GUY HENNIART

Formes de Maass et représentations galoisiennes

Astérisque, tome 177-178 (1989), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 711, p. 277-302
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1988-1989__31__277_0>

Séminaire BOURBAKI juin 1989
41ème année, 1988-89, n° 711

FORMES DE MAASS ET REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES
[d'après Blasius, Clozel, Harris, Ramakrishnan et Taylor]

par **Guy HENNIART**

1. INTRODUCTION

La loi de réciprocité quadratique de Gauss est le premier exemple de correspondance reliant le comportement d'idéaux premiers dans une extension de corps de nombres (en l'occurence une extension quadratique de $\mathbf{Q}$) à un objet uniquement défini en termes du corps de base (en l'occurence un caractère de Dirichlet quadratique). Ce type de correspondance culmine dans la théorie du corps de classes qui décrit les extensions abéliennes de corps de nombres en termes de groupes de classes d'idéaux, ou de manière plus moderne, de groupes de classes d'idèles. Du point de vue adopté ici, on peut résumer la théorie en disant que si K est un corps de nombres (une extension finie de $\mathbf{Q}$ dans $\bar{\mathbf{Q}}$, clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$), alors les caractères de G_K , groupe de Galois de $\bar{\mathbf{Q}}$ sur K , sont en bijection naturelle avec les caractères d'ordre fini du groupe des classes d'idèles $\mathbf{A}_K^\times/K^\times$ de K , où par caractère on entend homomorphisme continu dans $\mathbf{C}^\times$. Le programme de Langlands [La 1] [De 2] propose une vaste généralisation de la théorie du corps de classes dans un cadre non abélien, et le présent exposé offre une introduction à un progrès récent dans la réalisation de ce programme.

Considérons par exemple une représentation complexe continue σ de G_K , irréductible de dimension n . Elle possède une fonction L d'Artin $L(\sigma, s)$, fonction méromorphe d'un paramètre complexe s , qui s'exprime pour s de partie réelle ≥ 1 comme produit de facteurs locaux $L(\sigma_v, s)$, v parcourant l'ensemble des places de K et $L(\sigma_v, s)$ ne dépendant que de la restriction de σ à un groupe de décomposition en v de G_K . Langlands conjecture qu'on peut associer à σ une représentation automorphe cuspidale π de $GL(n, \mathbf{A}_K)$ de la façon suivante: à π est aussi attachée une fonction $L(\pi, s)$, fonction en fait *holomorphe* de s , qui apparaît également comme produit de facteurs locaux $L(\pi_v, s)$, et π est déterminée par le fait que pour toutes les places finies v de K sauf un nombre fini, on a $L(\pi_v, s) = L(\sigma_v, s)$. Si n vaut 1, on obtient bien la correspondance de la théorie du corps de classes. Remarquons que pour $n > 1$, c'est l'existence de π qui fait problème ; si π existe, on a alors $L(\sigma, s) = L(\pi, s)$ et par suite $L(\sigma, s)$ est entière *i.e.* σ vérifie la conjecture d'Artin. Nous nous intéressons ici surtout au cas $n = 2$ et $K = \mathbf{Q}$ (voir le §6 pour une généralisation au cas où K est un corps de nombres totalement réel, et pour des commentaires sur les cas $n \geq 3$) et nous nous plaçons dans ce cas jusqu'à la fin de cette introduction. Les représentations automorphes de $GL(2, \mathbf{A_Q})$ ne sont qu'une version adélique de la notion plus classique de formes modulaires. Par exemple, à une forme modulaire parabolique holomorphe de poids $k \geq 1$ nouvelle de niveau N et caractère ω , vecteur propre des opérateurs de Hecke, est attachée une représentation automorphe cuspidale π de $GL(2, \mathbf{A_Q})$; cette représentation π se décompose en produit tensoriel $\pi = \pi_\infty \otimes_p \pi_p$, où p parcourt l'ensemble des nombres premiers; la représentation π_∞ est une représentation D_k de $GL(2, \mathbf{R})$, déterminée par l'entier k; elle est de la série discrète si $k \geq 2$ et une limite de série discrète holomorphe pour $k = 1$; la représentation π_p est une représentation du groupe $GL(2, \mathbf{Q}_p)$ qui reflète l'action sur f des opérateurs de Hecke. L'examen des facteurs L locaux pour la place à l'infini montre que si σ est une représentation continue irréductible de $G_\mathbf{Q}$ dans $GL(2, \mathbf{C})$ qui est *impaire* (c'est-à-dire que *det* σ prend la valeur -1 sur la conjugaison complexe de $\bar{\mathbf{Q}}$), alors la représentation π qui lui est conjecturalement associée a D_1 pour composante à l'infini. En ce cas, l'existence de π associée à σ équivaut à la conjecture d'Artin pour toutes les tordues $\chi\sigma$ de σ par les caractères de $G_\mathbf{Q}$. On connaît cette conjecture d'Artin quand l'image de σ est résoluble [La 6, Tu], mais quand σ est induite à partir d'un caractère de G_K pour un corps quadratique imaginaire K , la construction de π remonte à Hecke [He].

Inversement, si π est une représentation cuspidale de $GL(2, \mathbf{A_Q})$ de composant D_1 à l'infini, Deligne et Serre ont montré [De-Se], par une méthode que nous rappelons plus loin, qu'il existe une représentation continue σ de $G_\mathbf{Q}$ dans $GL(2, \mathbf{C})$ telle que $L(\sigma, s) = L(\pi, s)$ (σ est alors forcément impaire et irréductible).

On peut alors se demander quelles représentations de $GL_2(\mathbf{A_Q})$ sont attachés aux représentations irréductibles *paires* de $G_\mathbf{Q}$ dans $GL_2(\mathbf{C})$. Ces représentations automorphes ne peuvent correspondre à des formes modulaires holomorphes, à cause de leur parité (ou de leur facteur L à l'infini). Mais Maass a introduit [Ma 1, Ma 2], pour étendre les résultats de Hecke au cas des groupes quadratiques réels, des formes modulaires qui sont des fonctions analytiques réelles, mais non holomorphes, sur le demi-plan de Poincaré, et a étendu à ce cadre la théorie des opérateurs de Hecke. Aux représentations irréductibles paires de $G_\mathbf{Q}$ dans $GL_2(\mathbf{C})$, on veut associer des représentations automorphes cuspidales de $GL_2(\mathbf{A_Q})$ correspondant à des formes de

Maass valeurs propres du laplacien hyperbolique du demi-plan de Poincaré, pour la valeur propre $1/4$ (seule cette valeur propre permet d'obtenir des formes dont la fonction L a les mêmes facteurs à l'infini que des représentations galoisiennes de $G_{\mathbf{Q}}$). On conjecture aussi, par analogie avec le résultat de Deligne et Serre, que toutes les représentations cuspidales attachées à ces formes de Maass sont ainsi obtenues.

Prenons donc une représentation automorphe cuspidale π de $GL_2(\mathbf{A_Q})$, correspondant à une telle forme de Maass $\mathcal{F}$, parabolique, de niveau N , de caractère $\omega : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^{\times} \to \mathbf{C}^{\times}$, vecteur propre du laplacien pour la valeur propre $1/4$. En un nombre premier p ne divisant pas N , le facteur $L(\pi_p, s)^{-1}$ est de la forme $(1 - \alpha_p\ p^{-s})\ (1 - \beta_p\ p^{-s})$ où α_p et β_p ont pour produit $\omega(p)$ et pour somme la valeur propre a_p de $\mathcal{F}$ pour l'opérateur de Hecke T_p . La conjecture analogue au résultat de Deligne et Serre s'exprime en disant qu'il existe une représentation continue irréductible σ de $G_{\mathbf{Q}}$ dans $GL_2(\mathbf{C})$, non ramifiée hors de N et telle que pour p premier ne divisant pas N , la trace de l'opérateur de Frobenius $\sigma(Frob_p)$ soit égale à a_p , son déterminant à $\omega(p)$: autrement dit on a $L(\pi_p, s) = L(\sigma_p, s)$. Une conséquence immédiate de cette conjecture est que les a_p engendrent une extension finie de $\mathbf{Q}$, puisque σ peut être définie sur un corps de nombres.

Les *résultats* dont nous voulons parler sont les suivants : Blasius, Clozel et Ramakrishnan [BCR 1-2] ont prouvé que pour π comme précédemment, et sous une condition locale en une place finie, les valeurs propres a_p sont algébriques ; la condition locale est levée en [BHR] (voir aussi [Ha 4]) ; Blasius et Ramakrishnan ont montré [B-Rn] que l'existence de σ découle de deux hypothèses naturelles concernant les représentations de $GSp_4(\mathbf{A_Q})$ (ces hypothèses sont explicitées aux §3 et 5 respectivement). Enfin Taylor a indiqué [Ta 3] comment utiliser [Ta 1] pour se passer de la seconde de ces hypothèses ; on espère de toute façon que ces deux hypothèses seront conséquences de la stabilisation de la formule des traces pour GSp_4 [La 7].

L'idée de base [BCR 1, B-Rn] est le transfert de la représentation π en une représentation cuspidale de $GSp_4(\mathbf{A_Q})$ qui soit plus accessible à une étude géométrique. Les représentations automorphes de $GSp_4(\mathbf{A_Q})$ sont la généralisation adélique des formes modulaires de Siegel. De manière analogue aux formes modulaires holomorphes classiques, une forme modulaire de Siegel parabolique de poids $k \geq 3$ correspond à une représentation automorphe dont la composante à l'infini est de la série discrète, tandis que celles de poids 2 ont une composante à l'infini limite de série discrète (holomorphe). Une fois la représentation π transférée à $GSp_4(\mathbf{A_Q})$, il est nécessaire d'imiter la méthode de Deligne et Serre, que nous rappelons sommairement maintenant.

A une forme modulaire holomorphe parabolique f de poids $k \geq 2$, nouvelle de niveau N et de caractère ω , on peut attacher, non pas une représentation complexe, mais des représentations ℓ-adiques [De 1] σ_λ de $G_{\mathbf{Q}}$ dans $GL_2(E_\lambda)$, où λ parcourt les places finies du corps E engendré par les coefficients de f ; si ℓ est la caractéristique de λ , σ_λ est non ramifiée hors de $N\ell$, son déterminant est donné par ω , et la trace de $\sigma_\lambda(Frob_p)$ en p ne divisant pas $N\ell$ est la valeur propre de f pour l'opérateur de Hecke T_p . La représentation σ_λ apparaît dans la cohomologie étale ℓ-adique de certains systèmes locaux (dépendant du poids) sur la courbe modulaire $X_0(N)$. Si l'on part plutôt d'une forme modulaire holomorphe parabolique f de poids 1 , nouvelle de niveau N et de caractère ω , et dont les coefficients engendrent le corps de nombres E , on ne sait pas directement lui associer de représentations, complexes ou ℓ-adiques. La méthode de [De-Se] consiste à utiliser pour λ une place finie (variable) de E une forme modulaire holomorphe f_λ de poids $k_\lambda \geq 2$, congruente à f modulo λ (on utilise pour cela la multiplication par une série d'Eisenstein convenable), à construire à partir de f_λ une représentation λ-adique σ_λ et à considérer la semi-simplifiée $\overline{\sigma}_\lambda$ de sa réduction modulo λ. On montre alors que pour suffisamment de places λ , $\overline{\sigma}_\lambda$ se factorise par un quotient fini de $G_{\mathbf{Q}}$ *ne dépendant pas de* λ , et provient en fait d'une représentation σ de $G_{\mathbf{Q}}$ dans $GL(2,\mathbf{C})$ qui est la représentation cherchée.

En ce qui concerne les formes modulaires de Siegel de poids $k \geq 3$, on espère trouver les représentations ℓ-adiques correspondantes (qui sont de dimension 4) dans la cohomologie de variétés de Shimura associées à $GSp(4)$, union de quotients du demi-espace de Siegel par des sous-groupes discrets arithmétiques ; c'est essentiellement la seconde hypothèse (H2) de [B-Rn] . Un programme pour prouver l'existence de ces représentations existe [La 4, La 5],et des progrès récents rendent optimistes. Pour traiter le cas de poids 2 , il faut [B-Rn] utiliser une méthode de congruence imitant [De-Se], la "série d'Eisenstein" nécessaire étant fournie par les travaux de Chai-Faltings [Ch-F]. En fait, Taylor [Ta 1] propose une méthode de congruence différente qui, jointe à [Ch-F], permet de construire des représentations ℓ-adiques attachées aux formes de Siegel de poids ≥ 2 , mais ces représentations ne sont pas *a priori* de dimension 4 et leur relation avec la forme de Siegel plus faible que par l'autre méthode. Cependant, en le cas qui nous occupe, cela permet ([Ta 3]) de se passer de la seconde hypothèse de [B-Rn].

Reprenons donc la représentation de $GL_2(\mathbf{A_Q})$ attachée à une forme de Maass, qu'on a considérée plus haut. Le problème est de la transférer à $GSp_4(\mathbf{A_Q})$. Pour ce faire, on choisit un corps quadratique imaginaire K et un caractère de Hecke algébrique convenable χ de $\mathbf{A}_K^\times$. On construit alors une représentation automorphe cuspidale $\widetilde{\Pi} = \widetilde{\Pi}(\pi,\chi)$ de $GL_4(\mathbf{A_Q})$, qu'heuristiquement il faut voir comme associée à la représentation $\sigma \otimes Ind_K^{\mathbf{Q}}\ \chi$ du groupe de Weil de $\mathbf{Q}$, si π est attachée à σ. En fait $\widetilde{\Pi}$ provient d'une représentation automorphe cuspidale $\Pi = \Pi(\pi, \chi)$ de $GSp_4(\mathbf{A_a})$. Le problème est que Π n'est pas associée à des formes de Siegel ! Son composant à l'infini n'est pas le bon. Cependant il a le même paramètre, dans la description de Langlands [La 3] qu'une autre représentation $GSp_4(\mathbf{R})$, limite de série discrète *holomorphe*. Un principe de transfert conjectural systématisé par Arthur [Ar 1] implique qu'il existe une représentation Π' de $GSp_4(\mathbf{A_Q})$ ne différant de Π qu'à l'infini, et attachée à des formes de Siegel de poids 2 : c'est l'hypothèse (H1) de [B-Rn] ; comme pour (H2) on l'espère accessible dans un futur proche, où l'on disposerait d'une formule des traces stabilisée pour GSp_4 . Si l'on a l'hypothèse (H1), alors on sait ([B-Rn], [Ta 3]) construire la représentation galoisienne σ attachée à π .

Peut-on se passer de cette hypothèse ? Si on impose des conditions locales à π en certaines places, il est montré dans [BCR 2] en utilisant l'état *présent* de la formule des traces pour GSp_4 que (dit grossièrement) les valeurs propres des opérateurs de Hecke pour $\Pi(\pi, \chi)$ sont des combinaisons linéaires à coefficients algébriques de telles valeurs propres pour des formes de Siegel de poids 2 , dont on sait qu'elles sont algébriques, et d'intégrales orbitales qui ont aussi des valeurs algébriques. Les valeurs propres des opérateurs de Hecke pour π sont alors également algébriques. L'hypothèse locale est supprimée dans [BHR] car on y montre que $\Pi(\pi, \chi)$ apparaît dans un espace de cohomologie cohérente sur une variété de Shimura pour GSp_4, espace qui possède une structure rationnelle sur un corps de nombres, invariante par l'action des opérateurs de Hecke. On sait donc :

THÉORÈME. *Les valeurs propres des opérateurs de Hecke pour π, en les nombres premiers où π est non ramifiée, sont algébriques.*

Il serait intéressant de savoir si ces valeurs propres engendrent une extension *finie* de $\mathbf{Q}$.

Dans la suite de ce texte, nous utilisons le langage adélique des représentations automorphes ; on peut consulter [Ge] pour une introduction au cas de $GL_{\mathbf{Q}}$ et prendre [PSPM] comme base de références. Pour les représentations des groupes de Lie réductifs, voir [Kn] ou [La 3]. Au §2, après quelques rappels sur les formes de Maass, nous formulons la conjecture et les résultats. Au §3, nous expliquons le transfert de GL_2 à GSp_4, ainsi que l'hypothèse (H1), tandis qu'au §4, nous indiquons l'utilisation de la cohomologie cohérente. Le §5 explique le programme de [B-Rn] et l'amélioration apportée par Taylor. Enfin le §6 mentionne le cas plus général des formes modulaires de Hilbert et formes de Maass sur un corps totalement réel, ainsi que celui de groupes autres que GL_2 .

2. FORMES DE MAASS ET REPRÉSENTATIONS AUTOMORPHES DE GL_2

2.1. Soit $\mathcal{H} = \{z = x + iy \in \mathbf{C} | y > 0\}$ le demi-plan de Poincaré, muni du laplacien hyperbolique $\Delta = -y^2(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$. Pour tout entier $N \geq 1$, on note $\Gamma_0(N)$ le sous-groupe de $SL_2(\mathbf{Z})$ formé des matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ telles que N divise c . On appelle *forme de Maass* de niveau N , caractère $\omega : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \to \mathbf{C}^\times$ et valeur propre $\lambda \in \mathbf{C}$, une fonction $C^\infty f$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathbf{C}$ telle que

(i) $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \omega(d)\ f(z)$ pour $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$.

(ii) $\Delta f = \lambda f$

(iii) f est à décroissance rapide aux pointes de $\mathcal{H}$. La condition (iii) s'exprime en disant que f est parabolique (ou cuspidale).

On note $S(N, \lambda, w)$ l'espace de ces formes introduites par Maass [Ma1,Ma2] qui a prouvé que $S(N, \lambda, w)$ est de dimension finie, et a étendu à ces formes modulaires analytiques réelles, mais non holomorphes, la théorie des opérateurs de Hecke. Dans la suite, nous nous limiterons aux formes de Maass pour $\lambda = 1/4$ que nous appellerons formes de Maass de type galoisien. Remarquons que pour que la théorie soit non vide, ω doit être *pair* : $\omega(-1) = 1$.

2.2. De même que les formes modulaires holomorphes classiques, les formes de Maass peuvent se voir [Ge] comme des fonctions sur $GL_2(\mathbf{A_Q})$, invariantes à gauche par $GL_2(\mathbf{Q})$ et à droite par un sous-groupe compact ouvert de $GL_2(\mathbf{A}_f)$ correspondant à $\Gamma_0(N)$, $\mathbf{A}_f$ désignant l'anneau des adèles finies de $\mathbf{Q}$. Plutôt que les formes de Maass de type galoisien, nous considérerons les représentations automorphes cuspidales correspondantes que nous appellerons *représentations de Maass de type galoisien.* Les représentations de Maass attachées à $S(N, 1/4, \omega)$ ont un conducteur diviseur de N et ont pour caractère central ω , vu comme un caractère de $\mathbf{A}_\mathbf{Q}^\times/\mathbf{Q}^\times$. Une représentation automorphe π de $GL_2(\mathbf{A_Q})$ apparaît comme un produit tensoriel $\pi = \otimes_v \pi_v$, où v parcourt les places de $\mathbf{Q}$ et où π_v est une représentation de $GL_2(K_v)$. Les *représentations de Maass de type galoisien* sont les représentations automorphes cuspidales dont le composant π_∞ est d'un type très particulier, que nous allons préciser.

Ce composant est une représentation de $GL_2(\mathbf{R})$. De manière générale, pour un groupe de Lie réductif réel G , Langlands [La3] a donné une paramétrisation de représentations de $G(\mathbf{R})$ en termes d'homomorphismes du groupe de Weil $W_\mathbf{R}$ dans le groupe ${}^LG(\mathbf{C})$, généralisant la paramétrisation connue pour GL_2 [Ja-La]. Pour un corps k local ou global, le *groupe de Weil* W_k est un avatar du groupe de Galois, dont les caractères correspondent exactement, dans la théorie du corps de classes, aux caractères de $k^\times$ si k est local ou de $\mathbf{A}_k^\times/k^\times$ si k est global ; pour $k = \mathbf{R}$, $W_\mathbf{R}$ est une extension non triviale

$$1 \to \mathbf{C}^\times \to W_\mathbf{R} \to Gal(\mathbf{C}/\mathbf{R}) \to 1 \ .$$

Pour $G = GL_n$, on a ${}^LG = GL_n$, et les (classes d'équivalence de) représentations de $GL_n(\mathbf{R})$ correspondent bijectivement aux (classes d'équivalence de) représentations continues de $W_\mathbf{R}$ dans $GL_n(\mathbf{C})$.

Les représentations de Maass de type galoisien sont celles dont le composant à l'infini a pour paramètre $1 \oplus 1$ ou $sgn \oplus sgn$, où 1 est la représentation triviale de $W_\mathbf{R}$ et sgn son unique caractère d'ordre 2 . Les formes de Maass pour une valeur propre $\lambda \neq 1/4$ correspondent à des représentations de $W_\mathbf{R}$ ne se factorisant pas par $Gal(\mathbf{C}/\mathbf{R})$, ce qui explique pourquoi elles ne sont pas attachées à des représentations de $G_\mathbf{Q}$ dans $GL_2(\mathbf{C})$.

Remarque.- La série discrète (de poids k) à l'infini correspond à la représentation irréductible de $W_\mathbf{R}$ induite à partir du caractère $z \mapsto z^{k-1}$ de $\mathbf{C}^\times$, et pour $k = 1$, on obtient la représentation $1 \oplus sgn$, qui se factorise par $Gal(\mathbf{C}/\mathbf{R})$.

2.3. Une représentation de Maass π possède une fonction L notée $L(\pi, s)$. C'est une fonction *entière* du paramètre complexe s , donnée pour s de partie réelle assez grande par un produit sur les places v de $\mathbf{Q}$ de facteurs locaux $L(\pi_v, s)$; le facteur à l'infini est $\pi^{-s}\ \Gamma(s/2)^2$ si le composant à l'infini est $1 \oplus 1$ ou $\pi^{-s+1}\Gamma(\frac{s+1}{2})^2$ si c'est $sgn \oplus sgn$, et si p est un nombre premier ne divisant pas le conducteur N de π, π_p est non ramifiée, paramétrée par deux nombres complexes α_p et β_p vérifiant $\alpha_p\beta_p = \omega(p)$, où ω est le caractère central de π qu'on verra indifféremment comme un caractère de Dirichlet ou un caractère de $\mathbf{A}_\mathbf{Q}^\times/\mathbf{Q}^\times$; le facteur local en p est donné par

$$L(\pi_p, s)^{-1} = (1 - \alpha_p\ p^{-s})\ (1 - \beta_p\ p^{-s})$$

et $a_p = \alpha_p + \beta_p$ est la *valeur propre* de π pour l'opérateur de Hecke T_p en p .

CONJECTURE 1.- *Soit π une représentation de Maass de type galoisien de $GL_2(\mathbf{A}_Q)$, de conducteur N et de caractère central ω . Alors il existe une représentation continue σ de $G_\mathbf{Q}$ dans $GL_2(\mathbf{C})$, non ramifiée hors de N et telle que, pour tout nombre premier p ne divisant pas N , on ait*

$$L(\pi_p, s) = L(\sigma_p, s)$$

où $L(\sigma_p, s)$ est le facteur L d'Artin de σ en p .

Il revient au même de dire que pour $p \nmid N$, le Frobenius en p vérifie $tr\ \sigma(Frob_p) = a_p$ et $det\ \sigma(Frob_p) = \omega(p)$.

Remarque.- Si cette conjecture est vraie, alors on a $|a_p| \leq 2$ pour $p \nmid N$ ("conjecture de Ramanujan").

2.4. En fait, σ et π sont déterminées par la donnée de leurs facteurs L locaux pour tous nombres premiers sauf un nombre fini, et si la conjecture est vraie on a nécessairement $L(\sigma_p, s) = L(\pi_p, s)$ pour tout p, et $L(\sigma, s) = L(\pi, s)$. En particulier, σ est irréductible, de conducteur N , son déterminant, vu comme caractère de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{\times}/\mathbf{Q}^{\times}$, est ω , et $L(\sigma, s)$ est entière, *i.e.* σ vérifie la conjecture d'Artin. Inversement [Ja-La, We, voir aussi Se], si σ est une représentation continue irréductible de $G_{\mathbf{Q}}$ dans $GL_2(\mathbf{C})$ telle que $L(\chi\sigma, s)$ soit *entière* pour tout caractère χ de $G_{\mathbf{Q}}$, alors il existe une représentation de Maass π telle que $L(\pi, s) = L(\sigma, s)$. Malheureusement, l'holomorphie des fonctions $L(\chi\sigma, s)$ n'est prouvée que si l'image de σ est résoluble [La 6, Tu].

Jusqu'à récemment, on n'avait aucun moyen de construire σ à partir d'une représentation de Maass de type galoisien π et à vrai dire pas de raison contraignante de conjecturer l'existence de σ . Cependant, si π est équivalente à sa tordue $\epsilon\pi$ par un caractère non trivial ϵ de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{\times}/\mathbf{Q}^{\times}$, alors ϵ est forcément d'ordre 2 et Labesse et Langlands [L-La] ont montré que σ existe alors et est d'image diédrale, σ étant induite à partir du corps quadratique défini par ϵ .

Désormais nous *fixerons* π, N et ω et nous supposerons que π *n'est pas du type diédral* traité par Labesse et Langlands.

THÉORÈME 1 [BCR 1-2, BHR]. *Les valeurs propres de π pour les opérateurs de Hecke en p ne divisant pas N sont algébriques.*

THÉORÈME 2 [B-Rn, Ta 3]. *Sous la conjecture* (H1), *la conjecture 1 est vraie.*

L'idée de base [BCR 1-2] est d'essayer de passer des formes de Maass à des formes modulaires de Siegel, qui sont espère-t-on plus accessibles à des méthodes géométriques. De manière adélique, cela revient à passer du groupe GL_2 au groupe GSp_4. Nous expliquons ce transfert au paragraphe suivant.

3. TRANSFERT A GSp_4

3.1. Si G est un groupe réductif (disons déployé pour simplifier) sur un corps de nombres K , on note $\mathcal{A}(G(\mathbf{A}_K))$ l'ensemble formé des (classes d'équivalence de) représentations automorphes de $G(\mathbf{A}_K)$, et $\mathcal{A}_0(G(\mathbf{A}_K))$ le sous-ensemble formé des représentations cuspidales. Voir [Bo 2, Bo J]. Un élément Π de $\mathcal{A}(G(\mathbf{A}_K))$ apparaît comme produit tensoriel de composants locaux Π_v , v parcourant les places de K ,

Π_v étant une représentation de $G(K_v)$. En une place à l'infini v , les morphismes de W_{K_v} dans ${}^LG(\mathbf{C})$ donnent une partition de l'ensemble des représentations de $G(K_v)$; les éléments de cette partition sont appelés des *L-paquets* [La 3]. Ils ne sont pas réduits à un seul élément en général, mais c'est le cas pour $G = GL_n$. On conjecture qu'une classification analogue existe pour toute place finie v de K . En tout cas, en une telle place finie, les représentations non ramifiées de $G(K_v)$ sont paramétrées par certaines classes de conjugaison semi-simples de ${}^LG(\mathbf{C})$.

Dans la suite, on note $G = GSp_4$ le groupe réductif sur $\mathbf{Q}$ formé des matrices 4×4 g vérifiant $g\ J\ {}^tg = \lambda(g)\ J$, où J est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix}$ et où $\lambda(g)$ est un scalaire appelé le multiplicateur de g ; le groupe Sp_4 est le noyau de λ . On a ${}^LG = GSp_4 \subset GL_4$.

Pour $\Pi \in \mathcal{A}(G(\mathbf{A_Q}))$, non ramifiée en dehors d'un ensemble (fini) S de places de $\mathbf{Q}$, contenant la place archimédienne, on dispose d'une fonction L

$$L_S(\Pi, s) = \prod_{p \notin S} L(\Pi_p, p^{-s})$$

où $L(\pi_p, X)^{-1}$ est de la forme $(1-\gamma_pX)(1-\delta_pX)(1-\gamma'_pX)(1-\delta'_pX)$ la matrice diagonale $diag(\gamma_p, \delta_p, \gamma'_p, \delta'_p) \in {}^LG(\mathbf{Q})$ étant dans la classe de conjugaison attachée à Π_p et vérifiant $\gamma_p\gamma'_p = \delta_p\delta'_p$.

3.2. Pour comprendre le principe du transfert à $G = GSp_4$, il vaut mieux d'abord raisonner de manière heuristique et, plutôt qu'aux représentations automorphes de $G(\mathbf{A_Q})$, penser à des représentations de $W_{\mathbf{Q}}$ dans ${}^LG(\mathbf{C})$.

On part des deux remarques suivantes :

1) Soient σ_1 et σ_2 deux représentations continues irréductibles de $W_{\mathbf{Q}}$ dans $GL_2(\mathbf{C})$. Alors $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ a, à conjugaison près, son image dans $G(\mathbf{C})$ exactement quand σ_1 ou σ_2 est d'image diédrale *i.e.* est induite à partir d'une extension quadratique K de $\mathbf{Q}$. Notons que si $\sigma_2 = Ind_K^{\mathbf{Q}}\ \chi$, où χ est un caractère de G_K , alors $\sigma_1 \otimes \sigma_2 = Ind_K^{\mathbf{Q}}(\chi \otimes Res_K^{\mathbf{Q}}\ \sigma_1)$.

2) Soit τ une représentation irréductible de $W_{\mathbf{Q}}$ dans $GL_4(\mathbf{C})$. Son image peut être conjuguée en un sous-groupe de $G(\mathbf{C})$ si et seulement si $\Lambda^2\tau$ contient une représentation de dimension 1 η, *i.e.* si et seulement si $L(\Lambda^2\tau \otimes \eta^{-1}, s)$ a un pôle en $s = 1$.

On ne peut espérer, dans le cas global, que les représentations automorphes de $G(\mathbf{A_Q})$ soient paramétrées par les représentations de $W_{\mathbf{Q}}$ dans ${}^LG(\mathbf{C})$, mais heuristiquement ces remarques doivent avoir un équivalent du côté automorphe, ce qui est effectivement le cas.

3.3. Soient K un corps quadratique, et $\tau \in \mathcal{A}_0(GL_2(\mathbf{A_Q}))$, non de type diédral. Alors la théorie du changement de base de Saito-Shintani-Langlands [La 6], associe à τ un élément τ_K de $\mathcal{A}_0(GL_2(\mathbf{A}_K))$ de sorte que, pour presque tout nombre premier p , où τ n'est pas ramifiée, on ait

$$L(\tau_{K,v}, s) = L(Res_{\mathbf{Q}_p}^{K_v}\ \sigma_p, s)$$

pour toute place v de K au-dessus de p , σ_p désignant la représentation (non ramifiée) de $W_{\mathbf{Q}_p}$ dans $GL_2(\mathbf{C})$, qui paramètre τ_p .

Soit χ un caractère de $\mathbf{A}_K^\times/K^\times$. Les résultats d'Arthur et Clozel [AC] généralisant [La 6] à GL_n permettent d'associer à τ et χ un élément $\widetilde{\Pi} = \widetilde{\Pi}(\tau, \chi)$ de $\mathcal{A}(GL_4(\mathbf{A_Q}))$ de sorte que, pour presque tout p , on ait

$$L(\widetilde{\Pi}_p, s) = \Pi L(Ind_{\mathbf{Q}_p}^{K_v}\ (\chi_v \otimes Res_{\mathbf{Q}_p}^{K_v}\ \sigma_v), s)\ ,$$

le produit portant sur les places v de K divisant p .
Si χ est assez régulier, alors $\widetilde{\Pi}$ est cuspidale.
Pour $\widetilde{\tau} \in \mathcal{A}(GL_4(\mathbf{A_Q}))$ et η un caractère de $\mathbf{A_Q^\times}/\mathbf{Q}^\times$, Jacquet et Shalika définissent et étudient [Ja-Sh] une fonction $L(\widetilde{\tau}, \Lambda^2 \otimes \eta, s)$ dont le facteur local en p non ramifié est

$$L(\Lambda^2\ \Sigma_p \otimes \eta, s)\ ,$$

Σ_p étant la représentation non ramifiée de degré 4 de $W_{\mathbf{Q}}$ correspondant à $\widetilde{\tau}_p$.

Prenons $\widetilde{\tau} = \widetilde{\Pi}(\pi, \chi)$ comme plus haut et $\eta = (\omega_\pi\ .\ \chi_0)^{-1}$ où ω_π est le caractère central de τ, χ_0 la restriction de χ à $\mathbf{A_Q^\times}/\mathbf{Q}^\times$. Alors on relie aisément $L(\widetilde{\tau}, \Lambda^2 \otimes \eta, s)$ à la fonction L définie par Gelbart et Jacquet [Ge-Ja] $L(\pi, sym^2 \otimes \eta\epsilon_K, s)$, où ϵ_K est le caractère de $\mathbf{A_Q^\times}/\mathbf{Q}^\times$ définissant K . Comme π n'est pas de type diédral, cette dernière fonction L est entière et ne s'annule pas pour $s = 1$. Il s'ensuit qu'alors $L(\widetilde{\tau}, \Lambda^2 \otimes \eta, s)$ a un *pôle* en $s = 1$.

3.4. Jacquet,Piatetski-Shapiro et Shalika ont annoncé le résultat suivant [JPSS 1].

THÉORÈME 3. *Soit $\tau \in \mathcal{A}_0(GL_4(\mathbf{A_Q}))$ unitaire. Notons S l'ensemble formé de la place à l'infini et des places où τ est ramifiée. Soit ψ un caractère unitaire de $\mathbf{A_Q^\times}/\mathbf{Q}^\times$ telle que la fonction $L_S(\tau, \Lambda^2 \otimes \psi, s)$, produit sur les places non dans S des facteurs locaux correspondants, ait un pôle en $s = 1$. Alors il existe $\Pi \in \mathcal{A}_0(GSp_4(\mathbf{A_Q}))$ telle que*

(i) *Π est non ramifiée là où τ l'est et $L_S(\Pi, s) = L_S(\tau, s)$*

(ii) *la représentation de $W_{\mathbf{R}}$ dans $GL_4(\mathbf{C})$ qui paramètre τ_∞ se factorise par*

$GSp_4(\mathbf{C})$, et Π_∞ appartient au L-paquet correspondant.

En fait, on sait caractériser les représentations Π obtenues par le théorème comme les représentations globalement génériques de $\mathcal{A}_0(G(\mathbf{A_Q}))$ (*cf.* [B-Rn], §6.7). La construction de Π à partir de τ s'effectue à l'aide de la correspondance métaplectique (*cf.* [Wa]) pour la paire réductive duale (GSp_4, GO_6) , où on relie GL_4 à GO_6 par l'action de $GL_4(\mathbf{Q})$ sur $\Lambda^2\mathbf{Q}^4$ qui préserve, à homothétie près, la forme quadratique $\Lambda^2\mathbf{Q}^4 \times \Lambda^2\mathbf{Q}^4 \to \Lambda^4\mathbf{Q}^4$ donnée par le produit extérieur.

3.5. Choisisons un corps quadratique *imaginaire* K , prenons notre représentation de Maass de type galoisien π , non de type diédral, et prenons un caractère χ de $\mathbf{A}_K^\times/K^\times$ tel que pour un entier $w \geq 1$, on ait $\chi_\infty(z) = z^{-w}$ pour $z \in \mathbf{C}^\times$. Ce caractère n'est pas unitaire, mais cela ne fait qu'intervenir une translation sur la variable s des fonctions L . En tout cas il est assez régulier, on peut appliquer le théorème 3 à $\tau = \widetilde{\Pi}(\pi, \chi)$ construite en 3.3, et en déduire l'existence de $\Pi = \Pi(\pi, \chi) \in \mathcal{A}_0(G(\mathbf{Q}))$ telle que

$$L_S(\pi, s) = L_S(\widetilde{\Pi}(\pi, \chi), s) .$$

De plus, il se trouve que le L-paquet correspondant à Π_∞ ne contient que deux éléments ; l'un Π_∞^W est ce qu'on appelle "générique", tandis que l'autre Π_∞^h est une limite de série décrite holomorphe. Comme Π est globalement générique, Π_∞ ne peut être que Π_∞^W .

3.6. Si le composant Π_∞ était Π_∞^h , il serait alors assez facile, grâce aux résultats de Shimura [Sh 3] qui décrivent, à l'aide du développement de Fourier, une structure rationnelle pour les formes modulaires de Siegel, de prouver que les valeurs propres des opérateurs de Hecke pour Π engendrent une extension finie de $\mathbf{Q}$, ce qui implique à tout le moins que les valeurs propres pour π elle-même sont algébriques. Malheureusement, Π_∞ est Π_∞^W ! Cependant, une conjecture d'Arthur [Ar 1] qu'on espère accessible à la formule des traces stabilisée pour G , rend raisonnable de poser la conjecture suivante.

CONJECTURE (H1).– *Soient K , ω , χ , comme en 3.5. Décomposons $\Pi(\pi, \chi)$ en $\Pi_\infty^W \otimes \Pi_f$. Alors $\Pi_\infty^h \otimes \Pi_f$ est une représentation automorphe cuspidale de $G(\mathbf{A_Q})$.*

PROPOSITION 1 [B-Rn, §7.5].– *Supposons que* (H1) *soit valide pour chaque corps quadratique imaginaire K et chaque caractère χ comme en 3.5. Alors la valeur propre de l'opérateur de Hecke pour π en un nombre premier non ramifié est un entier algébrique.*

3.7. En fait, dans [BCR 1-2], les auteurs montrent comment utiliser l'état présent de la formule des traces [Ar 2] (et non une stabilisation future ...) pour obtenir un résultat inconditionnel mais dont la conclusion est plus faible que dans la proposition précédente.

THÉORÈME 4 [BCR 1-2]. *Soit π notre représentation de Maass. Supposons qu'il existe un nombre premier ℓ tel que le relèvement, par changement de base, de π_ℓ à au moins ue extension quadratique de $\mathbf{Q}_\ell$ soit supercuspidal. Alors les valeurs propres des opérateurs de Hecke pour π en les premiers non ramifiés sont algébriques.*

Il est malheureusement impossible en peu de place de donner une idée des arguments subtils et concentrés de la note de [BCR 2]. Plutôt que de la paraphraser, nous préférons y renvoyer le lecteur. De toutes façons, le théorème 5 du paragraphe suivant, dû à [BHR], est plus fort que le théorème 4. En tout cas, on peut être optimiste quant à la possibilité de prouver la conjecture (H1) grâce à une version de la formule des traces pour $G = GSp_4$. Des phénomènes analogues sont vrais pour GL_2 [L-La] et aussi pour $U(3)$ [Ro] et GSp_4 est le candidat naturel pour la prochaine attaque. D'autre part si $\tau = \Pi_\infty^W \otimes \tau_f \in \mathcal{A}_0(GSp_4(\mathbf{A_Q}))$ a, en un nombre premier, une composante qui est la représentation de Steinberg et, un autre nombre premier, une composante supercuspidale, alors il semble possible dès maintenant de prouver que $\Pi_\infty^h \otimes \tau_f$ apparaît dans $\mathcal{A}_0(GSp_4(\mathbf{A_Q}))$; malheureusement, cela ne peut sûrement pas s'appliquer aux $\Pi(\pi, \chi)$ provenant de la représentation de Maass π .

4. COHOMOLOGIE COHÉRENTE

4.1. Dans ce paragraphe, nous voulons expliquer brièvement d'après [BHR] (voir aussi [Ha 4]) comment l'usage de la cohomologie cohérente (déjà utilisée dans un contexte analogue par Faltings [F 2]) permet d'améliorer le théorème 4. Mentionnons cependant que [BHR] n'est qu'à l'état de notes préliminaires et que les démonstrations complètes ne sont pas encore accessibles.

Le résultat fondamental de [BHR] est le théorème 5 suivant. En fait, [BHR] annonce un résultat analogue pour tout groupe réductif sur $\mathbf{Q}$ de type hermitien symétrique, mais pour simplifier, nous garderons $G = GSp_4$, qui est le seul cas qui nous intéresse.

THÉORÈME 5. *Soit $\Pi = \Pi_\infty \otimes \Pi_f \in \mathcal{A}_0(G(\mathbf{A_Q}))$, dont le composant à l'infini Π_∞ est une limite de série discrète non dégénérée (ou une série discrète). Alors*

a) *Π_f est définie sur un corps de nombres.*

b) *Si Π_∞ est assez régulier, alors pour tout automorphisme τ de $\mathbf{C}$, la représentation $\Pi^\tau = \Pi_\infty \otimes \Pi_f^\tau$ apparaît dans $\mathcal{A}_0(G(\mathbf{A_Q}))$.*

4.2. Ce théorème nécessite quelques explications. Dire que la représentation admissible irréductible Π_f de $G(\mathbf{A}_f)$ est définie sur un corps de nombres E signifie que l'espace V de Π_f, un espace vectoriel complexe, possède une E-structure invariante par $G(\mathbf{A}_f)$. Si τ est un automorphisme de $\mathbf{C}$, alors Π_f^τ est la représentation de $G(\mathbf{A}_f)$ dans $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}} V$, produit tensoriel de V avec $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}$, mais l'homomorphisme $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ étant τ et $G(\mathbf{A}_f)$ agissant sur le second facteur ; la représentation Π_f^τ est, comme Π_f , admissible et irréductible. D'autre part, les représentations de la série discrète de $GSp_4(\mathbf{R})$ sont les représentations paramétrées par les homomorphismes (continus) de $W_{\mathbf{R}}$ dans $GL_4(\mathbf{C})$, d'image dans $GSp_4(\mathbf{C})$ et sommes de deux représentations irréductibles de degré 2 non équivalentes. Les limites de série discrète qui nous intéressent sont celles paramétrées par les sommes de deux représentations irréductibles équivalentes $Ind_{\mathbf{C}^\times}^{W_{\mathbf{R}}}(z^k)$; elles sont non dégénérées pour $k \neq 0$ et assez régulières quand k est assez grand.

4.3. On peut appliquer ce théorème 5 aux $\Pi = \Pi(\pi, \chi)$ du §3.5, la partie a) pour tout $w \geq 1$ et la partie b) pour w assez grand (c'est la condition de régularité).

COROLLAIRE 1.- *Fixons $\tau \in Aut(\mathbf{C})$, et K, χ, w comme en 3.5, avec w assez grand. Alors il existe $\Pi(\pi, \chi, \tau) \in \mathcal{A}_0(GSP_4(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}))$ dont la composante à l'infini est la même que pour $\Pi(\pi, \chi)$, qui est non ramifiée en les mêmes nombres premiers que $\Pi(\pi, \chi)$ et dont le facteur L en un tel nombre premier s'obtient en appliquant τ à celui de $\Pi(\pi, \chi)$.*

COROLLAIRE 2.- *En un nombre premier p où π est non ramifiée, la valeur propre de l'opérateur de Hecke pour π est un nombre algébrique.*

Bien entendu, on espère que les valeurs propres des opérateurs de Hecke pour π engendrent une extension finie de $\mathbf{Q}$, ou même que la représentation π_f de $GL_2(\mathbf{A}_f)$ composant de π aux places finies, est définie sur un corps de nombres, mais cela ne semble pas découler de la construction de $\Pi(\pi, \chi)$.
De même, on aimerait savoir que pour $\tau \in Aut(\mathbf{C})$, une représentation apparaît dans $\mathcal{A}_0(GL_2(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}))$ qui a les mêmes composantes que π_f^τ en presque toute place finie. Cela serait vrai si les représentations $\Pi(\pi, \chi, \tau)$ du corollaire 1 étaient globalement génériques [B-Rn, §8]. C'est annoncé dans [BHR] si π vérifie la même condition locale que dans le théorème 4.

4.4. Comme pour GL_2 , les représentations dans $\mathcal{A}_0(GSp_4(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}))$ dont la composante à l'infini est de la *série discrète* apparaissent dans la cohomologie de certains systèmes locaux sur une variété de Shimura ; dans le cas de GSp_4 , il s'agit essentiellement de quotients du demi-plan de Siegel $\mathcal{H}_2$ par des sous-groupes arithmétiques de $GSp_4(\mathbf{Z})$.

En ce cas, par exemple, le résultat a) du théorème découle de l'existence de la structure rationnelle, invariante par les opérateurs de Hecke, donnée par la cohomologie de Betti.

L'intérêt du théorème plus haut est précisément qu'on autorise le composant à l'infini à être une limite de série discrète. Alors, Π (ou plutôt sa partie finie Π_f) apparaît dans la cohomologie d'une compactification lisse de la variété de Shimura, à coefficients dans un faisceau cohérent défini par une représentation algébrique ρ d'un sous-groupe compact maximal de $GSp_4(\mathbf{R})$, ρ dépendant de Π_∞ . La variété de Shimura et le faisceau sont définis sur un corps de nombres ([Sh 2, Ha 1, Mi], voir aussi [Ha 2]), ce qui donne une structure rationnelle sur ce corps pour la cohomologie, structure qui est invariante par l'action des opérateurs de Hecke.

Cette méthode de cohomologie cohérente est aussi valable quand Π_∞ est de la série discrète ; les deux approches sont en ce cas reliées par une suite spectrale [F 2, Ch-F, Ha 4].

4.5. Le point crucial de la construction est bien sûr le fait que Π_f apparaît dans la cohomologie du faisceau cohérent [Ha 4, HMR].

On part de la représentation ρ et on forme [Ha 1] un faisceau cohérent associé $\mathcal{V}_\rho$ sur la variété de Shimura S . On étend ensuite le faisceau $\mathcal{V}_\rho$ en des faisceaux $\widetilde{\mathcal{V}}_\rho$ sur les diverses compactifications toroïdales [AMRT] de S . Ces constructions sont définies sur un corps de nombres, et les groupes de cohomologie correspondants ne dépendent pas de la compactification choisie.

On interprète ensuite [Ha 3, Ha 4, Ha-Ph] ces groupes de cohomologie en termes de fonctions C^∞ sur S , à valeurs dans un complexe $V_\rho \otimes \Lambda^\bullet(\mathcal{P})$, où V_ρ est l'espace de ρ et $\mathcal{P}$ l'algèbre de Lie des matrices $\begin{pmatrix} x & -ix \\ ix & -x \end{pmatrix}$ où $x \in M_2(\mathbf{C})$ est symétrique, ces fonctions C^∞ étant soumises à des conditions de croissance à l'infini, inspirées de [Bo 2]. L'occurence de Π peut alors se voir [Ha 3] à l'aide du calcul des groupes de cohomologie en termes de cohomologie d'algèbre de Lie (*cf.* [Bo-Wa] pour le cas des séries discrètes).

4.6. Si τ est un automorphisme de $\mathbf{C}$, on utilise la structure rationnelle sur les groupes de cohomologie précédents pour prouver qu'il existe une représentation automorphe Π' de $\mathcal{A}(GSp_4(\mathbf{A_Q}))$ dont le composant fini est Π_f^τ . Si w est assez grand, alors Π'_∞ est tempérée et un calcul montre qu'alors $\Pi'_\infty = \Pi_\infty$. Le fait que Π'_∞ soit tempérée impose que Π' soit cuspidale.

5. CONSTRUCTION CONJECTURALE DES REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES ATTACHÉES AUX FORMES DE MAASS

5.1. Dans ce paragraphe, nous voulons d'après [B-Rn] et [Ta 3] montrer comment la conjecture (H1) implique l'existence d'une représentation de degré 2 de $G_{\mathbf{Q}}$ dans $GL_2(\mathbf{C})$ ayant même fonction L que notre représentation de Maass π , autrement dit que la conjecture (H1) implique la conjecture 1 de 2.3.

Nous considérons donc toujours la représentation de Maass π de type galoisien, non de type diédral, de conducteur N , et nous notons a_p la valeur propre de T_p ; nous *fixons* pour le moment un corps quadratique imaginaire K , et nous supposons que la conjecture (H1) du §3 est valable pour tout caractère algébrique χ de $\mathbf{A}_K^\times/K^\times$ de composante à l'infini χ_∞ vérifiant $\chi_\infty(z) = z^{-1}$.

Grâce à l'hypothèse (H1), on peut changer la composante à l'infini de la représentation $\Pi(\pi,\chi)$ du §3.5 pour obtenir $\Pi^h(\pi,\chi) \in \mathcal{A}_0(GSp_4(\mathbf{A_Q}))$ ne différant de $\Pi(\pi,\chi)$ qu'à l'infini, où $\Pi^h(\pi,\chi)_\infty$ est limite de série discrète *holomorphe* correspondant en fait à des formes modulaires de Siegel classiques de poids 2 . Il en découle d'une part que $\Pi^h(\pi,\chi)$ est définie sur un corps de nombres, d'autre part que les valeurs propres a_p pour π sont des *entiers* algébriques [B-Rn, Prop. 7.5].

5.2. Pour les représentations $\mathcal{A}_0(GSp_4(\mathbf{A_Q}))$ dont le composant à l'infini est de la série discrète holomorphe, comme celles qui sont attachées aux formes de Siegel de poids ≤ 3 , on espère obtenir un système de représentations ℓ-adiques de degré 4 de $G_{\mathbf{Q}}$ attaché à Π à l'aide de la cohomologie ℓ-adique des systèmes locaux sur des variétés de Shimura, déjà mentionnés en 4.4 (*cf.* [La 4] ; mentionnons les progrès récents de [Ch-F, Ko 1, Ko 2, et RZ]). La conjecture (H2) de [B-Rn] est la version modulo ℓ de cette espérance.

CONJECTURE (H2).– *Soit* $\Pi \in \mathcal{A}_0(GSp_4(\mathbf{A_Q}))$ *dont la composante à l'infini est de la série discrète holomorphe. On suppose* Π *non ramifiée hors de* N *. Alors il existe un corps de nombres* E *et, pour chaque place finie* λ *de* E *, de caractéristique résiduelle* ℓ *, une représentation semi-simple* ρ *, non ramifiée hors de* $N\ell$ *, de* $G_{\mathbf{Q}}$ *dans* $GL_4(E/\lambda)$ *, telle que*

$$P(\Pi_p, X) \equiv det(1 - \rho_{\lambda,p}(Frob_p)X) \quad mod\ \lambda$$

où on a noté $P(\Pi_p, X)$ *le polynôme de* $E[X]$ *tel que*

$$L(\Pi_p, s) = P(\Pi_p, p^{-s})^{-1} \ .$$

5.3 Les représentations $\Pi(\pi,\chi)$ du §3.5 ne sont pas justiciables de cette conjecture, mais Blasius et Ramakrishnan proposent d'imiter la méthode de Deligne et Serre.

Il faut d'abord trouver l'analogue des séries d'Eisenstein. On peut pour cela, soit utiliser les travaux de [Ch-F] (*cf.* aussi [F 1]) sur la réalisation sur $\mathbf{Z}$ du champ des modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension 2, comme le fait [B-Rn, Prop. 3.6], soit utiliser plus classiquement des fonctions thêta [Ta 1, Prop. 2.3].

PROPOSITION 2.– *Soit p un nombre premier ; il existe un entier $a > 0$ et une forme modulaire (non parabolique !) pour $Sp(4, \mathbf{Z})$, de poids $a(p-1)$, à coefficients de Fourier entiers, le coefficient constant étant congru à 1 modulo p et les autres divisibles par p .*

5.4. A l'aide de cette proposition, on imite [De-Se] et on obtient, en supposant (H1) et (H2) des représentations continues $\rho_\ell(\pi, \chi) : G_{\mathbf{Q}} \to GL_4(\mathbf{F}_\ell)$ pour une infinité de nombres premiers ℓ , associées à $\Pi^h(\pi, \chi)$ en ce sens qu'en un nombre premier p ne divisant pas $N\ell$, le polynôme $det(1 - \rho_\ell(\pi, \chi)(Frob_p)X)$ soit réduction, modulo une place d'un corps de rationalité de $\Pi^h(\pi, \chi)$, du polynôme $P(\Pi^h(\pi, \chi)_p, X)$ tel que $L(\Pi^h(\pi, \chi)_p, s) = P(\Pi^h(\pi, \chi)_p, p^{-s})^{-1}$.
Le résultat final est le suivant :

THÉORÈME 6 [B-Rn], §10]. – *Soit $\pi \in \mathcal{A}_0(GL_2(\mathbf{A_Q}))$ une représentation de Maass, non de type diédral. Supposons que (H1) soit vraie pour les représentations $\Pi(\pi, \chi)$ pour tout caractère χ de $\mathbf{A}_K^\times / K^\times$ comme en 3.5 avec $w = 1$, et que (H2) soit vraie également. Alors il existe une représentation continue ${}^K\rho$ de $G_K = Gal(\bar{\mathbf{Q}}/K)$ dans $GL_2(\mathbf{C})$ telle que $L({}^K\rho, s) = L(\pi_K, s)$ où π_K est le changement de base de π à K .*

COROLLAIRE.– *Si les hypothèses du théorème 6 sont vérifiées pour tout corps quadratique imaginaire K , alors il existe une représentation continue ρ de G_K dans $GL_2(\mathbf{C})$ telle que $L(\pi, s) = L(\rho, s)$.*

5.5. Le théorème se prouve par une analyse délicate des images des représentations $\rho_\ell(\pi, \chi)$ attachées à $\Pi^h\pi, \chi)$. Un point important est que, pour beaucoup de ℓ , on montre que l'image de G_K est conjuguée à un sous-groupe de $GL_2(\mathbf{F}_\ell) \times GL_2(\mathbf{F}_\ell)$, ce qui indique d'où vient la représentation ${}^K\rho$ de dimension 2 . Le succès de cette méthode, comme dans [De-Se], repose sur l'utilisation de la méthode de Rankin pour prouver l'estimation fondamentale suivante [B-Rn, Prop. 8.8] et son corollaire.

PROPOSITON 3.– *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un corps de nombres T_ϵ , un entier k_ϵ , un nombre réel C_ϵ , et un ensemble Z_ϵ de nombres premiers ne divisant pas N, de densité $> 1 - \epsilon$, tels que, pour $p \in Z_\epsilon$, a_p appartienne à T_ϵ et que pour tout* *automorphisme τ de $\mathbf{C}$, on ait*

$$\sum_{p \in Z_\epsilon} |a_p^\tau|^2 \, p^{-s} \leq k_\epsilon \; log \, \frac{1}{s-1} + C_\epsilon \, .$$

COROLLAIRE.– *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble X_ϵ de nombres premiers, de densité $< \epsilon$, et un ensemble fini Y_ϵ de nombres complexes tels que si $p \notin X_\epsilon$, alors α_p et β_p appartiennent à Y_ϵ .*

Compte tenu de ce corollaire, la preuve de [De-Se] s'adapte à [B-Rn, §10]. La preuve de la Proposition 3 repose sur l'existence des représentations $\Pi(\pi, \chi, \tau) \in \mathcal{A}_0(GSp_4(\mathbf{A_Q}))$ fournies par le corollaire 1 de 4.3. L'estimation de l'ordre du pôle en $s = 1$ d'une fonction L de Rankin attachée à $\Pi(\pi, \chi, \tau)$ utilise les propriétés, dues à Soudry [So], d'une fonction $L(\Pi(\pi, \chi, \tau)), St, s)$ qui n'est pas la fonction L standard du §3.1, mais est donnée par un produit eulérien de degré 5 (dans le formalisme de Langlands, elle est donnée par une représentation de $GSp_4(\mathbf{C})$ dans $GL_5(\mathbf{C})$ d'image un groupe de similitudes orthogonales).

5.6. En fait, Taylor dans [Ta 1] utilise une méthode de congruence différente de celle de [De-Se]. C'est à l'origine une idée de Shimura pour les formes modulaires classiques, développée ensuite par Hida [Hi]. On part de la même situation qu'en 3.5, et supposant la conjecture (H1) vérifiée, on forme la représentation $\Pi^h(\pi, \chi)$. On peut interpréter $\Pi^h(\pi, \chi)$ en termes de formes modulaires de Siegel de poids 2. Étant donnée une forme de Siegel f attachée à $\Pi^h(\pi, \chi)$, la méthode de Taylor consiste, non pas à trouver des formes de Siegel de poids supérieur congrues à f modulo différentes places finies du corps de rationalité E de f , mais plutôt à choisir une telle place λ et à trouver des formes de Siegel de poids supérieur, congrues à f modulo des puissances de plus en plus grandes de f , ce qui est effectué à l'aide d'arguments de cohomologie des groupes, plutôt que géométriques [Ta 1, chap. 1]. Si on admet (H2), alors par "interpolation" des représentations attachées à ces formes, on produit une représentation λ-adique pour f .

5.7. Cependant [Ta 3] montre qu'on peut en fait se passer de (H2). Le point est que pour une forme modulaire de Siegel h de poids ≥ 3 , on peut construire des représentations galoisiennes, qui ne sont pas de dimension 4 *a priori* , et dont le facteur L en les bonnes places n'est pas forcément prescrit en termes de Π , mais qui est néanmoins reliée à Π .

Plus précisément, pour tout niveau M , on définit une algèbre (commutative) d'opérateurs $\mathcal{H}_M$, contenant l'opérateur de Hecke T_p pour p ne divisant pas M , et qui agit sur l'espace des formes modulaires de Siegel de niveau M . De plus, pour $p \nmid M$, l'opérateur T_p vérifie une relation polynomiale Q_p de degré 4 à coefficients dans $\mathcal{H}_M$. Si h de niveau M est vecteur propre de $\mathcal{H}_M$ pour le caractère propre $\eta : \mathcal{H}_M \to \mathbf{C}$, alors $\eta(T_p)$ est racine du polynôme $\eta(Q_p)$ obtenu en appliquant η aux coefficients de Q_p . En fait l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_M$ agit aussi sur la cohomologie étale $H^3_{et,\ell}(S_{\bar{\mathbf{Q}}}, V)$ d'un système local V (dépendant de Π_∞) sur la variété de Shimura S pour le niveau N (qui est définie sur $\mathbf{Q}$). Le point important [Ch-F ; Taylor me dit que l'idée est incluse déjà dans une lettre ancienne de Deligne à Serre] est que l'action de $G_{\mathbf{Q}}$ sur le groupe de cohomologie ℓ-adique $H^3_{et,\ell}(S_{\bar{\mathbf{Q}}}, V)$ est non ramifiée hors de $M\ell$ et qu'en p ne divisant pas $M\ell$, on a $Q_p(Frob_p) = 0$. Le quotient de $H^3_{et,\ell}(S_{\bar{\mathbf{Q}}}\ V)$ sur lequel $\mathcal{H}_N$ agit par le caractère η est muni ainsi d'une représentation ρ_η de $G_{\mathbf{Q}}$, d'une dimension inconnue $a(\eta)$, mais telle en tous cas que les valeurs propres de $Frob_p$ en un nombre premier $p \nmid M\ell$ soient racines de $\eta(Q_p)$.

5.8. Par interpolation de ces représentations , on produit [Ta 1] une représentation $\rho : G_{\mathbf{Q}} \to GL(V)$ où V est un espace vectoriel de dimension inconnue a , sur un corps ℓ-adique E_λ , non ramifiée hors d'un nombre fini de nombres premiers , et telle que

(i) si p est un nombre premier non ramifié pour ρ qui se scinde dans K en $p = v\bar{v}$, alors les valeurs propres de $\rho(Frob_p)$ appartiennent à

$$\{\alpha_p\ \chi_v(\varpi_v), \beta_p\ \chi_v(\varpi_v), \alpha_p\ \chi_{\bar{v}}(\overline{\varpi_v}), \beta_p\ \chi_{\bar{v}}(\overline{\varpi_v})$$

où ϖ_v et $\overline{\varpi_v}$ sont des uniformisantes en v et $\bar{v}$ respectivement.

(ii) Si p est non ramifié pour ρ et inerte dans K , alors les valeurs propres de $\rho(Frob_p^2)$ appartiennent à

$$\{\alpha_p^2\ \chi_p(p)\ ,\ \beta_p^2\ \chi_p(p)\}\ .$$

On peut si l'on veut prendre ρ irréductible.

Il s'agit ensuite d'utiliser cette information et le corollaire à la proposition 3 pour analyser l'image de $\rho(G_K)$ ou plus exactement sa clôture de Zariski G .

5.9. *Lemme* 1.– *La composante connexe G^0 de G est un tore.*

Démonstration.– Comme ρ est irréductible, G^0 est réductif. Quitte à étendre les scalaires, on peut décomposer l'espace de ρ en sous-modules irréductibles pour G^0 et il suffit de prouver que si G_1 est l'image de G^0 dans un tel module V_1 , et Z_1 son centre, alors $\overline{G}_1 = G_1/Z_1$ est trivial. Soit L une extension finie de K telle que l'image de G_L par ρ soit incluse dans G^0 . On considère les applications

$$G_L \xrightarrow{a} \overline{G}_1 \times \mathbf{G}_n \times \mathbf{G}_n(E_\lambda) \xrightarrow{K} \mathbf{A}^1 \times \mathbf{G}_n \times \mathbf{G}_n(E_\lambda)$$

où $a = (\overline{\rho}_1, \chi_\lambda, \chi'_\lambda)$, où $\overline{\rho}_1$ est induite par ρ , où χ_λ est le caractère λ-adique correspondant à χ et χ'_λ son conjugué par $Gal(K/\mathbf{Q})$, et où t est induit par $g \mapsto \frac{tr(g)^{dim\, V_1}}{det\, g}$ sur la première composante et par l'identité sur les composantes $\mathbf{G}_m$. Si $\overline{G}_1$ n'est pas trivial, on voit facilement que $Im(a)$ est dense (pour la topologie de Zariski). Mais grâce au corollaire de la proposition 3, on construit une sous-variété U de $\mathbf{A}^1 \times \mathbf{G}_n^2$ de codimension non nulle, telle que pour tout idéal premier v de L dans un ensemble de densité positive, on ait $t \circ a(Frob_v) \in V$. Un argument de type Tchébotarev contredit $\overline{G}_1 \neq 1$.

5.10 De façon analogue, on prouve que le tore G^0 agit sur V (quitte à étendre encore les scalaires) par des caractères qui sont donnés soit par χ soit par son conjugué χ' sous $Gal(K/\mathbf{Q})$.

On peut alors détordre ρ/G_K par χ^{-1} ou χ'^{-1} pour obtenir une représentation τ de G_K , *d'image finie*, non ramifiée hors d'un ensemble fini S de places et telle que, pour p un nombre premier où τ n'est pas ramifiée,

(i) Si p se scinde en $v\bar{v}$ dans K , alors les valeurs propres de $Frob_v$ et $(Frob_{\bar{v}})$ appartiennent à $\{\alpha_p, \beta_p\}$.

(ii) Si p est inerte dans K , les valeurs propres de $Frob_p$ appartiennent à $\{\alpha_p^2, \beta_p^2\}$.

On peut sans perdre de généralité supposer τ irréductible. Notons d sa dimension et formons $\tau_2 = \tau \oplus \omega\tau^\vee$; alors on a

$$L_S(\tau_2, s) = L_S(\pi_K, s)^d$$

et

$$L_S(\omega^{-1}\tau_2 \otimes \tau_2, s) = L_S(\pi_K \times \pi_K^\vee, s)^{d^2}$$

où le facteur L de gauche est celui défini par Jacquet- Piatetski-Shapiro et Shalika [JPSS 2]. Mais ce facteur a un pôle d'ordre 1 exactement en $s = 1$ et on en déduit que d est forcément égal à 2 et que τ a la même fonction L que π_k . Faisant maintenant varier K , on prouve l'existence d'une représentation σ de $G_{\mathbf{Q}}$ dont la restriction à chaque G_K est la représentation précédemment construite et alors σ et π ont même fonction L . Cela prouve le théorème 2.

6. AUTRES CORPS

6.1. On espère attacher des représentations galoisiennes, en fait des systèmes de représentations ℓ-adiques, voire des "motifs", à certaines représentations automorphes de groupes réductifs sur les corps de nombres. On pourra consulter [Cl] pour le cadre de validité de cette correspondance conjecturale, ainsi que [Bl] pour la description de quelques exemples connus ou qu'on espère bientôt accessibles.

En ce qui concerne le groupe GL_n sur un corps de nombres F , la conjecture est la suivante [Cl].

On part d'une représentation $\pi \in \mathcal{A}_0(GL_n(\mathbf{A}_F))$ dont le composant en toute place à l'infini v est *algébrique*, c'est-à-dire correspond à une représentation W_{F_v} dont la restriction à $\mathbf{C}^\times$ est somme de caractères $z \mapsto z^a \bar{z}^b |z\bar{z}|^{(n-1)/2}$, a et b étant entiers. On veut alors que π soit définie sur un corps de nombres E et que, en prenant E assez grand, pour chaque place finie λ de E , on dispose d'une représentation continue σ_λ de $Gal(\bar{\mathbf{Q}}/F)$ dans $GL_n(E_\lambda)$ telle que, à une translation près par $\frac{n-1}{2}$ de la variable s , le facteur L de σ_λ en une place de F , première à la caractéristique résiduelle de λ , et où π est non ramifiée, soit égal au facteur de π en cette place.

Le seul résultat qu'on ait pour n général est dû à Clozel [Cl]. On part de π comme précédemment, et on suppose F totalement réel et π isomorphe à sa contragrédiente, d'un type assez régulier en toute place infinie et vérifiant des conditions locales en une place finie. Alors π est bien définie sur un corps de nombres et pour un certain entier $a(\pi)$ strictement positif, il existe, pour toute place finie λ de $\bar{\mathbf{Q}}$, une représentation continue τ_λ de $Gal(\bar{\mathbf{Q}}/F)$ dans $GL_{na(\pi)}(\bar{\mathbf{Q}}_\lambda)$ dont le facteur L en les bonnes places soit la puissance $a(\pi)$ du facteur L attendu. En fait, [Cl] ne prouve que l'existence de systèmes de représentations attachés au changement de base de π à toute extension de type CM convenable de F , mais Blasius [Bl] a montré pour $n = 3$ comment obtenir le résultat plus fort.

6.2 A part ces résultats encore partiels, le cas le mieux exploré, au-delà de la théorie du corps des classes, est le cas où n vaut 2 et où F est totalement réel : les représentations de $\mathcal{A}(GL_2(\mathbf{A}_F))$ forment en ce cas la généralisation adélique des formes modulaires de Hilbert. Nous faisons rapidement ici le point sur la question ; on peut consulter [Ca 2] pour un rapport plus ancien mais plus détaillé.

Une particularité importante du cas $n = 2$ est que la conjecture de Langlands locale reliant, pour un corps local k non archimédien, les représentations admissibles irréductibles de $GL_2(k)$ aux représentations continues $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-adiques de W_k dans $GL_2(\bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, que cette conjecture locale donc a été prouvée par Kutzko [Ku].

Étant donné $\pi \in \mathcal{A}_0(GL_2(\mathbf{A}_F))$ dont le composant en toute place à l'infini v est algébrique, on peut demander que, pour un corps de nombres E convenable, π soit définie sur E et que pour chaque place finie λ de E , on dispose d'une représentation continue σ_λ de $Gal(\bar{\mathbf{Q}}/F)$ dans $GL_2(E_\lambda)$ dont le composant local en *toute place* v de F première à la caractéristique résiduelle de λ corresponde à π_v par la correspondance locale (à vrai dire, il faut utiliser une correspondance légèrement tordue pour tenir compte des phénomènes de rationalité). Mentionnons que l'existence des représentations ℓ-adiques attachées à π a des applications arithmétiques profondes [Wi 1, Hi, Wi 3].

6.3. Traitons d'abord le cas où $\pi \in \mathcal{A}_0(GL_2(\mathbf{A}_F))$ a tous ses composants à l'infini de la série discrète. L'étude de la cohomologie d'intersection des variétés de Shimura associées, *i.e.* des *courbes modulaires de Hilbert*, permet d'obtenir des représentations τ_λ de dimension 2^d où d est le degré de F sur $\mathbf{Q}$; en fait, τ_λ est alors, en presque toute place, l'induite tensorielle de la représentation σ_λ cherchée. Ce résultat est dû à Brylinski et Labesse ([Br-La] ; noter cependant que le résultat est obtenu en utilisant des propriétés, non encore établies dans la littérature, de la formule des traces de Lefschetz).

Pour obtenir des représentations de degré 2, on a utilisé des courbes de Shimura attachées à des algèbres de quaternions sur F . Alors Ohta [O], et aussi Rogawski et Tunnell [Ro-Tu], ont montré l'existence des représentations σ_λ de degré 2 qui correspondent à π en les places non ramifiées ; ces résultats sont valables quand le degré d de F sur $\mathbf{Q}$ est impair ou quand π est de la série discrète en une place finie au moins. Une étude approfondie de la mauvaise réduction des courbes de Shimura a permis à Carayol [Ca 1], complétant des résultats de Langlands [La 2], de prouver qu'alors σ_λ correspond à π , par la correspondance locale mentionnée plus haut, en toute place de F première à la caractéristique résiduelle de λ .

Dans le cas où d est pair, Taylor [Ta 2] utilisant [Br-La], une méthode de congruence et la notion de pseudo-représentations de [Wi 2], a construit un tel système σ_λ , mais sa construction ne montre pas que les σ_λ interviennent dans la cohomologie de variétés algébriques. C'est cette dernière propriété qui est obtenue par Blasius et Rogawski [B-Ro], à l'aide de l'étude fine de la formule des traces pour $U(3)$ [Ro] et des variétés de Shimura attachées à $U(3)$.

6.4. En ce qui concerne les $\pi \in \mathcal{A}_0(GL_2(\mathbf{A}_F))$ dont les composants à l'infini sont limites de série discrète holomorphe de poids 1 , Tunnell et Rogawski [Tu-Ro] ont étendu la méthode de Deligne et Serre, ce qui prouve l'existence d'une représentation galoisienne complexe de degré 2 correspondant à π en toutes les places ; ceci est valable même quand le degré de F sur $\mathbf{Q}$ est pair grâce à [Ta 2] et [B-Ro].

6.5. Enfin, examinons le cas des représentations $\pi \in \mathcal{A}_0(GL_2(\mathbf{A}_F))$ dont tous les composants à l'infini sont du même type que pour les représentations de Maass, ou limites de série discrète holomorphe de poids 1 . L'argument de la note de [BCR 2] ne s'étend pas à ce cas, contrairement à ce qui y est affirmé, mais ceux de

[BHR] devraient s'étendre sans problème pour donner l'algébricité des valeurs propres des opérateurs de Hecke (on peut aussi en ce cas autoriser des séries discrètes). Blasius [Bl, §3.7] esquisse un programme qui permettrait de prouver l'existence d'une représentation complexe correspondant à π . Cela nécessite d'utiliser des variétés de Shimura attachés à des groupes unitaires et des phénomènes d'endoscopie, généralisant ainsi la méthode de [B-Ro]. La réalisation de ce programme semble encore assez lointaine.

BIBLIOGRAPHIE

[Ar 1] J. ARTHUR - *On some problems suggested by the trace formula* in Lie groups and representations II, Springer L.N.M. vol. 1041, 1983, 1-49.

[Ar 2] J. ARTHUR - *On a family of distributions obtained from orbits*, Can. J. Math. 38, 1986, 179-214.

[AC] J. ARTHUR, L. CLOZEL - *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 1989.

[AMRT] A. ASH, D. MUMFORD, M. RAPOPORT, Y.-S. TAI - *Smooth compactification of locally symmetric varieties*, Brooklin, Mass. Math. Sci. Press, 1975.

[Bl] D. BLASIUS - *Automorphic forms and Galois representations : some examples*, à paraître dans Proc. of a conference on Shimura varieties, Ann Arbor, 1988.

[BCR 1] D. BLASIUS, L. CLOZEL, D. RAMAKRISHNAN - *Algébricité de l'action des opérateurs de Hecke sur certaines formules de Maass*, C.R.A.S. Paris 305, 1987, 705-708.

[BCR 2] D. BLASIUS, L. CLOZEL, D. RAMAKRISHNAN - *Opérateurs de Hecke et formules de Maass : application de la formule des traces*, C.R.A.S. Paris 306, 1988, 59-62.

[BHR] D. BLASIUS, M. HARRIS, D. RAMAKRISHNAN - *Coherent cohomology, limits of discrete series and Maass forms of Galois type*, notes préliminaires.

[B-Rn] D. BLASIUS, D. RAMAKRISHNAN - *Maass forms and Galois representations*, à paraître dans Conf. on Galois groups and related topics, MSRI, mars 1987.

[B-Ro] D. BLASIUS, J. ROGAWSKI - *Galois representations for Hilbert modular forms*, Bull. A.M.S., juillet 1989, 65-70.

[Bo 1] A. BOREL - *Stable cohomology of arithmetic groups*, Ann. Scient. E.N.S. 7, 1974, 235-272.

[Bo 2] A. BOREL - *Automorphic L-functions*, in [PSPM], II, 27-72.

[Bo-J] A. BOREL, H. JACQUET - *Automorphic forms and automorphic representations*, in [PSPM], I, 189-202.

[Bo-Wa] A. BOREL, N. WALLACH - *Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups*, Annals of Math. Studies 94, Princeton University Press, 1980.

[Br-La] J.-L. BRYLINSKI, J.-P. LABESSE - *Cohomologie d'intersection et fonctions L de certaines variétés de Shimura*, Ann. Scient. E.N.S. 17, 1984, 361-412.

[Ca 1] H. CARAYOL - *Sur les représentations ℓ-adiques attachées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Scient. E.N.S. 19, 1986, 409-468.

[Ca 2] H. CARAYOL - *Formes modulaires et représentations ℓ-adiques*, Astérisque 147-148, 1987, 33-47.

[Ch-F] C.L. CHAI, G. FALTINGS - *Arithmetic compactification of Siegel moduli spaces and applications*, prépublication 1988.

[Cl] L. CLOZEL - *Motifs et formes automorphes : applications du principe de fonctorialité*, prépublication 1989, à paraître dans Proc. of a conference on Shimura varieties, Ann Arbor, 1988.

[Del] P. DELIGNE - *Formes modulaires et représentations ℓ-adiques*, Sém. Bourbaki, exposé n° 355, Springer L.N.M. 179, 1971, 139-172.

[De 2] P. DELIGNE - *Non abelian class-field theory*, in Mathematical developments arising from Hilbert problems, PSPM 28, 1976, 41-43.

[De-Se] - P. DELIGNE, J.-P. SERRE - *Formes modulaires de poids 1*, Ann. Scient. E.N.S. 7, 1974, 507-530.

[F 1] G. FALTINGS - *Arithmetic theory of Siegel modular forms*, New York Number Theory Seminar, Springer L.N.M. 1240, 1987, 101-108.

[F 2] G. FALTINGS - *On the cohomology of locally symmetric hermitian spaces*, Springer L.N.M. 1029, 1984, 55-98.

[Ge] S. GELBART - *Automorphic forms on adele groups*, Annals of Math. Studies 83, Princeton University Press, 1975.

[Ge-Ja] S. GELBART, H. JACQUET - *A relation between automorphic forms on $GL(2)$ and $GL(3)$*, Ann. Scient. E.N.S. 11, 1978, 471-542.

[Ha 1] M. HARRIS - *Arithmetic vector bundles and automorphic forms on Shimura varieties* I, Inventiones Mathematicae 82, 1985, 151-189 ; II, Compositio Mathematicae 60, 1986, 323-378.

[Ha 2] M. HARRIS - *Formes automorphes "géométriques" non holomorphes : problèmes d'arithméticité*, in Séminaire de Théorie des Nombres de Paris, 1984-85, Progress in Math. 63, Boston Birkhäuser, 1986, 109-129.

[Ha 3] M. HARRIS - *Automorphic forms of $\bar{\partial}$-cohomology type as coherent cohomology classes*, à paraître dans Journal of Diff. Geom.

[Ha 4] M. HARRIS *Automorphic forms and the cohomology of vector bundles on Shimura varieties*, à paraître dans Proc. of a conference on Shimura varieties, Ann Arbor,1988.

[Ha-Ph] M. HARRIS, D.H. PHONG - *Cohomologie de Dolbeault à croissance logarithmique à l'infini*, C.R.A.S. Paris 302, 1986, 307-310.

[He] E. HECKE *Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, n° 23, in Mathematische Werke, Vandenhoeck et Ruprecht, Göttingen, 1970, 2e édition.

[Hi] H. HIDA *Galois representations into $GL_2(\mathbf{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms*, Inv. Math. 85, 1986, 546-613.

[Ja-La] H. JACQUET, R.P. LANGLANDS - *Automorphic forms on $GL(2)$*, Springer L.N.M. 114, 1970.

[Ja-Sh] H. JACQUET, J. SHALIKA - *Exterior square L-functions*, à paraître dans Proc. of a conference on Shimura varieties, Ann Arbor, 1978.

[JPSS 1] H. JACQUET, I. PIATETSKI-SHAPIRO, J. SHALIKA - *Converse theorem for $GSp(4)$*, en préparation.

[JPSS 2] H. JACQUET, I. PIATETSKI-SHAPIRO, J. SHALIKA - *Rankin-Selberg convolutions*, Amer. J. of Math. 105, 1983, 367-464.

[Kn] A.W. KNAPP - *Representation theory of semisimple groups*, Princeton Math. Series 36, 1986.

[Ko 1] R. KOTTWITZ - *Shimura varieties and twisted orbital integrals*, Math. Annalen 269, 1984, 287-300.

[Ko 2] R. KOTTWITZ - *On the λ-adic representations associated to some simple Shimura varieties*, en préparation.

[Ku] Ph. KUTZKO - *The Langlands conjecture for GL_2 of a local field*, Annals of Math. 112, 1980, 381-412.

[L-La] J.-P. LABESSE, R.P. LANGLANDS - *L.-indistinguishability for $SL(2)$*, Can. J. Math. XXXI 4, 1979, 726-785.

[La 1] R.P. LANGLANDS - *Problems in the theory of automorphic forms*, in Lectures in modern analysis and applications III, Springer L.N.M. 170, 1970, 19-61

[La 2] R.P. LANGLANDS - *Modular forms and ℓ-adic representations*, in Modular functions of one variable II, Springer L.N.M. 349, 1973, 361-500.

[La 3] R.P. LANGLANDS - *On the classification of irreducible representations of real algebraic groups*, I.A.S., Princeton, 1973.

[La 4] R.P. LANGLANDS - *On the zeta-functions of some simple Shimura varieties*, Can. J. Math. 31, 1979, 1121-1216.

[La 5] R.P. LANGLANDS - *Automorphic representations, Shimura varieties and motives*, in Märchen in [PSPM] II, 205-246.

[La 6] R.P. LANGLANDS - *Base change for $GL(2)$*, Annals of Math. Studies 96, Princeton University Press, 1980.

[La 7] R.P. LANGLANDS - *Les débuts d'une formule des traces stables*, Pub. Math. Univ. Paris VII 13, 1980.

[Ma 1] H. MAASS - *Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Functionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Functional-gleichungen*, Math. Annalen 121, 1949, 141-183.

[Ma 2] H. MAASS - *Lectures on modular functions of one complex variable*, Tata Lectures Notes 29, Bombay,1983.

[Mi] J.S. MILNE - *Automorphic vector bundles on connected Shimura varieties*, Invent. Math. 92, 1987, 91-128.

[O] M. OHTA - *On the zeta function of an abelian scheme over the Shimura curve*, Japan J. Math. 9, 1983, 1-26.

[PSPM] *Automorphic functions, representations and L functions*, Proc. Symp. Pure Math. 33, Parts I and II, Providence, 1979.

[Ro] J. ROGAWSKI - *Automorphic representations of unitary groups in 3 variables*, à paraître dans Annals of Math. Studies, Princeton University Press.

[Ro-Tu] J. ROGAWSKI, J.B. TUNNELL - *On Artin L-functions associated to Hilbert modular forms of weight one*, Inv. Math. 74, 1983, 1-42.

[RZ] H. REIMANN, T. ZINK - *Der Dieudonnémodul einer polarisierten abelschen Mannigfältigkeit von CM-Typ*, Annals of Math. 129, 1988, 461-482.

[Se] J.-P. SERRE - *Modular forms of weight one and Galois representations*, in Algebraic Number Theory Field,Fröhlich ed., Academic Press, 1977, 193-268.

[Sh 1] G. SHIMURA - *On modular correspondences for $Sp(n, \mathbf{Z})$ and their congruence relations*, Proc. N.A.S. USA 49, 1963, 824-828.

[Sh 2] G. SHIMURA - *On canonical models of arithmetic quotients of bounded symmetric domains* I, Annals of Math. 91, 1970, 144-222 ; II, Annals of Math. 92, 1970, 528-549.

[Sh 3] G. SHIMURA - *On the Fourier coefficients of modular forms of several variables*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen 17, 1975, 261-268.

[So] D. SOUDRY - *The CAP representations of $GSP(4, \mathbf{A})$*, Journal de Crelle 383, 1988, 87-108.

[Ta 1] R. TAYLOR - *On congruences between modular forms*, Thèse Princeton, 1988.

[Ta 2] R. TAYLOR - *On Galois representations associated to Hibert modular forms*, à paraître dans Invent. Math.

[Ta 3] R. TAYLOR - Lettre à D. Blasius datée du 16.10.1988.

[Tt] J. TATE - *Number theoretic background*, in [PSPM] II, 3-26.

[Tu] J.B. TUNNELL - *Artin's conjecture for representations of octahedral type*, B. AMS 5, 1981, 173-175.

[We] A. WEIL - *Dirichlet series and automorphic forms* Springer L.N.M., vol. 189, 1971.

[Wi 1] A. WILES - *On p-adic representations for totally real fields*, Annals of Math. 123, 1986, 407-456.

[Wi 2] A. WILES - *On ordinary λ-adic representations associated to modular forms*, Invent. Math. 94, 1988, 529-573.

[Wi 3] A. WILES - *The Iwasawa conjecture for totally real fields*, prépublication, 1989.

[Wa] J.-L. WALDSPURGER - *Représentation métaplectique et conjectures de Howe*, Sém. Bourbaki, exposé n° 674, Astérisque 152-153, 1987, 85-100.

Guy HENNIART

Université Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
F-91405 ORSAY