

# Astérisque

ÉTIENNE GHYS

## L'invariant de Godbillon-Vey

*Astérisque*, tome 177-178 (1989), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 706, p. 155-181

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1988-1989\\_\\_31\\_\\_155\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1988-1989__31__155_0)>

© Société mathématique de France, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## L'INVARIANT DE GODBILLON-VEY

par Etienne GHYS

Il y a dix-huit ans, C. Godbillon et J. Vey introduisaient un invariant des feuilletages de codimension 1 qui est une classe de cohomologie de degré 3. Très rapidement, cet invariant s'insère dans le contexte plus général des classes caractéristiques secondaires (ou exotiques) associées à des feuilletages de codimension supérieure. Cette théorie générale, très riche et de nature algébrique, soulève le problème de l'interprétation de ces classes et, en particulier, de la plus simple d'entre elles : l'invariant de Godbillon-Vey. En 1975, D. Sullivan se demande dans [Sc] si cet invariant n'aurait pas une interprétation "dans l'esprit des systèmes dynamiques". En 1979, D.B. Fuchs regrette "qu'en dépit de la simplicité de sa définition, la signification géométrique de la classe de Godbillon-Vey ne soit toujours pas comprise" [F].

On comprend mieux cet invariant aujourd'hui. Un progrès décisif a été accompli par G. Duminy dans deux articles, malheureusement non publiés, contenant des idées extrêmement originales ([D1] et [D2]). Depuis lors, ce type d'idées a été développé et généralisé par divers auteurs dont J. Cantwell, L. Conlon, A. Connes, J. Heitsch, S. Hurder et A. Katok. Nous allons tenter de faire le point sur les progrès réalisés et les nombreuses questions laissées en suspens. Pour des raisons de place, nous ne pouvons proposer qu'un survol qui ne cherche ni les énoncés les plus généraux ni les démonstrations complètes. Même ainsi, il nous a fallu faire des choix. Le premier, probablement inexcusable, est de nous limiter à l'invariant de Godbillon-Vey proprement dit. A grand regret, nous ne traiterons pas des autres classes secondaires, laissant ainsi de côté une bonne partie de [HK1]. Par ailleurs, nous ne considérons pas les aspects plus "algébriques" tels que les liens avec la cohomologie de Gelfand-Fuchs et la cohomologie cyclique de A. Connes. Malgré ces limitations, nous espérons que ce rapport pourra servir d'introduction utile à ce riche sujet en développement.

### 1. Une définition, un exemple, un dessin ...

Nous commençons par la définition initiale de C. Godbillon et J. Vey [GV]. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de codimension 1, de classe  $C^\infty$ , transversalement orienté, sur une variété  $M$ . Choisissons une 1-forme différentielle  $\omega$  définissant  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire dont le noyau soit le champ d'hyperplans tangents à  $\mathcal{F}$ .

La condition d'intégrabilité de Frobenius s'écrit :  $\omega \wedge d\omega = 0$ .

Il existe donc une 1-forme  $\alpha$  (définie à un multiple de  $\omega$  près) telle que :  $d\omega = \omega \wedge \alpha$ .

En dérivant cette relation, on trouve :  $\omega \wedge d\alpha = 0$ .

Il existe donc une 1-forme  $\beta$  telle que :  $d\alpha = \omega \wedge \beta$ .

**Proposition-définition.** La 3-forme  $\alpha \wedge d\alpha = \alpha \wedge \omega \wedge \beta$  est fermée. Sa classe de cohomologie de de Rham ne dépend que de  $\mathcal{F}$  et pas des choix de  $\omega, \alpha$ . C'est la classe de Godbillon-Vey de  $\mathcal{F}$ , notée  $GV(\mathcal{F})$ .

La démonstration n'est pas difficile. La première partie est immédiate :

$$d(\alpha \wedge d\alpha) = (d\alpha)^2 = (\omega \wedge \beta)^2 = 0.$$

La seconde partie résulte d'un calcul un peu miraculeux que nous expliquerons mieux plus tard. Si l'on garde le même choix de  $\omega$  mais on change  $\alpha$  en  $\alpha + g \cdot \omega$  où  $g$  est une fonction sur  $M$ , on trouve :  $(\alpha + g \cdot \omega) \wedge d(\alpha + g \cdot \omega) = \alpha \wedge d\alpha - d(\alpha \wedge g \cdot \omega)$ .

Si on choisit maintenant une autre forme  $\omega'$  définissant  $\mathcal{F}$ , il existe une fonction  $f$  ne s'annulant pas telle que  $\omega' = f \cdot \omega$ . On a alors :

$$d\omega' = f\omega \wedge \alpha + df \wedge \omega = \omega' \wedge (\alpha - d(\text{Log } |f|)) = \omega' \wedge \alpha'$$

avec :  $\alpha' = \alpha - d(\text{Log } |f|)$ .

On calcule alors :  $\alpha' \wedge d\alpha' = (\alpha - d(\text{Log } |f|)) \wedge d\alpha = \alpha \wedge d\alpha - d(\text{Log } |f|) \cdot d\alpha$ .

Ceci établit la proposition.

Avant de continuer, quelques remarques s'imposent.

1 - Si  $\mathcal{F}$  n'est pas transversalement orientable, on définit aussi  $GV(\mathcal{F})$  en passant à un revêtement à deux feuillets ; la forme  $\alpha \wedge d\alpha$  est en effet invariante par l'involution naturelle.

2 - Le fait que  $\mathcal{F}$  ne soit pas singulier n'est pas fondamental. La définition s'étend sans difficulté aux structures de Haefliger. La classe  $GV$  est alors naturelle : si  $f : N \rightarrow M$  est une application continue, la classe  $GV(f^*\mathcal{F})$  n'est autre que  $f^*GV(\mathcal{F})$ . En d'autres termes,  $GV$  pourrait se définir comme une classe universelle sur le classifiant ...

3 - Soit  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$  tel que  $\omega(X) = 1$ . Si l'on note  $\mathcal{L}_X$  l'opération de dérivée de Lie, on peut choisir  $\alpha$  et  $\beta$  comme étant :

$$\alpha = \mathcal{L}_X \omega \qquad \beta = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_X \omega .$$

Le lecteur n'aura aucune difficulté à s'en assurer en jouant avec les formules ci-dessus et la formule de Cartan :  $\mathcal{L}_X = i_X d + di_X$ .

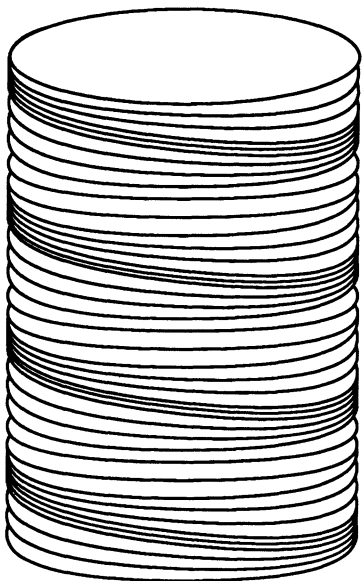
4 - Si l'on suppose  $\mathcal{F}$  de codimension  $q$  et transversalement orientable, on choisit une  $q$ -forme  $\omega$  le définissant. De même, il existe une 1-forme  $\alpha$  telle que  $d\omega = \omega \wedge \alpha$  et on montre que  $\alpha \wedge (d\alpha)^q$  est une  $(2q+1)$ -forme fermée dont la classe de cohomologie ne dépend que de  $\mathcal{F}$ . C'est la classe de Godbillon-Vey généralisée de  $\mathcal{F}$  qui n'est que le premier exemple de classe caractéristique secondaire. On pourra consulter [L], [B1] ou [B2] pour ces généralisations.

5 - Si  $M$  est une variété fermée orientée de dimension 3, la classe  $GV(\mathcal{F})$ , évaluée sur la classe fondamentale de  $M$ , fournit un nombre réel  $gv(\mathcal{F})$  : l'invariant de Godbillon-Vey. Soit  $W$  une variété compacte orientée de dimension 4 dont le bord est formé de deux composantes  $M_1$  et  $M_2$ . Dans ces conditions, il est clair que  $gv(\mathcal{F}_1) = gv(\mathcal{F}_2)$ . On dit que l'invariant de Godbillon-Vey est un invariant de cobordisme.

Le premier exemple de feuilletage pour lequel l'invariant de Godbillon-Vey est non nul est dû à R. Roussarie. Sur le groupe de Lie  $SL(2, \mathbb{R})$ , il existe une base  $\{ \omega, \alpha, \beta \}$  de l'espace des 1-formes invariantes à droite telle que :

$$d\omega = \omega \wedge \alpha \qquad d\alpha = \omega \wedge \beta \qquad d\beta = \alpha \wedge \beta.$$

Ces relations sont duales de celles définissant l'algèbre de Lie de  $SL(2, \mathbb{R})$ . Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $SL(2, \mathbb{R})$  tel que le quotient  $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$  soit une variété compacte. La forme  $\omega$  passe alors au quotient et définit un feuilletage dont l'invariant est non nul car  $\alpha \wedge \omega \wedge \beta$  est une forme de volume donc d'intégrale non nulle.



Tous ces calculs avec des formes différentielles sont très simples mais il est bien difficile d'en suivre le contenu géométrique. Le premier à illustrer (au sens propre) la forme  $\alpha \wedge d\alpha$  fut W. Thurston. Supposons que  $M$  soit une variété riemannienne de dimension 3. On peut alors choisir  $\omega$  de norme 1 partout et  $\alpha$  orthogonale partout à  $\omega$ . De la sorte,  $\alpha \wedge d\alpha$  est certainement liée à la géométrie différentielle locale du feuilletage. Selon W. Thurston, la non nullité de l'invariant correspond à "l'oscillation hélicoïdale" (helical wobble) illustrée par la figure ci-contre. "Les disques font un angle constant avec l'axe central, dans une direction qui tourne avec une vitesse constante. Leurs centres sont régulièrement espacés." [Th 1] Les points où les disques sont le plus rapprochés sont sur une hélice.

Ce dessin a été "mis en formule" par B. Reinhart et J. Wood [R-W]. Considérons les courbes orthogonales à  $\mathcal{F}$  et notons  $k$  et  $\tau$  leurs courbure et torsion,  $N$  et  $Z$  leurs normales et binormales. Soit  $\varphi$  la seconde forme quadratique fondamentale des feuilles et  $dvol$  l'élément de volume. La formule promise est :

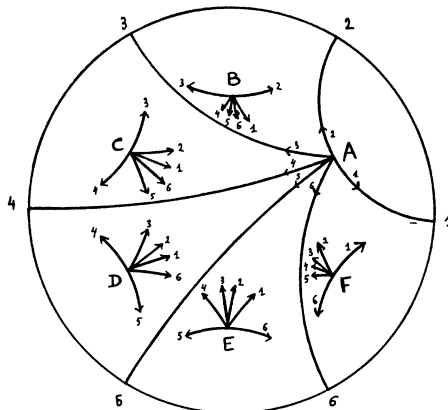
$$\alpha \wedge d\alpha = k^2(\tau + \varphi(N,Z)) dvol.$$

Un bon exemple apparaît lorsque les feuilles sont totalement géodésiques : le terme  $\varphi$  disparaît alors. Dans ce cas, pour que l'invariant soit non nul, il faut que les courbes orthogonales soient courbées mais cela ne suffit pas : il faut aussi qu'elles soient tordues ...

A la lumière de ce "wobble", revenons un instant sur l'exemple de R. Roussarie qu'il est important de comprendre car il est la source de nombreuses constructions. Observons d'abord que  $PSL(2, \mathbb{R})$  est le groupe des isométries directes du disque de Poincaré  $D^2$  et qu'il opère librement et transitivement sur son fibré unitaire tangent  $T^1D^2$ . Si  $v$  est un vecteur unitaire tangent à  $D^2$ , la géodésique positive issue de  $v$  "tend" vers un point du cercle à l'infini  $S_\infty^1$ , bord de  $D^2$ . On obtient ainsi une fibration  $\pi$  de  $T^1D^2$  sur  $S_\infty^1$ , équivariante sous les actions naturelles de  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

Choisissons maintenant une métrique à courbure  $-1$  sur une surface fermée orientée  $\Sigma$ . Le groupe fondamental de  $\Sigma$  opère alors librement sur  $T^1D^2$  en préservant le feuilletage dont les feuilles sont les fibres de  $\pi$ . Par passage au quotient, on obtient un feuilletage sur le fibré unitaire tangent à  $\Sigma$  dont il est facile de s'assurer qu'il rentre dans la classe des exemples de Roussarie. C'est aussi le feuilletage stable du flot géodésique de  $\Sigma$  et, à ce titre, il mérite le nom de "Anosov-Roussarie".

Comment "voir" l'oscillation hélicoïdale dans cet exemple? Sur la figure suivante, nous avons choisi six points à l'infini de  $S_\infty^1$ , c'est-à-dire six feuilles du feuilletage défini par  $\pi$ . Nous avons choisi aussi six points A,B,C,D,E,F dans  $D^2$ . En A, les feuilles 1 et 2 sont très éloignées alors que 3,4,5 et 6 sont proches. En B, ce sont les feuilles 2 et 3 qui sont éloignées et en C, ce sont les feuilles 3 et 4 etc. ... Ainsi, lorsqu'on "fait le tour" du disque de Poincaré en passant par A,B,C,D,E,F, les feuilles s'éloignent et se rapprochent successivement. Avec un peu d'imagination, on "voit" donc le feuilletage osciller ...



L'interprétation "hélicoïdale" a le défaut d'être de nature locale et d'utiliser une métrique riemannienne. Dans [Su], D. Sullivan propose une autre interprétation. Soit  $M$  une variété fermée orientée de dimension 3 et  $\sigma_1, \sigma_2$  deux surfaces orientées, à bord, plongées dans  $M$  et en position générale. Il est alors naturel de définir le nombre d'enlacement  $\text{enl}(\sigma_1, \sigma_2)$  comme étant le nombre algébrique d'intersection du bord de  $\sigma_1$  avec  $\sigma_2$  (qui est symétrique en  $\sigma_1, \sigma_2$ ). Cette notion d'enlacement peut se généraliser à deux 2-courants  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  pour peu que l'intersection de  $\partial\sigma_1$  avec  $\sigma_2$  ait un sens. C'est en particulier le cas pour les 2-courants diffus représentés par des 1-formes différentielles. Si  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont deux 1-formes, on pose donc :

$$\text{enl}(\omega_1, \omega_2) = \int_M \omega_1 \wedge d\omega_2 \quad .$$

Considérons maintenant un feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension 1, transversalement orienté, sur  $M$ . On peut penser aux 1-formes  $\omega$  qui le définissent comme des 2-courants qui le représentent géométriquement. Soit  $\omega$  une telle forme,  $X$  un champ de vecteurs tel que  $\omega(X) = 1$  et  $\phi_t$  le flot engendré par  $X$ . On considère alors  $\text{enl}(\omega, \phi_t^* \omega)$  comme fonction de  $t$ . Cette fonction est nulle lorsque  $t$  est nul : c'est le théorème de Frobenius qui implique ici qu'un feuilletage ne s'enlace pas lui-même. Comme, par ailleurs, cette fonction est évidemment paire, le premier invariant naturel est la dérivée seconde : c'est l'interprétation proposée par D. Sullivan.

**Proposition :** 
$$gv(\mathcal{F}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2}{t^2} \text{enl}(\omega, \phi_t^* \omega)$$

La démonstration résulte de :

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \int_M \phi_t^* \omega \wedge d\omega \right)_{|t=0} = \int_M (\mathcal{L}_X \mathcal{L}_X \omega) \wedge d\omega = \int_M \beta \wedge \alpha \quad .$$

## 2. Où G. Duminy sépare les rôles de C. Godbillon et J. Vey.

L'un des deux ingrédients essentiels du travail de G. Duminy est une décomposition de la classe GV en deux invariants que, par plaisanterie, il baptisa "*invariant de Godbillon*" et "*invariant de Vey*".

Avant de pouvoir expliquer cette décomposition, il nous faut examiner de plus près les formes  $\omega$  et  $\alpha$  que nous avons introduites. Fixons nous un feuilletage  $\mathcal{N}$  de dimension 1 transverse au feuilletage considéré  $\mathcal{F}$ . Choisir une forme  $\omega$  qui définit  $\mathcal{F}$  permet alors de paramétrer les transversales à  $\mathcal{F}$  que sont les feuilles de  $\mathcal{N}$ . La forme  $\alpha$  permet de mesurer comment le glissement le long des feuilles de  $\mathcal{F}$  perturbe ce paramétrage de  $\mathcal{N}$ . Il s'agit là d'une observation importante qui remonte (au moins) à G. Reeb ([Re]) et que nous allons expliciter.

Soit  $\tau$  un chemin contenu dans une feuille de  $\mathcal{F}$  et reliant le point  $\tau(0)$  au point  $\tau(1)$ . Soient  $T_0$  et  $T_1$  des voisinages de  $\tau(0)$  et  $\tau(1)$  dans les feuilles de  $\mathcal{N}$  passant par  $\tau(0)$  et  $\tau(1)$ . Par glissement le long

des feuilles de  $\mathcal{F}$  en suivant  $\tau$ , on obtient un difféomorphisme local de  $T_0$  vers  $T_1$  envoyant  $\tau(0)$  sur  $\tau(1)$  : c'est l'*holonomie*  $H(\tau)$  de  $\tau$ . Si l'on dispose d'une forme  $\omega$  définissant le feuilletage, on peut paramétrer  $T_0$  et  $T_1$  par intégration de  $\omega$  de sorte que  $H(\tau)$  est alors un difféomorphisme local de  $\mathbb{R}$ , envoyant 0 sur 0. Sa dérivée en 0 est l'*holonomie linéaire* de  $\tau$  ; elle dépend du choix de  $\omega$  sauf, bien sûr, si  $\tau$  est un lacet. L'observation que nous voulions expliciter est contenue dans la proposition suivante. C'est la version globale de la formule infinitésimale  $d\omega = \omega \wedge \alpha$  et sa démonstration se réduit au théorème de Stokes.

**Proposition :**  $\text{Log } H(\tau)'(0) = - \int_{\tau} \alpha$

**Corollaire :** *La restriction de  $\alpha$  aux feuilles de  $\mathcal{F}$  est fermée et son groupe des périodes est le logarithme du groupe d'holonomie linéaire de cette feuille.*

A vrai dire, la formule  $d\alpha = \omega \wedge \beta$  nous montrait déjà que la restriction de  $\alpha$  aux feuilles est fermée mais ce fait apparaît maintenant clairement : l'intégrale de  $\alpha$  sur un petit lacet contenu dans une feuille est nulle car  $H(\tau)$  est évidemment l'identité.

Lorsque  $\mathcal{F}$  est de codimension  $q \geq 1$ , le choix d'une  $q$ -forme définissant  $\mathcal{F}$  détermine un volume sur toute transversale. L'intégrale de  $\alpha$  sur un chemin contenu dans une feuille est alors l'opposé du logarithme du Jacobien de  $H(\tau)$ . La forme  $\alpha$  est donc l'obstruction à l'existence d'un volume transverse invariant.

Nous avons déjà observé que la forme  $\alpha$  n'est définie qu'à un multiple de  $\omega$  près et, puisque  $\omega$  est nulle sur les feuilles, nous voyons que seule la valeur de  $\alpha$  sur un vecteur tangent à  $\mathcal{F}$  est bien définie. Il est donc naturel de considérer le complexe  $A^*(\mathcal{F})$  constitué des formes qui ne sont définies que sur les (multi)-vecteurs tangents aux feuilles. En différenciant feuille à feuille,  $A^*(\mathcal{F})$  est un complexe différentiel dont l'homologie est la *cohomologie feuilletée*  $H^*(\mathcal{F})$ . Il faut prendre garde que  $H^*(\mathcal{F})$  est un objet bien délicat, le plus souvent de dimension infinie, dont on ne sait à vrai dire pas grand chose (voir cependant [EK]).

**Proposition :** *La classe de  $\alpha$  dans  $H^1(\mathcal{F})$  ne dépend pas des choix de  $\omega, \alpha$ . C'est la classe d'holonomie linéaire ou classe de Reeb.*

La démonstration est claire. D'une part,  $A^*(\mathcal{F})$  ne prend en compte que les vecteurs tangents à  $\mathcal{F}$  de sorte qu'ajouter un multiple de  $\omega$  à  $\alpha$  ne change pas l'élément de  $A^1(\mathcal{F})$  considéré. D'autre part, si l'on change  $\omega$  en  $f \cdot \omega$ , nous avons vu que  $\alpha$  se change en  $\alpha - d(\text{Log } |f|)$  et sa classe ne change donc pas dans  $H^1(\mathcal{F})$ .

Pour mieux comprendre  $H^*(\mathcal{F})$ , on peut aussi introduire le sous-complexe  $A^*(M, \mathcal{F})$  du complexe de de Rham  $A^*(M)$  constitué des formes qui sont multiples de  $\omega$ . Ce sous-complexe est évidemment indépendant du choix de  $\omega$ . Le théorème de Frobenius affirme que  $A^*(M, \mathcal{F})$  est un idéal différentiel de  $A^*(M)$ . Le quotient  $A^*(M)/A^*(M, \mathcal{F})$  est naturellement isomorphe à  $A^*(\mathcal{F})$ . Enfin, l'homologie de  $A^*(M, \mathcal{F})$  est notée  $H^*(M, \mathcal{F})$ .

Trois remarques simples, d'ordre algébrique, apparaissent immédiatement. Tout d'abord, le fait que  $A^*(M, \mathcal{F})$  soit un idéal différentiel de  $A^*(M)$  montre que  $H^*(M, \mathcal{F})$  est muni d'une structure de module sur la cohomologie de de Rham  $H^*(M)$ . Par ailleurs, le fait que le produit extérieur de deux formes de  $A^*(M, \mathcal{F})$  est nul montre qu'il existe un accouplement naturel :

$$H^n(M, \mathcal{F}) \times H^p(\mathcal{F}) \rightarrow H^{n+p}(M, \mathcal{F}).$$

Enfin, la suite exacte courte de complexes différentiels dont nous disposons fournit un morphisme "connectant":

$$H^n(\mathcal{F}) \rightarrow H^{n+1}(M, \mathcal{F}).$$

En particulier, on a le résultat suivant :

**Proposition :** *La forme fermée  $d\alpha$  est dans  $A^2(M, \mathcal{F})$  et sa classe dans  $H^2(M, \mathcal{F})$  ne dépend pas des choix de  $\omega$  et  $\alpha$ .*

En mettant bout à bout ces observations élémentaires, nous avons montré :

**Proposition :** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de classe  $C^\infty$ , transversalement orienté, de codimension 1, sur une variété compacte et orientée  $M$ . La classe  $GV(\mathcal{F})$ , élément de  $H^3(M)$ , considérée comme élément du dual de  $H^{n-3}(M)$  est la composée de deux invariants :*

1 - l'invariant de Vey :

$$V : x \in H^{n-3}(M) \longrightarrow x.[d\alpha] \in H^{n-1}(M, \mathcal{F})$$

2 - l'invariant de Godbillon :

$$G : y \in H^{n-1}(M, \mathcal{F}) \longrightarrow y.[\alpha] \in H^n(M) = \mathbb{R}.$$

Toutes ces considérations paraissent (et sont) bien simples. Nous allons montrer cependant qu'elles permettent d'obtenir des résultats non triviaux.

**Corollaire :** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de classe  $C^\infty$ , transversalement orienté et de codimension 1, sur la variété fermée  $M$ . On suppose que  $\mathcal{F}$  peut être défini par une suite de formes différentielles  $\omega_n$  telles que  $d\omega_n = \omega_n \wedge \alpha_n$  et  $\alpha_n$  tende vers 0 uniformément dans la topologie  $C^0$ . Alors la classe de Godbillon-Vey de  $\mathcal{F}$  est nulle.*



En effet, l'invariant de Godbillon étant aussi petit que l'on veut est en fait nul... Si l'on n'avait pas utilisé la décomposition de l'invariant, on n'aurait pas pu affirmer que  $\alpha_n \wedge d\alpha_n$  tend vers 0. La clé de la décomposition est que  $GV(\mathcal{F})$  est aussi représenté par  $\alpha_n \wedge d\alpha_1$  qui, lui, tend vers 0...

On prendra garde au fait que les hypothèses du corollaire n'entraînent pas que la classe de Reeb est nulle dans  $H^1(\mathcal{F})$  car les cobords ne sont pas nécessairement fermés dans les cocycles de  $A^1(\mathcal{F})$ ... C'est l'une des raisons pour laquelle nous avons dualisé la décomposition dans l'énoncé de la proposition. L'autre raison est liée à la localisation que nous discuterons au paragraphe suivant.

Dans [Sc], H. Rosenberg se demande si la classe de Godbillon-Vey d'un feuilletage sans holonomie est nulle. La motivation est évidemment que les exemples les plus simples de tels feuilletages sont donnés par les formes fermées  $\omega$  pour lesquelles  $\alpha$  peut être choisie nulle. Dans tous les cas, un théorème de R. Sacksteder affirme que ces feuilletages sans holonomie sont topologiquement conjugués à des feuilletages définis par des formes fermées. La classe de Godbillon-Vey de ces feuilletages est effectivement nulle comme il fut montré par M. Herman lorsque  $M$  est un tore  $T^3$  feuilleté par plans [He1] puis en général par S. Morita et T. Tsuboi [MT]. En fait, la méthode que nous avons décrite donne une preuve bien agréable de ce résultat.

**Théorème :** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de codimension 1 sans holonomie sur une variété fermée  $M$ . Alors, la classe de Godbillon-Vey de  $\mathcal{F}$  est nulle.*

Esquissons la démonstration. Considérons le pseudo-groupe transverse de  $\mathcal{F}$ . Si  $\mathcal{F}$  était défini par une forme fermée, ce pseudo-groupe préserverait la mesure lisse sur les transversales donnée par intégration de la forme. En général, on ne dispose que d'une mesure positive sur les ouverts, le plus souvent non absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. En convolant cette mesure par des noyaux appropriés, on obtient, de manière bien classique, une suite de mesures lisses qui sont de plus en plus invariantes par le pseudo-groupe. En d'autres termes, on peut ainsi définir  $\mathcal{F}$  par une suite de formes  $\omega_n$  telles que  $d\omega_n = \omega_n \wedge \alpha_n$  et  $\alpha_n$  tend vers 0 uniformément dans la topologie  $C^0$ . Nous venons de voir que ceci entraîne l'annulation de la classe de Godbillon-Vey. Insistons encore sur le fait que, le plus souvent, le feuilletage ne peut pas être défini par une forme fermée, c'est-à-dire que la classe de Reeb est non nulle dans  $H^1(\mathcal{F})$ .

### 3. Où G. Duminy localise C. Godbillon.

Dans sa forme la plus simple, la localisation que nous voulons discuter ici s'exprime de la façon suivante.

**Théorème :** Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de codimension 1, de classe  $C^\infty$ , transversalement orienté sur une variété  $M$  fermée orientée de dimension 3. Soit  $B \subset M$  un Borélien saturé (i.e. réunion de feuilles). Soit  $\omega$  une 1-forme définissant  $\mathcal{F}$  et  $\alpha$  telle que  $d\omega = \omega \wedge \alpha$ . Alors, l'intégrale

$$\int_B \alpha \wedge d\alpha$$

ne dépend que de  $B$  et  $\mathcal{F}$ . C'est la contribution de  $gv(\mathcal{F})$  sur  $B$ .

Des cas très particuliers de ce théorème avaient déjà été utilisés auparavant, par exemple lorsque  $B$  est une sous-variété à bord  $[N],[Tsy]$ .

La version plus élaborée est la suivante :

**Théorème :** Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de codimension 1, de classe  $C^\infty$ , transversalement orienté, sur une variété fermée orientée  $M$  et  $B \subset M$  un Borélien saturé. Choisissons une forme  $\omega$  qui définit  $\mathcal{F}$  et  $\alpha$  une forme telle que  $d\omega = \omega \wedge \alpha$ . Alors, l'application :

$$G_B : [x] \in H^{n-1}(M, \mathcal{F}) \mapsto \int_B x \wedge \alpha \in \mathbb{R}$$

est bien définie et ne dépend pas des choix de  $\omega$  et  $\alpha$ .

En fait, la démonstration de ce théorème se ramène rapidement au "lemme de Stokes feuilleté" suivant :

**Lemme :** Soit  $y$  une forme de  $A^{n-1}(M, \mathcal{F})$ . Alors :  $\int_B dy = 0$ .

Dans [D1], G. Duminy ne démontre ce type de résultat que lorsque  $B$  est dans la  $\sigma$ -algèbre engendrée par les ouverts saturés. Sa démonstration est simple mais liée à la structure des ouverts saturés en codimension 1. J. Heitsch et S. Hurder ont montré que ce lemme est valable en toutes codimensions et en ont proposé une démonstration très simple, valable pour tous les Boréliens saturés [HH]. Leur démonstration est la suivante: en utilisant une partition de l'unité, on se ramène au cas où  $M$  est  $\mathbb{R}^n$ , feuilleté par les hyperplans  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{*\}$  et où  $y$  est à support compact. Les théorèmes de Stokes et Fubini permettent de conclure.

Une autre façon d'exprimer le théorème de localisation est la suivante. Pour chaque Borélien saturé  $B$ , on dispose d'un élément  $G_B$  du dual de  $H^{n-1}(M, \mathcal{F})$  et on peut donc penser à une mesure  $\sigma$ -additive sur la tribu des Boréliens saturés et à valeurs dans le dual de  $H^{n-1}(M, \mathcal{F})$ . C'est ce que

G. Duminy appelle la mesure de Godbillon. Si l'on veut une véritable mesure à valeurs réelles, on peut supposer  $M$  fermée orientée de dimension 3 et considérer l'intégrale de  $\alpha \wedge d\alpha$  sur  $B$ .

Avant de continuer, faisons tout de suite l'observation élémentaire mais fondamentale suivant laquelle un Borélien saturé de mesure de Lebesgue nulle vérifie évidemment  $G_B = 0$ . La mesure de Godbillon est donc absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Une telle localisation n'a bien sûr d'intérêt que si l'on est capable de calculer  $G_B$  sans avoir à connaître  $\mathcal{F}$  sur  $M$  toute entière mais seulement au voisinage de  $B$ . C'est le rôle du théorème suivant (lemme 2 de [D2] et theorem 2-7 de [HH]).

**Théorème :** *Soit  $U$  un voisinage ouvert du Borélien saturé  $B$ , soit  $\omega$  une 1-forme sur  $U$  définissant la restriction de  $\mathcal{F}$  à  $U$  et  $\alpha$  une 1-forme sur  $U$  telle que  $d\omega = \omega \wedge \alpha$ . On suppose que la restriction de  $\alpha$  aux feuilles de  $\mathcal{F}$  est bornée (par rapport à une métrique riemannienne quelconque sur  $M$ ). Alors  $\alpha$  peut être utilisée pour calculer  $G_B$ , c'est-à-dire que la formule suivante est valable :*

$$G_B([x]) = \int_B x \wedge \alpha.$$

Nous ne décrivons pas la démonstration qui repose sur une généralisation appropriée du lemme de Stokes feuilleté. Ce théorème, d'énoncé technique, est extrêmement puissant. Nous avons vu, par exemple, que l'invariant de Godbillon d'un feuilletage sans holonomie est nul. Ce résultat se localise sur les ouverts saturés. Le théorème précédent permet d'obtenir sans difficulté :

**Corollaire [D2] :** *Si  $U$  est un ouvert saturé sans holonomie, alors  $G_U = 0$ .*

#### 4. L'invariant à du ressort.

Nous avons déjà fait des progrès ! Nous connaissons maintenant beaucoup de feuilletages dont la classe de Godbillon-Vey est nulle. Par exemple, le feuilletage de Reeb est constitué d'une feuille compacte et de deux ouverts connexes saturés sans holonomie. La feuille compacte est de mesure de Lebesgue nulle et ne contribue donc pas à la mesure de Godbillon. Les ouverts saturés sans holonomie n'y contribuent pas non plus ... Plus généralement, on a le résultat suivant :

**Proposition :** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de codimension 1, de classe  $C^\infty$ , sur la variété compacte  $M$ . On suppose qu'il existe un fermé saturé  $F \subset M$  de mesure de Lebesgue nulle tel que les feuilles du complémentaire  $M - F$  sont sans holonomie. Alors, la classe de Godbillon-Vey de  $\mathcal{F}$  est nulle.*

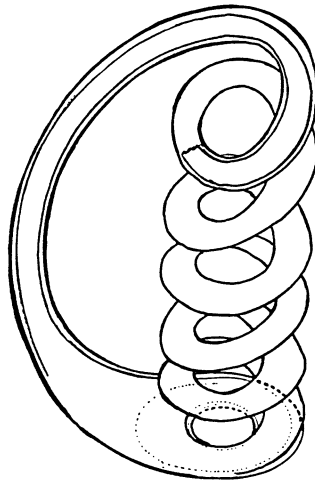
On pourrait aussi déduire sans difficulté le théorème de T. Mizutani, S. Morita et T. Tsuboi [MMT] affirmant que  $GV(\mathcal{F}) = 0$  si  $\mathcal{F}$  est presque sans holonomie, c'est-à-dire si les feuilles non compactes

de  $\mathcal{F}$  n'ont pas d'holonomie. Le théorème de G. Duminy que nous allons décrire va plus loin. Avant de l'énoncer, il nous faut d'abord décrire la notion de "feuille ressort". Ces feuilles sont aux feuilletages de codimension 1 ce que sont les "fers à cheval" de S. Smale aux difféomorphismes des surfaces.

**Définition :** Une feuille  $L$  d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension 1 est appelée ressort s'il existe un lacet  $\tau$  dans  $L$  et un arc  $T$  transverse à  $\mathcal{F}$ , contenant  $\tau(o)$ , tels que :

i) Il existe un point  $p$  de  $L \cap T$ , différent de  $\tau(o)$ , qui appartient au domaine de définition de l'holonomie  $H(\tau)$  de  $\tau$  (définie sur un voisinage de  $\tau(o)$  dans  $T$ ).

ii)  $H(\tau)^n(p)$  tend vers  $\tau(o)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .



La feuille spirale sur elle-même.

La présence d'une feuille ressort implique une certaine complexité dans le comportement qualitatif du feuilletage. On peut, en effet, trouver un arc transverse  $T'$ , paramétré par  $[0,1]$  et deux chemins contenus dans les feuilles et reliant des points de  $T'$ , dont les holonomies  $f_1$  et  $f_2$  envoient  $[0,1]$  sur  $[0,\varepsilon]$  et  $[1-\varepsilon,1]$  respectivement ( $0 < \varepsilon < 1/2$ ). L'holonomie  $f_1$  est celle d'une puissance assez élevée de  $\tau$  et  $f_2$  est le conjugué de  $f_1$  par l'holonomie d'un chemin joignant 0 à 1. Le fait important est alors que les  $2^n$  mots en  $f_1$  et  $f_2$  de longueur  $n$  donnent  $2^n$  difféomorphismes de  $[0,1]$  sur  $2^n$  intervalles disjoints.

Rappelons brièvement la notion de croissance d'une feuille. Soit  $L$  une feuille d'un feuilletage d'une variété compacte  $M$ . Equipons  $M$  d'une métrique riemannienne, choisissons un point  $p$  dans  $L$  et notons  $B_p^L(R)$  la boule de centre  $p$  et de rayon  $R$  dans  $L$ . Le type de croissance du volume de  $B_p^L(R)$  en fonction de  $R$  ne dépend ni du choix de  $p$ , ni de celui de la métrique riemannienne : c'est le *type de croissance* de  $L$ . Pour fixer le vocabulaire, on dit que  $L$  a une croissance exponentielle si :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \inf \frac{1}{R} \text{Log vol } B_p^L(R) > 0$$

et sous-exponentielle si:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{R} \text{Log vol } B_p^L(R) = 0.$$

De manière analogue, on définit la croissance d'une orbite d'un pseudo-groupe de type fini ; c'est la croissance en  $n$  du nombre de points de cette orbite que l'on peut atteindre à partir d'un point base en utilisant  $n$  générateurs. La croissance d'une feuille coïncide avec celle de l'orbite correspondante du pseudo-groupe transverse [PI].

Il résulte de ces considérations que si un feuilletage de codimension 1 possède une feuille ressort, il possède un ouvert de feuilles dont la croissance est exponentielle. Il existe, par contre, des feuilletages sans feuille ressort dont certaines feuilles sont à croissance exponentielle.

Un autre aspect des feuilles ressort est développé dans [GLW]. On y définit une *entropie topologique* pour les feuilletages (en mimant la définition classique pour les homéomorphismes) et on y montre que, en codimension 1, la non nullité de cette entropie est équivalente à l'existence de feuilles ressort.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème d'annulation de Duminy.

**Théorème :** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de codimension 1 sur une variété fermée. Si  $\mathcal{F}$  n'a pas de feuille ressort, la classe de Godbillon-Vey de  $\mathcal{F}$  est nulle.*

Ce théorème a été généralisé par J. Cantwell et L. Conlon lorsque la variété support n'est pas supposée compacte [CC2] (on trouvera dans cet article les détails d'une démonstration que nous ne pouvons qu'esquisser ici).

Le corollaire suivant répond positivement à une question de R. Moussu et F. Pelletier [M-P] et D. Sullivan [Sc].

**Corollaire :** *Si la classe de Godbillon-Vey de  $\mathcal{F}$  est non nulle, il existe un ouvert non vide de feuilles à croissance exponentielle.*

Il nous faut aborder rapidement la *théorie des niveaux* que l'on pourra étudier plus à fond dans [CC1] ou [Hec]. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de codimension 1, de classe  $C^\infty$ , sur une variété compacte  $M$ . Une partie  $\mathcal{M}$  de  $M$  est un *ensemble minimal* de  $\mathcal{F}$  si c'est un fermé non vide, saturé par  $\mathcal{F}$ , et minimal pour ces propriétés. L'existence de tels minimaux est assurée par le lemme de Zorn (l'adhérence de n'importe quelle feuille en contient). Il n'est pas difficile d'établir qu'ils ne peuvent être que de trois types.

- i)  $\mathcal{M}$  est une feuille fermée de  $\mathcal{F}$ .

ii)  $\mathcal{M}$  est la variété  $M$  tout entière (supposée connexe) ; c'est le cas si toutes les feuilles sont denses. On vérifie facilement qu'un tel minimal contient un ressort sauf si  $\mathcal{F}$  est sans holonomie.

iii)  $\mathcal{M}$  est un *minimal exceptionnel* ; sa trace sur une transversale est un ensemble de Cantor (lorsqu'elle est non vide). Un théorème de R. Sacksteder affirme qu'un tel minimal contient une feuille ressort.

En un certain sens, les ensembles minimaux décrivent les endroits où se "localise la dynamique"; leur réunion  $\mathcal{X}(M)$  est le *centre* de  $\mathcal{F}$ . C'est un fermé de  $M$  et les feuilles de ce fermé sont aussi appelées de *niveau 0*.

L'ouvert complémentaire  $M - \mathcal{X}(M)$  n'est certes pas compact ! Il se trouve qu'il existe des minimaux dans  $M - \mathcal{X}(M)$  bien que le lemme de Zorn ne s'applique plus. La réunion de ces minimaux  $\mathcal{X}(M - \mathcal{X}(M))$  est un fermé dans l'ouvert  $M - \mathcal{X}(M)$  ; ses feuilles sont de *niveau 1*. Par récurrence, on définit ainsi une suite de fermés  $M_n$  de  $M$  par :

$$M_0 = \mathcal{X}(M)$$

$$M_{n+1} - M_n = \mathcal{X}(M - M_n).$$

Les feuilles de  $M_n - M_{n-1}$  sont de niveau  $n$ . La réunion  $M^*$  de la suite croissante de fermés  $M_n$  est dense dans  $M$ . Lorsque  $\mathcal{F}$  est analytique réel, il existe un entier  $n$  tel que  $M_n = M$ .

Introduisons maintenant l'hypothèse que  $\mathcal{F}$  n'a pas de feuille ressort. Une extension du théorème de R. Sacksteder permet alors d'affirmer que les minimaux qui apparaissent à chaque niveau fini ne sont pas de type exceptionnel. En d'autres termes, tout minimal de  $M - M_{n-1}$  est une feuille fermée ou une composante connexe de  $M - M_{n-1}$  formée de feuilles sans holonomie.

Nous savons que les ouverts saturés sans holonomie ne contribuent pas à la mesure de Godbillon. On conçoit qu'il s'agit de contrôler le Borélien  $M_\infty = M - M^*$  des feuilles de niveau infini. Dans certains exemples,  $M_\infty$  est de mesure de Lebesgue non nulle...

Pour remédier à cette difficulté technique, G. Duminy introduit la notion d'*épaisseur* d'un ouvert saturé. On se fixe toujours un feuilletage transverse  $\mathcal{N}$  de dimension 1 et  $\omega$  une 1-forme définissant  $\mathcal{F}$  de sorte que les feuilles de  $\mathcal{N}$  sont munies d'une métrique riemannienne. On dit que  $U$  est fin si les longueurs des composantes connexes de l'intersection de  $U$  avec les feuilles de  $\mathcal{N}$  sont bornées et si  $U$  ne contient pas de feuille fermée de  $\mathcal{N}$ . La borne supérieure de ces longueurs est l'épaisseur de  $U$ . Si  $B$  est un Borélien saturé, son épaisseur est la borne inférieure des épaisseurs des ouverts saturés le contenant. G. Duminy montre alors le fait intuitif que les Boréliens de faible épaisseur contribuent peu à la mesure de Godbillon. En particulier, la mesure de Godbillon d'un Borélien d'épaisseur nulle est nulle. C'est par exemple le cas du Borélien  $M_\infty$  des feuilles de niveau infini. Pour terminer la démonstration, G. Duminy montre que  $M$  peut être décomposé en une réunion dénombrable d'ouverts connexes sans holonomie (de niveaux finis), de feuilles propres (de niveaux finis) et d'un Borélien d'épaisseur nulle...

Un inconvénient du théorème que nous venons de décrire est évidemment le fait qu'il ne donne qu'une condition suffisante d'annulation. Un feuilletage transversalement affine par exemple est défini

par une forme  $\omega$  telle que  $d\omega = \omega \wedge \alpha$  et  $d\alpha = 0$ . Dans ce cas, l'invariant de Vey est nul mais l'invariant de Godbillon peut ne pas l'être et le feuilletage peut contenir beaucoup de feuilles ressort.

**Problème :** *Trouver des circonstances géométriques qui garantissent l'annulation de l'invariant de Vey.*

Nous n'avons malheureusement pas la place d'aborder le problème du cobordisme. Nous avons déjà vu que l'invariant de Godbillon-Vey d'un feuilletage cobordant à 0 est nul. Qu'en est-il de la réciproque ? On est encore loin de résoudre ce problème (voir cependant [Ts1],[Ts2],[MMT2] dans lesquels on trouvera d'autres références). Le théorème de ce paragraphe suggère un premier cas à considérer.

**Problème :** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de codimension 1, transversalement orienté, de classe  $C^\infty$ , sur une variété fermée orientée de dimension 3. Si  $\mathcal{F}$  est sans holonomie, est-il cobordant à zéro? Même question si l'on suppose seulement que  $\mathcal{F}$  n'a pas de feuille ressort.*

Nous évoquerons plus bas quelques phénomènes qui se produisent si l'on est moins exigeant sur la différentiabilité requise.

## 5. S. Hurder passe en codimension supérieure.

Comme mentionné dans le préambule, nous ne pourrions pas décrire tous les travaux qui, à la suite de ceux de Duminy, ont généralisé les méthodes en codimension supérieure. La décomposition et la localisation ont été généralisées par J. Heitsch et S. Hurder dans [HH]. Nous allons cependant décrire le résultat fondamental de S. Hurder concernant la classe de Godbillon-Vey généralisée [Hu3].

**Théorème :** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de codimension  $q$ , transversalement orienté, de classe  $C^\infty$ , sur une variété fermée  $M$ . On suppose que presque toutes les feuilles (au sens de la mesure de Lebesgue) sont à croissance sous-exponentielle. Alors, la classe de Godbillon-Vey généralisée est nulle dans  $H^{2q+1}(M)$ .*

Nous ne pouvons pas entrer dans les détails de la preuve mais nous allons en présenter les idées maîtresses.

La définition des espaces  $A^*(\mathcal{F})$  et  $A^*(M, \mathcal{F})$  ne pose aucune difficulté en codimension  $q$  mais, dans un premier temps, on est amené à élargir quelque peu  $H^1(\mathcal{F})$ . Convenons de dire qu'une 1-forme  $\eta$  mesurable, définie sur presque tout vecteur tangent à  $\mathcal{F}$ , est intégrable si:

- i) la restriction de  $\eta$  à presque toute feuille est partout définie et de classe  $C^\infty$ .

ii) pour tout  $x$  dans  $A^{n-1}(M, \mathcal{F})$ , la forme  $x \wedge \eta$ , définie presque partout, est intégrable.

Si  $\eta$  est une telle forme intégrable, fermée le long des feuilles, on montre d'abord que l'intégrale de  $x \wedge \eta$  permet de définir un opérateur de Godbillon :

$$G^\eta : H^{n-1}(M, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Soient  $\eta_1$  et  $\eta_2$  deux telles formes et  $f$  une fonction mesurable, lisse le long de presque toute feuille, et dont la différentielle le long des feuilles vérifie :

$$\eta_1 - \eta_2 = df \quad \text{presque partout.}$$

On montre alors que  $G^{\eta_1} = G^{\eta_2}$ .

Soit  $\omega$  une  $q$ -forme définissant  $\mathcal{F}$  et  $\alpha$  une 1-forme telle que  $d\omega = \omega \wedge \alpha$ . D'après ce qui précède, pour montrer le théorème, il suffit de trouver une suite de fonctions  $f_n$  mesurables et lisses le long des feuilles, telles que  $\alpha - df_n$  converge vers 0 uniformément sur un ensemble de mesure totale.

La situation est analogue au cas des feuilletages de codimension 1 sans holonomie pour lesquels nous avons montré qu'ils peuvent être définis par des formes  $\omega_n$  telles que  $d\omega_n = \omega_n \wedge \alpha_n$  et  $\alpha_n$  uniformément petite (dans la topologie  $C^0$ ). La différence fondamentale est cependant que nous sommes tenus de quitter l'espace des formes différentiables et d'utiliser des formes mesurables. Finalement, nous cherchons donc à trouver des mesures transverses absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, qui sont presque invariantes par holonomie.

Pour illustrer comment on construit ces mesures, nous allons montrer un cas particulier qui contient déjà tous les ingrédients de la preuve générale.

**Proposition :** Soit  $\Gamma$  un groupe de type fini à croissance sous-exponentielle et  $S \subset \Gamma$  un système fini symétrique de générateurs. Soit  $R : \Gamma \rightarrow \text{Diff}_+^\infty(T)$  une représentation de  $\Gamma$  dans le groupe des  $C^\infty$ -difféomorphismes respectant l'orientation d'une variété fermée orientée  $T$ . Alors, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une mesure  $\mu$  sur  $T$ , absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, telle que, si  $\gamma$  est un élément de  $S$  :

$$R(\gamma)_* \mu = j(\gamma) \cdot \mu$$

où  $j(\gamma)$  est une fonction mesurable telle que :

$$\exp(-\epsilon) \leq j(\gamma) \leq \exp(\epsilon) \quad \text{presque partout.}$$

La démonstration est instructive et illustre bien les méthodes employées en codimension supérieure à 1. On note  $|\gamma|$  le nombre minimum de générateurs nécessaires à l'écriture de  $\gamma$  comme produit d'éléments de  $S$ . Soit  $\Omega$  une forme volume sur  $T$  que nous identifierons aussi avec la mesure qu'elle définit. On note  $\gamma.m$  le point  $R(\gamma)(m)$  et  $J(\gamma)$  le Jacobien de  $R(\gamma)$  relatif à  $\Omega$ . Pour  $\delta > 0$ , on pose :

$$T_\delta = \{ m \in T \mid \forall N > 0, \exists \gamma \in \Gamma ; |\gamma| > N \text{ et } \text{Log } J(\gamma)(m) > \delta |\gamma| \} \quad \text{et} \quad T_0 = \bigcup_{\delta > 0} T_\delta.$$

**Lemme :** La mesure de Lebesgue de  $T_0$  est nulle.



Il suffit bien sûr de montrer que la mesure de Lebesgue de  $T_\delta$  est nulle. Fixons un entier  $n$  et posons

$$T_\delta(n) = \{ m \in T \mid \exists \gamma \in \Gamma, |\gamma| = n \text{ et } \text{Log } J(\gamma)(m) > \delta |\gamma| \}$$

Soit  $c(n)$  le nombre d'éléments de  $\Gamma$  de longueur  $n$  par rapport à  $S$  et  $\gamma_{1,n}, \gamma_{2,n} \dots \gamma_{c(n),n}$  une énumération de ces éléments. Par hypothèse,  $c(n)$  a une croissance sous-exponentielle en  $n$ . L'ensemble  $T_\delta(n)$  peut se recouvrir par  $c(n)$  parties  $A_{i,n}$  ( $1 \leq i \leq c(n)$ ) définies par :

$$A_{i,n} = \{ m \in T \mid \text{Log } J(\gamma_{i,n})(m) > \delta n \}.$$

Comme le Jacobien de  $R(\gamma_{i,n})$  est minoré par  $\exp(\delta n)$  sur  $A_{i,n}$  et que  $R(\gamma_{i,n})(A_{i,n}) \subset T$ , on a évidemment :

$$\Omega(T_\delta(n)) \leq c(n) \exp(-\delta n) \Omega(T).$$

Cette expression tend exponentiellement vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. La conclusion du lemme résulte de ce que, pour tout  $n_0$ , on a :  $T_\delta \subset \bigcup_{n \geq n_0} T_\delta(n)$ .

Une fois ce lemme démontré, la mesure  $\mu$  promise par la proposition se construit par une méthode de moyennisation, développée dans un contexte beaucoup plus général dans [HK1]. Fixons  $\varepsilon > 0$  et posons :

$$f_\varepsilon(m) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(-\varepsilon |\gamma|) J(\gamma)(m)$$

Il résulte facilement du lemme que  $f_\varepsilon(m)$  existe presque partout et définit une fonction mesurable. Evaluons  $f_\varepsilon$  au point  $\gamma_0.m$  avec  $\gamma_0 \in S$ , tenons compte de la formule

$$J(\gamma)(\gamma_0.m).J(\gamma_0)(m) = J(\gamma\gamma_0)(m)$$

et du fait que  $|\gamma\gamma_0|$  et  $|\gamma|$  diffèrent au plus de 1. On trouve :

$$\exp(-\varepsilon) f_\varepsilon(m) \leq J(\gamma_0)(m).f_\varepsilon(\gamma_0.m) \leq \exp(\varepsilon)f_\varepsilon(m).$$

Ceci signifie précisément que la mesure  $\mu$  dont la densité par rapport à  $\Omega$  est  $f_\varepsilon$  vérifie les conditions requises par la proposition ...

Pour terminer ce paragraphe, mentionnons un problème soulevé dans [GLW]. Une réponse positive compléterait agréablement le théorème de S. Hurder.

**Problème :** *La classe de Godbillon-Vey généralisée d'un feuilletage d'entropie nulle est-elle nulle ?*

## 6. L'invariant mesure les poids.

Le théorème que nous allons décrire est dû à A. Connes [Co] et tire son inspiration de la localisation de l'invariant. Avant de l'énoncer, il nous faut rappeler un peu de vocabulaire.

Pour simplifier, nous allons nous limiter aux feuilletages définis par suspension. Pour cela, considérons une variété  $V$  et une représentation  $R$  de son groupe fondamental  $\pi_1(V)$  dans le groupe  $\text{Diff}_+^\infty(T)$  des  $C^\infty$ -difféomorphismes respectant l'orientation d'une variété orientée  $T$ . Soit  $\tilde{V}$  le revêtement universel de  $V$ . Le groupe  $\pi_1(V)$  opère alors diagonalement sur  $\tilde{V} \times T$ . Par passage au quotient, on obtient une variété  $M$  qui est un fibré de base  $V$  et de fibre  $T$ . Cette variété est munie d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  transverse à la fibration et appelé *suspension* de  $R$ . Si on relève horizontalement dans  $\mathcal{F}$  un lacet  $\tau$  de  $V$ , la monodromie obtenue sur  $T$  n'est autre que  $R([\tau])$ . Toute la structure de  $\mathcal{F}$  est capturée par  $R$ . Le pseudo-groupe transverse de  $\mathcal{F}$  est en fait équivalent à un groupe. Dans de nombreux cas, il est bien agréable de se limiter d'abord à ce type de feuilletage. Le passage au cas général ne soulève, le plus souvent, que des difficultés techniques ...

Supposons que l'on dispose d'un cocycle singulier  $c$  défini sur les  $n$ -simplexes différentiables de  $T$  et invariant par l'action  $R$  de  $\pi_1(V)$  sur  $T$ . On définit alors un cocycle naturel sur  $\tilde{V} \times T$  invariant par ce même groupe et on obtient ainsi une classe de cohomologie sur  $M$ . C'est une façon d'aborder la théorie des classes caractéristiques secondaires comme nous le verrons d'ici peu sur un exemple.

Nous nous fixons donc une représentation  $R$  de  $\pi_1(V)$  dans  $\text{Diff}_+^\infty(T)$ . On dit que  $R$  est *ergodique* si tout Borélien  $B$  de  $T$  invariant par l'action est tel que  $B$  ou son complémentaire est de mesure de Lebesgue nulle.

Lorsque  $R$  n'est pas ergodique, il est naturel de considérer la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{B}$  des Boréliens de  $T$  invariants par l'action. Il se trouve qu'il existe un espace Borélien standard  $X$  (i.e. isomorphe à un Borélien de  $[0,1]$  muni de la  $\sigma$ -algèbre de ses Boréliens) et une projection mesurable  $\pi : T \rightarrow X$  ayant les propriétés suivantes. Tout d'abord,  $\pi$  est constante le long de presque toute orbite de  $R$ . D'autre part, la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{B}$  coïncide, aux Boréliens de mesure de Lebesgue nulle près, avec l'image réciproque par  $\pi$  de la  $\sigma$ -algèbre des Boréliens de  $X$ . Cet espace  $X$  muni de la projection  $\pi$  est essentiellement unique : c'est l'*espace des composantes ergodiques* de l'action. Il n'est pas muni de mesure naturelle mais d'une classe de mesure : les ensembles de "mesure de Lebesgue" nulle ont un sens dans  $X$ . Les fibres  $\pi^{-1}(x)$ , bien définies pour presque tout  $x$ , sont les *composantes ergodiques* de  $R$ .

La construction suivante s'impose ... Soit  $\Omega$  une forme de volume sur  $T$  et notons  $J(\gamma)$  le Jacobien de  $R(\gamma)$  relatif à  $\Omega$ . On dispose maintenant d'une action  $R_1$  de  $\pi_1(V)$  sur  $T \times \mathbb{R}$ , définie par :

$$R_1(\gamma)(m, t) = (R(\gamma)(m), t + \text{Log}J(\gamma)(m)).$$

Observons que  $R_1$  commute avec le flot  $\phi_s$  sur  $T \times \mathbb{R}$  défini par :

$$\phi_s(m, t) = (m, t+s).$$

Même si  $R$  est ergodique,  $R_1$  peut ne pas l'être. Le flot  $\phi_s$  induit un flot mesurable, encore noté  $\phi_s$ , sur l'espace  $X_1$  des composantes ergodiques de  $R_1$ . Ce flot est appelé le *flot des poids*. Il est immédiat qu'à isomorphisme près, il ne dépend pas du choix de  $\Omega$ .

Pour être précis, il nous faudrait l'appeler "flot des poids de la relation d'équivalence sur  $T$  associée à la représentation  $R$ ". La théorie des algèbres de Von Neumann permet en effet de définir un flot des poids associé à  $R$  qui ne coïncide avec celui que nous avons défini que si l'action de  $\pi_1(V)$  sur  $T$  est essentiellement libre, c'est-à-dire libre sur un Borélien invariant de mesure totale.

Voyons rapidement quelques exemples dans lesquels nous supposons toujours  $R$  ergodique (et  $T$  de dimension non nulle !)

Si  $R$  préserve une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\Omega$ , la densité de cette mesure permet de construire une section  $T \rightarrow T \times \mathbb{R}$  équivariante, de sorte que  $X_1$  s'identifie à  $\mathbb{R}$  et le flot des poids opère par translations de  $\mathbb{R}$ . On dit que (la relation d'équivalence engendrée par)  $R$  est de type II.

Supposons que  $T = \mathbb{R}$  et que l'image de  $R$  soit formée des applications affines  $x \mapsto 2^n x + \frac{p}{2^q}$  avec  $n, p, q$  entiers relatifs. Il est clair que  $R$  est ergodique mais que  $R_1$  ne l'est pas. Les Jacobiens de ces applications affines sont en effet des puissances entières de 2. Il est alors facile de s'assurer que  $X_1 = \mathbb{R}/(\text{Log } 2)\mathbb{Z}$  et que le flot des poids  $\phi_s$  opère par rotations d'amplitude  $s$  sur ce "cercle de longueur  $\text{Log } 2$ ". C'est un exemple de relation d'équivalence de type III<sub>2</sub>. On construirait de même des exemples de type III <sub>$\lambda$</sub>  avec  $\lambda > 1$ .

Si  $R_1$  est ergodique,  $X_1$  se réduit à un point et le flot des poids opère trivialement ; on dit que (la relation engendrée par)  $R$  est de type III<sub>1</sub>.

Il ne faudrait pas croire que ces cas épuisent toutes les possibilités. Le flot des poids peut être bien plus compliqué. Si  $R$  est ergodique et si  $\phi_s$  n'est pas de l'un des types précédents, on dit que (la relation)  $R$  est de type III<sub>0</sub>.

Le lecteur s'étonnera que nous ne décrivions pas le type I ... C'est que, pour simplifier, nous nous sommes limités au cas où  $R$  est ergodique et  $T$  de dimension non nulle. Dans le cas général, la classification en types s'appliquera aux composantes ergodiques de  $R$  et le type I concernera celles d'entre elles qui sont finies ou dénombrables.

Lorsque le feuilletage n'est pas défini par suspension, toutes ces notions s'étendent sans difficulté ; on remplace  $T$  par une transversale qui coupe toutes les feuilles et  $\pi_1(V)$  par le pseudo-groupe transverse. Il n'est pas difficile de s'assurer que le flot des poids ainsi obtenu ne dépend que du feuilletage et pas du choix de la transversale.

Nous pouvons enfin énoncer le théorème de A. Connes. Nous l'énonçons en codimension 1 bien que des généralisations soient faciles en codimension supérieure.

**Théorème :** Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de codimension 1, de classe  $C^\infty$ , transversalement orienté. On suppose que la classe de Godbillon-Vey de  $\mathcal{F}$  est non nulle. Alors, le flot des poids de  $\mathcal{F}$  préserve une mesure finie non triviale.

Remarquons que si  $\mathcal{F}$  est ergodique de type II, son flot des poids est formé des translations de  $\mathbb{R}$  qui ne préservent aucune mesure finie non triviale (absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue). Comme cas extrêmement particulier du théorème, on obtient ainsi un résultat de S.Hurder :

**Corollaire :** Si  $\mathcal{F}$  est ergodique de type II, alors  $GV(\mathcal{F}) = 0$ .

Avant d'aborder la démonstration du théorème (dans le cas d'une suspension), nous allons faire une rapide incursion dans la théorie de Gelfand-Fuchs. En passant, nous obtiendrons une autre vision de la classe de Godbillon-Vey.

Si  $k$  est un entier naturel, nous noterons  $J_k(S^1)$  l'espace des  $k$ -jets en 0 de difféomorphismes locaux  $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  préservant l'orientation. Un tel jet est déterminé par son développement de Taylor

$$f(t) = y + ty_1 + t^2y_2 + \dots + t^ky_k + o(t^k) \quad y_1 > 0$$

Le groupe  $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$  opère naturellement sur  $J_k(S^1)$  par composition au but et on a des projections compatibles avec ces actions :

$$p_k : J_k(S^1) \rightarrow J_{k-1}(S^1).$$

Le lemme suivant est un exemple typique de la méthode de Gelfand-Fuchs [GF], [B2].

**Lemme :** La 3-forme fermée  $\xi = -\frac{2}{y_1^3} dy dy_1 dy_2$  sur  $J_2(S^1)$  est invariante par l'action de  $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$ .

La démonstration n'est qu'un petit calcul. Si  $F$  est un difféomorphisme du cercle respectant l'orientation, on a :

$$F(y + ty_1 + t^2y_2) = F(y) + ty_1F'(y) + t^2(y_2F'(y) + \frac{y_1^2}{2} F''(y)) + o(t^2).$$

On a ainsi explicitement les formules décrivant l'action de  $F$  sur  $J_2(S^1)$ . On vérifie alors l'invariance de  $\xi \dots$

Considérons encore une variété  $V$  et une représentation  $R$  de  $\pi_1(V)$  dans  $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$ . On en déduit une famille de représentations  $R_k$  de  $\pi_1(V)$  dans  $\text{Diff}_+^\infty(J_k(S^1))$  qui, par suspension, donnent des variétés  $M_k$  fibrées au-dessus de  $V$ , avec des fibres difféomorphes à  $J_k(S^1)$ . On construit sans peine des projections  $p_k$  naturelles de  $M_k$  sur  $M_{k-1}$  ( $k \geq 1$ ) qui sont des équivalences d'homotopie.

La 3-forme  $\xi$  définit un 3-cocycle sur les 3-chaînes singulières différentiables de  $J_2(S^1)$ , invariant par  $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$ . Nous avons déjà observé que cela produit une classe de cohomologie  $c$  dans  $H^3(M_2)$ , isomorphe à  $H^3(M_0)$  via  $(p_{10} p_2)^*$ .

**Lemme :** *La classe  $c$  de  $H^3(M_0)$  ainsi construite coïncide avec la classe de Godbillon-Vey de la suspension de  $R$ .*

La démonstration est encore un petit calcul. L'image réciproque par  $p_1 \circ p_2$  du feuilletage obtenu par suspension de  $R$  est définie par la 1-forme  $\omega = \frac{dy}{y_1}$  qui est  $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$ -invariante. En ne calculant qu'avec des formes invariantes par  $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$ , on trouve :

$$\begin{aligned} d\omega &= \omega \wedge \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{dy_1}{y_1} - 2 \frac{y_2}{y_1^2} dy \\ \alpha \wedge d\alpha &= \xi. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème de A. Connes. Notons  $\mathcal{A}_k$  la  $\sigma$ -algèbre des Boréliens de  $J_k(S^1)$  invariants par  $R_k$ . La  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{A}_1$  est précisément celle qui a servi à définir le flot des poids : elle s'identifie (aux ensembles de mesure nulle près) à la  $\sigma$ -algèbre des Boréliens de l'espace des composantes ergodiques de  $R_1$ . Dans cette identification, le flot des poids  $\phi_s$  opère via l'action sur  $J_1(S^1)$ :

$$\phi_s(y, y_1) = (y, \exp(s)y_1).$$

Considérons un Borélien  $B$  de  $\mathcal{A}_2$ . La 3-forme mesurable obtenue en multipliant  $\xi$  par la fonction indicatrice de  $B$  est évidemment invariante par  $R_2$ . On obtient donc un 3-cocycle singulier (défini sur les 3-chaînes singulières différentiables) invariant par  $R_2$ , et, par conséquent, une classe de cohomologie  $\mu(B)$  de  $H^3(M_2) = H^3(M_0)$ . De la sorte, on obtient une mesure  $\sigma$ -additive sur  $\mathcal{A}_2$  à valeurs dans  $H^3(M_0)$ , absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et dont la masse totale est la classe de Godbillon-Vey de la suspension de  $R$ .

Puisque  $p_2^{-1}(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{A}_2$ , on obtient une mesure  $\sigma$ -additive sur  $\mathcal{A}_1$  à valeurs dans  $H^3(M_0)$  dont la masse totale est la classe de Godbillon-Vey. Etant donnée la naturalité de la construction, il est immédiat de vérifier que cette mesure est invariante par le flot des poids.

Pour terminer, on suppose que la classe de Godbillon-Vey est non nulle et on choisit une forme linéaire sur  $H^3(M_0)$ , non nulle sur cette classe. En composant la mesure que nous venons de trouver avec cette forme linéaire, on obtient bien une mesure finie sur  $\mathcal{A}_1$ , non triviale, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et invariante par le flot des poids.

**Problème:** *Dans tous les exemples connus de feuilletages ergodiques  $\mathcal{F}$  pour lesquels  $GV(\mathcal{F}) \neq 0$ , le flot des poids est en fait trivial (ou encore  $\mathcal{F}$  est de type III<sub>1</sub>). Est-ce un phénomène général ?*

### 7. Où l'on s'interroge sur le domaine de définition de l'invariant.

Est-il possible de donner une interprétation qualitative de la classe de Godbillon-Vey ? Le théorème de Duminy donne une indication positive : la présence d'une feuille ressort est certainement un phénomène qualitatif, invariant par homéomorphisme.

**Problème :** Soient  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  deux feuilletages de codimension 1 de classe  $C^\infty$ , sur une variété fermée  $M$ . Soit  $h$  un homéomorphisme de  $M$  envoyant les feuilles de  $\mathcal{F}_1$  sur celles de  $\mathcal{F}_2$ . Peut-on affirmer que  $h^*(GV(\mathcal{F}_2)) = GV(\mathcal{F}_1)$  ?

Un problème plus faible mais certainement plus raisonnable, consiste à se poser la même question lorsque  $h$  est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue.

Pour résoudre le problème général, il suffirait évidemment d'étendre la définition de la classe de Godbillon-Vey aux feuilletages de classe  $C^0$ . C'est impossible. J. Mather et W. Thurston ([Ma] et [Th2]) montrent en effet que tout feuilletage de codimension 1, transversalement orienté, de classe  $C^0$ , sur une variété fermée orientée de dimension 3 est le bord d'un certain feuilletage de codimension 1, transversalement orienté, de classe  $C^0$ , sur une variété compacte à bord de dimension 4. En fait, le classifiant des structures de Haefliger transversalement orientées de codimension 1 et de classe  $C^0$  est contractile et ne peut donc pas porter de classe universelle non triviale ...

Il ne faut pas cependant en déduire que la classe de Godbillon-Vey n'est pas un invariant topologique. En remplaçant  $C^0$  par  $C^1$ , on a en effet les deux théorèmes suivants :

**Théorème [Ts3-4] :** *Tout feuilletage de classe  $C^1$ , de codimension 1, transversalement orienté, sur une variété fermée de dimension 3 est le bord d'un feuilletage de classe  $C^1$  et de codimension 1 sur une variété compacte de dimension 4.*

En particulier, la classe de Godbillon-Vey ne peut pas être définie pour les feuilletages de classe  $C^1$  (le classifiant est en fait contractile...)

**Théorème [Ra] :** *Si  $h$  est un  $C^1$ -difféomorphisme d'une variété  $M$  envoyant le feuilletage  $\mathcal{F}_1$ , de classe  $C^\infty$ , sur le feuilletage  $\mathcal{F}_2$ , lui aussi de classe  $C^\infty$ , alors  $h^*GV(\mathcal{F}_2) = GV(\mathcal{F}_1)$  dans  $H^3(M)$ .*

Pour modérer quelque peu ce théorème, il est montré dans [GT] que si  $M$  est compacte, l'hypothèse entraîne souvent que  $h$  est en fait (transversalement) de classe  $C^\infty$ .

Pour aborder la question de l'invariance topologique, il est donc fondamental de comprendre le "domaine de définition naturel" de GV.

Dans un premier temps, il est clair que  $C^\infty$  est bien trop exigeant. Si  $\mathcal{F}$  est de classe  $C^2$  la forme considérée  $\alpha \wedge d\alpha$  est de classe  $C^0$ , mais elle est fermée au sens des courants et tous les calculs que

nous avons faits permettent de définir  $GV(\mathcal{F})$  sans difficulté. La classe de Godbillon-Vey est donc définie pour les feuilletages de classe  $C^2$  et invariante par  $C^2$ -difféomorphismes.

Nous allons évoquer diverses extensions du "domaine de GV " en nous limitant, une fois de plus, aux suspensions.

Soit  $\Sigma$  une surface fermée orientée et  $R : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{Diff}_+^\infty(S^1)$  une représentation. Comment calculer l'invariant de Godbillon-Vey du feuilletage  $\mathcal{F}$ , suspension de  $R$ , sur un fibré en cercles au-dessus de  $\Sigma$  ? La réponse est la suivante. Il existe une classe de cohomologie, encore appelée classe de Godbillon-Vey (et notée  $GV$ ) dans le *second* groupe de cohomologie de  $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$  considéré comme groupe discret. L'invariant de Godbillon-Vey de  $\mathcal{F}$  s'obtient alors en évaluant  $R^*GV$  sur la classe fondamentale de  $\Sigma$ . Un 2-cocycle d'Eilenberg-McLane représentant  $GV$  a été donné par R. Bott et W. Thurston. Si  $f$  et  $g$  sont deux éléments de  $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$ , on pose :

$$GV(f,g) = \frac{1}{2} \int_{S^1} \begin{vmatrix} \text{Log} f'(x) & \text{Log}(\text{gof})'(x) \\ (\text{Log} f')'(x) & (\text{Log}(\text{gof}))'(x) \end{vmatrix} dx$$

On trouvera une démonstration de cette formule dans [B3]. Le lecteur ne s'effraiera pas. La première ligne correspond à  $\alpha$  dont les intégrales sont, rappelons le, les logarithmes des dérivées des holonomies. La seconde ligne correspond évidemment à  $d\alpha$ .

Lorsque  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^2$ , l'intégrale donnant  $GV(f,g)$  se définit sans problème ... La question précise est de comprendre pour quelles classes d'homéomorphismes une telle intégrale peut avoir un sens.

Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^2$  par morceaux, le déterminant considéré est continu par morceaux et donc intégrable. C'est la base de la généralisation de Fuchs, Gabrielov et Gelfand [FGG] : la classe de Godbillon-Vey peut se définir naturellement pour les feuilletages (transversalement) de classe  $C^2$  par morceaux. Notons en passant que  $GV(f,g)$  est nul si  $f$  et  $g$  sont affines par morceaux car alors  $(\text{Log} f)'$  et  $(\text{Log}(\text{gof}))'$  sont nuls presque partout.

Dans ce contexte étendu, on montre dans [G1] que l'invariant de Godbillon-Vey n'est pas un invariant topologique. Nous décrivons rapidement cet exemple, lié une fois de plus à l'exemple d'Anosov-Roussarie.

Fixons-nous une surface fermée orientée  $\Sigma$  de genre supérieur ou égal à deux et choisissons sur  $\Sigma$  une métrique riemannienne à courbure  $-1$ . Le groupe fondamental  $\pi_1(\Sigma)$  est alors identifié à un sous-groupe du groupe  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  des isométries du disque de Poincaré. De cette manière,  $\pi_1(\Sigma)$  opère (projectivement) sur le cercle à l'infini du disque de Poincaré. Il est facile de se convaincre que le

feuilletage obtenu par suspension est l'exemple d'Anosov-Roussarie dont l'invariant de Godbillon-Vey est non nul.

Signalons en passant que si l'on change de métrique à courbure -1 sur  $\Sigma$ , le nouveau feuilletage est topologiquement conjugué à l'ancien mais l'invariant de Godbillon-Vey est le même ! Un calcul élémentaire montre en effet que cet invariant ne dépend que de l'aire de  $\Sigma$  qui, elle-même, ne dépend pas du choix de la métrique à courbure -1, d'après le théorème de Gauss-Bonnet ...

Cependant, on a le résultat suivant :

**Théorème [G1] :** Soit  $R : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \subset \text{Diff}_+^\infty(S^1)$  la représentation correspondant au choix d'une métrique à courbure -1 sur  $\Sigma$ . Alors, il existe un homéomorphisme  $h$  du cercle tel que  $h \circ R(\pi_1(\Sigma)) \circ h^{-1}$  soit formé d'homéomorphismes affines par morceaux du cercle.

**Corollaire :** Le feuilletage d'Anosov-Roussarie est topologiquement conjugué à un feuilletage transversalement affine par morceaux. En particulier, l'invariant de Godbillon-Vey, étendu aux feuilletages  $C^2$  par morceaux, n'est pas un invariant topologique.

En fait, cette extension de l'invariant aux feuilletages de classe  $C^2$  par morceaux peut encore être étendue. Soit  $P$  le groupe des homéomorphismes du cercle, respectant l'orientation, tels que  $\text{Log} f'$  existe presque partout et coïncide avec une fonction à variation bornée. Les motivations pour considérer ce groupe sont importantes ; disons simplement qu'il s'agit de la "bonne" classe dans laquelle le théorème de Denjoy est vrai [He2]. Si  $f$  et  $g$  sont dans  $P$ , alors  $(\text{Log} f)'$  et  $(\text{Log}(g \circ f))'$  existent presque partout et l'intégrale définissant  $\text{GV}(f, g)$  a un sens clair. C'est l'extension de G. Duminy et V. Sergiescu [DS].

Une toute autre extension est proposée par S. Hurder et A. Katok dans [HK2]. Pour l'expliquer, observons avec W. Thurston, que  $\text{GV}(f, g)$  est l'aire algébrique entourée par la courbe  $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par :

$$\gamma(x) = ( \text{Log} f'(x) , \text{Log}(g \circ f)'(x) ).$$

La question naturelle est donc la suivante. Dans quelles conditions de régularité sur une courbe  $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  peut-on définir l'aire algébrique entourée ?

Une réponse est donnée dans [HK2] : il suffit que  $\gamma$  soit Hölderienne d'exposant  $\epsilon > 1/2$ . L'idée est simple. Pour chaque entier  $n$ , choisissons  $n$  points  $x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^n$  sur le cercle, situés dans cet ordre cyclique. On aimerait définir l'aire algébrique entourée par  $\gamma$  comme la limite de l'aire algébrique du polygone croisé de sommets  $\gamma(x_n^1), \dots, \gamma(x_n^n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini et que la maille du découpage tend vers 0. Cette limite n'existe malheureusement pas toujours si  $\gamma$  n'est supposée que Hölderienne. Ceci est dû au fait que les intervalles  $x_n^{i+1} - x_n^i$ , bien que petits, peuvent être disproportionnés. On adopte alors la méthode suivante. Si  $\Delta \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est un ensemble fini, on note  $\Delta_1$  l'ensemble de cardinal



double obtenu en ajoutant un point au milieu de chaque composante de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} - \Delta$ . Par récurrence, on obtient un ensemble  $\Delta_n$  ayant  $2^n$  card  $\Delta$  éléments. Les points de  $\gamma(\Delta_n)$  donnent alors un polygone (croisé)  $P_n$ . Un exercice facile montre que, si  $\gamma$  est Hölderienne d'exposant  $\varepsilon > 1/2$ , la suite des aires des polygones  $P_n$  est de Cauchy. La limite de ces aires ne dépend pas du choix de  $\Delta$ ; c'est par définition l'aire entourée par  $\gamma$ .

En partant de ce genre d'idées, A. Katok et S. Hurder établissent que la classe de Godbillon-Vey peut se définir naturellement pour un feuilletage (transversalement) de classe  $C^{1+\varepsilon}$  ( $\varepsilon > 1/2$ ) (i.e. de classe  $C^1$  et à dérivée Hölderienne d'exposant  $\varepsilon$ ). Notons que cette nouvelle extension est d'une nature différente de la précédente : un homéomorphisme de classe  $C^2$  par morceaux n'est pas toujours de classe  $C^1$  et, a fortiori, de classe  $C^{1+\varepsilon}$ .

Les motivations proviennent du fait suivant. Soit  $\Sigma$  une surface fermée orientée et  $m$  une métrique riemannienne de classe  $C^\infty$  à courbure négative *variable*. Le revêtement universel  $\tilde{\Sigma}$  de  $\Sigma$  est un disque topologique qui se compactifie naturellement par adjonction d'un cercle à l'infini  $S_\infty^1$ . Si  $x$  est dans  $\tilde{\Sigma}$ , en observant  $S_\infty^1$  à partir de  $x$ , on établit un homéomorphisme  $h_x$  entre  $S_\infty^1$  et le cercle unité  $S_x^1$  dans  $T_x\tilde{\Sigma}$ . Les homéomorphismes de comparaison  $h_y \circ h_x^{-1}$  ne sont tous de classe  $C^2$  que si la courbure est constante ([HK2] et [G2]). Cependant S. Hurder et A. Katok montrent le résultat suivant [HK2]:

**Théorème :** *Si  $m$  est à courbure négative, les homéomorphismes de comparaison  $h_y \circ h_x^{-1}$  sont de classe  $C^{2-\varepsilon}$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .*

En particulier, pour chaque métrique  $m$ , on obtient une représentation  $R(m)$  de  $\pi_1(\Sigma)$  dans le groupe  $\text{Diff}_+^{2-\varepsilon}(S^1)$  pour lequel l'invariant de Godbillon-Vey a été défini ( $\varepsilon < 1/2$ ). Il est bien connu que toutes ces actions sont topologiquement conjuguées entre elles. Les exemples de S. Hurder et A. Katok sont les suivants [HK2]:

**Théorème :** *Soit  $m$  une métrique riemannienne sur  $\Sigma$  à courbure négative non constante et  $m_0$  une métrique à courbure négative constante. Alors, les représentations  $R(m)$  et  $R(m_0)$  de  $\pi_1(\Sigma)$  dans  $\text{Diff}_+^{2-\varepsilon}(S^1)$  sont topologiquement conjuguées mais ont des invariants de Godbillon-Vey différents.*

Une version préliminaire de ce théorème est due à S. Mitsumatsu [Mi].

Que faut-il en conclure ? Pour produire des contre-exemples à l'invariance topologique de la classe de Godbillon-Vey, il nous a fallu sortir largement du domaine initial des feuilletages de classe  $C^\infty$ . L'existence de ces contre-exemples est-elle liée aux "singularités" que nous avons introduites ou, au contraire, est-elle un indice que la classe de Godbillon-Vey n'est pas un invariant topologique pour les feuilletages de classe  $C^\infty$  ?

**Bibliographie**

- [B1] R. BOTT, *Lectures on characteristic classes and foliations*, Lect. Notes in Math. 279 (1972), Springer-Verlag Berlin.
- [B2] R. BOTT, *On characteristic classes in the framework of Gelfand-Fuks cohomology*. Soc. Math. France, Astérisque 32-33 (1976) 113-139.
- [B3] R. BOTT, *On some formulas for the characteristic classes of group actions*, Lect. Notes in Math. 652 (1978), 25-61, Springer Verlag, Berlin.
- [CC1] J. CANTWELL and L. CONLON, *Poincaré-Bendixson theory for leaves of codimension one*, Trans. Amer. Math. Soc. 265 (1981) 181-209.
- [CC2] J. CANTWELL and L. CONLON, *The dynamics of open foliated manifolds and a vanishing theorem for the Godbillon-Vey class*, Advances in Math. 53 (1984), 1-27.
- [Con1] L. CONLON, *Foliations and exotic classes*, Lecture Notes.
- [Co] A. CONNES, *Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation.*, Geometric methods in operator algebras, Proceed.U.S.-Japan Seminar, Kyoto , editors H. Araki , E.G. Effros, 1986.
- [D1] G. DUMINY, *L'invariant de Godbillon-Vey d'un feuilletage se localise sur les feuilles ressort*, preprint Lille 1982.
- [D2] G. DUMINY, *Sur les cycles feuilletés de codimension un*, manuscrit 1982.
- [DS] G. DUMINY et V. SERGIESCU, *Sur la nullité de l'invariant de Godbillon-Vey*, C.R. Acad. Sci. Paris A 292 (1981), 821-824.
- [EK] A. EL KACIMI, *Sur la cohomologie feuilletée*, Compositio Math. 49 (1983), 195-215.
- [F] D.B. FUCHS, *Cohomology of infinite dimensional Lie algebras and characteristic classes of foliations*, J. Soviet Math., 11 (1979) 922-980.
- [FGG] D.B. FUCHS, A.M. GABRIELOV, I.M. GELFAND, *The Gauss-Bonnet theorem and the Atiyah-Patodi-Singer functionals for the characteristic classes of foliations*, Topology 15 (1976) 165-188.
- [GF] I.M. GELFAND, D.B. FUCHS, *Cohomologies of the Lie algebra of vector fields of the circle*, Funct. Anal. 2 (1968) 342-343.
- [G1] E. GHYS, *Sur l'invariance topologique de la classe de Godbillon-Vey*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 37 (1987), 59-76.
- [G2] E. GHYS, *Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 20 (1987) 251-270.
- [GLW] E. GHYS, R. LANGEVIN et P. WALCZAK, *Entropie géométrique des feuilletages*, Acta Mathematica 160 (1988), 105-142.
- [GT] E. GHYS et T. TSUBOI, *Différentiabilité des conjugaisons entre systèmes dynamiques de dimension 1*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 38, 1 (1988), p. 215-244.

- [GV] C. GODBILLON et J. VEY, *Un invariant des feuilletages de codimension 1*, C.R.Acad. Sc. Paris, 273 (1971) 92-95.
- [Hec] G. HECTOR, *Architecture des feuilletages de classe  $C^2$* , Astérisque 107-108 (1983) 243-258.
- [HH] J. HEITSCH and S. HURDER, *Secondary classes, Weil measures and the geometry of foliations*, J. Differential Geometry 20 (1984) 291-309.
- [He1] M. HERMAN, *The Godbillon-Vey invariant of foliations by planes of  $T^3$* , Lecture Notes in Mathematics, Vol. 597, Springer Berlin, 1977, 294-307.
- [He2] M. HERMAN, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Publ. I.H.E.S. 49 (1979) 5-223.
- [Hu1] S. HURDER, *Global invariants for measured foliations*, Trans. Amer. Math. Soc. 280 (1983), 367-391.
- [Hu2] S. HURDER, *Foliation dynamics and leaf invariants*, Comment. Math. Helv. 60 (1985) 319-335.
- [Hu3] S. HURDER, *The Godbillon measure of amenable foliations*, J. Differential Geom. 23 (1986), 347-365.
- [HK1] S. HURDER and A. KATOK, *Ergodic theory and Weil measures for foliations*, Ann. of Math. 126 (1987), 221-275.
- [HK2] S. HURDER and A. KATOK, *Differentiability, rigidity and Godbillon-Vey classes for Anosov flows*, preprint I.H.E.S. 1987.
- [L] H.B. LAWSON, *Lectures on the quantitative theory of foliations*, Nat. Sc. Foundation Regional Conf. Saint Louis 1985, Amer. Math. Soc. 1977.
- [Ma] J.N. MATHER, *Simplicity of certain groups of diffeomorphisms*, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974) 271-273.
- [Mi] Y. MITSUMATSU, *A relation between the topological invariance of the Godbillon-Vey invariant and the differentiability of Anosov foliations*, Advanced Studies in Pure Mathematics 5, University of Tokyo.
- [MMT] T. MIZUTANI, S. MORITA and T. TSUBOI, *The Godbillon-Vey classes of codimension one foliations which are almost without holonomy*, Ann. of Math. 113 (1981) 515-527.
- [MMT2] T. MIZUTANI, S. MORITA and T. TSUBOI, *On the cobordism classes of codimension one foliations which are almost without holonomy*, Topology 22 (1983) 325-343.
- [MT] S. MORITA and T. TSUBOI, *The Godbillon-Vey class of codimension one foliations without holonomy*, Topology 19 (1980) 43-49.
- [MP] R. MOUSSU et F. PELLETIER, *Sur le théorème de Poincaré-Bendixson*, Ann. Inst. Fourier Grenoble 14(1974),131-148.
- [N] T. NISHIMORI, *SRH-decompositions of codimension one foliations and the Godbillon-Vey class*, Tohoku Math. J. 32 (1980) 9-34.
- [PI] J. PLANTE, *Foliations with measure preserving holonomy*, Ann. of Math. 102 (1975) 327-361.

- [Ra] G. RABY, *Invariance des classes de Godbillon-Vey par  $C^1$ -difféomorphismes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 38 (1988), 205-213.
- [Re] G. REEB, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, Act. Sc. et Ind. Hermann, Paris 1952.
- [RW] B.L. REINHART and J.W. WOOD, *A metric formula for the Godbillon-Vey invariant for foliations*, Proc. Amer. Math. Soc. 38 (1973) 427-430.
- [Sc] P. SCHWEITZER (editor), *Some problems in foliation theory and related areas*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 652, Springer, Berlin 1978, 247.
- [Su] D. SULLIVAN, *Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds*, Invent. Math. 36 (1976) 225-255.
- [Th1] W. THURSTON, *Non cobordant foliations of  $S^3$* , Bulletin A.M.S. 78 (1972) 511-514.
- [Th2] W. THURSTON, *Foliations and groups of diffeomorphisms*, Bull. A.M.S. 80 (1974), 304-307.
- [Ts1] T. TSUBOI, *On 2-cycles of  $B\text{Diff}(S^1)$  which are represented by foliated  $S^1$ -bundles over  $T^2$* , Ann. Inst. Fourier 31-2 (1981) 1-59.
- [Ts2] T. TSUBOI, *Foliated cobordism classes of certain foliated  $S^1$ -bundles over surfaces*, Topology 23 (1984), 303-310.
- [Ts3] T. TSUBOI, *On the homology of classifying spaces for foliated products*, Advanced Studies in Pure Math. 5, Foliations, 1985, 37-120.
- [Ts4] T. TSUBOI, *On the foliated products of class  $C^1$* , preprint.
- [Tsy] N. TSUCHIYA, *The Nishimori decompositions of codimension one foliations and the Godbillon-Vey classes*, Tohoku Math. J. 34 (1982) 343-365.

U.R.A. DO 746 C.N.R.S.

Ecole Normale Supérieure de Lyon  
46, allée d'Italie  
69364 LYON