BERNARD MALGRANGE

Transformation de Fourier géométrique

Astérisque, tome 161-162 (1988), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 692, p. 133-150

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1987-1988__30__133_0>

Séminaire BOURBAKI — Février 1988
40ème année, 1987-88, n° 692

TRANSFORMATION DE FOURIER GÉOMETRIQUE

par Bernard MALGRANGE

En gros, le problème est le suivant : considérons un système (S) d'équations aux dérivées partielles linéaires sur $\mathbb{C}^n$, à coefficients polynomiaux en $x = (x_1,\ldots,x_n)$; considérons de même le système $(\mathcal{F}S)$ obtenu par la transformation $\xi_i = \partial_{x_i}$, $x_i = -\partial_{\xi_i}$ (on pose $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$) ; on demande alors quelles relations existent entre les solutions holomorphes de (S) et celles de $(\mathcal{F}S)$; peut-on exprimer les unes au moyen des autres par des intégrales convenables ? Et aussi : dans quelle mesure existe-t-il une transformation de nature faisceautique permettant de passer du faisceau des solutions de (S) à celui des solutions de $(\mathcal{F}S)$? Une telle transformation serait alors qualifiée de "transformation de Fourier géométrique" ; d'où le titre de cet exposé.

La littérature sur les équations différentielles fait traditionnellement débuter ce type de questions avec Laplace, et sa méthode d'intégration des équations à coefficients linéaires affines (voir p. ex. [In]) : soit $P = \sum_0^m (a_k x + b_k)\partial_x^k$ un tel opérateur ; cherchons les solutions holomorphes de $Pf = 0$ sous la forme $f(x) = \int_\gamma g(\xi)e^{x\xi}\,d\xi$; par des dérivations sous le signe $\int$ et des intégrations par parties, on est amené à choisir g vérifiant $\hat{P}g = 0$, $\hat{P} = \Sigma(-a_k\partial_\xi + b_k)\xi^k$; mais $\hat{P}$ est d'ordre 1, donc ses solutions s'obtiennent par une intégration. Il ne reste plus alors qu'à choisir convenablement les chemins γ ; on montre ainsi que, "en général", on obtient toutes les solutions de P. Ce résultat fournit un grand nombre de formules intégrales pour les fonctions spéciales (p. ex., les fonctions de Bessel, les fonctions hypergéométriques confluentes, etc.), formules pour lesquelles je renvoie aux traités ad hoc.

Comme il arrive fréquemment, les difficultés se situent dans le passage qui va de "en général" à "toujours". Elles sont de deux sortes :

i) les problèmes de croissance à l'infini. On simplifie beaucoup la question en supposant que toutes les solutions (de P ou $\hat{P}$, cela revient au même), y sont à croissance au plus exponentielle. Pour cela, supposant P effectivement d'ordre m, on doit supposer $a_m \neq 0$, ou bien $a_m = \ldots = a_0 = 0$; dans ce dernier cas, l'équation est donc à coefficients constants.

ii) les problèmes provenant des points singuliers. Un exemple en est précisément donné par les équations à coefficients constants, auxquelles la méthode de Laplace ne semble pas s'appliquer : si $P = \Sigma b_k \partial_x^k$, on a $\hat{P} = \Sigma b_k \xi^k$ et $\hat{P}g = 0$ entraîne $g = 0$. En fait, Cauchy avait déjà vu dans ce cas comment s'en tirer : si l'on prend $g(\xi) = \frac{Q(\xi)}{\hat{P}(\xi)}$, $Q \in \mathbb{C}[\xi]$, et γ = un cercle contenant les zéros de $\hat{P}$, alors $f(x) = \int_\gamma g(\xi)\, e^{x\xi} d\xi$ est une solution car on a $Pf = \int_\gamma Q(\xi)\, e^{x\xi} d\xi = 0$; on les a toutes en prenant pour Q une base de $\mathbb{C}[\xi]/(\hat{P})$. En langage moderne, et en désignant par $\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$, ce qui intervient ici est donc le *conoyau* de $\mathcal{O} \xrightarrow{\hat{P}} \mathcal{O}$, tandis que le noyau est nul.

En fait, pour traiter la question systématiquement, il est indispensable de considérer le *complexe* lui-même, pris au sens des catégories dérivées. Cela explique que, jusqu'à une date récente, les progrès dans ce sujet aient été assez limités. Il faut d'abord citer l'extension par Poincaré des travaux de Laplace aux équations à coefficients polynomiaux (mais sans progrès réel sur les difficultés indiquées). Viennent ensuite les travaux de Birkhoff [Bi] : il montre, en principe, comment analyser les points singuliers irréguliers des équations différentielles linéaires par une succession de ramifications et de transformations de Fourier. Son travail est gâté par l'utilisation systématique d'un théorème faux, dit des "standard canonical forms", mais l'idée est la bonne et tout peut être récupéré. Il faut encore citer les travaux de Leray [Le] sur l'extension à plusieurs variables de la transformation de Laplace ; en fait, il s'agit chez Leray de transformation de Radon plutôt que de Fourier - Laplace ; le lien entre sa théorie et ce qui va être exposé ici n'est pas clair pour moi, et mériterait d'être élucidé.

1. CONSIDÉRATIONS ALGÉBRIQUES

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$, et E' son dual ; on désigne par $W(E)$ l'algèbre de Weyl de E , i.e. l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux sur E ; on a un isomorphisme $\mathcal{F} : W(E) \xrightarrow{\sim} W(E')$, qui est défini ainsi : si $x_1,\dots,x_n$ sont les coordonnées d'une base de E , et $\xi_1,\dots,\xi_n$ les coordonnées duales sur E' , on pose $\mathcal{F}x_i = -\partial_{\xi_i}$, $\mathcal{F}\partial_{x_i} = \xi_i$; cet isomorphisme ne dépend pas de la base choisie. On note $\bar{\mathcal{F}}$ l'isomorphisme inverse ; il est égal à "$\mathcal{F}$" suivi de la symétrie par rapport à l'origine.

Soit alors M un $W(E)$-module, par exemple à gauche, de type fini : l'isomorphisme $\mathcal{F}$ en fait un $W(E')$-module, qu'on note $\mathcal{F}M$.

Voici une interprétation de $\mathcal{F}$ due à Deligne - Katz - Laumon [Ka-L]. Désignons par p et p' les deux projections de $E \times E'$ et par σ sa forme bilinéaire canonique. On désigne encore par $\mathcal{M}$ le faisceau (algébrique) de $\mathcal{D}_E$-modules défini par M .

On copie la formule usuelle $\mathcal{F}f(\xi) = \int f(x)\, e^{-x\xi} dx$ et on considère le foncteur suivant

$$\mathcal{F}_* M = p'_*(p^* M \otimes e^{-\sigma})[n] .$$

Ici, p'_* et p^* désignent respectivement les images directes et inverses pour les $\mathcal{D}$-modules algébriques ; je renvoie pour leurs définitions à [Bo].

PROPOSITION (1.1) (Katz - Laumon).- *On a un isomorphisme (fonctoriel en* M *)* $\mathcal{F}_* M \simeq \mathcal{F}M$.

La démonstration peut se faire avec les sections globales, que je noterai avec les lettres droites correspondantes. On choisit des coordonnées $x = (x_1,\ldots,x_n)$ sur E et $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ sur E' , duales l'une de l'autre, et l'on note $x\xi$ le produit scalaire.

i) on a $p^*M = M \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\xi][-n]$, les variables x_i , ∂_{x_i} (resp. ξ_i , ∂_{ξ_i}) agissant sur M (resp. $\mathbb{C}[\xi]$) de la manière évidente.

ii) $p^*M \otimes e^{-\sigma}[n]$ est égal ensemblistement à $p^*M[n]$; l'action des x_i et celle des ξ_i est inchangée ; enfin, on pose

$$\partial_{x_i}(m \otimes e^{-\sigma}) = (\partial_{x_i} - \xi_i) m \otimes e^{-\sigma}$$

$$\partial_{\xi_i}(m \otimes e^{-\sigma}) = (\partial_{\xi_i} - x_i) m \otimes e^{-\sigma} .$$

iii) Enfin, p_* est le complexe de de Rham relatif (= par rapport aux variables x_i seulement), décalé de n vers la gauche.

Finalement, $\mathcal{F}_*M$ est donc le complexe de Koszul $K(\partial_{x_i}, M \otimes \mathbb{C}[\xi] \otimes e^{-\sigma})$, ou encore le complexe de Koszul $K(\partial_{x_i} - \xi_i , M \otimes \mathbb{C}[\xi])$. On vérifie facilement que la cohomologie de ce dernier complexe est nulle, sauf en degré 0 où $M \otimes 1$ est un supplémentaire du sous-espace des cobords ; d'où l'isomorphisme ensembliste $\mathcal{F}_*M \simeq M$.

Reste à voir que l'action de $W(E')$ est bien celle qu'on a annoncé. On a $\partial_{\xi_i}(m \otimes 1 \otimes e^{-\sigma}) = -x_i m \otimes 1 \otimes e^{-\sigma}$, donc ∂_{ξ_i} agit comme $-x_i$; d'autre part, on a $\partial_{x_i} m \otimes 1 \otimes e^{-\sigma} - m \otimes \xi_i \otimes e^{-\sigma} \in$ (cobords) , donc ξ_i agit comme ∂_{x_i} .

Remarque (1.2).- L'isomorphisme précédent n'est pas canonique : on a identifié sans précaution le complexe de de Rham relatif à un complexe de Koszul, ce qui nécessite le choix d'une "mesure de Haar" $dx \in \Lambda^n E'$. L'isomorphisme canonique est le suivant

$$\mathcal{F}_*M \simeq M \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^n E' .$$

Sous cette forme, la transformation de Fourier algébrique s'étend aux fibrés : soit $E \xrightarrow{\pi} Y$ un fibré vectoriel holomorphe de rang n sur une variété analytique complexe (lisse) Y ; soit $W(E)$ le faisceau sur Y des opérateurs différentiels holomorphes sur E, et polynomiaux dans les fibres ; et soit $\widetilde{W}(E) = \Lambda^n E' \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} W(E) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \Lambda^n E$ le faisceau analogue des opérateurs différentiels opérant sur les sections de $\pi^* \Lambda^n E'$. On vérifie alors (soit directement par cartes locales, soit en utilisant les raisonnements de (1.1)) qu'on a un isomorphisme $F : \widetilde{W}(E) \xrightarrow{\sim} W(E')$ et que, dans chaque trivialisation de E, cet isomorphisme est l'échange des variables de multiplication et de dérivation de la fibre. Il conviendrait de faire systématiquement la théorie dans ce contexte. Néanmoins, je ne le ferai pas, et me contenterai de quelques indications.

Remarque (1.3).- Soit $E \xrightarrow{j} \bar{E}$ la compactification projective de l'espace vectoriel E, et soient q et q' les deux projections de $\bar{E} \times E'$. En posant $N = p^*M \otimes e^{-\sigma}[n]$, on a $F_*M = p'_* N = q'_* j_* N$ (on écrit aussi j pour $j \times \mathrm{id}$).

On peut aussi définir $F_! M = q'_* j_! N$, avec $j_! = Dj_*D$, D le foncteur dualisant $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\cdot, \mathcal{D}_X)[\dim X]$ (qui transforme les modules à gauche en modules à droite ; je m'écarte un peu ici des notations de [Bo]). On a $j^* j_! N = N$, d'où une flèche $j_! N \longrightarrow j_* N$ et par conséquent une flèche $F_! \longrightarrow F_*$. On peut voir que ce sont des isomorphismes.

Démontrons-le dans le cas $n = 1$ (le cas général où n est quelconque, et plus généralement le cas des fibrés, se traitent de la même manière). Il suffit d'établir le résultat pour $M = W(E) = \mathbb{C}[x, \partial_x]$. Posons $\bar{E}^* = \bar{E} - \{0\}$, $E^* = E - \{0\}$; en prenant $y = x^{-1}$ comme coordonnée locale sur $\bar{E}^*$, on trouve

$$\Gamma(E^* \times E', p^*M)[1] = \Gamma(\bar{E}^* \times E', j_* p^* M)[1] = \mathbb{C}[y, y^{-1}, \xi, \partial_y, \partial_\xi] / (\partial_\xi) ;$$

on passe de là aux sections de j^*N en tensorisant par $e^{-x\xi} = e^{-\xi/y}$. Compte tenu de la formule

$$p(y, y^{-1}, \xi, \partial_y, \partial_\xi) m \otimes e^{-\xi/y} = p(y, y^{-1}, \xi, \partial_y - \frac{\xi}{y^2}, \partial_\xi + \frac{1}{y})(m \otimes e^{-\xi/y}) ,$$

on voit qu'on a

$$\Gamma(\bar{E}^* \times E', j_* N) = \mathbb{C}[y, y^{-1}, \xi, \partial_y, \partial_\xi] / (1 + y\partial_\xi) ;$$

notons ce module $\widetilde{N}$, et désignons par $\widetilde{N}'$ le sous-module $\mathbb{C}[y, \xi, \partial_y, \partial_\xi] / (1 + y\partial_\xi)$. L'assertion résulte facilement du lemme qui suit et, du fait qu'on a $D\widetilde{N}' = \mathbb{C}[y, \xi, \partial_y, \partial_\xi] / (1 + y\partial_\xi)_d$ [1], l'indice "d" signifiant qu'on a pris l'idéal à droite.

Lemme (1.4).- *On a* $\widetilde{N}' = \widetilde{N}$ (*En particulier,* $j_* N$ *est cohérent*).

Il suffit de voir que l'action de y sur $\widetilde{N}'$ est bijective ; il revient au même, par dualité, de démontrer que l'action (à droite) de $1 + y\partial_\xi$ sur $L = \mathbb{C}[y, \xi, \partial_y, \partial_\xi] / (y)_d$ est bijective. Or les éléments de L s'écrivent d'une manière et d'une seule $\Sigma \delta^k p_k(\xi, \partial_\xi)$ $(k \geq 0)$, avec $\delta^k \partial_y = \delta^{k+1}$, $\delta^k y = k\delta^{k-1}$.

En filtrant par "k" et en passant au gradué associé, on trouve qu'on a $gr(1+y\partial_\xi) = 1$. D'où le lemme.
[Les raisonnements qui précèdent peuvent s'interpréter comme un cas particulier de la théorie de la "spécialisation modérée" ; pour cette théorie, voir p. ex. [Sa]. Dans ce contexte, le raisonnement qui précède revient à dire que la b-fonction à l'infini de $j_*\mathcal{N}$ est égale à 1, donc que le "spécialisé modéré" est nul].

2. SOLUTIONS ET TRANSFORMATION DE FOURIER

Si X est une variété analytique complexe (lisse), de dimension n, et si M est un $\mathcal{D}_X$-module à gauche cohérent, on pose $\mathrm{Sol}\, M = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M,\mathcal{O}_X)[n]$; si M est un $\mathcal{D}_X$-module à droite cohérent, on pose $\mathrm{DR}M = M \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} \mathcal{O}_X$; les mêmes définitions s'appliquent au cas des complexes bornés à cohomologie cohérente ; et on a un isomorphisme $\mathrm{Sol}\, M = \mathrm{DR}(\mathrm{D}M)$.

Si maintenant X est une variété algébrique lisse définie sur $\mathbb{C}$, et M un $\mathcal{D}_X$-module à gauche cohérent, on note $\mathrm{Sol}\, M$ le complexe $\mathrm{Sol}\, M^{an}$ sur X^{an} ; définition analogue pour $\mathrm{DR}M$. *On ne considère jamais le faisceau des solutions algébriques*, qui ne semble pas avoir d'intérêt.

Soient alors E un fibré vectoriel de rang n sur $\mathbb{C}$, M un $W(E)$-module à gauche de type fini, et $\mathcal{M}$ le $\mathcal{D}_E$-module correspondant. On pose $\mathrm{Sol}\, M = \mathrm{Sol}\, \mathcal{M}$; on a évidemment, en notant $\mathcal{O}_{E^{an}}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur E : $\mathrm{Sol}\, M = R\mathcal{H}om_{W(E)}(M,\mathcal{O}_{E^{an}})[n]$. Le problème consiste à étudier les relations entre $G = \mathrm{Sol}\, \mathcal{M}$ et $\hat{G} = \mathrm{Sol}\, \mathcal{F}M$; pour ce faire, on part de (1.1) et (1.3), c'est-à-dire qu'on écrit

$$\mathcal{F}M = q_*^! \, j_*(p^*M \otimes e^{-\sigma})[n]$$

et qu'on essaie de suivre l'action des différentes opérations sur le foncteur "Sol". L'image réciproque ne pose pas de problème ; on a facilement $\mathrm{Sol}\, p^*M = p^*G[2n] (= p^!G)$. D'autre part, le produit tensoriel $\otimes e^{-\sigma}$ ne change pas "Sol", mais seulement les conditions de croissance à l'infini (on peut dire, si l'on veut, qu'il a pour effet de multiplier les fonctions holomorphes par $e^{-\sigma}$). Enfin, l'image directe propre $q_*^!$ commute à Sol ; voir p. ex. [Bo] ou [Me 2]. Toute la difficulté est donc concentrée dans l'immersion ouverte j.
Si $N = p^*M \otimes e^{-\sigma}[n]$ était holonome régulier, on obtiendrait $\mathrm{Sol}(j_*N)$ en prenant le prolongement par 0, $j_!(\mathrm{Sol}\, N)$. Mais ici N n'est pas régulier (ni même holonome en général) et il va falloir remplacer le prolongement par zéro par une variante "modérée".

Posons $Z = \bar{E} - E$, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{(\bar{E}\times E')^{an}}$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{(\bar{E}\times E')^{an}}$, et soit $\hat{\mathcal{O}}_{|Z}$ le complété formel de $\mathcal{O}$ le long de $Z \times E'$. On a le lemme suivant :

Lemme (2.1).- $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}((j_*N)^{an}, \hat{\mathcal{O}}_{|Z}) = 0$.

Ce lemme peut s'établir par un calcul analogue à (1.3) et (1.4). En fait, c'est un cas particulier du résultat général suivant : si Z est une hypersurface d'une variété analytique complexe X, d'équation $f = 0$, et si M est un $\mathcal{D}_X$-module cohérent, on a $\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M[f^{-1}], \hat{\mathcal{O}}_{|Z}) = 0$; voir [Ma 4].

On prolonge $\hat{\mathcal{O}}_{|Z}$ par zéro sur $\bar{E} \times E$, et on définit le "prolongement par zéro modéré" $j_{[!]}\mathcal{O}$ comme étant le complexe $[\underset{\bullet}{\mathcal{O}} \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{|Z}]$, le point étant mis sous le terme de degré zéro. Du lemme précédent résulte qu'on a

(2.2) $$\mathrm{Sol}\ j_*N = \mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}((j_*N)^{an}, j_{[!]}\mathcal{O})[2n] .$$

Remarquons aussi que, dans le second membre, on peut remplacer $(j_*N)^{an}$ par $\tilde{N}^{an}$, $\tilde{N}$ étant n'importe quel prolongement cohérent de N (en effet, si L est un $\mathcal{D}$-module cohérent à support contenu dans $Z \times E'$, on a $\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(L, j_{[!]}\mathcal{O}) = 0$).

Le complexe $j_{[!]}\mathcal{O}$ admet aussi les descriptions suivantes (le cas $n = 1$ est traité dans [Ma 2] ; le cas général est analogue) :

(2.3) Soit $\mathcal{P}^{k,\ell}$ le faisceau des formes différentielles de classe C^∞ sur $\bar{E} \times E'$, plates (= nulles ainsi que toutes leurs dérivées) sur $Z \times E'$. Alors $j_{[!]}\mathcal{O}$ est quasi-isomorphe au complexe de Dolbeault $(\mathcal{P}^{0,\bullet}, d'')$.

(2.4) Soit B_E (ou plus simplement B) l'éclaté réel de $\bar{E}$ le long de Z ; c'est simplement le compactifié en boule de E ; on emploiera les notations suivantes : $B \xrightarrow{\pi} \bar{E}$ est la projection ; on note r et r' les projections de $B \times E'$ sur les deux facteurs. Enfin, on pose $S = B - E$ et on note k l'injection $E \longrightarrow B$.

Soit $\mathcal{A}^{<0}$ le faisceau sur $\bar{B} \times E'$ défini ainsi : sur $E \times E'$, c'est $\mathcal{O}$; en $(x,\xi) \in S \times E'$, c'est l'ensemble des fonctions holomorphes sur $U \cap (E \times E')$, U un voisinage de (x,ξ), qui admettent à l'infini un développement asymptotique nul (= décroissant plus vite que toute puissance de $\|x\|^{-1}$). Alors, on a $j_{[!]}\mathcal{O} = \pi_*\mathcal{A}^{<0}$, en désignant par π_* l'image directe dérivée (N.B. *on omettra les* "R" *dans toute la suite*).

Revenons maintenant à notre problème : comme on l'a vu, la donnée de $G = \mathrm{Sol}\ M$ détermine $\mathrm{Sol}\ N$, et la donnée de $\mathrm{Sol}\ j_*N$ détermine $\mathrm{Sol}\ \mathcal{F}M$; mais $\mathrm{Sol}(j_*N)$ est donné par (2.2) et la *donnée* de $\mathrm{Sol}\ N$ *est insuffisante en général pour le déterminer : il faudra ajouter des données à l'infini ("conditions de croissance") sur* $\mathrm{Sol}\ M$.

Le reste de l'exposé est, au fond, un commentaire de cette assertion. Examinons d'abord le cas $M = W(E)$. Pour calculer $\mathrm{Sol}(j_*M)$, il est commode de passer par l'intermédiaire de $\mathcal{A}^{<0}$ et d'écrire $\mathrm{Sol}\ j_*N = \pi_*\Phi[2n]$, avec $\Phi = \mathrm{R}\mathcal{H}om_{W(E\times E')}(N, \mathcal{A}^{<0})$ [$W(E \times E')$ est ici considéré comme faisceau constant sur $B \times E'$; il opère sur $\mathcal{A}^{<0}$ parce que ce faisceau est stable par les dérivations grâce aux inégalités de Cauchy]. En prenant des coordonnées, on trouve

$N = \mathbb{C}[x,\xi,\partial_x,\partial_\xi] / (\partial_{\xi_i} + x_i)$. Par suite, Φ se représente par le complexe de Koszul $K(\partial_{\xi_i} + x_i\,,\, A^{<o})[-n]$. On vérifie facilement que sa cohomologie vit seulement en degré 0 , et que c'est le sous-faisceau de $A^{<o}$ formé des fonctions holomorphes de la forme $e^{-\sigma}f$, f indépendant de ξ . On écrit cela de la manière suivante (je rappelle que k est l'injection $E \times E' \longrightarrow B \times E'$) :

$$\Phi = (k_* p^* \mathcal{O}_{E^{an}} \otimes e^{-\sigma})^{<o} \quad . \tag{2.5}$$

En utilisant maintenant les formules $\mathrm{Sol}\, \mathcal{F}M = q^!_* \mathrm{Sol}(j_* N)$ et $\mathcal{F}M = W(E')$, on trouve finalement un isomorphisme

$$\mathcal{O}_{E'^{an}} = r^!_* \Phi[n] \quad . \tag{2.6}$$

De plus, dans cet isomorphisme, l'action de ξ_i (resp. ∂_{ξ_i}) sur $\mathcal{O}_{E'^{an}}$ provient de l'action de ∂_{x_i} (resp. $-x_i$) sur $\mathcal{O}_{E^{an}}$.

On voit enfin que l'isomorphisme en question provient par restriction de $A^{<o}$ à Φ du morphisme "trace", autrement dit, "intégration dans la fibre".

$$r^!_* A^{<o} = q^!_* j_{[!]} \mathcal{O} \longrightarrow q^!_* \mathcal{O} \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathcal{O}_{E^{an}}[-n] \quad .$$

[À noter qu'ici "Tr" n'est défini que modulo le choix d'un $dx \in \Lambda^n E'$; bien sûr, si on avait tout écrit canoniquement, comme il faudrait le faire pour un fibré, ce problème disparaîtrait.]

L'assertion précédente est un peu délicate. Elle se démontre en partant du fait que la flèche qui donne la commutation de l'image directe à Sol se définit au moyen de l'intégration dans la fibre (sur ce dernier point, voir [Sc] ou [Me 2]). Ce type d'assertions donne un sens précis à l'idée que "l'image directe est l'analogue pour les $\mathcal{D}$-modules de l'intégration dans la fibre" ; il est dommage que la littérature soit pratiquement muette sur ce thème.

Tout ce dont nous aurons besoin dans la suite tient dans la formule (2.6) et les assertions qui suivent. Pour passer de $W(E)$ à un M quelconque, il faut utiliser le foncteur $R\mathcal{H}om_{W(E)}(M,.)$. On calcule ce foncteur, soit en prenant une résolution libre de M , soit en prenant une résolution plate $L^\bullet$ de DM et en le représentant par $L^\bullet \underset{W(E)}{\otimes} .$; dans le cas des fibrés, où l'on n'a pas de résolution libre en général, c'est cette deuxième méthode qu'il faut utiliser. De cette manière, on déduit de (2.6) qu'on a

$$\mathrm{Sol}\, \mathcal{F}M = r^!_*\, R\mathcal{H}om_{W(E)}(M,\Phi)[2n] \quad , \tag{2.7}$$

et c'est donc le second membre de cette formule qu'il faudra calculer en fonction de $\mathrm{Sol}\, M$ et de conditions de croissance à l'infini.

Remarque (2.8).- On aurait pu partir de $\mathcal{F}_!$ au lieu de $\mathcal{F}_*$, ce qui nous aurait conduit à chercher les solutions de $j_! N$ (naturellement, on devra finalement trouver le même résultat à cause de (1.3)). Ici, au lieu de $j_{[!]}\mathcal{O}$, on doit considérer "l'image directe modérée" $j_{[*]}\mathcal{O}$, autrement dit le faisceau des fonctions méromorphes avec pôles sur $Z \times E'$; cela conduit à remplacer le faisceau $A^{<o}$ par le faisceau $A^{\leq o}$ des fonctions sectorielles à croissance modérée à l'infini, et à remplacer Φ par $(k_* p^* \mathcal{O}_{E^{an}} \otimes e^{-\sigma})^{\leq o}$. On vérifie immédiatement que ce faisceau est égal à Φ , comme il se doit : les deux conditions de croissance, appliquées à des fonctions de (x,ξ) de la forme $f(x)e^{-x\xi}$, équivalent à une décroissance exponentielle.

Remarque (2.9).- La formule (2.6) et ses annexes peuvent se démontrer de beaucoup de manières : celle qui a été adoptée ici n'est pas, de loin, la plus simple ni la plus élémentaire (voici un excellent thème pour les pourfendeurs d'abstractions ; je le leur offre gratis).

L'utilisation d'une résolution de Dolbeault relative, i.e. par rapport aux $\partial_{\bar{x}_i}$ seulement, montre que (2.6), avec ses compléments, peut encore se lire ainsi : tout $h \in \mathcal{O}_{E'^{an},a}$ peut s'écrire $h(\xi) = \int f(x)e^{-x\xi}dx \wedge d\bar{x}$, avec $f(x)e^{-x\xi} \in \mathcal{S}(E)$ pour ξ voisin de a ; de plus, cette représentation est unique modulo $\Sigma\, \partial_{\bar{x}_i} g_i$, les g_i possédant les mêmes propriétés de croissance que f (et les autres groupes de d" cohomologie fabriqués avec les mêmes fonctions sont nuls). Enfin, on peut remplacer dans cet énoncé $\mathcal{S}(E)$ par $\mathcal{S}'(E)$: ceci conduit à (2.7) au lieu de (2.6), et revient donc au même.

Ces résultats peuvent s'établir de façon tout-à-fait élémentaire ; voir [Ma 4]. Il est encore plus intéressant de noter que ce sont en fait des cas particuliers de théorèmes du type "Principe fondamental d'Ehrenpreis" ; comparer p. ex. avec [Ho 2], chapitre 15. Ce genre d'énoncés, qui peut se démontrer par d"-cohomologie avec conditions de croissance et dualité topologique, joue un rôle essentiel dans la théorie des équations aux dérivées partielles à coefficients constants ; *cf.* [Eh], [Ho 1], [Ma 1], [Pa].

Dans le contexte présent, ces méthodes pourront être employées quand on aura besoin de variantes de (2.6) avec des conditions de croissance à l'infini sur E' ; *cf.* § 4.

3. LE CAS HOMOGÈNE

L'idée est ici la suivante : d'après (2.7), pour calculer $\mathrm{Sol}\, \mathcal{F}M$ en $a \in E'$, il ne faut garder à l'infini que les "solutions" de M qui, une fois multipliées par e^{-xa} , sont à décroissance exponentielle. Si donc toutes les solutions de M sont faiblement croissantes et faiblement décroissantes, cette condition sera du type tout ou rien : "tout" aux points $x \in S$ où $\mathrm{Re}\, xa > 0$ (au sens défini ci-dessous), "rien" aux points où $\mathrm{Re}\, xa \leq 0$.

Je ne sais pas donner aux assertions précédentes un sens précis en toute généralité, excepté dans le cas $n = 1$: il faudrait pour cela disposer d'une théorie des catégories dérivées filtrées nettement plus compliquée que ce qui existe dans la littérature à l'heure actuelle[1]. Néanmoins, cela conduit à la construction suivante : avec les notations du § 2, définissons dans $B \times E'$ la partie $\{\mathrm{Re}\, x\xi \leq 0\}$ comme l'adhérence de la partie analogue de $E \times E'$, et soit $\{\mathrm{Re}\, x\xi > 0\}$ son complémentaire. Posons alors $L^+ = E \times E' \cup \{\mathrm{Re}\, x\xi > 0\}$, et définissons de même L^- ; ce sont des ouverts de $B \times E'$. Soit $\mathbb{C}_{L^+}$ le faisceau constant $\mathbb{C}$ sur L^+, prolongé par 0 à $B \times E'$.

Pour G faisceau de $\mathbb{C}$-modules sur E ou, plus généralement, objet de $D^b(E,\mathbb{C})$ [= complexes bornés de tels faisceaux], on pose alors

$$F^+G = r^!_*(k_* p^*G \otimes \mathbb{C}_{L^+})[n] . \tag{3.1}$$

On définit de même F^-G, avec L^+ remplacé par L^-.

Soit maintenant $\lambda = \Sigma x_i \partial_{x_i}$ le vecteur d'Euler de E ; posons la définition suivante :

DÉFINITION (3.2).- *Un* $W(E)$*-module à gauche* M *de type fini est dit monodromique si tout* $m \in M$ *vérifie une équation* $b(\lambda)m = 0$, *avec* $b \in \mathbb{C}[T]$, $b \neq 0$.

THÉORÈME (3.3).- *Si* M *est monodromique, on a un isomorphisme* $\mathrm{Sol}\, FM = F^+ \mathrm{Sol}\, M$.

La démonstration qui suit s'étend au cas des fibrés et des complexes bornés à cohomologie monodromique. Voir [B-M-V] pour une démonstration différente, sous des hypothèses un peu plus restrictives ; voir aussi [H-K].

Posons, pour simplifier, $\mathcal{O}_{E^{an}} = \mathcal{O}$; on a deux flèches :

$$(k_* p^* \mathcal{O} \otimes e^{-\sigma})^{<o} \longleftarrow (k_* p^* \mathcal{O} \otimes e^{-\sigma})^{<o} \otimes \mathbb{C}_{L^+} \longrightarrow k_* p^* \mathcal{O} \otimes \mathbb{C}_{L^+} .$$

Il s'agit de démontrer que ces flèches deviennent des quasi-isomorphismes lorsqu'on leur applique $R\mathcal{H}om_{W(E)}(M,.)$. En résolvant M par des modules de la forme $W(E)/b(\lambda)$, on se ramène au cas où M est de cette forme ; par récurrence, on se ramène à $b(\lambda) = \lambda - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Plaçons-nous par exemple au point $(\infty\mathbb{R}_+,0,\ldots,0) \in S$; par le changement de variables $y_1 = x_1$, $y_i = x_i/x_1$ $(i \geq 2)$, on a $\lambda = y_1 \partial_{y_1}$. Pour $\varepsilon > 0$, notons Σ_ε le secteur $\{|y_1| > \frac{1}{\varepsilon} ; |\arg y_1| < \varepsilon ; |y_i| < \varepsilon , i \geq 2\}$. Soit E l'espace des fonctions holomorphes sur un des Σ_ε, et E^- le sous-espace de celles de ces fonctions qui sont à décroissance exponentielle à l'infini ; l'énoncé à démontrer revient à dire ceci :

[1] Une telle notion devrait aussi contenir la dualité *vectorielle topologique*, qui joue ici un rôle important. Il en résulterait un sorite d'une lourdeur dépassant largement tout ce qui existe dans la littérature. Evidemment, un tel sorite ne devrait être développé que si l'on avait en vue des applications substantielles ; je ne crois pas que ce soit actuellement le cas.

Soit $a = (a_1,\dots,a_n) \in E'$; si $\operatorname{Re} a_1 \leq 0$, le complexe $[e^{a_1 y_1} E^{-} \xrightarrow{\lambda-\alpha} e^{a_1 y_1} E^{-}]$ est acyclique ; si $\operatorname{Re} a_1 > 0$, ce même complexe est quasi-isomorphe à $[E \xrightarrow{\lambda-\alpha} E]$. Le lecteur est invité à terminer la démonstration.

Question.- Il me paraît probable que le même résultat reste vrai lorsque, à l'infini, les éléments de M admettent une b-fonction "avec condition de degré sur l'équation fonctionnelle" du type considéré dans [K-K 2], th. 7.2. D'après un résultat difficile de [K-K 1], cela entraînerait que le résultat est vrai pour tout M holonome régulier.

Enfin, le résultat doit être vrai sous des conditions encore plus générales (en dimension 1 , la bonne condition est que toutes les solutions soient à croissance sous-exponentielle à l'infini, autrement dit que le polygone de Newton de M à l'infini ait ses pentes < 1).

(3.4) Le résultat précédent invite à étudier systématiquement la transformation (3.1). Disons qu'un faisceau sur E est homogène (resp. monodromique) s'il est constant (resp. localement constant) sur les orbites de l'action de $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{C}^*$). Disons plus généralement qu'un objet de $D^b(E,\mathbb{C})$ est homogène si ses faisceaux de cohomologie le sont , on notera $D^b_{hom}(E,\mathbb{C})$ la sous-catégorie pleine de $D^b(E,\mathbb{C})$ formée de ces objets. Définitions analogues avec "monodromique".

D'après (3.1), si nous partons d'un $G \in \operatorname{ob} D^b(E,\mathbb{C})$ quelconque, $\mathcal{F}^+G$ est homogène. Par suite, on ne peut espérer de théorie purement faisceautique, avec formule d'inversion, etc., que si G est lui-même pris homogène. Effectivement, on peut voir que $\mathcal{F}^+$ est une équivalence $D^b_{hom}(E,\mathbb{C}) \longrightarrow D^b_{hom}(E',\mathbb{C})$; l'inverse est donné par $\mathcal{F}^-$ ("formule d'inversion de Fourier"), et les propriétés fonctorielles que l'on peut attendre (commutation à la dualité, échange injection-projection, etc.) sont vraies. Cette théorie marche plus généralement dans le contexte des fibrés vectoriels réels sur un espace topologique raisonnable de dimension finie ; voir [Br], [B-M-V].

Dans le cas homogène, $\mathcal{F}^+$ admet un certain nombre d'autres descriptions, p. ex. la suivante : soit U un ouvert de E' ; posons $U^o = \{x \in E \ ; \ \operatorname{Re} x\xi \geq 0 \text{ pour tout } \xi \in U\}$ (= le "polaire" de U). Pour tout faisceau G de $\mathbb{C}$-modules sur E , on considère le préfaisceau sur E' donné par $U \longmapsto \Gamma_{U^o}G$; en passant aux faisceaux associés, puis aux complexes bornés, puis aux catégories dérivées, on obtient un foncteur $D^b(E,\mathbb{C}) \longrightarrow D^b_{hom}(E',\mathbb{C})$ dont la restriction à $D^b_{hom}(E,\mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathcal{F}^+$.

Sous cette forme, $\mathcal{F}^+$ apparaît comme un cas particulier d'une transformation introduite par Sato [S-K-K] en vue de l'analyse microlocale ; plus précisément, la "microlocalisation de Sato" peut s'exprimer comme une déformation au cône normal, suivie de "Fourier homogène" ; voir à ce sujet [K-S] (dans [S-K-K], le lien de la transformation introduite avec la transformation de Fourier usuelle n'apparaît pas explicitement ; cette transformation sert d'abord à fabriquer le "faisceau $\mathcal{C}$ " et apparaît comme une version cohomologique du théorème du "edge of the wedge").

(3.5) Revenons un instant au cas d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ (ce qui suit s'appliquerait plus généralement à un fibré vectoriel holomorphe). Soit $j : E \longrightarrow \bar{E}$ sa complétion projective.

Si un $W(E)$-module M est monodromique, il est facile de voir que $\mathrm{Sol}\ M$ est monodromique. Réciproquement, soit $G \in \mathrm{ob}\ D^b(E,\mathbb{C})$ un complexe tel que $j_* G$ soit à cohomologie constructible ; alors, par la "correspondance de Riemann" [K], [Me 1], il existe un complexe M de $W(E)$-modules à cohomologie holonome et régulière tel qu'on ait $\mathrm{Sol}\ M = G$, et M est unique à isomorphisme unique près dans $D^b(W(E))$; si G est de plus monodromique, on peut voir que M l'est aussi (= ses groupes de cohomologie le sont).

Dans cette correspondance, les modules (= complexes nuls, ou acycliques, sauf en degré 0) correspondent aux faisceaux pervers ; d'autre part, $\mathcal{F}$ échange les modules holonomes réguliers monodromiques sur $W(E)$ et $W(E')$ [à noter que ceci est faux si on ôte le mot "monodromique"]. Finalement, on voit que $\mathcal{F}^+$ transforme les faisceaux pervers monodromiques en faisceaux pervers monodromiques ; ce résultat peut aussi se démontrer directement sur les faisceaux, sans passer par la correspondance de Riemann.

Faute de place, je renvoie à la littérature et, en particulier, à [Br] pour les relations avec des questions telles que : variétés caractéristiques, cycles proches et cycles évanescents, transformation de Radon. Voir aussi dans [H-K] des applications à la théorie des groupes.

4. CONDITIONS DE CROISSANCE

Un peu curieusement, la transformation de Fourier homogène introduite au § 3 permet d'exprimer commodément les conditions de croissance à l'infini qui interviennent en relation avec la formule (2.6). Ceci systématise et étend à plusieurs variables des constructions de différents auteurs. Voir notamment [E 2], [Ko], [Ph 2].

On choisit sur E un système de coordonnées $x = (x_1,\dots,x_n)$; on note $\|x\|$ la norme hermitienne correspondante, et on écrit x en coordonnées polaires (ρ,ϑ) , $\rho = \|x\|$, $\vartheta = \frac{x}{\|x\|} \in S^{2n-1}$. Pour $r > 0$, soit $\mathcal{B}_E^{\leq r}$ ($\mathcal{B}$ pour "Borel") le faisceau *homogène* sur E suivant : en 0 , c'est l'espace des fonctions entières f d'ordre $\leq r$ au sens suivant : il existe A et $B > 0$ tels qu'on ait $|f(x)| \leq A \exp(B\|x\|^r)$.

(Attention : ce n'est pas tout-à-fait la définition habituelle.) En $a = (\rho^o, \vartheta^o) \neq 0$, c'est la limite inductive pour $\varepsilon \longrightarrow 0$ des fonctions holomorphes sur un secteur $\|\vartheta - \vartheta^o\| < \varepsilon$, $\rho > \frac{1}{\varepsilon}$, et d'ordre $\leq r$ dans ce secteur.
On définit $\mathcal{B}_E^{\leq -r}$ en le prenant nul en 0 et en imposant ailleurs une décroissance d'ordre $\geq r$: il existe $A > 0$ et $B > 0$ tels que, dans le secteur considéré, on ait $|f(x)| \leq A \exp(-B \|x\|^r)$. Une des nombreuses variantes du résultat est alors la suivante :

THÉORÈME (4.1).- *Pour* $r > 1$, *il existe un isomorphisme ("transformation de* Laplace - Borel") :

$$\mathcal{L} : \mathcal{F}^+(\mathcal{B}_E^{\leq 1} / \mathcal{B}_E^{\leq -r}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{E'}^{\leq r'} \quad \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1\right) .$$

Dans cet isomorphisme, l'action de $W(E)$ *sur le premier membre et celle de* $W(E')$ *sur le second se correspondent par* $\mathcal{F}$.

On a aussi les cas-limites suivants :

i) $\mathcal{F}^+ \mathcal{B}_E^{\leq 1} \simeq \mathcal{B}_{E'}^{\leq 1}$.

ii) $\mathcal{F}^+(\mathcal{B}_E^{\leq 1} / \mathcal{B}_E^{< -1}) \simeq \mathcal{B}_{E'}$: l'exposant " < -1 " signifie "décroissance plus rapide que toute exponentielle $\exp(-B\|x\|)$ " ; l'absence d'exposant au second membre signifie qu'aucune condition de croissance n'est imposée.

Ces résultats peuvent sembler un peu surprenant : la *croissance* d'ordre r' à l'infini sur E' correspond à la *décroissance* d'ordre r à l'infini sur E. Je signale qu'il existe aussi des formules analogues pour $\mathcal{F}^+ \mathcal{B}_E^{\leq r}$, $0 < r < 1$; mais elles échangent croissance (resp. décroissance) à l'infini et croissance (resp. décroissance) à l'origine, ce qui est plus habituel.

Je vais indiquer rapidement comme le cas ii) se rattache à (2.6) ; pour les autres formules, c'est analogue (le lecteur qui souhaiterait des détails en trouvera dans [Ma 4] pour le cas $n = 1$). Les choses se font en deux temps :

<u>1er temps</u> : Soit U un ouvert convexe de E' et soit $\mathcal{S}_U$ l'espace des fonctions $f \in C^\infty(E)$ qui possèdent la propriété suivante : pour tout $\xi \in U$, $(x \longmapsto f(x)e^{-x\xi}) \in \mathcal{S}(E)$; alors le complexe $K(\partial_{\bar{x}_i}, \mathcal{S}_U)$ est acyclique sauf en degré n ; en degré n, via l'application $f \longmapsto \int f(x)e^{-x\xi} dx \wedge d\bar{x}$, sa cohomologie est égale à $\Gamma(U, \mathcal{O}_{E'an})$.

Ceci est encore une variante du "principe fondamental d'Ehrenpreis" ; voir les références de la remarque (2.9). Bien sûr, pour traiter le cas général du théorème 4.1, il faut ajouter des conditions de croissance à l'infini sur U et établir les résultats analogues.

<u>2ème temps</u> : soit $a \in E'$, $a \neq 0$; écrivons $a = (\rho^o, \vartheta^o)$ et appliquons le résultat précédent aux enveloppes convexes U_ε des ouverts $\|\vartheta - \vartheta^o\| < \varepsilon$, $\rho > \frac{1}{\varepsilon}$;

posant $\mathcal{S}_{a\infty} = \varinjlim \mathcal{S}_{U_\varepsilon}$, on trouve que la cohomologie du complexe $K(\partial_{\bar{x}_i}, \mathcal{S}_{a\infty})$ est égale à $\mathcal{B}_{E',a}$ en degré 0 , et à 0 dans les autres degrés. En faisceautisant le résultat précédent sur B , on trouve ceci : soit $\widetilde{\mathcal{O}}_{a\infty}$ le faisceau sur B qui vaut $\mathcal{O}_{E^{an}}$ sur E , et qui est formé des fonctions à croissance exponentielle (resp. à décroissance plus rapide que toute exponentielle) au voisinage des points à l'infini x où $\mathrm{Re}\, x\, a > 0$ (resp. $\mathrm{Re}\, x\, a \leq 0$) ; alors $H^k(B, \widetilde{\mathcal{O}}_{a\infty}) = 0$ si $k \neq n$, et $H^n(B, \widetilde{\mathcal{O}}_{a\infty}) = \mathcal{B}_{E',a}$.

Reste à voir qu'on a $R\Gamma(B, \widetilde{\mathcal{O}}_{a\infty}) = \mathcal{F}^+(\mathcal{B}_E^{\leq r} / \mathcal{B}_E^{<-1})_a[-n]$. Soit $\mathcal{Z}_a$ la famille des cônes convexes fermés contenus sauf leur sommet dans $\mathrm{Re}\, x\, a > 0$; on déduit facilement de (3.4) que le second membre de la formule précédente s'écrit $R\Gamma_{\mathcal{Z}_a}(E, \mathcal{B}_E^{\leq 1} / \mathcal{B}_E^{<-1})$. L'égalité résulte alors d'un exercice d'"homogénéisation" des faisceaux que je ne détaille pas ; je passe aussi sous silence le cas $a = 0$.

5. LE CAS $n = 1$

Pour terminer, je vais indiquer comment on peut traiter le cas d'un $W(E)$-module *holonome* M sur un espace vectoriel E de dimension 1 . Je ne sais pas étendre ces résultats en dimension supérieure, ni aux fibrés vectoriels de rang 1 ; d'ailleurs, si on savait traiter ce dernier cas, on en déduirait facilement le cas général, par exemple en utilisant la variante pour $\mathcal{D}$-modules de la formule

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int e^{-t\tau}\, dt \int \delta(t - x\xi) f(x) dx_{|\tau=1} .$$

Je reprends les notations des § 1 et 2 ; en particulier $E \xrightarrow{j} \bar{E}$ désigne la compactification projective de E et $E \xrightarrow{k} B$ sa compactification en boule ; on pose aussi $\{\infty\} = \bar{E} - E$, $S = B - E$. Au voisinage de l'infini, $(j_* M)^{an}$ est un fibré vectoriel méromorphe à connexion ; on le décrit à la Deligne par le faisceau sur S de ses sections horizontales sectorielles, munies de conditions de croissance qui forment ce qu'on appelle une "structure de Stokes".

Rappelons de façon précise ce que cela signifie [Be], [Ma 3] :

i) Soit I le système local suivant sur S : au voisinage de ϑ , c'est l'ensemble des formes différentielles ramifiées $\alpha = \sum_{k \in \mathbb{Q}} \alpha_k x^k dx$ (somme finie) dans un petit secteur $\Sigma_{\vartheta,\varepsilon}$: $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$, $|\arg x - \vartheta| < \varepsilon$, modulo les termes où $k \leq -1$. Le système local I est muni d'une relation d'ordre locale partielle : $\alpha \leq_\vartheta \beta$ si $e^{\int \alpha - \beta}$ est à croissance modérée dans $\Sigma_{\vartheta,\varepsilon}$ pour un $\varepsilon > 0$.

ii) Soit V un système local de $\mathbb{C}$-vectoriels sur S ; une structure *de Stokes sur* V est définie par la donnée d'une famille indexée par I de sous-faisceaux V^α de V , possédant la propriété suivante :

(5.1) Pour tout $\vartheta \in S$, il existe une décomposition (non nécessairement unique) $V_\vartheta = \oplus V_{\alpha,\vartheta}$ telle qu'on ait, pour tout ϑ' voisin de ϑ : $V^\alpha_{\vartheta'} = \bigoplus_{\beta \leq_{\vartheta'} \alpha} V_{\beta,\vartheta}$.

De là résulte que la relation " $\alpha \leq_\vartheta \beta$ " entraîne $V_\vartheta^\alpha \subset V_\vartheta^\beta$; par ailleurs, on prendra garde au fait suivant : les V^α ne sont que localement des sous-faisceaux de V au sens usuel (ils sont indexés par un système local, et pas par un ensemble).

Si l'on a un fibré F sur $\bar{E}$ au voisinage de l'infini, muni d'une connexion méromorphe avec pôle à l'infini, on lui associe une structure de Stokes de la manière suivante : V est le faisceau sur S des sections horizontales de F dans des secteurs $\Sigma_{\vartheta,\varepsilon}$, ε petit (autrement dit, $V = k_* F^\nabla|S$, F^∇ le faisceau des sections horizontales de F) ; une section $f \in V_\vartheta$ appartient à V_ϑ^α si $e^{-\int\alpha} f$ est à croissance modérée au voisinage de la direction ϑ. La théorie des développements asymptotiques montre que la condition (5.1) est satisfaite, et qu'on a donc une structure de Stokes. On démontre que le foncteur ainsi obtenu "connexions méromorphes à l' ∞ " $\longrightarrow$ "structures de Stokes sur S " est une équivalence ("correspondance de Riemann généralisée").

Dans la situation présente, posons $G = \mathrm{Sol}\ M$; au voisinage de l'infini, G est acyclique sauf en degré -1 et $\mathcal{H}^{-1}G$ est le faisceau des sections horizontales de la connexion duale de $(j_*\mathcal{M})^{an}$; donc $k_*\mathcal{H}^{-1}G|S$ est naturellement muni d'une structure de Stokes (qui détermine $(j_*\mathcal{M})^{an}$ au voisinage de l'infini, d'après le résultat qu'on vient de rappeler) ; celle-ci peut encore se définir ainsi : soit $L^\bullet \longrightarrow M$ une résolution libre de M ; alors $\mathcal{H}^{-1}G$ est le noyau de l'application $\mathcal{H}om_{W(E)}(L^0,\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{W(E)}(L^{-1},\mathcal{O})$ (j'écris $\mathcal{O}$ pour $\mathcal{O}_{E^{an}}$), et la structure de Stokes est celle qui est donnée par la croissance de ses sections dans les secteurs $\Sigma_{\vartheta,\varepsilon}$.

Pour simplifier, on écrit encore G pour k_*G ; la donnée de départ est donc G, avec une structure de Stokes sur $V = \mathcal{H}^{-1}G|S$; notons aussi que $\mathcal{H}^k G = 0$, $k \neq 0,-1$ et que $\mathcal{H}^0 G$ est concentré en un nombre fini de points de E.

Montrons comment ces données déterminent $\mathrm{Sol}\ \mathcal{F}M$; notons encore, comme au § 2, r et r' les deux projections de $B \times E'$.

Soit Φ comme en (2.5) ; le faisceau $\mathcal{H}om_{W(E)}(M,\Phi)$ peut se décrire ainsi : aux points $(x,a) \in E \times E'$, c'est $(\mathcal{H}^{-1}G)_x$; en un point $(\vartheta,a) \in S \times E'$ c'est le sous-ensemble de $(\mathcal{H}^{-1}G)_\vartheta = V_\vartheta$ formé des f qui possèdent la propriété suivante : pour ξ voisin de a, $e^{-x\xi} f$ est à croissance modérée (*cf.* remarque 2.8) dans un secteur autour de la direction ϑ ; autrement dit, on doit avoir, pour ξ voisin de a : $f \in V_\vartheta^{\xi dx}$; par analogie avec (2.5), on note $(r^* \mathcal{H}^{-1}G \otimes e^{-\sigma})^{<0}$ le faisceau sur $B \times E'$ ainsi obtenu.

Par ailleurs, un théorème de Ramis - Sibuya [R-S], le "théorème des développements asymptomatiques à décroissance exponentielle" nous assure que, sur $S \times E'$, on a $\mathcal{E}xt^k_{W(E)}(M,\Phi) = 0$ pour $k \geq 1$. Finalement, on trouve que $R\mathcal{H}om_{W(E)}(M,\Phi)[1]$ possède les propriétés suivantes :

i) sur $E \times E'$, c'est r^*G ;

ii) sur $S \times E'$, il est acyclique sauf en degré -1 où sa cohomologie vaut $(r^* \mathcal{H}^{-1} G \otimes e^{-\sigma})^{<o}$.

On peut voir que ces deux conditions déterminent un complexe à isomorphisme unique près dans $D^b(B \times E', \mathbb{C})$, complexe qu'on notera $(r^*G \otimes e^{-\sigma})^{<o}$; la formule (2.7) donne donc le résultat suivant :

THÉORÈME (5.2).- *On a* $\text{Sol}\ \mathcal{F}M = r^!_*(r^*G \otimes e^{-\sigma})^{<o}\ [1]$.

On a donc résolu dans ce cas le problème posé au départ : calculer $\text{Sol}\ \mathcal{F}M$ en fonction de (Sol M) + (conditions de croissance à l'infini) .

(5.3) Les données de départ que nous avons prises ne suffisent pas pour construire la structure de Stokes à l'infini de $\mathcal{H}^{-1}\ \text{Sol}\ \mathcal{F}M$; celle-ci dépend aussi du comportement des solutions de M au voisinage des points singuliers.

On trouvera dans [Ma 4] une étude de cette question ; elle fait intervenir les espaces du type considéré en (4.1) ; pour avoir des résultats précis sur les développements asymptotiques et les structures de Stokes, il faut y ajouter des arguments du type "méthode de la phase stationnaire". Plus généralement, on trouvera dans cet article une étude de la "correspondance de Riemann généralisée" pour les modules holonomes à une variable, et de la question suivante : comment décrire directement les données géométriques associées par cette correspondance à $\mathcal{F}M$, à partir de celles qui sont associées à M ?

Je vais me contenter ici d'examiner un cas particulier auquel j'ai fait allusion dans l'introduction, à savoir le cas où toutes les solutions de M sont à croissance au plus exponentielle ; on peut voir facilement que cette condition est stable par $\mathcal{F}$: ceci se fait soit par voie algébrique, soit par voie analytique [utiliser les cas limites de (4.1)].

Hors d'un compact de E' , on pourra utiliser un argument du type "tout ou rien" comme au § 3 ; et, par conséquent, on aura, hors d'un compact :
$\text{Sol}\ \mathcal{F}M = \mathcal{F}^+G$, avec $\mathcal{F}^+$ défini par (3.1).
Cette formule s'explicite ainsi : pour $a \in E'$, $a \neq 0$, soit $\mathcal{Z}_a$ la famille de supports considérée à la fin du § 4, et soit $\mathcal{Z}'_a$ la famille des fermés qui se déduisent de $\mathcal{Z}_a$ par translation. Posons $\mathcal{C}_a = H^1_{\mathcal{Z}'_a}(E,\mathcal{O})$; plus explicitement, un élément de $\mathcal{C}_a$ est une fonction holomorphe dans $E - Z$, $Z \in \mathcal{Z}'_a$, modulo les fonctions entières. Posant $V = \mathcal{H}^{-1}\ \text{Sol}\ \mathcal{F}M$, on a, pour $|a| \gg 1$

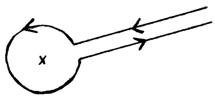
$$V_a = \text{Hom}_{W(E)}(M,\mathcal{C}_a) .$$

Ceci peut encore se préciser. Soit Δ une demi-droite issue de 0 et appartenant à $\mathcal{Z}_a$; pour $b \in E$, posons $\Delta_b = b + \Delta$; posons aussi $\mathcal{C}^{b,\Delta} = H^1_{\Delta_b}(E,\mathcal{O})$. Soient, d'autre part, $b_1,\ldots,b_\Delta$ les points singuliers de M , i.e. les points où $\mathcal{M}^{an}$ n'est pas fini sur $\mathcal{O}$. Alors si les demi-droites Δ_{b_i} ne se rencontrent pas, on montre qu'on a une décomposition en somme directe

$$V_a = \oplus \operatorname{Hom}_{W(E)}(M, \mathcal{C}^{b_i,\Delta}) \qquad (|a| \gg 1) \ . \tag{5.4}$$

Il est naturel d'appeler "hyperfonctions" les éléments de $\mathcal{C}^{b,\Delta}$ (dans le cas $b = 0$, $\Delta = \mathbb{R}_+$, ce sont les hyperfonctions de Sato habituelles, à support dans $\mathbb{R}_+$). Cela nous dit donc que les *solutions* (au sens usuel) de FM correspondent aux *hyperfonctions solutions* de M . Les solutions usuelles donnent, en faisant des coupures sur les Δ_{b_i} , des hyperfonctions solutions, mais on ne les obtient pas toujours toutes ainsi, d'où le canular signalé au point ii) de l'introduction.

Un élément de $\mathcal{C}^{b_i,\Delta}$ se représente par une fonction holomorphe dans $U - \Delta_{b_i}$, modulo les fonctions holomorphes dans U (U , un voisinage ouvert de Δ_{b_i}) ; pour calculer V_a , il suffit de considérer celles de ces fonctions qui se prolongent analytiquement à $\Delta_{b_i} - \{b_i\}$ "des deux côtés" (la différence des deux déterminations sur Δ_{b_i} donne alors une solution usuelle). Si f est un représentant d'une telle solution hyperfonction, la solution correspondante de FM est donnée par $g(\xi) = \int_\gamma f(x)e^{-x\xi}dx$, γ le chemin qu'on pense



On en déduit facilement que le développement asymptotique à l'infini de g dans les directions $|\arg \Delta + \vartheta| < \frac{\pi}{2}$ admet comme facteur exponentiel $e^{\int\alpha}$, avec $\alpha = -b_i d\xi +$ (termes d'ordre inférieur). On voit donc que la formule (5.4) sépare sur le demi-cercle $|\arg \Delta + \vartheta| < \frac{\pi}{2}$ les formes α dont les parties principales $-b_i d\xi$ diffèrent ; ensuite, en faisant tourner Δ , on obtient le "1er niveau" de la structure de Stokes de V ; on conçoit que l'on puisse continuer l'analyse...

Faute de place, je ne peux pas parler de tous les développements auxquels ce genre d'idées donne lieu ; je me contenterai de renvoyer à [Ph 1] pour une extension à plusieurs variables, et surtout aux travaux d'Écalle sur les fonctions résurgentes [É 1] pour des extensions aux équations différentielles non linéaires et à toutes sortes d'autres "objets locaux".

BIBLIOGRAPHIE

[B-M-V] J.-L. BRYLINSKI, B. MALGRANGE, J.-L. VERDIER - *Transformation de Fourier géométrique* I, C.R. Acad. Sc. 294 (1983) 55-58 ; II, C.R. Acad. Sc. 303 (1986) 193-198.

[Be] D. BERTRAND - *Travaux récents sur les points singuliers des équations différentielles*, Sém. Bourbaki 1978-79, exposé n° 538, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 770 (1980), 228-243.

[Bi] G.D. BIRKHOFF - *The generalized Riemann problem for differential equations*, Proc. Amer. Arts Sc. 49 (1913) 531-568 (aussi dans "Oeuvres complètes").

[Bo] A. BOREL et al. - *Algebraic D-Modules*, Perspect. in Math. n° 2, Academic Press (1987).

[Br] J.-L. BRYLINSKI - in *Géométrie et analyse microlocale*, Astérisque 140-141 (1986).

[É 1] J. ÉCALLE - *Les fonctions résurgentes*, tomes I à III, Publications mathématiques d'Orsay (1981-1985).

[É 2] J. ÉCALLE - *L'accélération des fonctions résurgentes*, manuscrit (1987).

[Eh] L. EHRENPREIS - *Fourier analysis in several complex variables*, Wiley-Interscience (1970).

[H-K] R. HOTTA, M. KASHIWARA - *The invariant holonomic system on a semisimple Lie algebra*, RIMS, Kyoto (1983).

[Ho 1] L. HÖRMANDER - *An introduction to complex analysis in several variables*, Van Nostrand, Princeton (1966).

[Ho 2] L. HÖRMANDER - *The analysis of linear partial differential operators* II, Springer-Verlag (1983).

[In] E.L. INCE - *Ordinary differential equations* 1926, Dover, New York (1956).

[K] M. KASHIWARA - *The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems*, Public RIMS, Kyoto Univ. 20 (1984) 319-365.

[K-K 1] M. KASHIWARA, T. KAWAI - *Second microlocalisation and asymptotic expansions*, Springer-Verlag, Lect. Notes in Physics 126 (1980) 21-76.

[K-K 2] M. KASHIWARA, T. KAWAI - *Microlocal analysis*, Public. RIMS, Kyoto Univ. 19 (1983) 1003-1032.

[K-S] M. KASHIWARA, P. SCHAPIRA - *Microlocal study of sheaves*, Astérisque 128 (1985).

[Ka-L] N.M. KATZ, G. LAUMON - *Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles*, Publ. Math. I.H.E.S. 62 (1986) 361-418.

[Ko] H. KOMATSU - *Laplace transforms of hyperfunctions. Another foundation of the Heaviside operational calculus*, preprint (1987).

[Le] J. LERAY - *Problème de Cauchy* IV, Bull. Soc. Math. Fr 90 (1962) 39-156.

[Ma 1] B. MALGRANGE - *Systèmes différentiels à coefficients constants*, Sém. Bourbaki 1962-63, exposé n° 246, Benjamin (1966).

[Ma 2] B. MALGRANGE - *Remarques sur les équations différentielles à points singuliers irréguliers*, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 712 (1979) 77-86.

[Ma 3] B. MALGRANGE - *La classification des connexions irrégulières à une variable*, in Séminaires E.N.S. 1979-1982, Progress in Mathematics, Birkhäuser (1983).

[Ma 4] B. MALGRANGE - *Systèmes holonomes à une variable*, livre en préparation.

[Me 1] Z. MEBKHOUT - *Une équivalence de catégories et une autre équivalence de catégories*, Compositio Math. 51-1 (1984) 55-68.

[Me 2] Z. MEBKHOUT - Livre sur les D-modules à paraître.

[Pa] V. PALAMODOV - *Linear differential operators with constant coefficients*, Edition russe : Nauka, Moscou (1967) ; traduction anglaise : Springer-Verlag (1970).

[Ph 1] F. PHAM - *Transformées de Laplace des microsolutions de systèmes holonomes*, l'Enseignement math. 30 (1984) 57-84.

[Ph 2] F. PHAM - *Resurgence, quantized canonical transformations and multi-instanton expansions*, preprint (1987).

[R-S] J.-P. RAMIS, Y. SIBUYA - *Hukukara domains and fundamental existence and uniqueness theorems for asymptotic solutions of Gevrey type*, à paraître.

[S-K-K] M. SATO, T. KAWAI, M. KASHIWARA - *Hyperfunctions and pseudo-differential equations*, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 287 (1973) 265-529.

[Sa] C. SABBAH - D-*modules et cycles évanescents (d'après B. Malgrange et M. Kashiwara)*, Géométrie algébrique et applications, Travaux en cours, 24, Hermann (1987) 53-98.

[Sc] J.-P. SCHNEIDERS - *Dualité pour les modules différentiels*, Thèse, Université de Liège (1986-87).

Bernard MALGRANGE

Université de Grenoble I
Laboratoire de Mathématiques
associé au CNRS n° 188
Institut Fourier
B.P. 74
F-38402 SAINT-MARTIN-D'HERES CEDEX