

# *Astérisque*

CLAUDE VITERBO

## **Capacités symplectiques et applications**

*Astérisque*, tome 177-178 (1989), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 714, p. 345-362

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1988-1989\\_\\_31\\_\\_345\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1988-1989__31__345_0)>

© Société mathématique de France, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CAPACITES SYMPLECTIQUES ET APPLICATIONS  
(d'après Ekeland-Hofer, Gromov)

par Claude VITERBO

**1 Quelques problèmes en topologie symplectique.**

Une variété symplectique est une variété  $M$  munie d'une deux forme  $\omega$  fermée (i.e.  $d\omega = 0$ ) et non dégénérée (i.e.  $\omega(x, y) = 0$  pour tout  $y$  entraîne  $x = 0$ ). Les variétés symplectiques se rencontrent souvent dans la nature:

- (1)  $(\mathbb{R}^{2n}, \sigma)$  où  $\sigma = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy^i$ , comme on le verra plus loin, c'est le modèle local universel.
- (2)  $(T^*L, dp \wedge dq)$  c'est l'espace des phases de la mécanique classique, où on a posé  $dp \wedge dq = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i$  les  $q^i$  étant des cordonnées locales sur  $L$ , et les  $p_i$  les coordonnées duales
- (3) Les variétés Kähleriennes. Ce sont des variété complexes munies d'une forme bilinéaire hermitienne  $h$  dont la partie réelle est une métrique riemannienne, et la partie imaginaire une forme symplectique. Par exemple toutes les variétés projectives complexes sont des variétés symplectiques.

La géométrie symplectique est l'étude des variété symplectiques. Il sera souvent utile pour mieux comprendre les problèmes qui se posent, de comparer la géométrie symplectique avec deux autres géométries: la géométrie riemannienne et la géométrie de volume (i.e. la géométrie des variétés munies d'une forme volume). On notera au passage que les variétés symplectiques tombent sous le coup de la géométrie de volume puisque si  $\omega$  est une forme symplectique, alors  $\omega^n$  est une forme volume. La question s'est d'ailleurs longtemps posée de savoir si la géométrie symplectique était vraiment plus riche que la géométrie de volume<sup>1</sup>. On verra que cela découle de l'existence des capacités. Le principal sujet de cet exposé est la notion de "taille" d'un ouvert symplectique. Revenant à notre comparaison, la géométrie de volume a une notion de *taille* évidente; le volume. C'est d'ailleurs le seul, puisque l'on a:

PROPOSITION. Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts connexes munis de formes volumes, tels qu'il

<sup>1</sup> Précisons que l'on considère ici la géométrie symplectique "toute nue", sans aucune structure additionnelle telle que feuilletage, action hamiltonienne de groupe, etc... La géométrie symplectique combinée avec d'autres structures a, depuis longtemps déjà, montré sa richesse.

existe un plongement de  $U$  dans  $V$ , et  $\text{vol}(U) < \text{vol}(V)$ . Alors il existe un plongement de  $U$  dans  $V$  respectant les formes volumes.

Au contraire, il existe beaucoup de notions de *taille* en géométrie riemannienne: diamètre, volume, et toutes celles que l'on peut construire en utilisant la courbure (p.ex. maximum de la courbure de Ricci, minimum de cette même courbure). Dans ce dernier cas, la notion de taille à une origine locale, la courbure. En géométrie symplectique il n'y a point d'analogie de la courbure, à cause du:

**THÉORÈME DE DARBOUX.** *Deux variétés symplectique sont toujours localement symplectomorphes, et donc localement symplectomorphes à  $(\mathbb{R}^{2n}, \sigma)$ .*

Le but des capacités est de fournir une notion de taille globale en géométrie symplectique. Elle permettent aussi d'affirmer que la géométrie symplectique est effectivement plus riche que la géométrie de volume. Ce résultat est précisé dans la section 4. On s'intéresse donc aux deux problèmes suivants :

**Problème 1:** Etant donnés deux ouverts  $U$  et  $V$  d'une variété symplectique, donner des obstructions calculables à ce que  $U$  et  $V$  soient symplectiquement isomorphes.

**Problème 2:** Etant donnés  $U$  et  $V$  comme ci-dessus, donner des obstructions calculables à ce que  $U$  puisse être symplectiquement plongé dans  $V$ .

Notons que l'on recherche des obstructions indépendantes du volume, on pose alors

**DÉFINITION.** *Une capacité est une fonction définies sur l'ensemble des parties d'une variété symplectique, et vérifiant les propriétés suivantes:*

- (C1)  $U \subset V \Rightarrow c(U) \leq c(V)$
- (C2) Si  $\Psi$  est un difféomorphisme symplectique de  $(M, \omega)$ , alors  $c(\Psi(U)) = c(U)$
- (C3) Munissant  $B^2(r) \times \mathbb{R}^{2n-2}$  de la structure induite par la structure standard de  $\mathbb{R}^{2n}$ , on a  $0 < c(B^2(r) \times \mathbb{R}^{2n-2}) < \infty$ .

Au vu de (C1) et (C2) le lien entre le problème de plongement cité plus haut et les capacités est clair. Le but de l'axiome C3 est de s'interdire le volume et d'avoir une quantité "réellement bidimensionnelle".

Insistons pour finir sur le fait qu'il est facile de construire des capacités, mais difficile d'en trouver qui soient calculables, au moins dans les cas simples. Comme on va le voir, le "*width*" de Gromov et surtout les capacités d'Ekeland-Hofer ont cette propriété.

Le plan de cet exposé est le suivant. La section 2 expose la construction du *width*, basée sur les propriétés de courbes pseudoholomorphes ainsi que ses principales propriétés et applications. Cette section est volontairement succincte, car elle recoupe l'exposé [Be] de Bennequin. Dans la section 3 on construit les capacités de Ekeland-Hofer et on explique le lien avec des résultats d'existence d'orbites périodiques de systèmes hamiltoniens. Dans la section 4 on applique les capacités d'Ekeland-Hofer aux problèmes de plongement, et à la démonstration de la fermeture  $C^0$  des difféomorphismes symplectiques dans l'ensemble des difféomorphismes. Enfin la section 5 esquisse les développements récents et propose une liste de problèmes ouverts.

Je remercie Nicole Desolneux-Moulis, Ivar Ekeland, Yasha Eliashberg, Mark Gotay, Helmut Hofer, Jean-Claude Sikorav et Ghys Tuynman pour leur aide lors de la préparation de cet exposé, ainsi que le M.S.R.I. à Berkeley pour son hospitalité.

## 2. Le width en tant que capacité

Il nous faut rappeler brièvement la théorie des courbes pseudo-holomorphes de Gromov. Pour plus de détails on renvoie à [G1], [G2], et à l'exposé de Bennequin ([Be]). Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique, et  $J$  une structure presque complexe sur  $M$  (i.e. en chaque point  $x$  de  $M$ ,  $J_x : T_x M \rightarrow T_x M$  préserve  $\omega$  et vérifie  $J^2 = -Id$ ). On dira que  $J$  est compatible avec  $\omega$  si la forme symétrique  $g(\xi, \eta) = \omega(J\xi, \eta)$  est définie positive (et définit donc une métrique Riemannienne sur  $M$ ). L'ensemble des structures presque complexes compatibles avec  $\omega$  étant un espace contractile, une telle structure existe toujours, et est unique à homotopie près.

Etant donnée une structure presque complexe sur  $M$ , une courbe pseudo-holomorphe est une application  $u$  d'une surface de Riemann  $(S, J_0)$  dans  $(M, J)$  conjuguant  $J$  et  $J_0$ :

$$Du \circ J_0 = J \circ Du$$

ce qui, si l'on choisit localement des coordonnées conformes  $x, y$  sur  $S$  (i.e.  $J_0 \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}$ ) est bien entendu équivalent à l'équations de Cauchy-Riemann:

$$\bar{\partial}u = \frac{\partial u}{\partial x} + J \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Dans [G1] et [G2] Gromov énonce des résultats d'existence de courbes pseudo-holomorphes, et les applique pour démontrer de nombreux résultats symplectiques. Il définit, en particulier le "width" (largeur),  $w(U)$ , d'un ouvert  $U$  de  $(M, \omega)$  par:

$$w(U) = \sup_J \inf_{S \in \mathcal{H}_x(J)} \int_{S \cap U} \omega$$

Ici,  $J$  varie dans l'ensemble des structures presque complexes compatibles avec  $\omega$ , et  $\mathcal{H}_x$  est l'ensemble des courbes (non nécessairement compactes) pseudo-holomorphes pour  $J$ , passant par le point  $x$  de  $U$ , plongées et d'image fermée dans un voisinage de  $\bar{U}$ .

Montrons que la définition ne dépend pas du choix de  $x$ : si  $y$  est un autre point de  $U$ , il existe toujours un difféomorphisme symplectique de  $M$ ,  $\Psi$ , qui soit l'identité en dehors de  $U$  et qui envoie  $x$  sur  $y$ . Alors  $\Psi$  envoie  $\mathcal{H}_x(J)$  sur  $\mathcal{H}_y(\Psi^*J)$ , et vu que  $\Psi$  préserve l'aire,

$$\int_{\Psi(S) \cap U} \omega = \int_{S \cap \Psi^{-1}U} \omega = \int_{S \cap U} \omega.$$

Montrons maintenant que le width est une capacité. Un raisonnement analogue à celui que l'on vient de faire démontre (C2), alors que (C1) est évident.

C'est bien sûr (C3) qui est non-trivial. Plus précisément, on a  $w(B^2(r) \times B^2(r')) = \pi r^2$ . Montrons d'abord que  $w(B^2(r) \times B^2(r')) \leq \pi r^2$ . Pour cela considérons la variété symplectique  $(M(\rho, R), \omega) = S^2(\rho) \times T^{2n-2}(R)$  produit de la sphère d'aire totale  $\pi \rho^2$  et du tore  $T^{2n-2} = \mathbb{R}^{2n-2}/R^2 \mathbb{Z}^{2n-2}$  muni de la forme induite par le revêtement canonique de  $\mathbb{R}^{2n-2}$ . Il est facile de vérifier que  $B^2(r) \times B^2(r')$  se plonge dans  $M(r(1+\epsilon), R)$  pour  $R$  assez grand. Gromov montre par ailleurs que par un point quelconque  $(x_0, x_1)$  de  $(M(\rho, R), \omega)$

il existe toujours une sphère pseudo-holomorphe,  $S$ , homotope à  $S^2 \times \{x_1\}$ . Il est clair que pour tout ouvert  $U$  dans  $(M(\rho, R))$  on a:

$$\int_{S \cap U} \omega \leq \int_S \omega = \pi r^2 (1 + \epsilon)^2$$

Il en découle l'inégalité  $w(U) \leq \pi r^2 (1 + \epsilon)^2$  et comme cela est vrai quel que soit  $\epsilon$  positif, on en tire le résultat souhaité. L'inégalité  $w(B^2(r) \times B^2(r')) \geq \pi r^2$  découle du théorème de monotonie suivant:

**PROPOSITION 2.1.** *Soit  $V$  une sous variété analytique complexe de dimension  $p$  dans  $\mathbb{C}^n$  passant par l'origine. Alors on a:*

$$\text{aire}(V \cap B^{2n}(r)) \geq \pi r^2$$

Une démonstration, essentiellement due à P. Lelong ([Le]), en est donnée en appendice. On trouvera une autre démonstration, utilisant la formule de la variation première de l'aire, dans [B-L] (voir aussi [P]).

Notons que le width vérifie une propriété plus forte que (C2), à savoir

(C'2) Si  $\Psi : (M, \omega) \rightarrow (N, \sigma)$  est un difféomorphisme conforme de rapport  $k$  (i.e.  $\Psi^* \sigma = k \cdot \omega$  défini sur un voisinage de  $U$ , alors  $w(\Psi(U)) = k^2 \cdot w(U)$ )

Enfin le "width" s'applique aux inégalités d'empilement.

**PROPOSITION 2.2.** *Si il existe des plongements symplectiques disjoints des boules de rayon  $r_1$  et  $r_2$  dans la boule de rayon  $r$ , alors on a*

$$r_1^2 + r_2^2 \leq r^2$$

L'idée de la démonstration est de considérer  $B^{2n}(r)$  comme un ouvert de  $\mathbb{C}P^n(r)$ , projectif complexe muni d'un multiple de la forme symplectique standard telle que  $\int_{\mathbb{C}P^1} \omega = \pi r^2$ . La structure complexe standard sur les boules  $B^{2n}(r_1), B^{2n}(r_2)$  induit alors une structure complexe au voisinage de leur image que l'on peut étendre à  $\mathbb{C}P^n(r)$  tout entier. Maintenant par l'image des centres de chaque boule, il passe une sphère pseudo-holomorphe homologue à  $\mathbb{C}P^1$ . Cette sphère intersecte sur les boules une aire au moins égale, d'après 2.1, à  $\pi(r_1^2 + r_2^2)$ . Comme son aire totale égale  $\pi r^2$ , on en déduit 2.2.

Il ne faudrait pas en conclure hâtivement une quelconque additivité du width. Par exemple on peut plonger autant de boules de rayon  $r$  que l'on veut dans un cylindre  $B^2(1) \times \mathbb{R}^{2n-2}$  bien qu'ils aient le même width. Enfin si  $n = 2$ , et si l'on peut plonger symplectiquement  $d(d+3)/2$  boules  $B^{2n}(r_1), \dots, B^{2n}(r_{d(d+3)/2})$  dans un boule de rayon  $r$ , alors on a

$$\sum_{i=1}^{d(d+3)/2} r_i^2 \leq d \cdot r^2$$

(cf. [Be]).

### 3 Capacités symplectiques et orbites périodiques de systèmes hamiltoniens.

Pour toute cette section on réfère à [E-H1] et [E-H2]. Commençons par quelques rappels sur les systèmes hamiltoniens et leurs orbites périodiques. Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique, et  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^2$ . On définit le champ de vecteurs  $X_H$  par

$$\omega(X_H, \xi) = dH(x)\xi \text{ pour tout } \xi$$

On s'intéresse ici au cas autonome, mentionnons aussi le cas non autonome, où l'on a une famille  $H_t$  de fonctions, donnant lieu à un champ de vecteurs dépendant du temps  $X_{H_t}$ . Le flot  $\phi_t$  de  $X_H$  vérifie alors

- (1)  $\phi_t$  préserve  $\omega$  (cela est encore vrai dans le cas non autonome)
- (2)  $\phi_t$  préserve les hypersurfaces de niveau de  $H$ ,  $\Sigma_c = \{x \in P \mid H(x) = c\}$  (cela n'est plus vrai dans le cas non autonome)

On suppose dans la suite que  $a$  est une valeur régulière de  $H$ . Alors les trajectoires de  $X_H$  sur  $\Sigma_a$  ne dépendent que de  $\Sigma_a$ , et non du choix de la fonction  $H$  admettant  $\Sigma_a$  comme hypersurface de niveau. En effet, le champ de droites engendré par  $X_H$  est égal à  $\mathcal{L} = \ker \omega|_{\Sigma}$ . Les courbes intégrales de ce champ sont appelées caractéristiques de  $\Sigma_a$ . En particulier, les orbites périodiques de  $X_H$  correspondent aux caractéristiques fermées de  $\Sigma_a$  et ne dépendent donc que de  $\Sigma_a$ . Les caractéristiques fermées sont bien sûr conservées par une transformation symplectique. Il en est de même pour leur aire, que l'on définit maintenant en supposant  $(M, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega = d\lambda = d(\sum_{i=1}^n x_i \wedge dy^i))$  par

$$\text{aire}(\gamma) = \int_{S^1} \gamma^*(\lambda) = \int_{D^2} u^* \omega$$

où  $u$  est une application du disque dans  $\mathbb{R}^{2n}$  de bord  $\gamma$ . Il est naturel d'essayer de construire des invariants symplectiques à partir de celles-ci.

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{2n}$  à bord  $\partial U$ . D'après ce qui précède, on peut associer à  $U$  l'ensemble de réels

$$A(U) = \{\text{aire}(\gamma) \mid \gamma \text{ est une caractéristique fermée de } \partial U\}$$

L'ensemble  $A(U)$  est bien invariant par l'action de  $Diff_\omega(M)$ , mais cet invariant est assez peu maniable, pour deux raisons:

- on ne sait pas en général si  $\partial U$  admet une caractéristique fermée
- il arrive très souvent que  $\partial U$  ait une infinité de caractéristiques fermées, et celles-ci peuvent être instables, c'est à dire qu'elles peuvent disparaître par petite déformation. Tout ceci rend bien compliqué le maniement de  $A(U)$ .

Cependant, on va voir qu'un miracle a lieu: il est possible de choisir une suite de réels  $c_1(U) \leq c_2(U) \leq \dots \leq c_k(U) \leq \dots$  qui soient, au moins pour les ensembles à bord strictement de contact (cf. déf. 3.6), dans  $A(U)$ , et telle que pour tout  $k$ ,  $c(U) = c_k(U)$  satisfasse les axiomes C1-C3.

**3.2** Avant de définir les capacités d'un ensemble, définissons la capacité des fonctions.

Rappelons que les orbites périodiques de  $X_H$  sont les points critiques de la fonctionnelle d'action

$$A_H(x) = \int_{S^1} [\frac{1}{2}(Jx, \dot{x}) - H(x)] d\theta$$

sur l'espace de Sobolev

$$W^{1,2}(S^1; \mathbb{R}^{2n}) = \{x : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \mid \int_{S^1} |x|^2 \text{ et } \int_{S^1} |\dot{x}|^2 \text{ soient finis}\}.$$

Soit  $k$  un entier positif, et  $\mathcal{F}_k(\mathbb{R}^{2n})$  l'ensemble des  $H \in C^3(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$  tels que:

- (1)  $H(x) = (k + 1/2)|x|^2$  pour  $|x|$  suffisamment grand
- (2)  $H(x)$  s'annule sur un ouvert non vide

On montre alors ([V1],[H-Z]) que  $\mathcal{A}_H$  a des valeurs critiques strictement positives. On va voir qu'il existe en fait des applications  $c_1, \dots, c_{k-1}$  définies sur  $\mathcal{F}_k(\mathbb{R}^{2n})$  telles que,  $c$  désignant l'un des  $c_j$ , on ait:

- (B1) Si  $H \leq G$ , alors  $c(H) \geq c(G)$
- (B2) Si  $\Psi$  est dans  $Diff_\omega(\mathbb{R}^{2n})$  est à support compact, alors  $c(H \circ \Psi) = c(H)$
- (B3)  $c_j(H)$  est une valeur critique strictement positive de  $\mathcal{A}_H$ , c'est à dire  $0 < c_j(H) = \int_{S^1} [\frac{1}{2}(Jx, \dot{x}) - H(x)]d\theta$  où  $x(\theta) = \phi_\theta(x(0))$  est une orbite périodique de  $X_H$  de période  $2\pi$ .
- (B4) Les  $c_j$  sont continus sur  $\mathcal{F}_k(\mathbb{R}^{2n})$  muni de la topologie  $C^0$

**Remarque:** Notons que (B2) résulte en fait de (B3) et (B4). Pour cela notons que les valeurs critiques correspondantes de  $\mathcal{A}_H$  et  $\mathcal{A}_{H \circ \Psi} = \mathcal{A}_H \circ \Psi$  sont les mêmes. Alors, considérons pour  $\Psi$  à support compact, une isotopie symplectique  $\Psi_t$ , reliant  $\Psi$  à l'identité (dans  $\mathbb{R}^{2n}$  une telle isotopie existe toujours). Maintenant  $c(H \circ \Psi_t)$  est une chemin continu de valeurs critiques de  $\mathcal{A}_H$ . Comme d'après le lemme de Sard, les valeurs critiques de  $\mathcal{A}_H$  forment un sous-ensemble totalement discontinu de  $\mathbb{R}$ , ce chemin est constant, d'où l'invariance symplectique de  $c$  (en réalité on applique le lemme de Sard non pas à  $\mathcal{A}_H$ , mais à la fonction  $\mathcal{A}_H^N$  définie plus loin, dont les valeurs critiques coïncident avec celles de  $\mathcal{A}_H$ . Cela évite les problèmes de la dimension infinie).

La construction des  $c_j$  se heurte à deux difficultés. La première est de trouver des points critiques de la fonctionnelle  $\mathcal{A}_H$  car ceux ci ont tous un indice de Morse infini, ils n'induisent donc pas de changement dans la topologie des niveaux de  $\mathcal{A}_H$ . Ce problème est maintenant bien résolu, la façon la plus agréable dans l'espace Euclidien étant d'utiliser une réduction de Lyapounov-Schmidt (cf. [C-Z], [Ch]), qui nous ramène à un espace de dimension finie. (Au contraire si on veut travailler sur une variété symplectique quelconque, il faudrait utiliser la cohomologie de Floer, voir [F1 1], [F1 2], [F-H]). Ce procédé nous permet de remplacer  $W^{1,2}(S^1, \mathbb{R}^{2n})$  par une sous-variété de dimension finie  $E_N$ , telle que la restriction de  $\mathcal{A}_H$  à  $E_N$  ait les mêmes points critiques que  $\mathcal{A}_H$  sur  $W^{1,2}(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ .

Soit alors  $\mathcal{A}_H^N$  la restriction de  $\mathcal{A}_H$  à  $E_N$ . Les  $c_j(H)$  sont alors construits comme suit.

On appellera sphère de Hopf, une sphère  $S^{2p-1}$  munie d'une action  $S^1$  donnée

$$e^{i\theta} \cdot (z_1, \dots, z_n) = (e^{ik_1\theta} z_1, \dots, e^{ik_n\theta} z_n)$$

où les  $k_j$  sont des entiers non nuls. On a alors le théorème de Brouwer equivariant

PROPOSITION. *S'il existe une application équivariante d'une sphères de Hopf de dimension  $2p - 1$  dans une sphère de Hopf de dimension  $2q - 1$ , alors  $p \leq q$ .*

On montre alors que pour  $\varepsilon$  petit l'ensemble où  $\mathcal{A}_H^N > \varepsilon$  contient une sphère de Hopf de dimension  $2nN - 1$ , alors que pour  $C$  assez grand, l'ensemble où  $\mathcal{A}_H^N > C$  se rétracte sur une

sphère de Hopf de dimension  $2n(N - k) - 1$ . On définit alors  $c_j(H)$  comme la plus grande valeur de  $c$  telle que  $A_H^N > c$  contienne une sphère de Hopf de dimension  $2n(N - k) + 2j - 1$ . On montre facilement que les  $c_j(H)$  vérifient les propriétés (B1)-(B4). En toute rigueur on n'a pas défini  $c_j(H)$ , mais un  $c_j^N(H)$ , et on pose  $c_j(H) = \lim_{N \rightarrow +\infty} c_j^N(H)$  (en réalité cette suite se stabilise pour  $N$  assez grand). Notons qu'il existe une autre construction des capacités qui traduit essentiellement la méthode ci-dessus en termes de cohomologie équivariante. Cette méthode a entre autres avantages celui de donner immédiatement  $c_j(H)$  sans besoin de passer à la limite pour  $N$ .

On vérifie aisément que  $c_j$  satisfait les propriétés (B1)-(B4).

Ayant défini  $c_j(H)$  on pose pour tout ouvert borné  $U$  de  $\mathbb{R}^{2n}$

$$(3.5) \quad c_j(U) = \inf\{c_j(H) \mid H \in \mathcal{F}_k(\mathbb{R}^{2n}) \text{ pour un } k > j, \text{ et } H \equiv 0 \text{ sur } U\}$$

On définit enfin pour  $U$  non borné

$$c_j(U) = \sup\{c_j(V) \mid V \text{ est borné, et } V \subset U\}$$

et pour  $W$  un sous-ensemble quelconque de  $\mathbb{R}^{2n}$

$$c_j(U) = \inf\{c_j(U) \mid U \text{ ouvert, et } W \subset U\}$$

Il est alors facile de voir que les  $c_j$  vérifient (C1) et (C2), cela résulte immédiatement de (B1) et (B2). Pour démontrer (C3), il nous faut d'abord expliquer le lien entre les  $c_j(U)$  et les aires des caractéristiques fermées. C'est ce lien qui permet de calculer effectivement les capacités. C'est aussi cette nouvelle méthode pour trouver les orbites périodiques qui est à l'origine des capacités. La propriété (C3), elle ne sera démontrée que dans la section 4.

### 3.3 Lien avec les caractéristiques fermées de $\partial U$

Si  $U$  est un ouvert à bord, on peut toujours majorer un  $H$  intervenant dans la formule (3.5) par un  $G$  dont les orbites périodiques d'action positive soient les caractéristiques fermées d'une hypersurface  $\Sigma_t$  aussi proche que l'on veut de  $\Sigma_0 = \partial U$  (voir figure 1). Il est alors naturel de vouloir comparer les caractéristiques fermées de  $\Sigma_t$  avec celles de  $\Sigma_0$ . Il y a un cas où cela est particulièrement simple: c'est le cas où  $\Sigma_0$  est une *hypersurface de contact*:

**DÉFINITION 3.2.** Soit  $\Sigma$  une hypersurface de  $(M, \omega)$ , on dira que  $\Sigma$  est une hypersurface de contact de  $(M, \omega)$  si il existe une un-forme  $\alpha$  sur  $\Sigma$  telle que

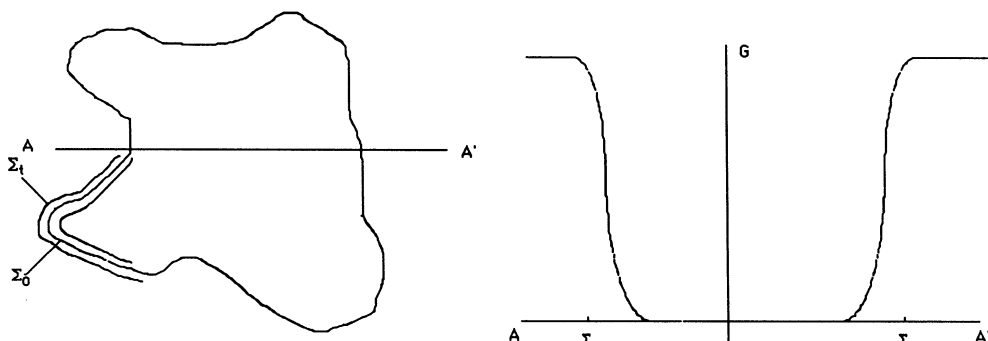
- (1)  $d\alpha = \omega$
- (2)  $\alpha \wedge (d\alpha)^{(n-1)}$  ne s'annule pas sur  $\Sigma$

Cela équivaut à l'existence d'un champ de vecteurs,  $\xi$ , défini sur un voisinage de  $\Sigma$  tel que

- (1)  $\xi$  est transverse à  $\Sigma$
- (2)  $\xi$  est conforme, c'est à dire que le flot  $\phi_t$  de  $\xi$  vérifie  $\phi_t^* \omega = e^t \omega$

Une conséquence de la définition est qu'un voisinage de  $\Sigma$  est feuilleté par les  $\phi_t(\Sigma) = \Sigma_t$ , images conformes de  $\Sigma$ . Par suite les caractéristiques de  $\Sigma_t$  sont les images par  $\phi_t$  des caractéristiques de  $\Sigma$ .





Représentation d'un hamiltonien  $G$  dont les orbites périodiques non constantes sont proches de  $\Sigma$

**FIGURE 1**

**Remarque:** Le bord d'un ensemble étoilé de  $\mathbb{R}^{2n}$ , les hypersurfaces pseudoconvexes de  $\mathbb{C}^n$ , ou d'une variété de Stein, sont des hypersurfaces de contact. Ce que l'on a démontré à la section 3.2 permet de dire que l'un des  $\Sigma_t$  a une caractéristique fermée, et donc  $\Sigma_0$  a elle-même une caractéristique fermée, c'est à dire:

**THÉORÈME 3.4. ([V1])** Si  $\Sigma$  est une hypersurface de contact de  $\mathbb{R}^{2n}$ , alors  $\Sigma$  possède au moins une caractéristique fermée.

Pour des généralisations, on réfère à [F-H-V],[H-V1], [H-V1], [H-Z].

On n'a pas encore abordé le problème de la convergence des caractéristiques fermées des  $\Sigma_t$  vers une caractéristique fermée de  $\Sigma_0$ . Cela est pourtant nécessaire si l'on veut montrer que  $c_j(U)$  correspond à l'action d'une caractéristique fermée de  $\Sigma_0$ . Cette convergence a lieu dès que l'on sait majorer la longueur d'une caractéristique fermée en fonction de son action; il suffit alors d'appliquer Ascoli-Arzelà à la suite de solutions périodiques de  $X_{G_n}$  telles que  $c_j(G_n)$  converge vers  $c_j(U)$ . Cette majoration est possible lorsque  $\Sigma$  est strictement de contact

**DÉFINITION 3.6.** On dira que  $\Sigma$  est strictement de contact si la forme  $\alpha$  définie dans (3.7) s'étend en une forme sur  $M$  qui vérifie  $d\alpha = \omega$  partout.

Notons que si une hypersurface de contact de  $M$  est telle que  $H^2(M, \Sigma; \mathbb{R}) = 0$  alors elle est strictement de contact. Si  $\Sigma$  est strictement de contact, on a pour  $\xi$  vecteur directeur du champ caractéristique l'estimation  $\alpha(\xi) \geq c|\xi|$ . On a donc, si  $x$  est une caractéristique fermée paramétrée par longueur d'arc,  $\text{aire}(x) = \int_{S^1} x^* \lambda = \int_{S^1} x^* \alpha \geq c \int_{S^1} |\dot{x}| = c \cdot \text{longueur}(x)$ . On obtient alors

**PROPOSITION 3.8. (Théorème de représentation)**(cf. [E-H 1]) Si  $U$  est un ouvert à bord strictement de contact, alors  $c_j(U)$  est l'aire d'une caractéristique fermée de  $\partial U$ .

Ce résultat simplifie énormément les calculs de capacités pour les ensembles "simples" dont on connaît en général toutes les caractéristiques fermées. Ces calculs peuvent souvent

être menés à bien grâce aux considérations suivantes. A toute caractéristique fermée de  $\partial U$  sont associés deux entiers, l'indice de Conley-Zehnder  $i$  (cf. [Co-Z]) qui est un analogue de l'indice de Morse pour  $\mathcal{A}_H$  (mais les points critiques de  $\mathcal{A}_H$  ont tous un indice de Morse infini) et la nullité (au sens usuel). On peut alors préciser le théorème de représentation par l'énoncé

PROPOSITION 3.9. *Soit  $U$  à bord strictement de contact. Alors  $c_j(U)$  est l'aire d'une caractéristique fermée de  $\partial U$  d'indice  $i$  et de nullité  $\nu$  vérifiant*

$$i \leq 2j - 2 \leq i + \nu$$

Toutes les capacités calculées dans la section 4 peuvent l'être en utilisant 3.8 et 3.9. Le résultat suivant est un autre outil dans le calcul des capacités

PROPOSITION 3.10. *Si  $U$  est un convexe, alors  $c_1(U)$  est la plus petite aire d'une caractéristique fermée de  $\partial U$*

Ce résultat est faux sans l'hypothèse convexe, il suffit pour cela de créer sur une sphère une "petite excroissance" sur laquelle on fait greffe une petite caractéristique fermée (voir figure 2). Alors la première capacité doit être supérieure à celle de la sphère, et ne peut donc être donnée par la caractéristique fermée que l'on vient de greffer. ce résultat ne s'étend pas non plus aux capacités d'ordre supérieur.

La propriété suivante des capacités de Ekeland-Hofer est aussi satisfaite par le width:

PROPOSITION 3.11. *Soit  $\mathcal{K}$  l'ensemble des ouverts à bord strictement de contact. Alors sur  $\mathcal{K}$  muni de la distance de Hausdorff, les  $c_j$  sont des fonctions continues.*

DÉMONSTRATION: Si  $U$  est de type contact au sens strict, soit  $\phi_s$  le flot d'un champ de vecteurs conforme et transverse au bord. Alors pour  $0 < \epsilon$ ,  $\phi_\epsilon(U)$  est un voisinage de  $\bar{U}$ . Donc si  $V$  est suffisamment proche de  $U$  pour la distance de Hausdorff, on a  $V \subset \phi_\epsilon(U)$ , d'où  $c(V) \leq (1 + \epsilon)^2 c(U)$ . L'inégalité  $(1 - \epsilon)^2 c(U) \leq c(V)$  s'obtient en remplaçant  $\phi_\epsilon(U)$  par  $\phi_{-\epsilon}(U) \subset V$ .

C'est une question ouverte que de savoir si la proposition est vraie pour tous les ouverts à bord de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

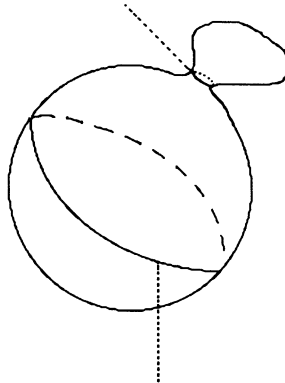
Notons le fait suivant: si  $U$  est un ouvert à bord, alors  $c_j(U) = c_j(\partial U)$ . En particulier les ensembles de mesure nulle n'ont pas, en général, une capacité nulle !

**Remarque:** On vient de voir que les capacités sur les ensembles peuvent s'obtenir à partir des capacités sur les fonctions. On peut se demander si il n'existe pas sur  $\mathcal{F}_k(\mathbb{R}^{2n})$  des fonctions affines qui soient invariantes par l'action de  $Diff_\omega(\mathbb{R}^{2n})$ . La réponse est positive: il suffit de prendre  $\mu : H \rightarrow \mu(H) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} (H(x) - \frac{k}{2}|x|^2) \cdot \omega^n$ , et en appliquant notre construction (convenablement adaptée) on obtient comme invariant le volume. On peut en fait montrer que c'est est le seul invariant affine (à un facteur près). En effet, si  $\Phi$  est une forme linéaire continue sur  $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^{2n}) = C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  symplectiquement invariante, alors, ker  $\Phi$  est un idéal de l'algèbre de Lie  $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}), \{ \}$  (où  $\{ \}$  désigne le crochet de Poisson  $\{F, G\} = dF(X_G)$ ), puisque, si  $\psi_t$  est le groupe à un paramètre engendré par  $X_G$ , on a

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(H \circ \psi_t)|_{t=0} = \Phi\left(\frac{\partial}{\partial t} H \circ \psi_t|_{t=0}\right) = \Phi(\{F, G\}).$$

Comme par hypothèse,  $\Phi(H \circ \psi_t)$  est constante, on voit que  $\Phi$  s'annule sur l'espace engendré par les crochets. D'après un résultat d'Arnold et Calabi ( $[A]$ ,  $[C]$ ), les crochets engendrent le noyau de  $\mu$  d'où notre assertion. Il est donc inévitable de considérer des invariants non linéaires.

Une caractéristique fermée qui ne représente pas une capacité



une caractéristique fermée qui représente (peut-être) une capacité

**FIGURE 2**

#### 4 Applications et quelques calculs de capacités

Dans cette section, le terme capacité désignera exclusivement les capacités de Ekeland-Hofer, la capacité de Gromov étant appelée width.

4.1 Les capacités s'appliquent tout d'abord aux théorèmes de non plongement. Pour cela il nous faut calculer les capacités de quelques ensembles simples. Soit  $r = (r_1, \dots, r_n)$ , avec  $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n$ , on note alors

$E(r)$  l'ellipsoïde défini par  $\sum_{i=1}^n 1/r_i |z_i|^2 \leq 1$

$D(r)$  le polydisque défini par  $|z_i|^2 \leq r_i^2$

$B^{2n}(\rho)$  la boule de rayon  $\rho$  de  $\mathbb{R}^{2n}$

On définit aussi la suite  $e_1(r) \leq e_2(r) \leq \dots \leq e_j(r) \leq \dots$  constituée par les  $\sqrt{k}r_i$  ordonnés et comptés avec leur multiplicité. Enfin on désigne par  $[x]$  la partie entière de  $x$ . On a alors

PROPOSITION 4.1.

- (1)  $c_k(B^{2n}(\rho)) = \left(\left[\frac{k}{n}\right] + 1\right)\pi\rho^2$
- (2)  $c_k(D(r)) = c_k(B^2(\rho) \times \mathbb{R}^{2n-2}) = k\pi r_1^2$
- (3)  $c_k(E(r)) = \pi e_k(r)^2$

Les égalités (1) et (3) se démontrent soit “à la main”, soit en utilisant 3.8 et 3.9. On démontre (2) en écrivant  $B^2(\rho) \times \mathbb{R}^{2n-2}$  comme réunion des ellipsoïdes  $E(\rho, N, N, \dots, N)$  lorsque  $N$  tend vers l’infini. Notons que (2) démontre que les  $c_j$  satisfont (C3).

On en déduit de manière évidente des résultats de non-plongement. En particulier, on a le

**COROLLAIRE 4.2.** ([G 1]) *Si on peut plonger symplectiquement la boule  $B^{2n}(\rho)$  dans le cylindre  $B^2(\rho') \times \mathbb{R}^{2n-2}$ , alors  $\rho \leq \rho'$*

Pour le théorème ci dessus, on peut utiliser le width aussi bien que les capacités, c’est en fait une conséquence de (C3). Dans [E1], Eliashberg montre comment déduire de ce résultat la fermeture  $C^0$  de l’ensemble des difféomorphismes symplectiques (cf. théorème 4.5).

Le résultat suivant utilise plus précisément les capacités d’Ekeland-Hofer.

**COROLLAIRE 4.3.** *Si on peut plonger symplectiquement  $D(r)$  dans  $B(\rho)$ , alors  $nr_1^2 \leq \rho^2$ . En particulier si  $r_1 = r_2 = \dots = r_n$  le plongement standard de  $D(r)$  dans  $B(\sqrt{nr})$  est “optimal”.*

Notons ici l’avantage de disposer de capacités d’ordre supérieur, la seule utilisation de  $c_1$  (où du width) nous donnerait seulement  $r_1^2 \leq \rho^2$ . De même pour les ellipsoïdes, on tire de 4.3 que si  $E(r)$  se plonge dans  $B(\rho)$ , alors  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i^2} \geq \frac{n}{\rho^2}$  au lieu de  $r_1^2 \leq \rho^2$ . Notons qu’en dehors du cas mentionné, on ne sait pas quelle est la valeur optimale de  $\rho$ . Une autre question ouverte est de décider si l’existence d’un plongement symplectique de  $D(r)$  dans  $D(r')$  entraîne  $r_i \leq r'_i$ . En fait on ne sait même pas si  $D(r)$  symplectomorphe à  $D(r')$  implique  $r = r'$  (il est important de préciser pour ce dernier cas, que c’est de polydisques ouverts qu’il s’agit).

Mentionnons enfin un outil de calcul prometteur, la *formule du produit* de Floer-Hofer (voir [F-H]) qui s’énonce ainsi:

**PROPOSITION 4.4.** *Soient  $A \subset \mathbb{R}^{2m}$  et  $B \subset \mathbb{R}^{2n}$  des ouverts à bord de contact restreint. On a alors*

$$c_k(A \times B) = \inf_{i+j=k} (c_i(A) + c_j(B)).$$

Ici on pose  $c_0 \equiv 0$ .

Cela permet de montrer que pour le tore lagrangien  $T(r_1, r_2)$  de  $\mathbb{R}^4$ , produit des cercles de rayon  $r_1$  et  $r_2$  ( $r_1 \leq r_2$ ) de  $\mathbb{R}^2$  on a  $c_j(T(r_1, r_2)) = k \cdot \pi r_1^2$ . On ne connaît pas la capacité d’un produit de plus de deux cercles

**4.2** L’application la plus frappante des capacités est sans doute le résultat suivant:

**THÉORÈME 4.5.** *Le groupe  $Diff_\omega(M)$  est fermé pour la topologie  $C^0$  dans  $C^1(M; M)$ , ensemble des applications  $C^1$  de  $M$  dans elle même.*

Ce théorème est dû à Gromov et Eliashberg ([G1],[G2], [E1]) Ce résultat est ce que l’on peut espérer de mieux en ce qui concerne l’existence d’une topologie symplectique. Il montre que les difféomorphismes symplectiques peuvent se caractériser par des propriétés topologiques. Le théorème de Conley et Zehnder sur les difféomorphismes du tore entraînant un résultat plus faible à savoir que la fermeture  $C^0$  de  $Diff_\omega(M)$  dans  $Diff(M)$  n’est pas égale à l’ensemble des difféomorphismes préservant le volume ([He])

Donnons ici la démonstration de [E-H 1] qui découle de:

PROPOSITION 4.6. ([E-H 1]) Soit  $c$  l'un des  $c_j$ , et  $\Psi$  un élément de  $C^k(M, M)$  qui préserve  $c$ , c'est à dire

$$c(\Psi(U)) = c(U)$$

pour tout ouvert  $U$ . Alors si  $\Psi$  est dérivable en un point  $x_0$ , sa différentielle est symplectique ou antisymplectique (i.e.  $\Psi'(x_0)^*\omega = -\omega$ ).

La démonstration s'appuie sur le Lemme suivant dont la démonstration est simple mais fastidieuse:

LEMME. Si  $\Phi$  est une application linéaire qui préserve la capacité des ellipsoïdes, alors  $\Phi$  est symplectique ou antisymplectique.

Ce lemme découle de ce qu'un tel  $\Phi$  préserve nécessairement la capacité des sous-espaces linéaires et que les espaces linéaires coisotropes non lagrangiens (i.e. qui contiennent strictement leur orthogonal symplectique), se caractérisent par une capacité infinie. Si  $\Phi$  préserve les espaces coisotropes il est facile de voir qu'elle est symplectique ou antisymplectique.

Appliquons le lemme pour démontrer la proposition. On supposera que  $\Psi(0) = 0$  et que  $\Psi'(0)$  est défini. Alors pour tout  $U$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  on a  $\Psi'(0)(U) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \Psi(t \cdot U)$ . D'où

$$c(\Psi'(0)(U)) = c(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \Psi(t \cdot U)).$$

Si  $U$  est de contact au sens strict, en particulier si  $U$  est l'intérieur d'un ellipsoïde, on a par continuité (prop. 3.1)

$$c(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \Psi(t \cdot U)) = \lim_{t \rightarrow 0} c(\frac{1}{t} \Psi(t \cdot U)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} c(\Psi(t \cdot U)) = c(U)$$

Il s'en suit que  $\Psi'(0)$  préserve la capacité des ellipsoïdes et donc est symplectique ou antisymplectique.

La proposition entraîne le théorème par l'argument suivant: si  $\Psi_n$  est une suite dans  $Diff_\omega(M)$  de limite  $\Psi$  dans  $C^1(M, M)$  pour la topologie  $C^0$ , alors chaque  $\Psi_n$  préserve la capacité des ellipsoïdes, d'où par continuité la même chose sera vraie pour  $\Psi$ . Notons que  $\Psi$  préserve l'orientation, donc, si  $n$  est impair elle ne peut être antisymplectique (car  $\Psi^*\omega^n = \omega^n$ ) et on a démontré 4.2. Quitte à remplacer  $\Psi_n$  par  $\Psi_n \times Id_{\mathbb{R}^2}$ , on peut toujours se ramener au cas  $n$  impair, ce qui termine la démonstration.

## 5 Autres capacités et problèmes ouverts

### 5.1 Capacités de Hofer-Zehnder ([H-Z 2])

Elles étendent la définition des capacités par les orbites périodiques à une variété symplectique générale. Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique, et  $U$  un ouvert de  $M$ . On considère les hamiltoniens  $H$  sur  $M$  satisfaisant les conditions suivantes:

- (1)  $H = 0$  sur  $U$
- (2)  $H \equiv m(H) > 0$  hors d'un compact  $K$  contenant  $U$
- (3)  $0 \leq H \leq m(H)$  sur  $M$

On pose alors

$$\gamma(U) = \sup\{m(H) \mid \text{il existe } H \text{ tel que } X_H \text{ n'a pas de solution périodique} \\ \text{non constante de période un}\}$$

Il est facile de vérifier que  $\gamma$  est bien une capacité, la démonstration de (C3) étant pratiquement la même que dans le cas de Ekeland-Hofer. La définition ci-dessus est en partie motivée par [H-V 2] où on démontre la conjecture de Weinstein dans  $\mathbb{C}P^n$ . Le résultat qui  $\gamma$  est démontré peut se traduire par:

pour tout ouvert  $U \subset \mathbb{C}P^n$ , on a  $\gamma(U) \leq n + 1$

### 5.2 Capacité de déplacement ([Ho])

On se place à nouveau dans  $\mathbb{R}^{2n}$ , et l'on pose

$$\kappa(U) = \inf_{(x,t)} \{ \sup_{(x,t)} H - \inf_{(x,t)} H \mid \text{le flot } \Psi_t \text{ de } X_H \text{ est tel que } \Psi_1(U) \cap U = \emptyset \}$$

Le résultat principal de [Ho] est

$$(5.1) \quad \kappa(U) \geq c_1(U)$$

Cela entraîne par exemple le résultat suivant:

PROPOSITION. Soit  $H_n(x, t)$  une suite de hamiltoniens dépendant du temps, à support compact, et  $\Psi_n$  leur flot au temps un. Supposons que  $|H_n|_{C^0} \rightarrow 0$  quand  $n$  tend vers l'infini, et  $\Psi_n \xrightarrow{C^0} \Psi$  en topologie  $C^0$ . Alors  $\Psi = Id$ .

Cela résulte facilement de l'inégalité précédente. En effet, si  $\Psi \neq Id$ , il doit déplacer une petite boule  $B(\varepsilon)$  dans son complémentaire. Il en sera de même pour le  $\Psi_n$  dès que  $n$  est assez grand, d'où  $\kappa(B(\varepsilon)) \geq 2|H_n|_{C^0}$  ce qui montre  $\kappa(B(\varepsilon)) = 0$ , en contradiction avec  $\kappa(B(\varepsilon)) \geq c_1(B(\varepsilon)) = \pi\varepsilon^2$

Donnons l'idée de la démonstration de (5.1). On considère les orbites périodiques du flot hamiltonien défini par:

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial t} = \begin{cases} X_{H_t}(\Phi_t(x)) & \text{pour } t \in [0, 1] \\ X_K(\Phi_t(x)) & \text{pour } t \in [1, 2] \end{cases}$$

où  $H_t$  est un hamiltonien dépendant du temps dont le flot au temps un égale  $\Psi_1$ , et  $K$  une fonction à support dans  $U$ . Alors les points fixes de  $\Phi_2$  se divisent en deux catégories:

- (1) les points fixes de  $\Psi_1$  dans  $\mathbb{C}U$
- (2) les autres qui, parce que  $K$  est à support dans  $U$ , vérifient nécessairement  $x \in U$ ,  $\Psi_1(x) \in U$ .

On montre alors que si  $\sup H - \inf H \leq c_1(U)$  on peut trouver  $K$  tel que il existe nécessairement une solution du type (2) d'où  $\Psi_1(U) \cap U \neq \emptyset$ .

5.3 Terminons par quelques problèmes ouverts :

*Le chameau symplectique*(Arnold)

Rappelons la citation de [Mt] 19.24 (cf. aussi [Mc] 10.25 [Lc] 18.25) "Il est plus facile à un chameau d'entrer par un trou d'aiguille qu'à un riche d'entrer dans le règne de Dieu". En termes symplectiques et en simplifiant, le problème s'énonce ainsi. Soit  $V = \mathbb{R}^{2n} - (\mathbb{R}^{2n-1}) - B^{2n}(\epsilon)$  le complémentaire dans  $\mathbb{R}^{2n}$ , d'un hyperplan percé d'un trou de rayon  $\epsilon$ . Les plongements standard de la boule unité dans chaque demi-espace sont ils isotopes?

Un problème semblable, dû à Dusa McDuff, est le suivant: deux plongements de la boule de rayon  $r < 1$  dans la boule unité sont-ils symplectiquement isotopes à l'intérieur de la boule (ils sont bien isotopes dans  $\mathbb{R}^{2n}$ )? Dans  $\mathbb{R}^4$  la réponse est positive (cf. [MD]). On peut varier ce type de problème à volonté. Si un ouvert  $(U, \sigma)$  se plonge symplectiquement dans  $(M, \omega)$  deux plongements de  $U$  sont-ils symplectiquement isotopes.

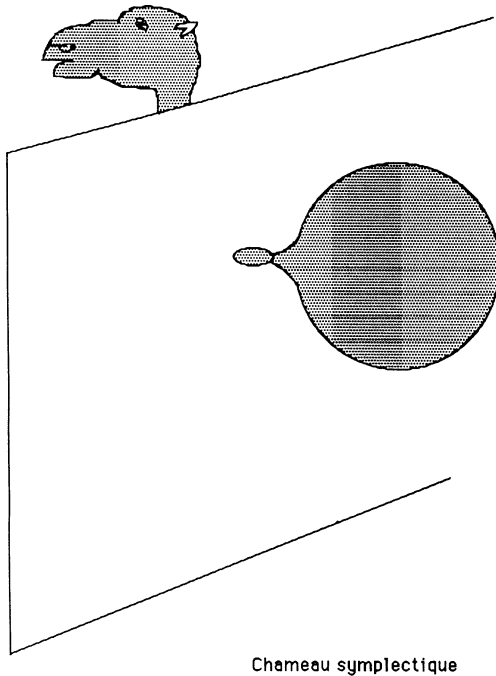


FIGURE 3

*Capacités et plongements lagrangiens*

Une sous variété lagrangienne est une sous-variété  $L^n$  d'une variété symplectique  $(M^{2n}, \omega)$  telle que  $\omega$  s'annule sur  $L^n$  et  $\dim L^n = n = \frac{1}{2} \dim M$ . ces variétés jouent un rôle important en géométrie symplectique, en particulier comme graphes de transformations symplectiques. Un résultat de [G1] montre que si une telle variété est plongée dans  $\mathbb{R}^{2n}$ , il a toujours des courbes fermées tracées dessus d'aire non nulle. Ce résultat entraîne l'existence de structures symplectiques exotiques sur  $\mathbb{R}^{2n}$  (voir plus loin). Le problème du

calcul des capacités d'une sous variété lagrangienne est grand ouvert. On ne sait même pas pour une variété lagrangienne donnée explicitement (p.ex. le tore  $T^n$  produit de  $n$  cercles standards de  $\mathbb{R}^2$ ) calculer les  $c_j$ . (cf. malgré tout [F-H] pour des résultats partiels). On conjecture que pour toute sous-variété lagrangienne  $L$ , plongée dans  $\mathbb{R}^{2n}$   $c_j(L) \neq 0$  pour au moins un  $j$ . Cela entraînerait le théorème de Gromov cité plus haut (voir cependant [V2] pour une approche de ce problème par les systèmes hamiltoniens).

#### *Horizon symplectique*(Eliashberg)

Etant donnée une variété symplectique  $U$  à bord de contact, le bord est-il un invariant symplectique? En d'autres termes, si  $U$  et  $V$  sont des ouverts symplectomorphes, est ce que  $\partial U$  et  $\partial V$  sont des variétés de contact isomorphes. Si la réponse est affirmative on appelle  $\partial U$  l'horizon symplectique de  $U$ . Notons qu'au moins si  $U$  a un bord de contact restreint,  $U$  détermine l'aire de certaines orbites périodiques de  $\partial U$ . Ceci permet par exemple de dire que si les intérieurs de deux ellipsoïdes sont symplectiquement conjugués, alors leurs bords le sont aussi (en fait les ellipsoïdes sont linéairement conjugués) Cela résulte de ce que si deux ellipsoïdes  $E(r)$  et  $E(r')$  ont les mêmes capacités alors  $r = r'$  (et leurs bords sont clairement conjugués).

#### *Structures symplectiques exotiques*

Avant les travaux de Gromov, on ne disposait d'aucun outil pour distinguer symplectiquement deux ouverts difféomorphes de  $\mathbb{R}^{2n}$ . On entendait alors par structure exotique sur  $\mathbb{R}^{2n}$  une structure symplectique de volume infini sur une variété ouverte difféomorphe à  $\mathbb{R}^{2n}$  qui ne lui soit pas symplectiquement difféomorphe. A l'aide du width, on voit que  $D^2(1) \times \mathbb{R}^{2n-2}$  est une telle variété. On considère alors comme exotique, une variété symplectique de capacité infinie difféomorphe à  $\mathbb{R}^{2n}$ , ou encore une variété symplectique qui n'admet pas de plongement symplectique dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . Le problème de la classification de ces variétés n'est pas même ébauchée, malgré des progrès dans le cas de contact en dimension 3 (cf [E1 2]).

*Structures  $C^0$ -symplectiques* On définit  $\mathcal{S}$  comme le sous-groupe des homéomorphismes de  $\mathbb{R}^{2n}$  qui préservent les capacités. Les résultats de la section 4.2 montrent que ce sous-groupe est propre. On appelle variété  $C^0$ -symplectique, une variété topologique dont les applications de changement de carte sont dans  $\mathcal{S}$ . Il serait intéressant d'avoir des exemples de telles variétés. Une variété lisse qui est  $C^0$  symplectique est elle symplectique au sens usuel?

## Appendice à la section 2

Nous incluons ici une démonstration de l'inégalité isopérimétrique utilisée à la section 2 que nous avons essentiellement recopiée de [Le]<sup>2</sup>. On va en fait démontrer

LEMME. Si  $V$  est une sous-variété complexe de  $\mathbb{C}^n$ , la fonction

$$r \rightarrow 1/r^2 \int_{V \cap B(r)} \omega$$

<sup>2</sup>Nous avons trouvé une démonstration due à Alexander et Ossermann d'un résultat un petit peu plus général que celui utilisé ici (mais postérieur à celui de Lelong)



est croissante.

L'inégalité isopérimétrique (2.1) s'en déduit aisément. Lorsque  $r$  tend vers 0 on peut remplacer  $V$  par l'espace tangent à  $V$  à l'origine, où un revêtement à  $m$  feuillettes de celui-ci suivant que l'origine est un point régulier de  $V$  ou non. On voit aisément que pour un espace linéaire, on a  $1/r^2 \int_{V \cap B(r)} = \pi$

On admettra le fait suivant

PROPOSITION. Une sous-variété analytique complexe de dimension  $p$  de  $\mathbb{C}^n$  définit un  $2p$ -courant d'intégration  $T_V$  au sens de de Rham, c'est à dire une forme linéaire sur l'espace  $\Omega_0^{2p}(\mathbb{C}^n)$  des  $2p$ -formes  $C^\infty$  à support compact de  $\mathbb{C}^n$ .

Lorsque  $p = 1$ , si  $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}^n$  est une application holomorphe, le courant est défini par  $\langle T_V, \phi \rangle = \int_\Sigma u^* \phi$

De plus un tel courant est

(1) positif: si  $\phi$  est une  $p$ -forme qui est en chaque point positive sur les sous-espaces complexes, alors  $\langle T_V, \phi \rangle$  est positif.

(2) fermé: si  $\varphi$  est exacte (i.e  $\varphi = d\psi$  avec  $\psi$  à support compact, alors  $\langle T_V, \varphi \rangle = 0$ ). C'est aussi un théorème dû à de Rham que tout courant fermé puisse s'approcher par une forme différentielle fermée, c'est à dire par un courant  $\varphi \rightarrow \int t \wedge \varphi$  où  $t$  est une  $2(n-p)$  forme.

Soit alors  $T$  un courant fermé et positif représenté par une forme  $t$ . Considérons sur  $\mathbb{C}^n$  les deux-formes

$$\omega = i \partial_z \partial_{\bar{z}} \left( \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) = \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i$$

$$\alpha = i \partial_z \partial_{\bar{z}} \left( \log \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)$$

et notons que  $\omega$  n'est rien d'autre que la forme symplectique usuelle sur  $\mathbb{C}^n$ , que l'on peut écrire  $1/2 \sum dz_i \wedge d\bar{z}_i$ . Il est facile de vérifier que  $\alpha$  et  $\omega$  sont toutes deux fermées et positives ( $\alpha$  n'est positive qu'au sens large, ce qui ne gêne en rien notre argumentation).

Puisque  $t$  est fermée, sa restriction à  $B(s)$  est exacte, soit  $t = d\theta$ . En appliquant la formule de Stokes:

$$\int_{B(s)-B(r)} t \wedge \alpha = \int_{S(s)-S(r)} \theta \wedge \alpha$$

Maintenant sur une sphère  $S(r)$ ,  $\omega = (1/r^2)\alpha$  d'où

$$\int_{S(s)-S(r)} \theta \wedge \alpha = 1/s^2 \int_{S(s)} \theta \wedge \omega - 1/r^2 \int_{S(r)} \theta \wedge \omega$$

En appliquant de nouveau Stokes,

$$1/s^2 \int_{S(s)} \theta \wedge \omega - 1/r^2 \int_{S(r)} \theta \wedge \omega = 1/s^2 \int_{B(s)} t \wedge \omega - 1/r^2 \int_{S(r)} t \wedge \omega.$$

En faisant tendre le courant  $T$  vers  $T_V$  on a montré que:

$$1/s^2 \int_{V \cap B(s)} \omega - 1/r^2 \int_{V \cap B(r)} \omega = \int_{V \cap (B(s)-B(r))} \alpha \geq 0$$

par la positivité de  $\alpha$ , ce qui termine notre démonstration. Notons que l'on ne s'intéresse qu'au cas  $p = 1$  et l'existence et les propriétés du courant  $T_V$  sont alors faciles à établir.

## BIBLIOGRAPHIE

- [Ar1] Arnold, V.I., *The one dimensional cohomology of the Lie algebra of divergence free vector fields and the winding number of dynamical systems*, Funct. Analysis and applications **3** (4) (1969), 77–78.
- [Ar2] Arnold, V.I., *First steps in symplectic topology*, Russian Math. Surveys **41**(6) (1986), 1–21.
- [Be] Bennequin, D., *Problèmes elliptiques surfaces de Riemann et structures symplectiques*, Séminaire Bourbaki 1985–1986, Exposé 657, Astérisque **138** (1985–86).
- [B–L] Bourguignon, J.P., Lawson, H.B., *Formules de variation de l’aire*, Surfaces minimales, séminaire de Palaiseau 1983–1984, Astérisque **154–155** (1987), 51–71.
- [C] Calabi, E., *On the group of automorphism of a symplectic manifold*, Problems in Analysis, A Symposium in Honor of S. Bochner, Princeton University Press, Princeton N.J..
- [Ch] Chaperon, M., *Quelques questions de Géométrie symplectique*, Séminaire Bourbaki 1982–1983, Astérisque **105–106** (1982–83), 231–249.
- [C–Z] Conley, C., Zehnder, E., *Morse type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian equations*, Comm. Pure Appl. Math. **37** (1984), 207–253.
- [E–H 1] Ekeland, I., Hofer, H., *Symplectic topology and Hamiltonian dynamics*, Math. Z. **200** (1989), 355–378.
- [E–H 2] Ekeland, I., Hofer, H., *Symplectic topology and Hamiltonian dynamics II*, (à paraître), Math. Z..
- [El1] Eliashberg, Y., *A theorem on the structure of wave fronts and its applications to symplectic topology*, Funct. Analysis and applications (Edition en anglais) **21** (3) (1987), 227–232.
- [El2] Eliashberg, Y., *Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds*, (à paraître), Inventiones Math..
- [F–R] Fadel, E.R., Rabinowitz, P.H., *Generalized cohomological index theories for Lie group actions with an application to bifurcation questions for Hamiltonian systems*, Inventiones Math. **45** (1978), 139–174.
- [Fl 1] Floer, A., *The unregularized Gradient Flow of the Symplectic Action*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), 775–813.
- [Fl 2] Floer, A., *Morse Theory for Lagrangian Intersections*, Journal of Differential Geometry **28** (1988), 513–547.
- [Fl 3] Floer, A., *Symplectic fixed points and Holomorphic spheres*, Commun. in Math. Phys. **120** (1988), 575–611.
- [F–H] Floer, A., Hofer, H., *Travail en préparation*.
- [F–H–V] Floer, A., Hofer, H., Viterbo, C., *The Proof of Weinstein Conjecture in  $P \times \mathbb{C}$* , (à paraître), Math. Z..
- [G1] Gromov, M., *Pseudo Holomorphic Curves in symplectic Manifolds*, Inventiones Math. **82** (1985), 307–347.
- [G2] Gromov, M., *Soft and Hard Symplectic Geometry*, in “Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1986,” 1987, pp. 81–98.
- [He] Hermann, M., *Communication personnelle*.
- [Ho] Hofer, H., *On the topological properties of symplectic maps*, manuscrit (1989).
- [H–V 1] Hofer, H., Viterbo, C., *The Weinstein conjecture for Cotangent Bundles and related Results*, Annali Scuola Normale Superiore Pisa (to appear).
- [H–V 2] Hofer, H., Viterbo, C., *The Weinstein conjecture for compact manifolds and applications*, (à paraître).
- [H–Z 1] Hofer, H., Zehnder, E., *Periodic Solutions on Hypersurfaces and a Result by C. Viterbo*, Inventiones Math. **90** (1987), 1–9.
- [H–Z 2] Hofer, H., Zehnder, E., *A new capacity for symplectic manifolds*, Inventiones Math. **90** (1987), 1–9.
- [Le] Lelong, P., *Intégration sur un ensemble analytique complexe*, Bull. Soc. Math. France **85** (1957), 239–262.
- [Lc] “L’Evangile selon Saint Luc,” traduction J. Grosjean et M. Léhermy, Gallimard, Paris, 1971.
- [Mt] “L’Evangile selon Saint Matthieu,” traduction J. Grosjean et M. Léhermy, Gallimard, Paris, 1971.
- [Mc] “L’Evangile selon Saint Marc,” traduction J. Grosjean et M. Léhermy, Gallimard, Paris, 1971.
- [MD] McDuff, D., *Blow-ups and symplectic embeddings in dimension 4*, preprint M.S.R.I. (1988).
- [P] Pansu, P., *Notes sur les pages 316 à 323 de l’article de M. Gromov “Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds”*, preprint Ecole Polytechnique (1986).

C. VITERBO

- [V1] Viterbo, C., *A proof of Weinstein's conjecture in  $\mathbb{R}^{2n}$* , Annales de l'Institut Henri Poincaré: Analyse non linéaire **4** (1987), 337-356.
- [V2] Viterbo, C., *A new obstructions to embedding Lagrangian tori*, (à paraître),
- [V3] Viterbo, C., *Recent progress in periodic solutions of autonomous hamiltonian systems*, (à paraître), Nonlinear functional analysis, P.S. Milojevic ed., Marcel Dekker.
- [We 1] Weinstein, A., *Periodic Orbits for Convex Hamiltonian Systems*, Ann. of Math **108** (1978), 507-518.

Claude VITERBO  
C.N.R.S. U.A.749  
CEREMADE  
Pce du Maréchal De Lattre de Tassigny  
F-75775 PARIS Cedex 16