famille  $j_{a,E}(x, \xi)$  pour  $a \in \mathcal{A}$  d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0 tels que :*

- (i)  $\sum_a j_{a,E} = 1 + O(\langle x \rangle^{-1})$
- (ii)  $j_{a,E}(x, \xi)$  est une fonction de  $(x, \xi_a, \gamma)$
- (iii)  $j_{a,E}$  est supporté dans  $\mathcal{J}_a$ , où :

$$\mathcal{J}_a = \{(x, \xi) \mid \forall b \neq a, \langle x^b \rangle \geq \delta \langle x \rangle\}$$

- (iv)  $\nabla j_{a,E}(x, \xi) = \langle x \rangle^{-1} k_a(x, \xi) + O(\langle x \rangle^{-2})$

Ici  $k_a(x, \xi)$  est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 supporté en dehors de  $PS_E$  et on pose :

$$\nabla j_{a,E}(x, \xi) = \nabla_{(x,\gamma)} j_{a,E}(x, \xi_a, \gamma)|_{\gamma=\hat{x}\cdot\xi}$$

La condition (iii) entraîne que  $j_{a,E}$  est supporté dans une région où les paquets de  $a$  s'éloignent les uns des autres.

On définit alors les opérateurs d'onde de Deift-Simon par:

$$(19) \quad W_{a,E}^\pm u = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_a} J_{a,E}(x, D_x) e^{-itH} u.$$

On a le résultat suivant qui est facile à démontrer:

**PROPOSITION 5.3.**— *Si les opérateurs de Deift-Simon (19) existent pour tout  $u \in \text{Im}E_\Delta(H) \cap \mathcal{H}_c(H)$  pour un intervalle  $\Delta \ni E$ , le système  $H$  se désintègre asymptotiquement à l'énergie  $E$ .*

Il ne reste plus qu'à démontrer l'existence des opérateurs d'onde de Deift-Simon :

**PROPOSITION 5.4.**— *Pour tout  $E$  en dehors des seuils, les opérateurs de Deift-Simon existent sur un intervalle  $\Delta \ni E$  ne rencontrant pas les seuils de  $H$ .*

**Démonstration :** par un argument de densité standard, et utilisant le fait (cf. [PSS]) que les valeurs propres de  $H$  ne peuvent s'accumuler qu'aux seuils, on peut supposer que  $E$  n'est pas une valeur propre de  $H$  et prendre un intervalle  $\Delta \ni E$  ne rencontrant pas les seuils et valeurs propres de  $H$ . On va utiliser la méthode de Cook (cf. [RS]). Posons:

$$W_{a,E}(t) = e^{itH_a} J_{a,E}(x, D_x) e^{-itH}.$$

En calculant la dérivée de  $W_{a,E}(t)$ , on obtient:

$$(20) \quad W_{a,E}(t) = J_{a,E} + i \int_0^t e^{isH_a} (H_a J_{a,E} - J_{a,E} H) e^{-isH} ds.$$

On a:

$$(21) \quad H_a J_{a,E} - J_{a,E} H = [H_a, J_{a,E}] - J_{a,E} I_a.$$

À cause du support de  $J_{a,E}$ , on voit que  $J_{a,E} I_a (H + i)^{-1}$  est de la forme  $B \langle x \rangle^{-\mu}$ , où  $B$  est un opérateur borné. Le facteur  $(H + i)^{-1}$  se traite par des arguments standard de troncature en énergie, et nous supposons pour simplifier que  $J_{a,E} I_a \langle x \rangle^\mu$  est borné. Regardons maintenant le terme  $[H_a, J_{a,E}]$ : pour simplifier l'argument, nous allons supposer que les potentiels sont réguliers et que l'on peut utiliser le calcul symbolique des

opérateurs pseudodifférentiels. Posons  $j_{a,E}(x, \xi) = k_a(x, \xi_a, \gamma)$ . Le terme principal dans le symbole de  $[H_a, J_{a,E}]$  est  $m_a =$ :

$$(22) \quad 2\xi \cdot (\partial_x k_a + \partial_\gamma k_a (\frac{\xi}{\langle x \rangle} + x \cdot \xi \frac{x}{\langle x \rangle^3})) - \partial_{x^a} V^a(x^a) \cdot \frac{x^a}{\langle x \rangle} \partial_\gamma k_a.$$

Comme  $\partial_{x^a} V^a(x^a) \cdot x^a$  est *borné* (et non  $O(\langle x \rangle)$  comme on pourrait le croire *a priori*), on voit que  $m_a$  est de la forme :

$$(23) \quad m_a(x, \xi) = \langle x \rangle^{-1} \tilde{j}_a$$

où  $\tilde{j}_a$  est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 supporté hors de  $PS_E$ , par la Proposition 5.2 (ii). Prenons maintenant  $u \in Im E_\Delta(H)$  et  $v \in Im E_{\Delta'}(H)$ , pour un intervalle  $\Delta' \supset \Delta$ . Utilisant que  $J_{a,E} I_a \langle x \rangle^\mu$  est borné et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a :

$$(24) \quad \begin{aligned} & \left| \int_{t'}^t \langle (H_a J_{a,E} - J_{a,E} H) e^{-isH} u, e^{-isH_a} v \rangle ds \right| \leq \\ & \left[ \int_{t'}^t \|q_{1,a} \langle x \rangle^{-1/2} e^{-isH} u\|^2 ds \right]^{1/2} \\ & \times \left[ \int_{t'}^t \|q_{2,a} \langle x \rangle^{-1/2} e^{-isH_a} v\|^2 ds \right]^{1/2} \\ & + C \left[ \int_{t'}^t \|\langle x \rangle^{-\epsilon} e^{-isH} u\|^2 ds \right]^{1/2} \\ & \times \left[ \int_{t'}^t \|\langle x \rangle^{-\epsilon} e^{-isH_a} v\|^2 ds \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Ici  $\epsilon = \min(1, \mu/2)$  et  $q_{i,a}$  sont des opérateurs pseudodifférentiels supportés hors de  $PS_E$ . Grâce à (17) et (18), toutes ces intégrales sont convergentes. Appliquant le critère de Cauchy pour les intégrales, on montre alors immédiatement que la limite (19) existe.



## 6. LES ESTIMATIONS DE PROPAGATION

Dans cette section, nous allons donner quelques ingrédients de la preuve (longue et technique) du Théorème 4.2. Le but est de trouver un ensemble assez riche d'opérateurs pseudodifférentiels  $a(x, D_x)$  vérifiant (17). Pour cela, un Théorème abstrait de Kato ([Ka2]) permet de se ramener à la construction d'opérateurs ayant des commutateurs localement positifs avec  $H$ . On dit qu'un opérateur  $J$  est *localement  $H$ -régulier* à l'énergie  $E$ , si on a l'estimation suivante :

$$(25) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \|J(x, D_x)e^{-itH}E_{\Delta}(H)u\|^2 dt \leq C\|u\|^2$$

pour un voisinage  $\Delta$  de  $E$  et pour tout  $u \in \mathcal{H}_c(H)$ .

**THÉORÈME 6.1.**— *Soit  $C$  un opérateur autoadjoint non borné tel que :*

- i)  $E_{\Delta}(H)CE_{\Delta}(H)$  est borné
- ii) *il existe des opérateurs localement  $H$ -réguliers à l'énergie  $E$ ,  $B_i$  et  $B'_i$  pour  $1 \leq i \leq k$  et un opérateur  $B$  tels que :*

$$(26) \quad E_{\Delta}(H)[H, iC]E_{\Delta}(H) \geq E_{\Delta}(H)(B^*B - \sum_i B'_i B_i)E_{\Delta}(H).$$

*Alors  $B$  est  $H$ -régulier à l'énergie  $E$ .*

Ce Théorème permet de ramener la  $H$ -régularité d'un opérateur à l'existence de commutateurs localement positifs.

La notion d'ensemble de propagation a en fait beaucoup de liens avec la notion de *front d'onde* utilisée dans l'étude des équations aux dérivées partielles linéaires. Ceci se voit aussi au niveau des méthodes: la construction d'opérateurs pseudodifférentiels ayant un commutateur positif avec un opérateur donné  $H$  est le moyen le plus souple pour démontrer des Théorèmes de propagation du front d'onde (cf. Hörmander [Ho]). Une différence importante avec les Théorèmes de propagation des singularités est que le Théorème (4.2) fait intervenir les *seuils* qui sont des quantités quantiques: on ne peut pas accéder à ce type de quantités en remplaçant brutalement les commutateurs par des crochets de Poisson.

Nous allons donner quelques outils de la preuve de (4.2) d'après Dereziński [De] qui a simplifié la preuve originale de Sigal-Soffer en introduisant plus de calcul pseudodifférentiel. Les opérateurs qui vont jouer le rôle de  $C$  dans le Théorème (6.1) sont du type suivant:

$$(27) \quad C = g(D_x)f(\gamma)Q(x)$$

où  $\gamma = \hat{x} \cdot \xi$ ,  $\hat{x} = \frac{x}{\langle x \rangle}$ ,  $Q$  est une troncature conique d'ordre 0. L'idée clé de la démonstration est d'utiliser des commutateurs entre  $H$  et des fonctions de  $\gamma$ . les facteurs  $g(D_x)$  et  $Q(x)$  servent uniquement à localiser dans des régions convenables. Cette idée pourrait d'ailleurs être aussi appliquée au problème classique: on peut par exemple de cette façon montrer de manière élémentaire que pour le problème à deux corps, le long d'une trajectoire qui s'échappe à l'infini le rayon vecteur devient parallèle à la vitesse, ce qui est le contenu du Théorème (4.2) dans ce cas.

Un point important est que le commutateur de  $H$  et d'une fonction de  $\gamma$  a une forme simple (cf. [De] Lemme 6.1).

**Lemme 6.2.**— Soit  $F \in C^\infty(\mathbf{R})$  telle que  $F' = f^2$  avec  $f \in S(\mathbf{R})$ . On a:

$$(28) \quad \begin{aligned} & (H - \lambda)^{-1}i[H, F(\gamma)](H - \lambda)^{-1} = \\ & \langle x \rangle^{-1/2}f(\gamma)(H - \lambda)^{-1}i[H, A](H - \lambda)^{-1}f(\gamma)\langle x \rangle^{-1/2} \\ & - 2\langle x \rangle^{-1/2}(H - \lambda)^{-1}f^2(\gamma)\gamma^2(H - \lambda)^{-1}\langle x \rangle^{-1/2} + O(\langle x \rangle^{-2}) \end{aligned}$$

Ici  $A$  désigne le générateur des dilatations  $(x \cdot D_x + D_x \cdot x)/2$ .

On reconnaît ici le commutateur entre  $H$  et  $A$  qui est la quantité importante dans l'estimation de Mourre ci dessous. Notons  $\Sigma_a$  le sous ensemble de  $\Sigma$  formé des valeurs propres des  $H^b$  pour  $b \subset a$ ,  $b \neq a$ . On pose pour  $\epsilon$  assez petit:

$$(29) \quad \theta_a(E) = 2(\inf_{\beta \in \Sigma_a, \beta \text{ seuil ouvert}}(E - \beta)).$$

$$(30) \quad \theta_a^\epsilon(E, \xi_a) = 2\xi_a^2 + \inf\{\theta_a(E') \mid E - E' \leq \epsilon\}.$$

**THÉORÈME 6.3.**—  $\forall \delta > 0, \forall \epsilon > 0$ , il existe un intervalle  $\Delta \ni E$  tel que :

$$(31) \quad E_{\Delta}(H)[H, iA]E_{\Delta}(H) \geq (\theta(E) - \delta)E_{\Delta}(H).$$

$$(32) \quad E_{\Delta}(H_a)[H_a, iA]E_{\Delta}(H_a) \geq (\theta_a^{\epsilon}(E, D_a) - \delta)E_{\Delta}(H_a).$$

(32) est un raffinement de (31). Par exemple dans la région

$$(33) \quad Y_a^{\epsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \langle x^b \rangle \geq \epsilon_0 \langle x \rangle, \forall b \notin a\}$$

on a:

$$(34) \quad H = H_a + O(\langle x \rangle^{-\mu}).$$

où  $O(\langle x \rangle^{-\mu})$  signifie un terme d'erreur borné si on le compose par  $(H + i)^{-1} \langle x \rangle^{\mu}$ . Dans la région  $Y_a^{\epsilon}$ , l'estimation (31) peut donc être remplacée par l'estimation plus forte (32), qui tire partie du terme d'énergie cinétique relative entre paquets  $T_a$  dans  $H_a$ . Il faut noter que pour  $\epsilon_0$  assez petit, les  $Y_a^{\epsilon}$  pour  $a \neq a_{max}$  forment une partition de l'unité en dehors d'un voisinage de l'origine dans  $X$ .

En utilisant le Théorème 6.3 et le Lemme 6.2, on peut obtenir une estimation fine sur les commutateurs. On pose:

$$(35) \quad Z_a = X_a \setminus \bigcup_{b \notin a} X_b.$$

En clair  $Z_a$  est la région de  $X$  où les particules sont regroupées suivant les paquets de  $a$  mais pas suivant d'autres paquets. On définit alors la fonction  $\theta^{\epsilon}(E, x, \xi)$  de la façon suivante : si  $x \in Z_b$  on a :

$$\theta(E, x, \xi) = \theta_b^{\epsilon}(E, \xi_b).$$

On a alors la Proposition:

**PROPOSITION 6.4.**— Soit  $a \in \mathcal{A}$ ,  $\nu > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $F \in C^{\infty}(\mathbf{R})$  telle que  $F' = f^2$  avec  $f \in S(\mathbf{R})$ . Soit  $g$  une fonction de troncature dans

$C_0^\infty(X_a^*)$ , et  $Q(x)$  une fonction homogène de degré 0 supportée dans  $Y_a^\epsilon$ .

Notons  $\Psi$  l'opérateur  $g(D_a)\langle x \rangle^{-1/2}Q(x)^{1/2}f(\gamma)$ . Posons

$$\theta = \inf\{\theta^\epsilon(E, x, \xi) \mid x \in \text{supp}Q, \xi_a \in \text{supp}g, \text{dist}(\hat{x} \cdot \xi, \text{supp}f) \leq \nu\}.$$

Alors il existe un intervalle  $\Delta \ni E$  et une constante  $c_1$  tels que :

(36)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}E_\Delta(H)(H - \lambda)i[F(\gamma), (H - \lambda)^{-1}]Q(x)g^2(D_a)E_\Delta(H)(H - \lambda) + \text{adjoint} \\ & \geq (\theta - 2\sup\{t^2 \mid t \in \text{supp}f\} - \delta)E_\Delta(H)\Psi^*\Psi E_\Delta(H) \\ & \quad - c_1E_\Delta(H)\langle x \rangle^{-1-\mu}E_\Delta(H) \end{aligned}$$

Cette Proposition permet alors sans trop de peine d'obtenir le Théorème 4.2, en choisissant convenablement la fonction  $f$ .

## 7. POTENTIELS À LONGUE PORTÉE ET SYSTÈMES DISPERSIFS

Le résultat de Sigal et Soffer laisse encore un certain nombre de questions ouvertes. Notons tout d'abord qu'une nouvelle démonstration très élégante de la complétude asymptotique dans le cas à courte portée a été donnée par Graf [G], qui utilise une seule observable de propagation (les opérateurs  $C$  de (25)) qui dépend du temps. La plus importante est celle des potentiels à *longue portée*. Ce problème est extrêmement important du point de vue physique, car le potentiel de Coulomb est précisément à longue portée. Les seuls résultats complets sont ceux obtenus par V.Enss (cf. [E1] et [E2] pour une démonstration nouvelle) pour  $N = 3$  et pour des potentiels décroissant à l'infini comme  $\langle x \rangle^{-\mu}$  pour  $\mu > \sqrt{3} - 1$ . Enss définit des opérateurs d'onde *modifiés* pour tenir compte de l'influence des potentiels à l'infini (on peut facilement montrer que les opérateurs d'onde du Théorème (2.4) n'existent plus si  $\mu \leq 1$ ). Ces opérateurs d'onde modifiés ou opérateurs d'onde de *Dollard* (cf [Do]) qui existent tant que  $\mu > 1/2$ , sont définis de la manière suivante. Nous supposons pour simplifier que les potentiels d'interaction sont des fonctions *bornées*. On pose:

$$(37) \quad H_a(t) = H_a + I_a(D_a t)$$

et on note  $U_{a,D}(t)$  la solution de:

$$(38) \quad i \frac{dU_{a,D}}{dt}(t) = H_a(t)U_{a,D}(t), U_{a,D}(0) = \mathbf{1}.$$

On définit alors les opérateurs d'onde de Dollard par:

$$(39) \quad \Omega_{D,\alpha}^\pm u_a = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} U_a(t) u_a \otimes \psi_\alpha.$$

Il faut remarquer que pour des potentiels à longue portée, même l'existence des opérateurs d'onde de Dollard n'est pas évidente. L'évolution décrite par  $U_{a,D}(t)u_a \otimes \psi_\alpha$  correspond à des paquets stables évoluant suivant  $e^{-itH^a}$  et dont les centres de masse évoluent suivant une dynamique perturbée décrite par le Hamiltonien dépendant du temps  $T_a + I_a(D_a t)$ . Enss obtient (sans hypothèses de nature implicite sur la décroissance des états liés des sous systèmes) l'existence des opérateurs d'onde de Dollard pour  $\mu > 1/2$  et la complétude pour  $\mu > \sqrt{3} - 1$ .

Un autre résultat sur les potentiels à longue portée a été démontré par Sigal et Soffer (cf [SS2]). Il s'agit de la propriété de désintégration asymptotique. Sigal et Soffer ont montré que pour des potentiels de type Coulombien (i.e. vérifiant (H) avec  $\mu = 1$ ) on a la propriété de désintégration asymptotique, si on remplace l'évolution approchée  $e^{-itH_a}$  par une évolution modifiée  $U_a(t)$  définie par :

$$(40) \quad i \frac{dU_a}{dt}(t) = \tilde{H}_a(t)U_a(t), U_a(0) = \mathbf{1}$$

où  $\tilde{H}_a(t)$  est défini par :

$$(41) \quad \tilde{H}_a(t) = H_a + \chi_a(x/\alpha t)I_a(x^a, D_a t)$$

où  $\chi_a(x)$  est une troncature conique supportée dans une région semblable à  $Y_a^\epsilon$ . A la différence de  $U_{a,D}(t)$ ,  $U_a(t)$  ne commute pas avec  $e^{-itH^a}$ , ce qui veut dire que dans l'évolution  $U_a(t)u$ , le mouvement interne des paquets est perturbé par l'influence de  $I_a$  à l'infini. Enfin Sigal et Soffer ont annoncé la complétude asymptotique pour  $N = 4$  pour des potentiels Coulombiens.

Une autre classe de problèmes ouverts concerne les systèmes à  $N$  corps *dispersifs*. Un système à  $N$  corps dispersif est obtenu de façon générale en remplaçant dans un Hamiltonien à  $N$  corps d'Agmon (voir la remarque (2.1)) l'énergie cinétique  $\sum_{i=1}^N -\Delta_{\frac{x_i}{2m_i}}$  par un opérateur  $\omega(D_x)$  pour une fonction  $\omega(\xi)$  réelle. Ce type de Hamiltoniens intervient dans un grand nombre de problèmes. Par exemple pour incorporer des corrections relativistes dans (1), on peut remplacer

$$(42) \quad \sum_{i=1}^N -\frac{\Delta_{x_i}}{2m_i}$$

par :

$$(43) \quad \omega(D_x) = \sum_{i=1}^N (-\Delta_{x_i} + m_i^2)^{1/2}$$

On rencontre aussi des systèmes dispersifs dans la *physique des solides*, par exemple dans le scattering d'ondes de spin pour le Hamiltonien de Heisenberg et dans certains modèles à plusieurs électrons dans un cristal.

On voit immédiatement une différence importante avec les Hamiltoniens à  $N$  corps standard, qui est qu'il n'existe plus de forme quadratique naturelle pour définir des espaces  $X^a$  supplémentaires aux  $X_a$ . Or les espaces  $X^a$  sont nécessaires pour définir les sous systèmes et les opérateurs d'onde. On peut cependant définir une classe raisonnable de systèmes dispersifs (qui contient par exemple le Hamiltonien de trois particules relativistes de même masse) pour lesquels on a une bonne définition de sous systèmes (cf. [Ge]). Comme conséquence, on peut démontrer une estimation de Mourre semblable à (31) et en déduire l'absence de spectre singulier continu, l'existence des opérateurs d'onde correctement définis et leur complétude dans une région du spectre appelée *région à deux corps*.

BIBLIOGRAPHIE

- [Ag] S. AGMON - *Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations*, Math. Notes Princeton Univ. Press 1982.
- [BGM] A. BOUTET de MONVEL-BERTHIER, V. GEORGESCU, M. MANTOIU - *Mourre's theory in a Besov space setting*, C.R.A.S. t310 (1990).
- [Com] J.- M. COMBES - *Relatively compact interactions in many particles systems*, Comm. Math. Phys. **12**(1969).
- [Do] J.D. DOLLARD - *Quantum mechanical scattering for short-range and Coulomb interactions*, Rocky Mountain J. Math. **1**(1971).
- [De] J. DEREZINSKI - *A new proof of propagation theorem for N-body Quantum systems*, Com. Math. Phys. **122**(1989).
- [DL] F. DYSON-A. LENARD - *Stability of matter I,II*, J. Math. Phys. **8** (1967), **9**(1969).
- [E1] V. ENSS - *Quantum scattering theory for two and three-body systems with potentials of short and long range*, in : *Schrödinger Operators*, S.Graffi ed. Springer LN Math. 1159 (1985).
- [E2] V. ENSS - *Long range scattering for two and three body quantum systems*, Actes du Congrès de Saint Jean de Monts (1989).
- [FH] R. FROESE, I. HERBST - *A new proof of the Mourre estimate*, Duke Math. J **49** (1982).
- [Ge] C. GÉRARD - *The Mourre estimate for regular dispersive N-body systems*, Preprint de l'Ecole Polytechnique (1990).
- [G] G.M. GRAF - *Asymptotic completeness for N-body short- range quantum systems : a new proof*, Preprint ETH (1989).
- [Hö] L. HÖRMANDER - *On the existence and regularity of solutions of linear pseudodifferential equations*, L'Enseign. Math. **17** (1971).
- [Ka1] T. KATO - *On the existence of solutions of the Helium wave equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **70** (1951).
- [Ka2] T. KATO - *Smooth operators and commutators*, Studia Math. **31** (1968).
- [LL] L. LANDAU, E. LIFSCHITZ - *Mécanique Quantique* Editions Mir Moscou 1967.

- [L] E.H. LIEB - *The stability of matter : from atoms to stars*, Bull. de l'A.M.S. Vol 22(1) (1990).
- [LT] E. LIEB, W. THIRRING - *Bound for the kinetic energy of fermions which proves the stability of matter*, Phys. Rev. Lett. **35** (1975).
- [M] E. MOURRE - *Absence of singular continuous spectrum for certain selfadjoint operators*, Comm. Math. Phys. **78** (1981).
- [Pe] D.B. PEARSON - *Singular continuous measures in scattering theory*, Comm. in Math. Phys. **60** (1978).
- [PSS] P. PERRY, I. M. SIGAL, B. SIMON - *Spectral analysis of  $N$ -body Schrödinger operators*, Ann. of Math. **114** (1981).
- [RS] M. REED, B. SIMON - *Methods of Modern Mathematical Physics II, III*, Academic Press (1975) (1979).
- [SS1] I.M. SIGAL, A. SOFFER -  *$N$ -particle scattering problem: asymptotic completeness for short range systems*, Ann. Math. **126** (1987).
- [SS2] I.M. SIGAL, A. SOFFER - *Long range many-body scattering: asymptotic clustering for Coulomb type systems*, Invent. Math. **99** (1990).

Christian GÉRARD  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
Centre de Mathématiques  
URA 169 du CNRS  
F-91128 PALAISEAU CEDEX